中華民國第56屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

佳作

030424

任給n個正整數邊長可形成的三角形數及其由最少至最多數目歷程討論

學校名稱：新竹市立香山高級中學(附設國中)

作者：	指導老師：
國三 陳嘉佑 國三 徐晧偉	胡忠澤

關鍵詞：Trilateral unequal triangle、
Isosceles triangle

摘要

在本篇文章中我們將討論任給 n 個正整數邊長可形成的三角形數目，以及由最少至最多數目的例子建構歷程，而討論這個問題也牽涉到在一線上建構不同的圓，利用不同的圓及圓心之間的關係來討論出例子建構歷程，也利用幾何關係證明出一些相關定理。

壹、 研究動機

國二在第四冊第三章學到三角形任兩邊和必定大於第三邊，任兩邊差又必定小於第三邊這個規則，剛好在數學社團上到高中數學排列組合的簡單概念，我們提出這個問題與社團指導老師討論，本以為這是一個簡單的排列組合問題，但著手研究後發現沒這麼容易，尤其是要證明形成的三角形數目從最少到最多的例子建構歷程遇到很大的困難，不過最後利用幾何概念讓我們順利討論出例子建構歷程。

貳、 研究目的

一、探討當給定三角形 n 種正整數邊長時，可以形成三角形的最少數目與最多數目。

二、探討當給定三角形 n 種正整數邊長時，形成三角形的數目由最少到最多中間數目對應例子的建構歷程與對應的幾何歷程討論。

三、探討形成三角形數目由最少到最多變化歷程中的一些規則。

參、 研究設備及器材

紙、筆、電腦、Geogebra。

肆、 研究過程或方法

一、定義:在本文中，我們將三邊不等長的三角形(Trilateral unequal triangle)簡稱為 u-triangle， 將等腰三角形(Isosceles triangle)簡稱為 i-triangle，三角形 7-6-4 表示三邊長分別為 7 單位、6 單位、4 單位的三角形，邊長為未知數時省略符號 - 連結，即三角形 $a_2a_2a_2$ 表示三邊長皆為 a_2 單位的正三角形。

在定理 1 中，我們用到樹狀圖的概念，其中最大邊為 a_1 時能對到 n 個三角形數目，再來最大邊為 a_2 時能對到(n-1)個，以此類推推出規律。

二、定理 1: 給定 n 種正整數邊長滿足 $a_1 \geqq 2^1 a_2 \geqq 2^2 a_3 \geqq 2^3 a_4 \geqq \cdots \geqq 2^{n-1} a_n$ 時，形成的三角形數最少有 1+2+3+⋯+n 個。

證明:

(1) 最長邊長為 a_1 時: 因為 k=1,2,3,⋯,n，不等式 $a_1+a_k>a_1$ 必定成立，所以形成的三角形有 $a_1a_1a_1$、$a_1a_1a_2$、$a_1a_1a_3$、⋯、$a_1a_1a_n$ 共 n 個。

(2) 最長邊長為 a_2 時: 因為 k=2,3,4,⋯,n，不等式 $a_2+a_k>a_2$ 必定成立，所以形成的三角形有 $a_2a_2a_2$、$a_2a_2a_3$、$a_2a_2a_4$、⋯、$a_2a_2a_n$ 共 n-1 個。

(3) 依此類推，可得最長邊長為 a_n 時共 1 個。

(4) 如果 $i>m\geqq k$，則不等式 $a_m+a_k\leq 2a_m\leq a_i$ 成立，所以其他的 u-triangle 及 i-triangle 都不會形成。

(5) 由(1)~(4)可得形成的三角形共 1+2+3+⋯+n 個。

接下來我們要討論的是最多的情況

在定理 2 中，我們用到樹狀圖的概念，其中最大邊為 a_1 時能對到 1+2+3+⋯+n 個三角形數目，再來最大邊為 a_2 時能對到 1+2+3+⋯+(n-1)個，以此類推推出規律。

三、定理 2: 給定 n 種正整數邊長 $a_1>a_2>a_3>\cdots>a_n$ 且滿足 $2a_n>a_1$ 時，形成的三角形數最多有 1+(1+2)+(1+2+3)+⋯+(1+2+3+⋯+n)個。

證明:

(1) 因為 $2a_n>a_1$ 所以 $1\leq i\leq j\leq k\leq n$ 時，$a_i+a_j\geqq a_n+a_n>a_1\geqq a_k$ 所以所有三角形都可以形成。

(2) 最長邊長為 a_1 時: 形成的三角形有

$a_1a_1a_1$ $a_1a_1a_2$ $a_1a_1a_3$ $a_1a_1a_4 \cdots a_1a_1a_n$(共 n 個)，

$a_1a_2a_2$ $a_1a_2a_3$ $a_1a_2a_4 \cdots a_1a_2a_n$(共 n-1 個)，

$a_1a_3a_3$ $a_1a_3a_4 \cdots a_1a_3a_n$(共 n-2 個)，

依此類推，

$a_1a_{n-1}a_{n-1}$ $a_1a_{n-1}a_n$(共 2 個)，

$a_1a_na_n$(共 1 個)，

所以當最大邊長為 a_1 時，共有 1+2+3+⋯+n 個。

(3) 當最大邊長為 a_2 時，形成的三角形有

$a_2a_2a_2$ $a_2a_2a_3$ $a_2a_2a_4$ $a_2a_2a_5\cdots a_2a_2a_n$(共 n-1 個)，

$a_2a_3a_3$ $a_2a_3a_4$ $a_2a_3a_5\cdots a_2a_3a_n$(共 n-2 個)，

$a_2a_4a_4$ $a_2a_4a_5\cdots a_2a_4a_n$(共 n-3 個)，

依此類推，

$a_2a_na_n$(共 1 個)，

故當最大邊長為 a_2 時，共有 1+2+3+⋯+(n-1)個。

(4) 依此類推，當最大邊長為 a_n 時形成的三角形為 $a_na_na_n$(共 1 個)。

(5) 由(1)~(4)可知，當邊長符合 $2a_n>a_1$ 時，共成立 1+(1+2)+(1+2+3)+(1+2+3+4)+⋯+(1+2+3+⋯+n)個。

我們將上述的研究成果統整成例 1。

四、例 1: 由下表可看出給定正整數邊長種類數與形成最少與最多三角形數目之間對應關係。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
最少	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
最多	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220

