中華民國第56屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

030423

數理乾坤～異中求同

學校名稱：新北市立積穗國民中學

作者：	指導老師：
國二 柯皓哲 國二 曾則維	莊志勇 許丞緯

關鍵詞：多邊形數字方塊、等差(等比)數列、

運算符號

摘要

本研究主要探討多邊形數字方塊，以一組具相同公差或公比的數字，運用加、減、乘、除等不同運算符號，計算各邊中點的新數字且不斷往內層演算。為了快速獲得結果，導入 Excel 軟體來輔助，並進一步觀察最後結果是否收斂或具規律性？過程中發現加法運算，可以首項、公差、多邊形邊數、層數四個量去推導出一般式，以獲得多邊形每一層的數字總和，也可以利用其反求相關數值。減法運算，在 2 的 m+2 次方多邊形且具相同公差時，其運算結果都可以在$N+2$層時歸零。除法運算，將相鄰的二數以大數除以小數後，採用不同的進位法，在 2 的 m+2 次方多邊形且具相同公比時，其運算結果都會收斂至 1。至於乘法運算在五邊形以上，具相同公差或費氏數列所產生的數字都會收斂至 0。

壹、 研究動機

有一天，在國立科學教育館的網站上恰好看到有關數字方塊的文章，覺得它很神奇。為何在正方形的四個頂點寫下任意正整數，並算出其相鄰兩頂點的差值，放在兩點間的中點位置，隨後不斷的再往內層計算，最後確會出現一模一樣的數字或規律？

於是，搜尋了相關的文章後，發現為什麼都只有在討論減法運算，僅在去年有一篇全國科展報告中談論了乘法運算。當下我們就想先來觀察減法運算的數字方塊，是否尚具存在什麼樣其他的特性。

如果將運算方式換成加法、乘法、與除法，再加上一些限制條件，並延伸至其他多邊形是否可行呢？結果會不會也跟正方形是一樣，還是會有新的規律產生？就在這一霎那間，我們決定以此為科展的研究主題，繼續展開我們的發現之旅。

貳、 研究目的

一、 以數字方塊的減法運算規則，採用等差(等比)數列的數字，填入四邊形以外的多邊形，觀察結果是否仍會具有相同的特性？若不相同，觀察結果是否會產生新的規律？

二、 除運用減法運算規則外，也採用加法、乘法與除法運算，並延伸至其他多邊形的研究。

三、 探討多邊形數字方塊，在不同的運算模式下給予限制條件，有哪些多邊形的演算結果有收斂的狀況？

四、　採用其他有規律的數字如公比數列、費波納契數列等，放在多邊形的各個頂點，採用減法、加法、乘法與除法運算等不同的運算規則探討其規律性及結果。

參、　研究設備及器材

一、　事務性設備：紙、筆、橡皮擦、筆記型電腦、印表機。

二、　電腦軟體：GSP5 繪圖軟體、EXCEL 2010、WORD 2010。

肆、　研究過程及方法

一、研究方法

(一) 數字方塊的基本運算規則

1. 在正方形的四個角，分別寫下四個整數的數字。
2. 將相鄰兩個頂角數字的差值，寫在正方形邊的中點。
3. 以四個中點作為新的頂點，連成一個正方形，如圖 4-1-1 所示。
4. 重複上述過程，直到某一個正方形的四個頂點的數字都歸 0 為止。

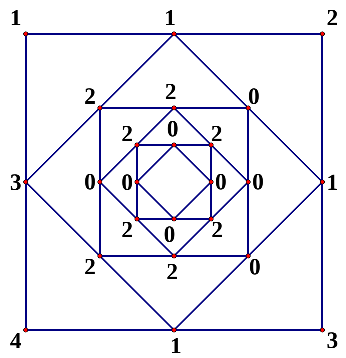


圖 4-1-1 正方形數字方塊

(二) 將基本運算規則延伸至多邊形數字方塊

1. 將正方形數字方塊的規則沿用至多邊形，直到多邊形頂點的數字可全部收斂至固定數字或出現循環規律為止。
2. 運用相同運算規則，將相鄰頂角的數字分別用二數的差、和、積或商填入多邊形邊的中點，依序往多邊形內部逐層加以計算。
3. 本研究主要利用一組具有公差或公比的整數數字，填在多邊形的各個頂角，分別採用減法、加法，乘法、除法運算模式所產生的變化結果，並將相鄰頂角的數字分別用二數的差、和、積或商填入多邊形邊的中點，依序往多邊形內部逐

層加以計算，探討其規律性或不變性。

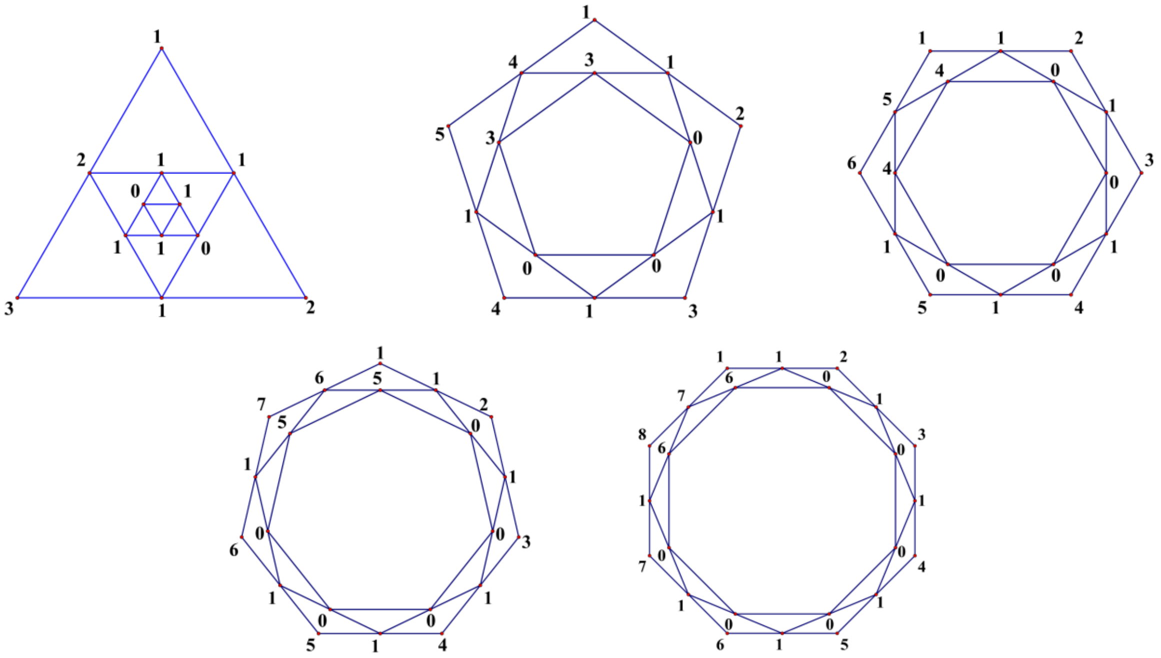


圖 4-2-1 多邊形的數字方塊-減法運算模式

(三) 名詞定義

1. 頂角編號：為了在 Excel 軟體中方便計算，我們將每個多邊形的頂角賦予編號，奇數多邊形頂角編號的起始在圖形正上方的頂角(如圖 4-3-2)，偶數多邊形頂角編號的起始在圖形左上方的頂角(如圖 4-3-1)，編號方向為順時針方向。當層頂角編號 1 與頂角編號 2 的中點則為下一層頂角編號的起始點，因此每一層頂角編號的起始點，將會繞著多邊形成順時針方向位移。

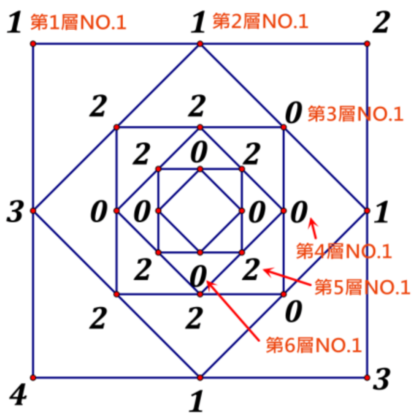


圖 4-3-1 頂角編號說明

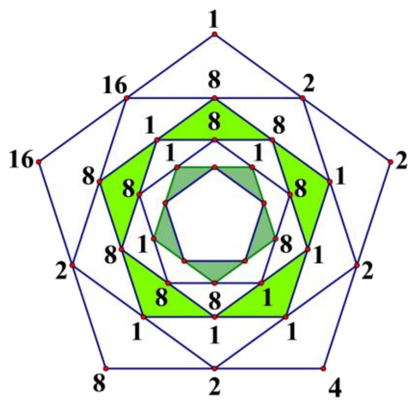


圖 4-3-2 循環的定義

2. 循環：每一層數字的第一項和末項會圍成一個圈，當該圈的數字組成及排列次

序和外圈的某一層相同時，即視為循環。

例 1：四邊形數字方塊四個頂點數字為(A,B,C,D)，若往內層演算而產生(B,C,D,A) 、(C,D,A,B) 、(D,A,B,C)皆視為同一數字排列方式。

例 2：以圖 4 五邊形除法模式為例，以公比 2，首項 1 的數字填入，第三層(淺綠色圖塊)數列(1,1,1,8,8)，第六層(深綠色圖塊)數列(8,1,1,1,8)排列方式相同，視為循環。

3. 收斂：指多邊形數字方塊往內層的運算中，數字的組成逐漸趨向於單一數字，在研究過程中發現，在採用減法模式時可收斂至 0，採用除法模式時可收斂至 1，而乘法模式因採取積的個位數，在平方的關係下可分別收斂至 0、1、5、6，若採用乘積的末 2 位數會發現，所組成的數字會形成個位數為 1、5、6 等單一數字不再變化，但十位數字仍不斷的變化組合，此時可因其個位數字已不再變化而將其視為收斂。

4. 減法模式：指相鄰二個頂角上的數字相減後，將差填入二數間多邊形邊的中點。

5. 加法模式：指相鄰二個頂角上的數字相加後，將和填入二數間多邊形邊的中點。

6. 除法模式：指相鄰二個頂角上的數字相除後(大數/小數)，將商填入二數間多邊形邊的中點。

7. 乘法模式：指相鄰二個頂角上的數字相乘後，將積(取個位數或整數末二位數)填入二數間多邊形邊的中點。

(四) 使用 Excel 軟體輔助計算

為了快速求出結果，我們使用了 Excel 的函數來幫助我們快速找出答案與規律，我們在 Excel 表格設計的時候，分別建置適用於除法、加法、減法、乘法等不同運算模式的表格，並利用邏輯函數在其中加入第 1 層所需數字的選項，選項內容如下：

1. 輸入 1 採用公差數列，可自由填入首項及公差。
2. 輸入 2 採用公比數列，可自由填入首項及公比。
3. 輸入 3 自動產生任意數，可設定任意數產生的區間。
4. 輸入 4 自行輸入數字。
5. 輸入 5 採用費波納契數列。

	A	B	C	D	E	G	I	K	L	M	N	O	Q
1	無條件進位							無條件捨去					
2	頂角編號	1	2	3	4	各層加總	輸入選擇	頂角編號	1	2	3	4	各層加總
3	第1層	1	1	2	3	7	5	第1層	1	1	2	3	7
4	第2層	1	2	2	3	8		第2層	1	2	1	3	7
5	第3層	2	1	2	3	8	公差or公比	第3層	2	2	3	3	10
6	第4層	2	2	2	2	8	3	第4層	1	1	1	1	4
7	第5層	1	1	1	1	4							0
8						0	首項						0
9							1						0
10													0
11						0	任意數區間						0
12						0	1						0
13						0	100						0
14						0							0

圖 4-4-1 Excel 函數計算表-除法運算模式

在第 2 層以後使用函數來計算相鄰二數的商、和、差、積等下一層的數字，直到歸零、收斂為 1、或出現規律為止。另外，為了使運算能順利運行，不至於產生快速膨脹或無法運算的狀況，在不同的運算模式下，加入了取捨的條件，在除法部分以(大數/小數)來進行運算；在乘法部分，取整數的個位數或末二位數來進行運算。

二、 研究過程

我們想將正方形改成多邊形及數字間的加、減、乘、除等運算規則，於是我們就開始朝這個方向往下發展。

一開始研究時，我們從最基本的規則相鄰二數相減著手，我們先設定數字間的公差為 1，然後先改變多邊形數，從 5 邊形發展，發現 5 邊形不能歸零。同時我們也知道了 Excel 的函數功能可以幫我們做運算，解決一直用手寫的不便。接著，我

們試了 3~8 邊形，發現可歸零的只有 4 邊形和 8 邊形，其他多邊形的數字則會呈現循環的規律。

再來，我們往正方形繼續深入研究，發現正方形有其他特殊規律，整個研究的過程是一件令人開心的事。我們想說，既然正方形有其他特殊規律，其他多邊形是否也會有呢?但經過研究後，尚未發現其他通則。

接著，我們開始尋找不同多邊形運算後的結果。慢慢地我們找出只要是2^{m+2}邊形都會歸零，其中：$m = 1,2,3,\cdots\cdots$，而且是在$N+2$層歸零，其中：N為多邊形的邊數，這是一個很棒的結果。

(一)、　頂角數字相減的研究

透過設置公差的方式，來研究數字方塊，有別於以往他人的研究方式。從一開始假設公差為 1，慢慢的從正方形推展到其他多邊形，公差的數字也從 1 變為 2、3……，利用 Excel 快速找出它的規律性，並將其表格化歸納整理於結果與討論，也從這裡引發了我們的興趣。

在試過特定公差後，我們發想如果換成有規律的差，例如 1、2、1，也就是頂角和頂角間的數字差按照一定的規律，因此我們將正方形的四個數字設為 1、3、4、5，接著帶入 Excel 的函數中，發現結果仍然是 0。另外，在歸零的前一步時，差 1、2、1 的圖形為 2、2、2、2，但如果是差為 100，200，100 的圖形，在歸零前一步是 200，200，200，200，具有倍數關係。

(二)、　頂角數字相除的研究

將相鄰的二數以前項除以後項的方式做演算，發現一但發生整數除以小數的情況時，數會變很大，因此將演算方法調整為相鄰的兩數以大數除以小數的方式進行演算及研究。

在演算過程中分別使用無條件進位法、無條件捨去法及四捨五入法來取到整數位，避免 0 的情況發生，將相鄰的數以大數除以小數，並比較這三種方法的差異。

(三)、 頂角數字加法的研究

這項研究在探討相鄰二數相加，二數相加會一層一層的堆疊，數字也會越來越大，只是沒有像乘法那樣會快速膨脹，在研究的過程中，我們試著去找出它們存在其中的規律變化，從歸納的表格中找到它變化的方式，在每一層總和中發現它的特殊性，試著利用學過的歸納法去推導不同首項、不同公差及不同邊數的多邊形，其每一層數字和的公式。

(四)、 頂角數字相乘的研究

相鄰二數相乘是一件惱人的事，因為數字會越來越大，只要經過幾次的運算，數字就會變得非常可怕，但我們還是發現第 n 層的所有數相乘後的積的平方是下一層所有數相乘後的積。$(\mathrm{a}_1 \times \mathrm{a}_2 \times \mathrm{a}_3 \times \cdots \times \mathrm{a}_n)^2 = (\mathrm{b}_1 \times \mathrm{b}_2 \times \mathrm{b}_3 \times \cdots \times \mathrm{b}_n)$，a代表第一層的數字，b代表第二層的數字。