如給定四種邊長 14、11、8、6 時，會成立的三角形如下:

14-14-14、14-14-11、14-14-8、14-14-6、14-11-11、14-11-8、14-11-6、14-8-8，

11-11-11、11-11-8、11-11-6、11-8-8、11-8-6、11-6-6，

8-8-8、8-8-6、8-6-6、

6-6-6，共 18 個。

接下來我們要討論的是定理 3，也是我們困擾最久的問題，一開始的我們百思不得其解，幸好有一次我們在討論段考題目的時候靈光一現，想出一個可以嘗試的方法，最後再加上幾何圖形概念輔助後將此方法完備。

五、定理 3: 給定 n 種正整數邊長 $a_1>a_2>a_3>\cdots>a_n$ 時，可形成的最少至最多三角形數目中間所有的數目都會有對應的例子。

證明:

(1) 在證明中我們會用到下述方法:

令 $a_n+2^0=a_{n-1}$、$a_{n-1}+2^1=a_{n-2}$、$a_{n-2}+2^2=a_{n-3}$、$a_{n-3}+2^3=a_{n-4}$、…、$a_2+2^{n-2}=a_1$ 且 $a_n=2^{n-1}+1$，滿足此條件則 $a_n+1+2+2^2+\cdots+2^{n-2}=a_1 \Rightarrow a_n+2^{n-1}-1=a_1$ 可得 $2a_n=2^n+2>2^{n-1}+1+2^{n-1}-1=a_1$，再將 a_x(變數)由 $a_x=2a_1$ 漸漸變小，則形成的三角形數目將依照規律漸漸變多。

(2) 給一種邊長時，形成的三角形只有 1 個($a_1a_1a_1$)，即最少與最多的三角形數目都只有一個。

(3) 給定二種邊長時，依(1)的方法代入 $a_1=2^{1-1}+1=2$、$a_x=2a_1=4$:

Step 1: $a_x=4$、$a_1=2$ 形成的三角形有 3 個(4-4-4、4-4-2、2-2-2)。

Step 2: 將 a_x 變小成 $a_x=3$、$a_1=2$，這樣所形成的三角形共有 4 個(3-3-3、3-3-2、3-2-2、2-2-2)。

(4) 給定三種邊長時，我們將(3)中 Step 1 的數值依序代入 $a_1=4$、$a_2=2$:

Step 1: $a_x=2a_1=8$、$a_1=4$、$a_2=2$，形成的三角形數目為最少(6 個)。

Step 2: 將(3)中 Step2 的數值依序代入 $a_1=3$、$a_2=2$，則 $a_x=2a_1=8$、$a_1=3$、$a_2=2$ 形成的三角形數目為 7 個(多 1 個 i-triangle)。

Step 3: 接下來依(1)的方法代入 $a_2=2^{2-1}+1=3$、$a_1=a_2+1=4$、$a_x=2a_1=8$ 形成的三角形數目為 7 個。

Step 4: 接下來將 a_x 漸漸變小，$a_x=7$、$a_1=4$、$a_2=3$ 形成的三角形數目為 8 個(多 1 個 $a_xa_1a_1$ i-triangle)。

Step 5: $a_x=6$、$a_1=4$、$a_2=3$ 形成的三角形數目為 9 個(多 1 個 $a_xa_1a_2$ u-triangle)。

Step 6: $a_x=5$、$a_1=4$、$a_2=3$ 形成的三角形數目為 10 個(多 1 個 $a_xa_2a_2$ i-triangle)。

(5) 給定四種邊長時，我們將(4)中 Step 1 的數值依序代入 $a_1=8$、$a_2=4$、$a_3=2$:

Step 1: $a_x=2a_1=16$、$a_1=8$、$a_2=4$，$a_3=2$ 形成的三角形為最少(10 個)。

Step 2: 將(4)中 Step 2 的數值依序代入 $a_1=8$、$a_2=3$、$a_3=2$，則 $a_x=2a_1=16$、$a_1=8$、$a_2=3$，$a_3=2$ 形成的三角形為 11 個。

Step 3: 將(4)中 Step 4 的數值依序代入 $a_1=7$、$a_2=4$、$a_3=3$，則 $a_x=2a_1=16$、$a_1=7$、$a_2=4$，$a_3=3$ 形成的三角形為 12 個。

Step 4: 將(4)中 Step 5 的數值依序代入 $a_1=6$、$a_2=4$、$a_3=3$。$a_x=2a_1=16$、$a_1=6$、$a_2=4$，$a_3=3$ 形成的三角形為 13 個。

Step 5: 將(4)中 Step 6 的數值依序代入 $a_1=5$、$a_2=4$、$a_3=3$。$a_x=2a_1=16$、$a_1=5$、$a_2=4$，$a_3=3$ 形成的三角形為 14 個，

Step 6: 接下來依(1)的方法代入 $a_3=2^{3-1}+1=5$、$a_2=a_1+1=6$、$a_1=a_2+2=8$、$a_x=2a_1=16$ 形成的三角形數目為 14 個。

Step 7: 接下來將 a_x 漸漸變小，$a_x=15$、$a_1=8$、$a_2=6$、$a_3=5$ 形成的三角形數目為 15 個(多 1 個 $a_xa_1a_1$ i-triangle)。

Step 8: $a_x=13$、$a_1=8$、$a_2=6$、$a_3=5$ 形成的三角形數目為 16 個(多 1 個 $a_xa_1a_2$ u-triangle)。

Step 9: $a_x=12$、$a_1=8$、$a_2=6$、$a_3=5$ 形成的三角形數目為 17 個(多 1 個 $a_xa_1a_3$ u-triangle)。

Step 10: $a_x=11$、$a_1=8$、$a_2=6$、$a_3=5$ 形成的三角形數目為 18 個(多 1 個 $a_xa_2a_2$ i-triangle)。

Step 11: $a_x=10$、$a_1=8$、$a_2=6$、$a_3=5$ 形成的三角形數目為 19 個(多 1 個 $a_xa_2a_3$ u-triangle)。

Step 12: $a_x=9$、$a_1=8$、$a_2=6$、$a_3=5$ 形成的三角形數目為 20 個(多 1 個 $a_xa_3a_3$ i-triangle)。