我們試著採用乘積的個位數來做為下一層填入的數字，也另外採用乘積的末二位數字來做為比較。

伍、 研究結果與討論

一、頂角數字相除的研究

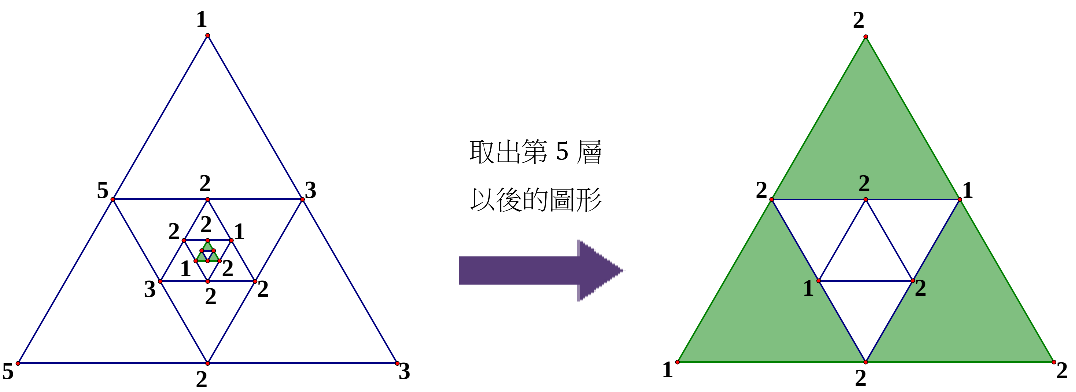
(一) 數字相除的成果歸納

為了避免出現 0 的情況發生，這裡將分別使用無條件進位法、無條件捨去法及四捨五入法來取到整數位，並分別比較這三種方法的差異。另外也將相鄰的數以大數除以小數來運算，以免造成如同乘法模式般快速膨脹的結果。

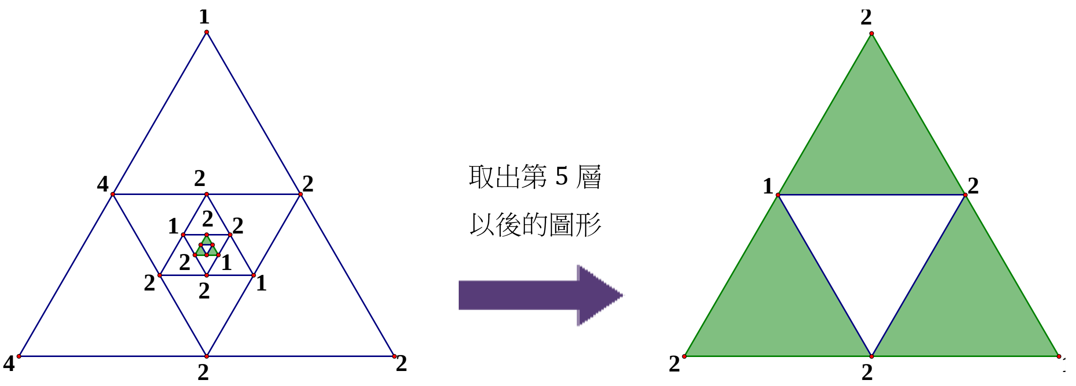
1. 三角形除法模式

項目	無條件進位法	循環層數	無條件捨去法	循環層數	四捨五入法	循環層數
公差 1 首項 1	第 3 層開始循環 (1,2,2)	1	第 3 層同第 1 層	2	第 3 層開始循環 (1,2,2)	1
公差 1 首項 2	第 2 層(2,2,2)， 後收斂為(1,1,1)		第 3 層開始循環 (1,2,2)	1	第 2 層開始循環 (2,1,2)	1
公差 2 首項 1	第 4 層開始循環 (2,2,1)	1	第 3 層同第 1 層	2	第 4 層開始循環 (2,2,1)	1

公差 2 首項 2	第 3 層開始循環 (1,2,2)	1	第 2 層開始循環 (2,1,3)	2	第 3 層開始循環 (1,2,2)	1
公比 2 首項 1	第 3 層開始循環 (1,2,2)	1	第 3 層開始循環 (1,2,2)，	1	第 3 層開始循環 (1,2,2)	1
公比 3 首項 1	第 3 層開始循環 (1,3,3)	1	第.3 層開始循環 (1,3,3)	1	第 3 層開始循環 (1,3,3)	1
費波那契 數列	第 2 層開始循環 (1,2,2)	1	第 2 層開始循環 (1,2,2)	1	第 2 層開始循環 (1,2,2)	1



公差 2，首項 1，採無條件進位法

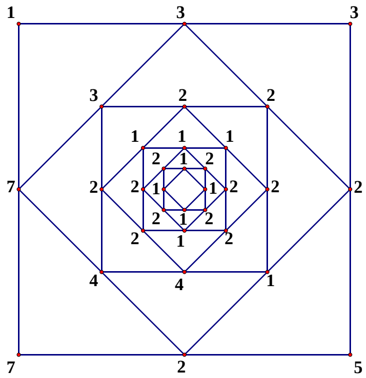


等比數列 1,2,4 之演算圖形

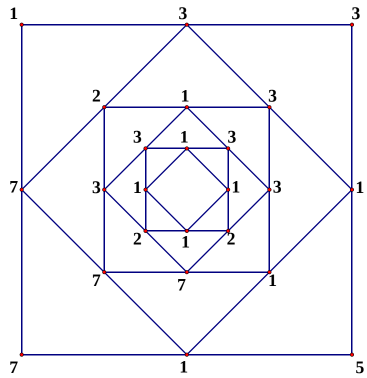
2. 四邊形除法模式

項目	無條件進位法	循環層數	無條件捨去法	循環層數	四捨五入法	循環層數
公差 1 首項 1	第 6 層收斂為 1		第 6 層收斂為 1		第 5 層收斂為 1	
公差 1 首項 2	第 6 層收斂為 1		第 6 層收斂為 1		第 6 層收斂為 1	
公差 2 首項 1	第 8 層收斂為 1		第 6 層收斂為 1		第 7 層收斂為 1	
公差 2 首項 2	第 6 層收斂為 1		第 6 層收斂為 1		第 5 層收斂為 1	

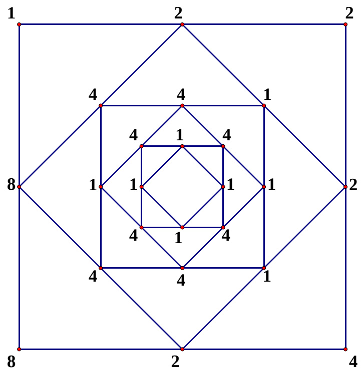
公比 2 首項 1	第 6 層收斂為 1		第 6 層收斂為 1		第 6 層收斂為 1	
公比 3 首項 1	第 6 層收斂為 1		第 6 層收斂為 1		第 6 層收斂為 1	
費波那契 數列	第 5 層收斂為 1		第 4 層收斂為 1		第 5 層收斂為 1	



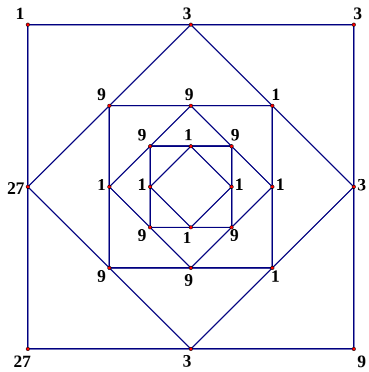
公差 2，首項 1，採無條件進位法



公差 2，首項 1，採無條件捨去法



公比 2，首項 1 之演算圖形

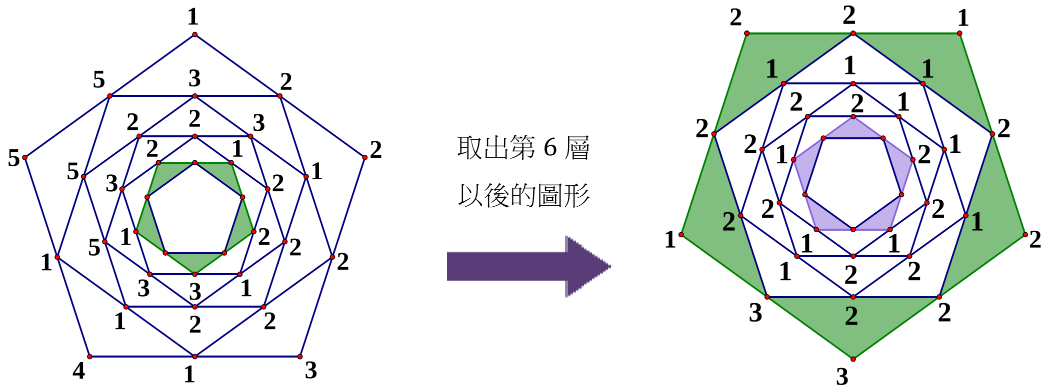


公比 3，首項 1 之演算圖形

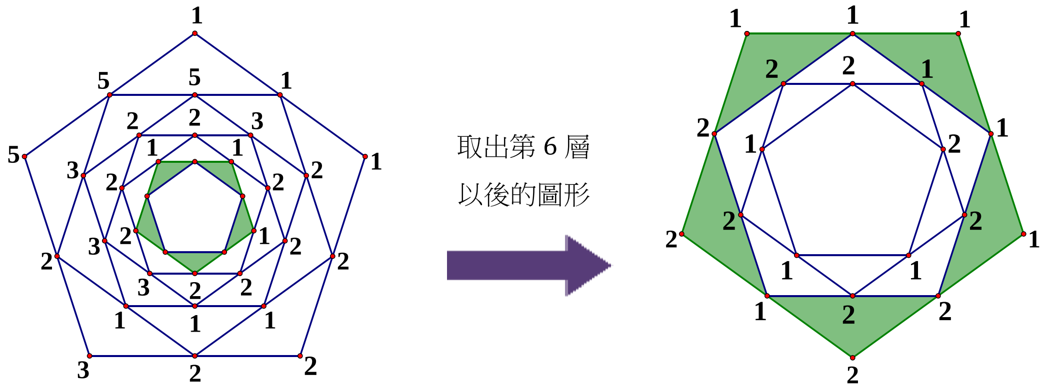
3. 五邊形除法模式

項目	無條件進位法	循環層數	無條件捨去法	循環層數	四捨五入法	循環層數
公差 1 首項 1	第 3 層開始循環 (1,1,1,3,3)	3	第 6 層開始循環 (2,2,1,1,1)	3	第 8 層開始循環 (2,1,1,1,2)	3
公差 1 首項 2	第 3 層開始循環 (1,1,1,2,2)	3	第 3 層開始循環 (1,1,1,3,3)	3	第 6 層開始循環 (2,2,1,1,1)	3
公差 2 首項 1	第 8 層開始循環 (1,2,2,1,1)	3	第 6 層開始循環 (3,3,1,1,1)	3	第 9 層開始循環 (1,1,2,2,1)	3
公差 2 首項 2	第 3 層開始循環 (1,1,1,3,3)	3	第 6 層開始循環 (2,2,1,1,1)	3	第 6 層開始循環 (2,1,1,1,2)	3
公比 2 首項 1	第 3 層開始循環 (1,1,1,8,8)	3	第 3 層開始循環 (1,1,1,8,8)	3	第 3 層開始循環 (1,1,1,8,8)	3
公比 3 首項 1	第 3 層開始循環 (1,1,1,27,27)	3	第 3 層開始循環 (1,1,1,27,27)	3	第 3 層開始循環 (1,1,1,27,27)	3

費波那契數列	第 6 層開始循環 (2,2,1,1,1,)	3	第 6 層開始循環 (1,2,2,1,1)	3	第 6 層開始循環 (2,2,1,1,1)	3



公差 1，首項 1，採四捨五入法



費波那契數列，採四捨五入法

4. 六邊形除法模式

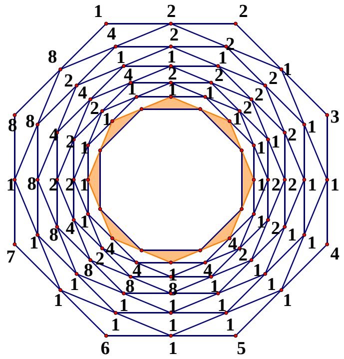
項目	無條件進位法	循環層數	無條件捨去法	循環層數	四捨五入法	循環層數
公差 1 首項 1	第 4 層開始循環 (1,1,1,3,1,3)	3	第 8 層開始循環 (1,1,2,1,2,1)	3	第 7 層開始循環 (2,2,1,2,2,1)	3
公差 1 首項 2	第 4 層開始循環 (1,1,1,2,1,2)	3	第 4 層開始循環 (1,1,1,3,1,3)	3	第 7 層開始循環 (2,2,2,1,1,2)	3
公差 2 首項 1	第 10 層開始循環 (2,1,1,2,2,2)	3	第 7 層開始循環 (3,3,3,1,1,3)	3	第 13 層開始循環 (2,2,2,2,1,1)	3
公差 2 首項 2	第 4 層開始循環 (1,1,1,3,1,3)	3	第 8 層開始循環 (1,1,2,1,2,1)	3	第 7 層開始循環 (2,2,1,2,2,1)	3
公比 2 首項 1	第 4 層開始循環 (1,1,1,1,1,16)	3	第 4 層開始循環 (1,1,1,1,1,16)	3	第 4 層開始循環 (1,1,1,1,1,16)	3
公比 3 首項 1	第 4 層開始循環 (1,1,1,81,1,81)	3	第 4 層開始循環 (1,1,1,81,1,81)	3	第 4 層開始循環 (1,1,1,81,1,81)	3
費波那契數列	第 7 層開始循環 (2,2,2,1,1,2)	3	第 8 層開始循環 (1,2,1,1,1,2)	3	第 7 層開始循環 (2,2,2,1,1,2)	3

5. 七邊形除法模式

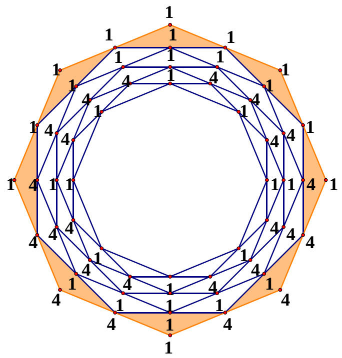
項目	無條件進入法	循環層數	無條件捨去法	循環層數	四捨五入法	循環層數
公差 1 首項 1	第 3 層開始循環 (1,1,1,1,1,4,4)	7	第 10 層開始循環 (2,1,1,1,1,1,3)	14	第 10 層開始循環 (1,2,1,1,1,2,1)	7
公差 1 首項 2	第 3 層開始循環 (1,1,1,1,1,2,2)	7	第 3 層開始循環 (1,1,1,1,1,4,4)	7	第 8 層開始循環 (2,2,1,2,1,2,1)	7
公差 2 首項 1	第 10 層開始循環 (1,1,2,1,2,2,2)	7	第 10 層開始循環 (3,1,1,1,1,1,4)	14	第 9 層開始循環 (2,1,2,2,2,2,2)	7
公差 2 首項 2	第 3 層開始循環 (1,1,1,1,1,4,4)	7	第 8 層開始循環 (3,2,1,2,1,2,1)	14	第 10 層開始循環 (1,2,1,1,1,2,1)	7
公比 2 首項 1	第 3 層開始循環 (1,1,1,1,1,32,32)	7	第 3 層開始循環 (1,1,1,1,1,32,32)	7	第 3 層開始循環 (1,1,1,1,1,32,32)	7
公比 3 首項 1	第 3 層開始循環 (1,1,1,1,1,243,243)	7	第 3 層開始循環 (1,1,1,1,1,243,243)	7	第 3 層開始循環 (1,1,1,1,1,243,243)	7
費波那契數列	第 9 層開始循環 (2,1,1,1,1,1,2)	7	第 13 層開始循環 (1,3,2,1,3,1,3)	14	第 9 層開始循環 (2,1,1,1,1,1,2)	7