(6) 依此類推，給定 n 種邊長時由最少至最多中間所有的數目都會有對應的例子。

六、例 2: 從定理 3 的證明中發現了依照建構歷程 u-triangle 與 i-triangle 形成的順序有規律，其規律如下表：

n	最少數目	由最少至最多 u-triangle 與 i-triangle 形成的順序	歷程中增加的三角型數目	最多數目
2	3	i	1	4
3	6	i-iui	1+(2+1)	10
4	10	i-iui-iuuiui	1+(2+1)+(3+2+1)	20
5	15	i-iui-iuuiui- iuuuiuuiui	1+(2+1)+(3+2+1)+(4+3+2+1)	35
6	21	i-iui-iuuiui- iuuuiuuiui-iuuuuiuuu iuuiui	1+(2+1)+(3+2+1)+(4+3+2+1)+ (5+4+3+2+1)	56
7	28	i-iui-iuuiui- iuuuiuuiui-iuuuuiuuu iuuiui-iuuuuuiuuuuiuuuiuuiui	1+(2+1)+(3+2+1)+(4+3+2+1)+ (5+4+3+2+1)+(6+5+4+3+2+1)	84

附:在表格中，i 表示 i-triangle；u 表示 u-triangle。

上述圖表可與定理 1 與定理 2 成對照，當 n=2 時由定理 1 可知最少數目為(1+2)且歷程中所增加的三角形數為 1，形成定理 2 中所提到的最多數目 1+(1+2)。當 n=3 時由定理 1 可知最少數目為(1+2+3))且歷程中所增加的三角形數為 1+(2+1)，形成定理 2 中所提到的最多數目 1+(1+2)+(1+2+3)。

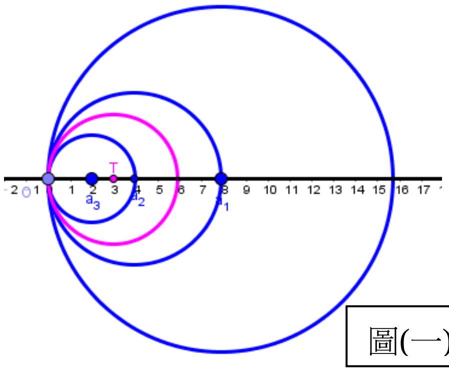
接下來我們利用幾何的觀念解決本文中定理 3 的問題，這個問題牽涉到在一線上建構不同的圓，利用不同的圓及圓心之間的關係來討論出例子建構歷程

七、例 3: 下述圖形將討論當給定 3 種與 4 種正整數邊長時，形成三角形數目由最少到最多歷程的幾何變化。

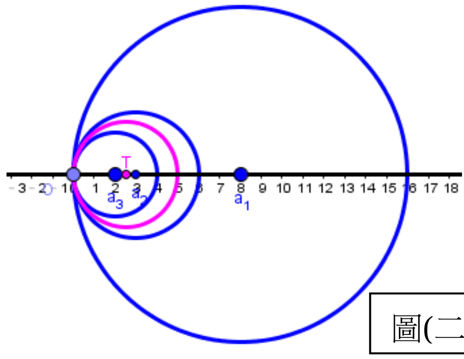
(一) 在下述的圖中我們在數線上，分別以正整數邊長a_n(n=1~3)為圓心及半徑畫圓，則會交數線於0及$2a_n$兩點。再以$(a_2+a_3)/2=T$為圓心及半徑畫圓(紫線圓)，則會交數線於0及a_2+a_3兩點。

1. 在圖一中為定理 3 證明(4)中的 Step 1，點 a_1 在圓 a_2 上且點 a_2 在圓 a_3 上且點 a_1 在圓 T 外，所以 $2a_2=a_1$ 且 $2a_3=a_2$ 且 $a_2+a_3<a_1$，所以不會形成 $a_1a_2a_2$、$a_2a_3a_3$、$a_1a_2a_3$ 三角形，故形成的三角形數目為最少 6 個。

2. 在圖二中為定理 3 證明(4)中的 Step 2，點 a_1 在圓 a_2 外且點 a_2 在圓 a_3 內且點 a_1 在圓 T 外，所以 $2a_2<a_1$ 且 $2a_3>a_2$ 且 $a_2+a_3<a_1$，所以多 1 個 i-triangle($a_2a_3a_3$ 三角形)，故形成的三角形數目為 7 個。



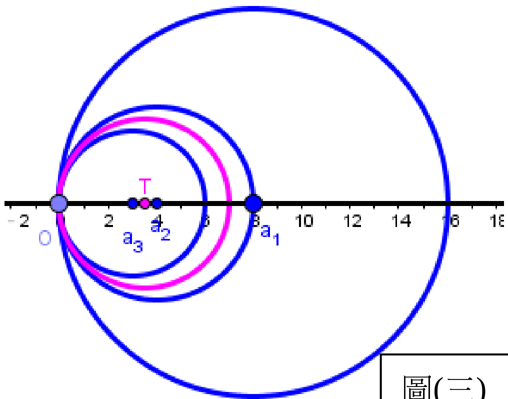
圖(一)



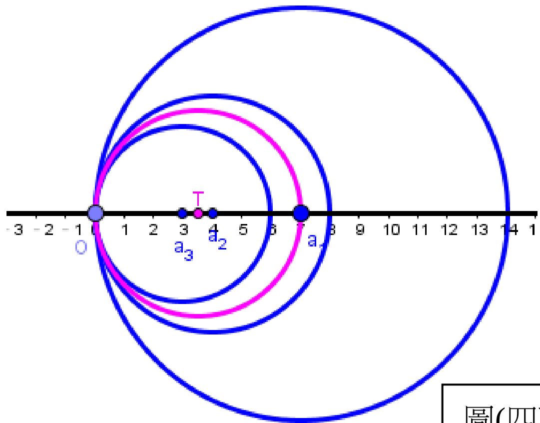
圖(二)

3. 在圖三中為定理 3 證明(4)中的 Step 3，點 a_1 在圓 a_2 上且點 a_2 在圓 a_3 內且點 a_1 在圓 T 外，所以 $2a_2=a_1$ 且 $2a_3>a_2$ 且 $a_2+a_3<a_1$，所以不會增加新的三角形，故形成的三角形數目還是 7 個。