6. 八邊形除法模式

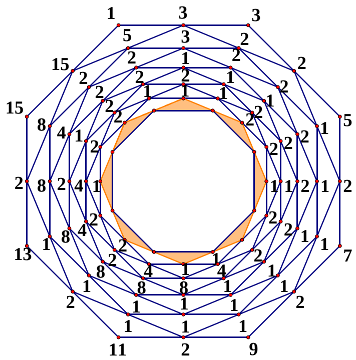
項目	無條件進位法	循環層數	無條件捨去法	循環層數	四捨五入法	循環層數
公差 1 首項 1	第 10 層收斂為 1		第 16 層收斂為 1		第 10 層收斂為 1	
公差 1 首項 2	第 10 層收斂為 1		第 10 層收斂為 1		第 16 層收斂為 1	
公差 2 首項 1	第 12 層收斂為 1		第 10 層收斂為 1		第 15 層收斂為 1	
公差 2 首項 2	第 10 層收斂為 1		第 16 層收斂為 1		第 10 層收斂為 1	
公比 2 首項 1	第 10 層收斂為 1		第 10 層收斂為 1		第 10 層收斂為 1	
公比 3 首項 1	第 10 層收斂為 1		第 10 層收斂為 1		第 10 層收斂為 1	
費波那契數列	第 16 層收斂為 1		第 14 層收斂為 1		第 16 層收斂為 1	



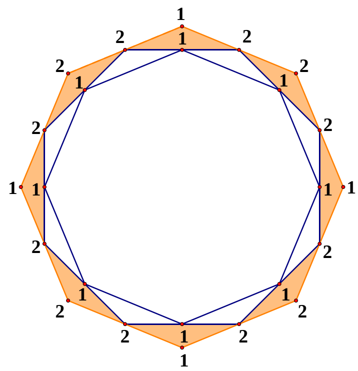
取出第 10 層
以後的圖形



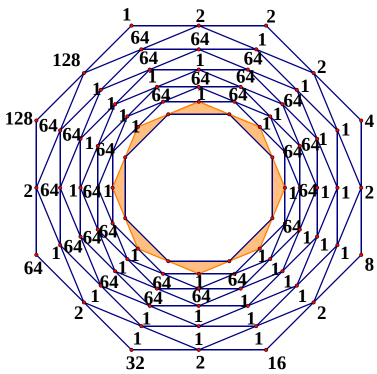
公差 1，首項 1，採無條件捨去法



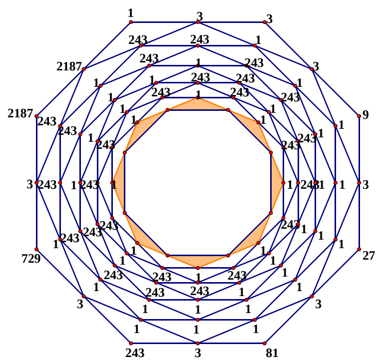
取出第 10 層
以後的圖形



公差 2，首項 1，採無條件進位法



公比 2，首項 1，採無條件進位法



公比 3，首項 1，採無條件進位法

(二) 除法模式的研究發現

1. 從上述表格中，我們可以知道，只有該數列成等比，則不論任何邊形，無條件進位法、無條件捨去法還是四捨五入法，其最後結果都沒有分別。

2. 此外，只有正方形和八邊形可收斂成 1，因此我們推測，除法和減法一樣會有收斂的情況，只要在2^{m+2}的多邊形放入等比數列就可在$N+2$層收斂至 1。

2^{m+2}**邊形其結果可以收斂至「1」；其中：** $\boldsymbol{m=1,2,3,\cdots\cdots}$

在$\boldsymbol{N+2}$層時收斂至「1」；其中：$\boldsymbol{N}$為多邊形邊數

3. 在演算數字採用等比數列的情況下，若 N 邊形的每個頂角數字差為 r 倍，則結果為 1 和r^{N-2}組成的數字排列。

4. 在給予公差數字的條件下，進入第二層演算就會開始出現大量的 1 與 2 二個數字，當開始出現循環時，只有四捨五入法在循環層的數字組成由 1 與 2 二個數字來組合，因其在演算過程中會因捨去和進位交替運用而產生偶數，尤其是 2 的出現，會讓演算的數字一直保持為偶數狀態，進而逐漸將演算數字收斂至 1 與 2。

5. 在給予公差數字的條件下，無條件捨去法在運算過程中，因為只能捨去，而喪失了許多出現 2 的機會，因此循環層由 1 與其它數字組成，數字組合至多三種，其中包含 1。

二、頂角數字相減的研究

(一)、 數字相減的成果歸納 (公差)

我們做了許多有關公差的數字研究，從其中發現，如果經過多層演算後不能歸零，它也會出現一些特別的規律，會由 0 與公差倍數的數字組成一個規律循環的模式，我們將三角形至八邊形所產生的規律整理分析如下表：

1. 三角形減法模式

公差 1：結果由 0、1 組成　　　公差 2：結果由 0、2 組成

公差 d：結果由 0、d 組成

頂角編號	1	2	3
第 1 層	a_1	a_1+d	a_1+2d
第 2 層	d	d	2d
第 3 層	0	d	d
第 4 層	d	0	d
第 5 層	d	d	0
從第 3 層每層數字排列方式相同。			

2. 四邊形減法模式

在運用公差的方式下，正方形頂角的 4 個數字運算到最後都會在第六層收斂至零。

頂角編號	1	2	3	4
第 1 層	a_1	a_1+d	a_1+2d	a_1+3d
第 2 層	d	d	d	3d
第 3 層	0	0	2d	2d
第 4 層	0	2d	0	2d
第 5 層	2d	2d	2d	2d
第 6 層	0	0	0	0

3. 五邊形減法模式

公差 1：結果由 0、3 組成　　　公差 2：結果由 0、4 組成

公差 d：結果由 0、3d 組成

頂角編號	1	2	3	4	5
第 1 層	a_1	a_1+d	a_1+2d	a_1+3d	a_1+4d
第 2 層	d	d	d	d	4d
第 3 層	0	0	0	3d	3d
第 4 層	0	0	3d	0	3d
第 5 層	0	3d	3d	3d	3d
第 6 層	3d	0	0	0	3d
從第 3 層開始規律循環，每 3 層循環一次					

4. 六邊形減法模式

公差 1：結果由 0、4 組成　　　公差 2：結果由 0、4 組成

公差 d：結果由 0、4d 組成

頂角編號	1	2	3	4	5	6
第 1 層	a_1	a_1+d	a_1+2d	a_1+3d	a_1+4d	a_1+5d
第 2 層	d	d	d	d	d	5d
第 3 層	0	0	0	0	4d	4d
第 4 層	0	0	0	4d	0	4d
第 5 層	0	0	4d	4d	4d	4d
第 6 層	0	4d	0	0	0	4d
從第 4 層開始規律循環，每 2 層循環一次						

5. 七邊形減法模式

公差 1：結果由 0、5 組成　　　公差 2：結果由 0、10 組成

公差 d：結果由 0、5d 組成

頂角編號	1	2	3	4	5	6	7
第 1 層	a_1	a_1+d	a_1+2d	a_1+3d	a_1+4d	a_1+5d	a_1+6d
第 2 層	d	d	d	d	d	d	6d
第 3 層	0	0	0	0	0	5d	5d
第 4 層	0	0	0	0	5d	0	5d
第 5 層	0	0	0	5d	5d	5d	5d
第 6 層	0	0	5d	0	0	0	5d
第 7 層	0	5d	5d	0	0	5d	5d
第 8 層	5d	0	5d	0	5d	0	5d
第 9 層	5d	5d	5d	5d	5d	5d	0
第 10 層	0	0	0	0	0	5d	5d
從第 3 層開始規律循環，每 7 層循環一次							

6. 八邊形減法模式

由下表得知，不管填入的數字如何，八邊形如同正方形一樣，其結果都會收斂至 0。

頂角編號	1	2	3	4	5	6	7	8
第 1 層	a_1	a_1+d	a_1+2d	a_1+3d	a_1+4d	a_1+5d	a_1+6d	a_1+7d
第 2 層	d	d	d	d	d	d	d	7d
第 3 層	0	0	0	0	0	0	6d	6d
第 4 層	0	0	0	0	0	6d	0	6d
第 5 層	0	0	0	0	6d	6d	6d	6d
第 6 層	0	0	0	6d	0	0	0	6d
第 7 層	0	0	6d	6d	0	0	6d	6d
第 8 層	0	6d	0	6d	0	6d	0	6d
第 9 層	6d	6d	6d	6d	6d	6d	6d	6d
第 10 層	0	0	0	0	0	0	0	0

(二)、 數字相減的成果歸納 (費波那契數列)

邊形數關係	邊形數	費波那契數列運用在減法模式 收斂或循環起始層	循環層數
3 的倍數	3 角形	第 2 層(0,1,1)；第 3 層(1,0,1)	1
	6 邊形	第 11 層(0,1,1,0,1,1)；第 12 層(1,0,1,1,0,1)	1
	9 邊形	第 24 層(1,0,1,1,0,1,1,0,1)；第 25 層(1,1,0,1,1,0,1,1,0)	1
	12 邊形	第 31 層(1,1,0,1,1,0,1,1,0,1,1,0)	1
	15 邊形	第 73 層(1,1,0,1,1,0,1,1,0,1,1,0,1,1,0)	1
	18 邊形	第 63 層(1,0,1,1,0,1,1,0,1,1,0,1,1,0,1,1,0,1)	1
	21 邊形	第 131 層(0,1,1,0,1,1,0,1,1,0,1,1,0,1,1,0,1,1,0,1,1)	1

	24 邊形	第 140 層 (0,1,1,0,1,1,0,1,1,0,1,1,0,1,1,0,1,1,0,1,1,0,1,1)	1
2^{m+2} 邊形	4 邊形	第 5 層收斂至 0	
	8 邊形	第 14 層收斂至 0	
	16 邊形	第 46 層收斂至 0	
	32 邊形	第 150 層收斂至 0	
	64 邊形	第 1010 層收斂至 0	
其他邊形數	5 邊形	第 8 層(0,0,0,1,1)；第 11 層(1,0,0,0,1)	3
	7 邊形	第 15 層(0,0,1,0,0,1,0)；第 22 層(0,0,1,0,0,1,0)	7
	10 邊形	第 21 層(0,1,1,0,1,0,1,0,1,1)	6
	11 邊形	第 45 層(1,1,1,1,0,0,0,1,1,1,1)	33
	13 邊形	第 58 層(0,0,1,0,0,0,1,0,0,1,1,1,1)	63
	14 邊形	第 36 層(0,1,1,0,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0)	14
	25 邊形	第 158 層(1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,1,1,1,1,1,1)	1023

研究費波那契數列運用在減法模式時我們可以發現：

1. 在2^{m+2}邊形其結果可以收斂至「0」；其中：m=0,1,2,3,......
2. 除了2^{m+2}邊形外，其他的多邊形最後的結果會由 1 與 0 二個數字所組成的數列來進行循環；我們同時以隨機整數運用 Excel 軟體來進行測試，最後的結果也是由 1 與 0 二個數字所組成的數列來進行循環。
3. 當邊形數是 3 的倍數時，進入循環後，其循環層數為每一層不斷重複循環，而其數字組合是以(0,1,1)這組數字乘以 3 的倍數所組成，例如三角形循環層數字組合為(0,1,1)；六邊形循環層數字組合為(0,1,1,0,1,1)，如此在尋找循環起始層時方便許多，只要判斷該層數字總和就可以從計算表單中輕易發現。

N 邊形循環層數字總和=N÷3×2；其中：N 為多邊形邊數

(三)、 可收斂至零的多邊形

我們為了找出哪些多邊形可以收斂至 0，於是測試了其他的多邊形，發現除了正方形與八邊形外，16 邊形、32 邊形等都可以收斂至 0，因此我們推測，邊數為「2^{m+2}」次方的多邊形都可以收斂至 0，為了驗證這個假設，我們又試了 64 邊形和 128 邊形，發現減法運算時，只要在2^{m+2}的多邊形放入等差數列就可在$N+2$層收斂至 0。

2^{m+2}邊形其結果可以收斂至「0」；其中：m=0,1,2,3,......

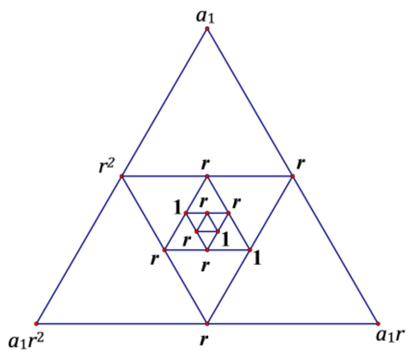
在$N+2$層時收斂至「0」，；其中：N 為多邊形邊數

(四)、 除法模式與減法模式的共通性

比較除法模式以等比數列進行研究時發現，其與上述減法模式以等差數列進行研究有共通性之關係，同樣在2^{m+2}邊形其結果可以分別收斂至「1」(除法)或「0」(減法)；其中： $m = 1,2,3,\cdots\cdots$，在$N + 2$層時收斂至「1」(除法)或「0」(減法)；其中：N為多邊形邊數。

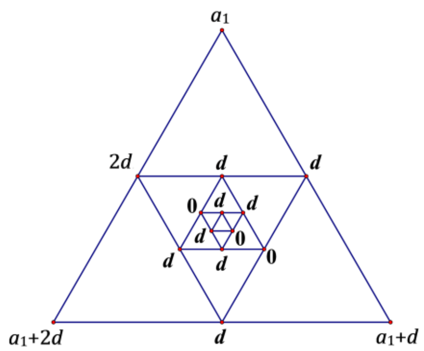
1. 比較三角形運用除法模式(等比)與減法模式(等差)之結果

頂角編號	1	2	3
第 1 層	a_1	a_1r	a_1r^2
第 2 層	r	r	r^2
第 3 層	1	r	r
第 4 層	r	1	r
第 5 層	r	r	1
第 6 層	1	r	r



三角形除法模式採用等比數列

頂角編號	1	2	3
第 1 層	a_1	a_1+d	a_1+2d
第 2 層	d	d	$2d$
第 3 層	0	d	d
第 4 層	d	0	d
第 5 層	d	d	0
第 6 層	0	d	d

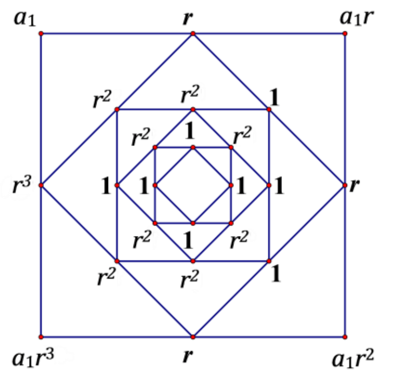


三角形減法模式採用等差數列

2. 比較正方形運用除法模式(等比)與減法模式(等差)之結果

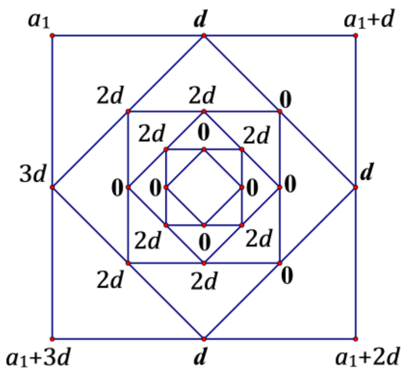
頂角編號	1	2	3	4
第 1 層	a_1	a_1r	a_1r^2	a_1r^3
第 2 層	r	r	r	r^3
第 3 層	1	1	r^2	r^2
第 4 層	1	r^2	1	r^2
第 5 層	r^2	r^2	r^2	r^2