4. 在圖四中為定理 3 證明(4)中的 Step 4，點 a_1 在圓 a_2 內且點 a_2 在圓 a_3 內且點 a_1 在圓 T 上，所以 $2a_2>a_1$ 且 $2a_3>a_2$ 且 $a_2+a_3=a_1$，所以多 1 個 i-triangle($a_1a_2a_2$ 三角形)，故形成的三角形數目為 8 個。



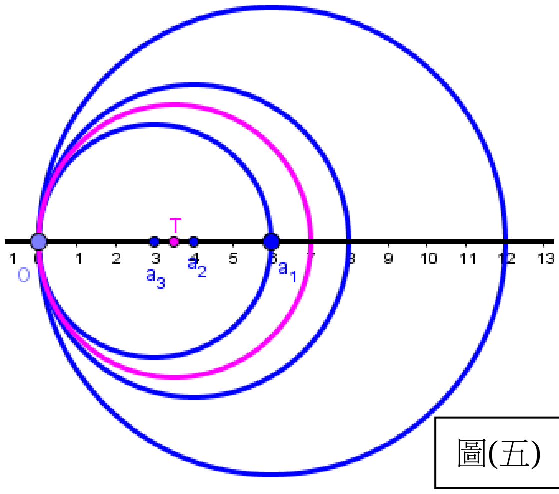
圖(三)



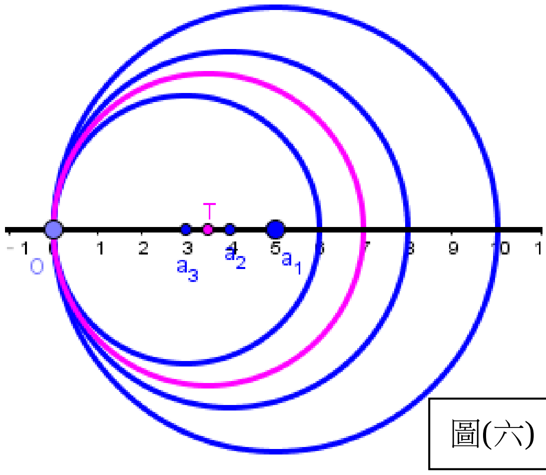
圖(四)

5. 在圖五中為定理 3 證明(4)中的 Step 5， 點 a_1 在圓 a_2 及圓 T 內且 a_2 在圓 a_3 內，所以 $2a_2>a_1$ 且 $2a_3>a_2$ 且 $a_2+a_3>a_1$，所以多 1 個 u-triangle($a_1a_2a_3$ 三角形)，故形成的三角形數目為 9 個。

6. 在圖六中為定理 3 證明(4)中的 Step 6，點 a_1 在圓 a_3 內故 $2a_3>a_1$，所以所有的三角形皆形成(最多 10 個)。

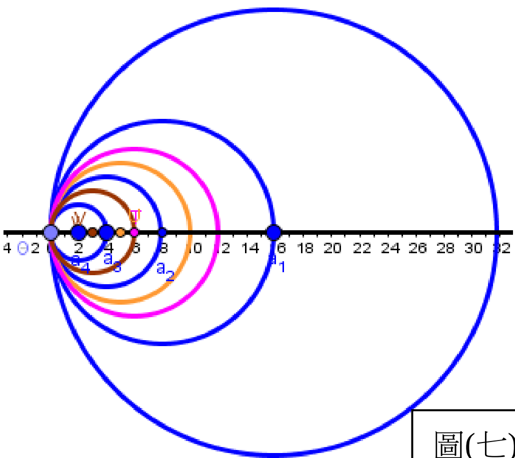


圖(五)

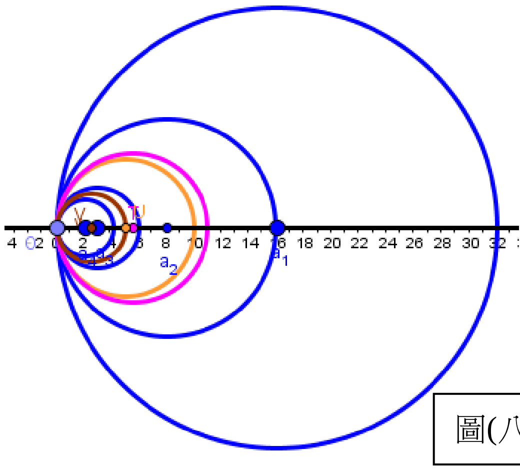


圖(六)

(二) 在下述的圖中我們在數線上，分別以正整數邊長a_n(n=1~4)為圓心及半徑畫圓，則會交數線於0及$2a_n$兩點。以$(a_2+a_3)/2$=T為圓心及半徑畫圓(紫線圓)，則會交數線於0及a_2+a_3兩點。以$(a_2+a_4)/2$=U為圓心及半徑畫圓(橙線圓)，則會交數線於0及a_2+a_4兩點。以$(a_3+a_4)/2$=V為圓心及半徑畫圓(褐線圓)，則會交數線於0及a_3+a_4兩點。



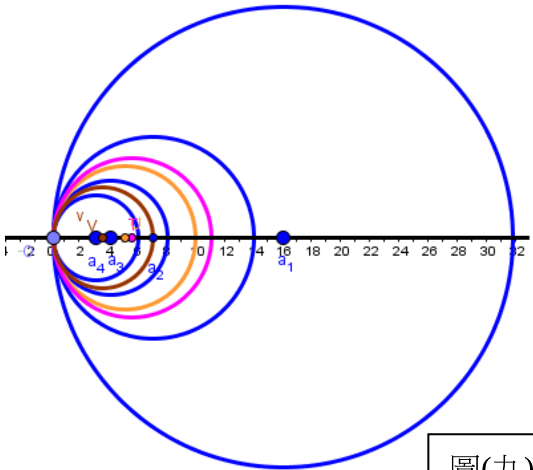
圖(七)