第 6 層	1	1	1	1



正方形除法模式採用等比數列

頂角編號	1	2	3	4
第 1 層	a_1	a_1+d	a_1+2d	a_1+3d
第 2 層	d	d	d	$3d$
第 3 層	0	0	$2d$	$2d$
第 4 層	0	$2d$	0	$2d$
第 5 層	$2d$	$2d$	$2d$	$2d$
第 6 層	0	0	0	0



正方形減法模式採用等差數列

(五)、 以歸納法證明2^{m+2}邊形其結果可以收斂

1. 除法模式 (等比數列)

2^{m+2}邊形其結果可以收斂至「**1**」；其中： $\boldsymbol{m = 1, 2, 3, \cdots\cdots}$ 在$\boldsymbol{N+2}$層時收斂至「**1**」；其中：$\boldsymbol{N}$為多邊形邊數

2. 減法模式 (等差數列)

2^{m+2}邊形其結果可以收斂至「**0**」；其中：$\boldsymbol{m = 1, 2, 3, \cdots\cdots}$ 在$\boldsymbol{N+2}$層時收斂至「**0**」；其中：$\boldsymbol{N}$為多邊形邊數

3. 從 Excel 表單中整理歸納

當 n 邊形可以被下表最大數整除時，代表可收斂至 0

n 邊形	3-4	5-8	9-16	17-32	33-64	65-128	...
須被整除的最大數	2	4	8	16	32	64	...

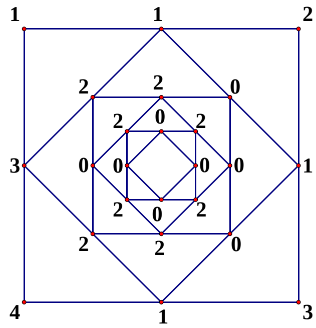
4. 以歸納法證明

Step1	四邊形(令$m=0$) $2^2 \div 2^1 = 2^1$ (成立)	Step3	n 邊形(令$m=n$) $2^n \div 2^1 = 2^{n+1}$ $\vdots$ $2^n \div 2^{n-1} = 2^1$ (成立)
Step2	八邊形(令$m=1$) $2^3 \div 2^1 = 2^2$ $2^3 \div 2^2 = 2^1$ (成立)	Step4	n+1 邊形(令$m=n+1$) $2^{n+1} \div 2^1 = 2^n$ $\vdots$ $2^{n+1} \div 2^n = 2^1$ (成立)

由以上結果可知，不論除法(等比數列)或減法(等差數列)都可以在2^{m+2}邊形於第$N+2$層時，其結果可以分別收斂至「1」及「0」。

(六)、 邊形特性研究

1. 正方形的特性



在相鄰頂角相減的研究裡，經過整理分析，我們發現正方形除了第一層外，會有以下三項規律的其中一項：

(1). 對角線的數字和相等。(右圖第 3 層 2+0=2+0)

(2). 對角線的數字差相等。(右圖第 3 層 2-0=210)

(3). 最大數=其他三數和。(右圖第 3 層 3=1+1+1)

2. 三角形的特性

(1). 不論三角形最大數是奇數還是偶數，只要是以n、1、(n − 1)的數字填入格子，結果會在n層循環。

(2). 最大數為奇數時：n、$\frac{n}{2}$ (捨去)、$\frac{n}{2}$ (進位)，最後結果會在 $\frac{n}{2}$ (進位)+1 層結束。

(3). 最大數為偶數時：n、$\frac{n}{2}$、$\frac{n}{2}$，最後結果會在第 2 層循環。

(4). 只要其中一數是最大數的因數，則開始的循環層數=最大數/因數。

三、頂角數字相乘的研究

(一)、 數字相乘的成果歸納

乘法模式因採乘積的個位數，在$0^2=0$、$1^2=1$、$5^2=25$、$6^2=36$平方的關係下可分別收斂至 0、1、5、6，若採用乘積的末 2 位數時會發現，其所組成的數字個位數會是 1、5、6 等不再變化的單一數字，但十位數字仍不斷的變化組合，此時可因

其個位數字已不再變化而將其視為收斂。下列歸納分析除了採用「乘積取末 1 位」、「乘積取末 2 位」另加入「乘積取末 2 位運算，但只看末 1 位」的方式來增加收斂情況的比較分析。

1. 三角形乘法模式

項目	乘積取末 1 位	循環層數	乘積取末 2 位運算，只看末位	循環層數	乘積取末 2 位	循環層數
公差 1 首項 1	第 3 層開始循環 (2,8,6)	2	第 3 層開始循環 (12,18,6)	2	第 4 層(16,8,72)	4
公差 1 首項 2	第 2 層開始循環 (6,2,8)	2	第 2 層開始循環 (6,12,8)	2	第 3 層(72,96,48)	4
公差 2 首項 1	第 3 層收斂至 5		第 3 層收斂至 5 (45,75,15)		第 4 層(75,25,75)	1
公差 2 首項 2	第 3 層開始循環 (2,8,6)	2	第 3 層開始循環 (92,88,96)	2	第 3 層起每 4 層一循環週期	4
公比 2 首項 1	第 3 層開始循環 (6,2,8)	2	第 3 層開始循環 (16,32,8)	2	第 3 層起每 4 層一循環週期	4
公比 3 首項 1	第 3 層開始循環 (1,3,7)	2	第 3 層開始循環 (81,43,27)	2	第 3 層起每 4 層一循環週期	4
費波那契數列	第 3 層開始循環 (2,4,2)	2	第 3 層開始循環 (2,4,2)	2	第 4 層(8,8,4)	4

2. 四邊形乘法模式

項目	乘積取末 1 位	循環層數	乘積取末 2 位運算，只看末位	循環層數	乘積取末 2 位	循環層數
公差 1 首項 1	第 6 層收斂至 6		第 6 層收斂至 6 (36,56,16,96)		第 6 層起每 1 層皆相同	1
公差 1 首項 2	第 4 層收斂至 0		第 4 層收斂至 0 (80,0,0,20)		第 5 層收斂至 0	
公差 2 首項 1	第 4 層收斂至 5		第 4 層收斂至 5 (25,25,45,45)		第 5 層收斂至 25	
公差 2 首項 2	第 6 層收斂至 6		第 6 層收斂至 6 (56,76,36,16)		第 7 層 (56,36,76,96)	4
公比 2 首項 1	第 3 層收斂至 6		第 3 層收斂至 6 (16,56,56,16)，		第 3 層起每 4 層一循環週期	4

公比 3 首項 1	第 3 層收斂至 1		第 3 層收斂至 1 (81,61,61,81)		第 3 層起每 4 層 一循環週期	4
費波那契 數列	第 6 層收斂至 6		第 6 層收斂至 6 (76,36,56,96)		第 6 層起每 4 層 一循環週期	4

3. 五邊形乘法模式

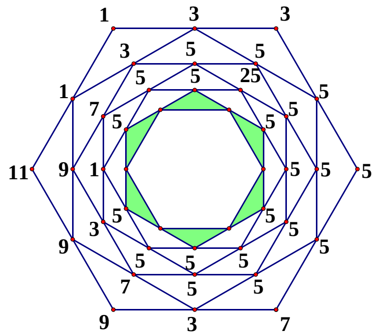
從 5 邊形開始，因組成的數字增多，可收斂至 0 的狀況開始增加，只要數字中有 5、10 等數字出現，就有機會收斂至 0。