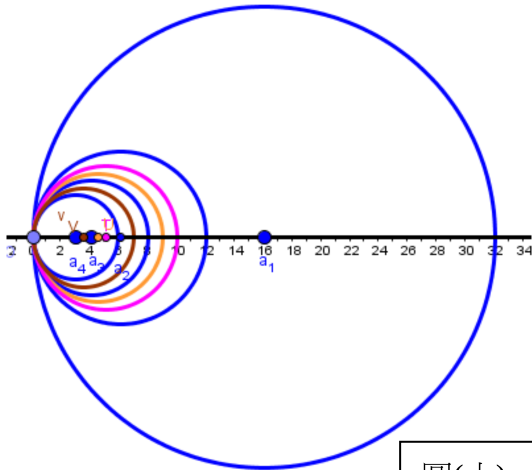
圖(八)

1. 在圖七中為定理 3 證明(5)中的 Step 1，點 a_1 在圓 a_2 上且點 a_2 在圓 a_3 上且 a_3 在圓 a_4 上，所以 $2a_4=a_3$ 且 $2a_3=a_2$ 且 $2a_2=a_1$，由定理 1 可知形成的三角形數目為最少 10 個。

2. 在圖八中為定理 3 證明(5)中的 Step 2，點 a_3 移動至圓 a_4 內所以 $2a_4>a_3$，所以多 1 個 i-triangle($a_3a_4a_4$ 三角形)，故形成的三角形數目為 11 個。
3. 在圖九中為定理 3 證明(5)中的 Step 3，點 a_2 移動至圓 a_3 內所以 $2a_3>a_2$，所以多 1 個 i-triangle($a_2a_3a_3$ 三角形)，故形成的三角形數目為 12 個。
4. 在圖十中為定理 3 證明(5)中的 Step 4，點 a_2 移動至圓 V 內所以 $a_3+a_4>a_2$，所以多 1 個 u-triangle($a_2a_3a_4$ 三角形)，故形成的三角形數目為 13 個。

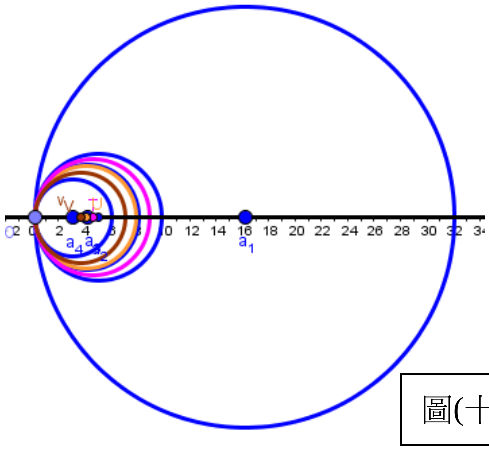


圖(九)

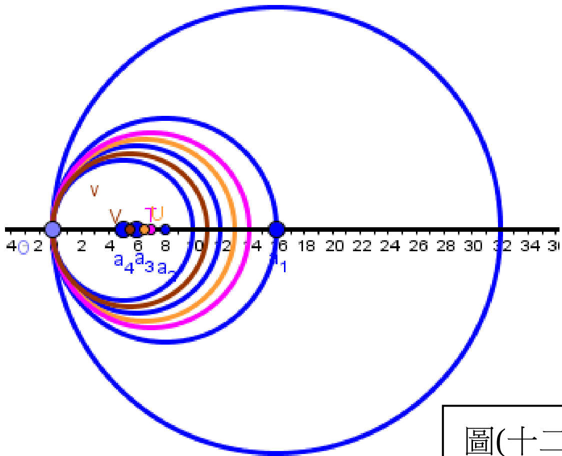


圖(十)

5. 在圖十一中為定理 3 證明(5)中的 Step 5，點 a_2 移動至圓 a_4 內所以 $2a_4>a_2$，所以多 1 個 i-triangle($a_2a_4a_4$ 三角形)，故形成的三角形數目為 14 個。
6. 在圖十二中為定理 3 證明(5)中的 Step 6，點 a_1 移動至圓 a_2 上，故形成的三角形數目還是 14 個。



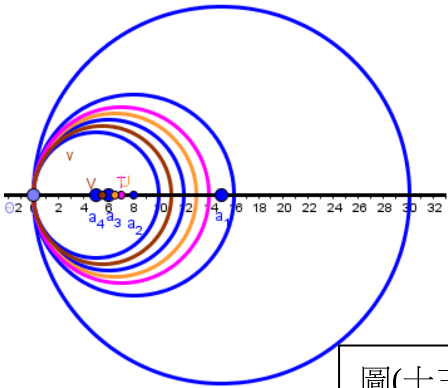
圖(十一)



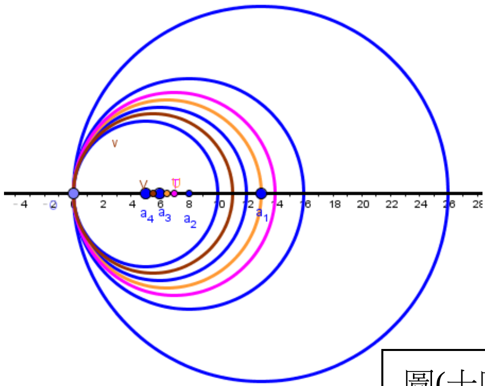
圖(十二)

7. 在圖十三中為定理 3 證明(5)中的 Step 7，點 a_1 移動至圓 a_2 內所以 $2a_2>a_1$，所以多 1 個 i-triangle($a_1a_2a_2$ 三角形)，故形成的三角形數目為 15 個。

8. 在圖十四中為定理 3 證明(5)中的 Step8，a_1 在圓 T 內所以 $a_2+a_3>a_1$ ，所以多 1 個 u-triangle($a_1a_2a_3$ 三角形)，故形成的三角形數目為 16 個。



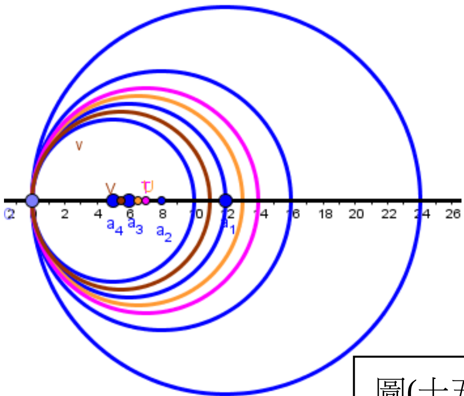
圖(十三)



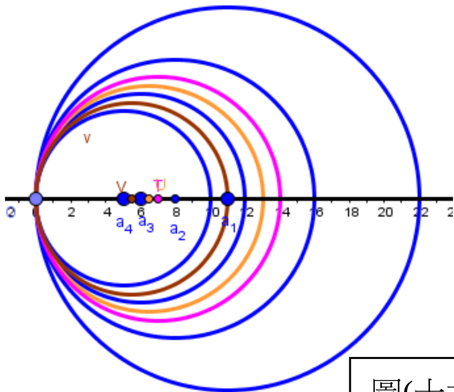
圖(十四)

9. 在圖十五中為定理 3 證明(5)中的 Step9，a_1 在圓 U 內所以 $a_2+a_4>a_1$ ，所以多 1 個 u-triangle($a_1a_2a_4$ 三角形)，故形成的三角形數目為 17 個。

10. 在圖十六中為定理 3 證明(5)中的 Step10，a_1 在圓 a_3 內所以 $2a_3>a_1$ ，所以多 1 個 i-triangle($a_1a_3a_3$ 三角形)，故形成的三角形數目為 18 個。



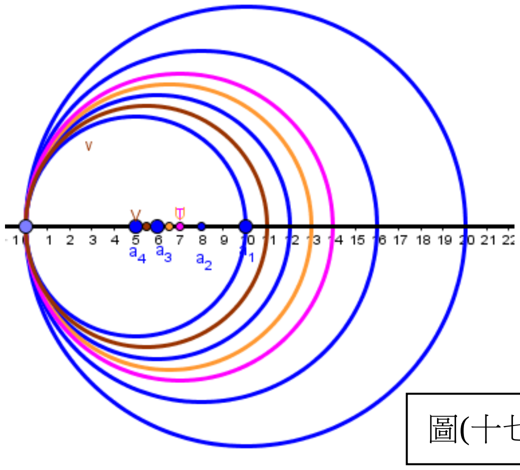
圖(十五)



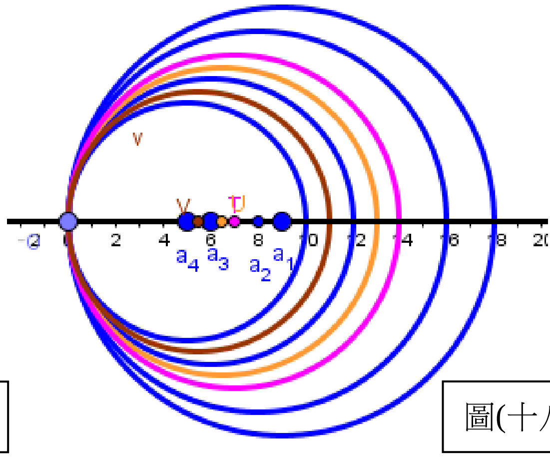
圖(十六)

11. 在圖十七中為定理 3 證明(5)中的 Step11，a_1 在圓 V 內所以 $a_3+a_4>a_1$ ，所以多 1 個 u-triangle($a_1a_3a_4$ 三角形)，故形成的三角形數目為 19 個。

12. 在圖十八中為定理 3 證明(5)中的 Step12，a_1 在圓 a_4 內所以 $2a_4>a_1$ ，所以多 1 個 i-triangle($a_1a_4a_4$ 三角形)，故形成的三角形數目為 20 個。



圖(十七)

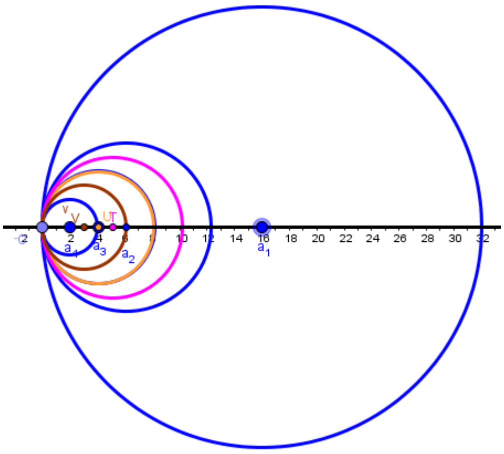


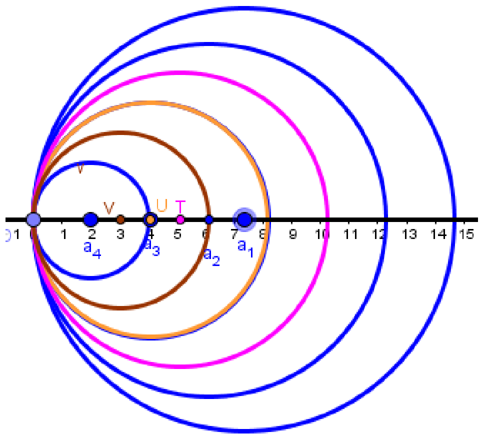
圖(十八)

八、定理4: 給定n種邊長(n≧3)且$a_1>a_2>a_3>\cdots>a_n$,如果當中任意三數成等差的時候,則在增加三角形數目的歷程中至少會有一組 u-triangle 與 i-triangle 同時形成。

證明:

不失一般性,假設 $a_2a_3a_4$ 成等差數列,因為圓 a_3 與圓 $U=(a_2+a_4)/2$ 圓心重合,所以當點 a_1 漸漸變小時會同時移動至前述兩圓的圓內(如下二圖所示),此時 u-triangle 與 i-triangle 同時形成($a_1a_2a_4$、$a_1a_3a_3$)。



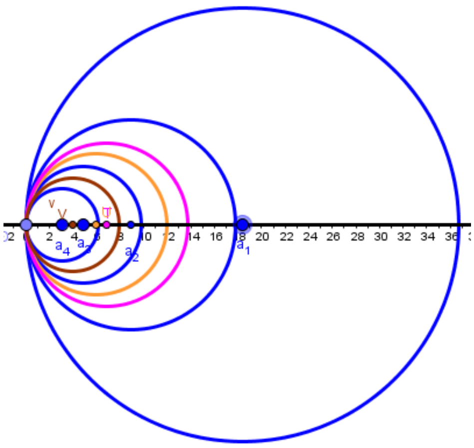


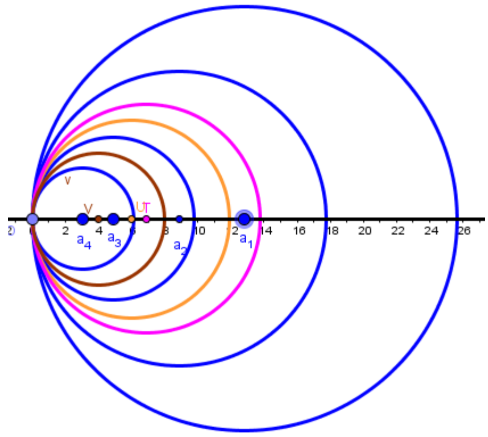
九、定理 5:給定 n 種邊長(n≧3)且形成最少三角形數時,要增加一個 u-triangle,至少要增加 1 個 i-triangle。

證明:

若想增加一個 u-triangle,不失一般性,可設增加三角形 $a_1a_2a_3$。

(1) 幾何證明:依序如下二圖所示可知，若將 a_1 往內移動至增加 u-triangle，必先通過圓 a_2 的圓形成 1 個 i-triangle($a_1a_2a_2$)。





(2) 代數證明:若欲使 $a_1a_2a_3$ 成立，則 $a_2+a_3>a_1$，

但 $a_2>a_3$，所以 $a_2+a_3>a_1$ 時，a_2+a_2 必定大於 a_1，

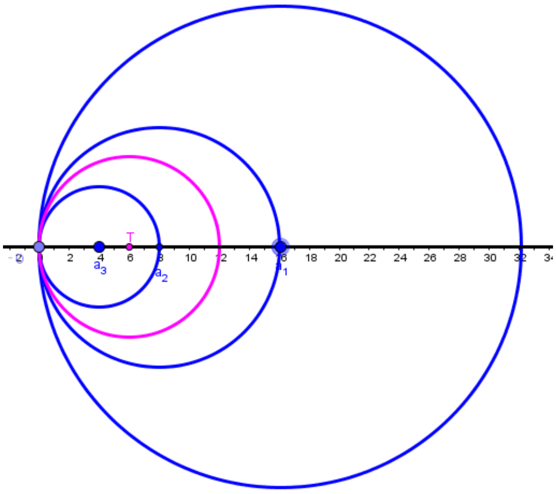
故如形成 1 個 u-triangle，則至少會形成 1 個 i- triangle。

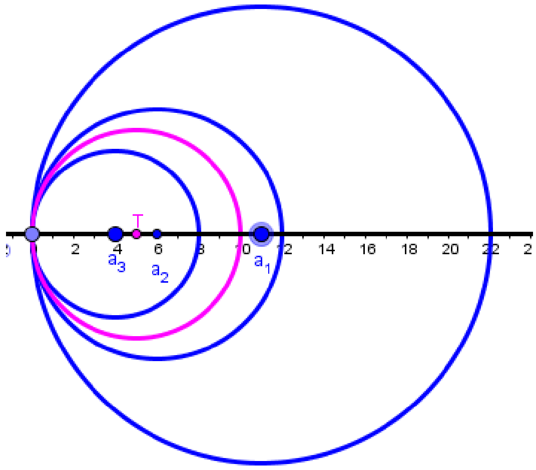
十、定理 6 : 給定 n 個正整數邊長且形成最少的三角形數時，在不增加 u-triangle 的數目情況下，可增加最多(n-1)個 i-triangle。

證明:

(1) 當n=3時:

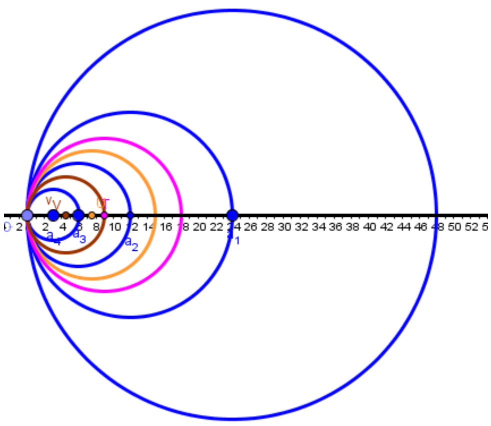
在下述的圖中我們在數線上，分別以正整數邊長a_n(n=1~3)為圓心及半徑畫圓，則會交數線於0及$2a_n$兩點。再以$(a_2+a_3)/2=T$為圓心及半徑畫圓(紫線圓)，則會交數線於0及a_2+a_3兩點。在左圖中點a_2在圓a_3上且點a_1在圓a_2上，所以所形成的三角形數為最少6個。接著在右圖中，我們分別將點a_1與a_2移動至圓a_2及圓a_3內，則在不增加u-triangle的數目情況下，可增加最多2個i-triangle。

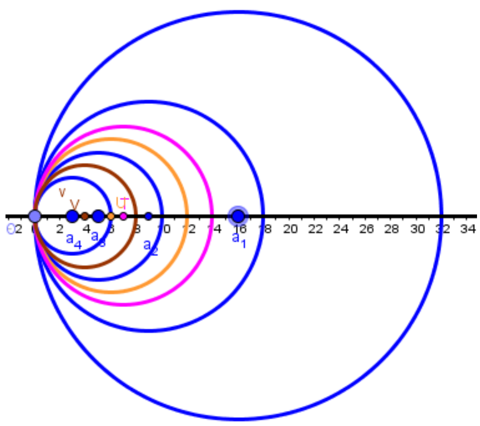




(2) 當 n=4 時:

在下述的圖中我們在數線上，分別以正整數邊長 a_n(n=1~4)為圓心及半徑畫圓，則會交數線於 0 及 $2a_n$ 兩點。以$(a_2+a_3)/2$=T 為圓心及半徑畫圓(紫線圓)，則會交數線於 0 及 a_2+a_3 兩點。以$(a_2+a_4)/2$=U 為圓心及半徑畫圓(橙線圓)，則會交數線於 0 及 a_2+a_4 兩點。以$(a_3+a_4)/2$=V 為圓心及半徑畫圓(褐線圓)，則會交數線於 0 及 a_3+a_4 兩點。在左圖中點 a_3 在圓 a_4 上、點 a_2 在圓 a_3 上且點 a_1 在圓 a_2 上，所以所形成的三角形數為最少 10 個。接著在右圖中，我們分別將點 a_1、a_2 與 a_3 移動至圓 a_2、圓 a_3 及 a_4 內，則在不增加 u-triangle 的數目情況下，可增加最多 3 個 i-triangle。





依此類推，可得給定 n 個正整數邊長且形成最少的三角形數時，在不增加 u-triangle 的數目情況下，可增加最多(n-1)個 i-triangle。

伍、 研究結果

一、定理 1: 給定 n 種正整數邊長滿足 $a_1 \geqq 2^1 a_2 \geqq 2^2 a_3 \geqq 2^3 a_4 \geqq \cdots \geqq 2^{n-1} a_n$ 時，形成的三角形數最少有 1+2+3+⋯+n 個。

二、定理 2: 給定 n 種正整數邊長 $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_n$ 且滿足 $2a_n > a_1$ 時，形成的三角形數最多有 1+(1+2)+(1+2+3)+⋯+(1+2+3+⋯+n)個。

三、定理 3: 給定 n 種正整數邊長 $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_n$ 時，可形成的最少至最多三角形數目中間所有的數目都會有對應的例子。

四、從定理 3 的證明中發現了依照建構歷程 u-triangle 與 i-triangle 形成的順序有規律，其規律如下表：

n	最少數目	由最少至最多 u-triangle 與 i-triangle 形成的順序	歷程中增加的三角型數目	最多數目
2	3	$\boxed{i}$	1	4
3	6	$\boxed{i}$-$\boxed{iu}\boxed{i}$	1+(2+1)	10
4	10	$\boxed{i}$-$\boxed{iu}\boxed{i}$-$\boxed{iuu}\boxed{iu}\boxed{i}$	1+(2+1)+(3+2+1)	20
5	15	$\boxed{i}$-$\boxed{iu}\boxed{i}$-$\boxed{iuu}\boxed{iu}\boxed{i}$-$\boxed{iuuu}\boxed{iuu}\boxed{iu}\boxed{i}$	1+(2+1)+(3+2+1)+(4+3+2+1)	35
6	21	$\boxed{i}$-$\boxed{iu}\boxed{i}$-$\boxed{iuu}\boxed{iu}\boxed{i}$-$\boxed{iuuu}\boxed{iuu}\boxed{iu}\boxed{i}$-$\boxed{iuuuu}\boxed{iuuu}\boxed{iuu}\boxed{iu}\boxed{i}$	1+(2+1)+(3+2+1)+(4+3+2+1)+(5+4+3+2+1)	56
7	28	$\boxed{i}$-$\boxed{iu}\boxed{i}$-$\boxed{iuu}\boxed{iu}\boxed{i}$-$\boxed{iuuu}\boxed{iuu}\boxed{iu}\boxed{i}$-$\boxed{iuuuu}\boxed{iuuu}\boxed{iuu}\boxed{iu}\boxed{i}$-$\boxed{iuuuuu}\boxed{iuuuu}\boxed{iuuu}\boxed{iuu}\boxed{iui}$	1+(2+1)+(3+2+1)+(4+3+2+1)+(5+4+3+2+1)+(6+5+4+3+2+1)	84

附:在表格中，i 表示 i-triangle；u 表示 u-triangle。

五、定理3的證明中，令 $a_n+2^0=a_{n-1}$、$a_{n-1}+2^1=a_{n-2}$、$a_{n-2}+2^2=a_{n-3}$、$a_{n-3}+2^3=a_{n-4}$、⋯、$a_2+2^{(n-1)}=a_1$ 且 $a_n=2^{(n-1)}+1$，再將 a_x(變數)由 $a_x=2a_1$ 漸漸變小，則形成的三角形數目將依照規律變多，形成規律為

$a_xa_xa_x \Rightarrow a_xa_xa_1 \Rightarrow a_xa_xa_2 \Rightarrow a_xa_xa_3 \Rightarrow \cdots \Rightarrow a_xa_xa_n \Rightarrow a_xa_1a_1 \Rightarrow a_xa_1a_2 \Rightarrow$

$\cdots \Rightarrow a_xa_1a_n \Rightarrow a_xa_2a_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow a_na_na_n$。

六、定理 4: 給定 n 種邊長(n≧3)且 $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_n$，如果當中任意三數成等差的時候，則在增加三角形數目的歷程中至少會有一組 u-triangle 與 i-triangle 同時形成。

七、定理 5:給定 n 種邊長(n≧3)且形成最少三角形數時，要增加一個 u-triangle，至少要增加 1 個 i-triangle。

八、定理 6：給定 n 個正整數邊長且形成最少的三角形數時，在不增加 u-triangle 的數目情況下，可增加最多(n-1)個 i-triangle。

陸、 討論

我們目前探討出三角形的規律，將來希望可以再接再厲把任給 n 個正整數邊長可形成的四邊形數、五邊形數，及其由最少至最多數目歷程討論也做出來。且我們在國三時學到了三角錐，將來希望也可以探討出任給 n 個正整數邊長可形成的三角錐數，由於這是屬於立體空間方面的問題，難度一定提高不少。

在科展作品圍多里呀的秘密中，他們討論「對任意大於或等於 3 的正整數 k 給定長度分別為 1,2,3,......, n 單位長的 n 根木棒，此 n 根木棒欲圍成正 k 邊形應具備怎樣的特質？如何圍？」裡面的正三角形作法也是將正整數拼湊出一個正三角形，內容與我們作品看似類似，但是其相關性其實並不大。

柒、 結論

我們在解釋最少至最多的中間數目全部都有對應例子上，遇到了不少的難題，最後才逐步想出方法解決，相信將來繼續做的時候，也可以利用這次得經驗讓問題迎刃而解。

捌、 參考資料及其他

一、 國中數學(南一版)第四冊 第三章:三角形的性質。

二、 國中數學(南一版)第六冊 第三章:機率與統計。

三、 台灣網路科教館/科展群傑廳/全國中小學科展作品

http://science.ntsec.edu.tw/Science-Content.aspx?cat=-1&sid=10128

【評語】030424

藉由簡單的分析技巧，完整地解決了這個問題。說明清楚而且精簡，十分難得。比較可惜的是，內容稍嫌單薄了些。如果能進一步的給出判斷一個給定的集合所能造出的不同三角形的個數為何，應該會更為有趣。