項目	乘積取末 1 位	循環層數	乘積取末 2 位運算，只看末位	循環層數	乘積取末 2 位	循環層數
公差 1 首項 1	第 5 層收斂至 0		第 5 層收斂至 0 (20,0,0,0,80)		第 6 層收斂至 0	
公差 1 首項 2	第 5 層收斂至 0		第 5 層收斂至 0 (0,0,0,80,20)		第 6 層收斂至 0	
公差 2 首項 1	第 5 層收斂至 5		第 5 層收斂至 5 (25,75,15,35,75)		第 6 層 (75,25,25,25,75)	3
公差 2 首項 2	第 5 層收斂至 0		第 5 層收斂至 0 (20,0,0,0,80)		第 6 層收斂至 0	
公比 2 首項 1	第 2 層開始循環 (2,8,2,8,6)	6	第 2 層開始循環 (2,8,32,28,16)	6	第 3 層 (16,56,96,48,32)	12
公比 3 首項 1	第 2 層開始循環 (3,7,3,7,1)	6	第 2 層開始循環 (3,27,43,87,81)	6	第 2 層 (3,27,43,87,81)	12
費波那契 數列	第 5 層收斂至 0		第 5 層收斂至 0 (20,0,50,50,40)		第 6 層收斂至 0	

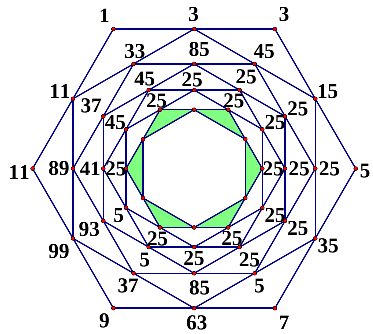
4. 六邊形乘法模式

項目	乘積取末 1 位	循環層數	乘積取末 2 位運算，只看末位	循環層數	乘積取末 2 位	循環層數
公差 1 首項 1	第 6 層收斂至 0		第 6 層收斂至 0 (0,0,0,0,40,20)		第 7 層收斂至 0	
公差 1 首項 2	第 6 層收斂至 0		第 6 層收斂至 0 (0,0,0,60,40,0)		第 7 層收斂至 0	
公差 2 首項 1	第 6 層收斂至 5		第 6 層收斂至 5 (25,25,5,45,25,25,)		第 7 層收斂至 25	
公差 2 首項 2	第 6 層收斂至 0		第 6 層收斂至 0 (0,0,0,0,40,20)		第 7 層收斂至 0	
公比 2 首項 1	第 4 層開始循環 (6,6,6,4,6,4)	2	第 4 層開始循環 (96,76,56,24,76,24)	2	第 4 層 (96,76,56,24,76,24)	8

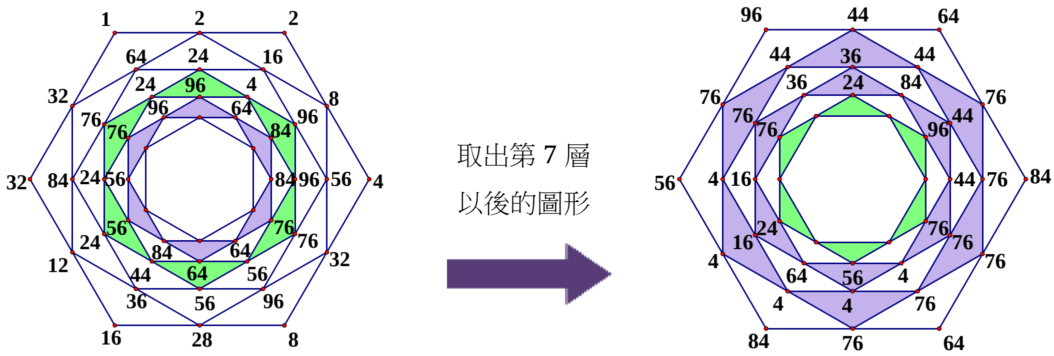
公比 3 首項 1	第 4 層開始循環 (1,1,1,9,1,9)	2	第 4 層開始循環 (41,1,61,49,1,49)	2	第 4 層 (41,1,61,49,1,49)	8
費波那契 數列	第 6 層收斂至 0		第 6 層收斂至 0 (0,0,0,0,40,80)		第 7 層收斂至 0	



公差 2，首項 1，採乘積取末 1 位



公差 2，首項 1，採乘積取末 2 位



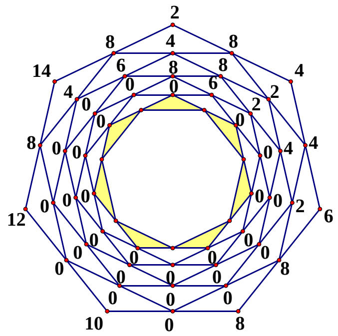
公比 2，首項 1，採乘積取末 2 位

(紫色與綠色為每 2 層其個位數數字排列同，單看紫色為末 2 位數每 8 層數字排列相同)

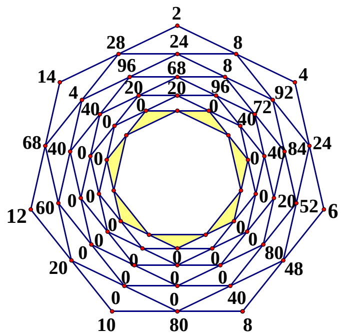
5. 七邊形乘法模式

項目	乘積取末 1 位	循環層數	乘積取末 2 位運算，只看末位	循環層數	乘積取末 2 位	循環層數
公差 1 首項 1	第 7 層收斂至 0		第 7 層收斂至 0 (0,0,0,0,20,40,0)		第 8 層收斂至 0	
公差 1 首項 2	第 7 層收斂至 0		第 7 層收斂至 0 (0,0,0,20,80,0,0)		第 8 層收斂至 0	
公差 2 首項 1	第 7 層收斂至 5		第 7 層收斂至 5 (25,75,55,65,25,75,75)		第 8 層 (75,25,75,25,75,25,75)	7
公差 2 首項 2	第 7 層收斂至 0		第 7 層收斂至 0 (0,0,0,0,20,40,0)		第 8 層收斂至 0	
公比 2 首項 1	第 3 層開始循環 (6,6,6,6,6,2,8)	14	第 3 層開始循環 (16,56,96,36,76,72,28)	14	測試至 1600 層未發現二位數相同數字排列的週期	

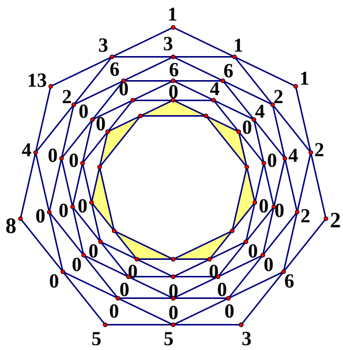
公比 3 首項 1	第 3 層開始循環 (1,1,1,1,1,3,7)	14	第 3 層開始循環 (81,61,41,21,1,63,87)	14	測試至 1600 層未發現二位數相同數字排列的週期	
費波那契數列	第 7 層收斂至 0		第 7 層收斂至 0 (0,0,0,0,80,20,0)		第 8 層收斂至 0	



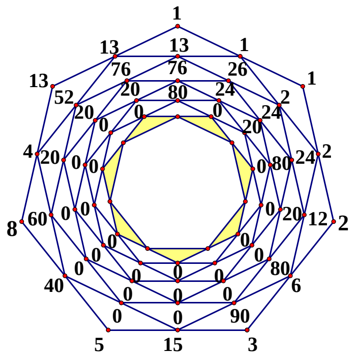
公差 2，首項 2，採乘積取末 1 位



公差 2，首項 2，採乘積取末 2 位



費波那契數列，採乘積取末 1 位



費波那契數列，採乘積取末 2 位

6. 八邊形乘法模式

項目	乘積取末 1 位	循環層數	乘積取末 2 位運算，只看末位	循環層數	乘積取末 2 位	循環層數
公差 1 首項 1	第 8 層收斂至 0		第 8 層收斂至 0 (0,0,0,0,20,20,0,0)		第 9 層收斂至 0	
公差 1 首項 2	第 8 層收斂至 0		第 8 層收斂至 0 (0,0,0,80,80,0,0,0)		第 9 層收斂至 0	
公差 2 首項 1	第 5 層收斂至 5		第 5 層收斂至 5 (25,25,65,5,25,25,25,25)		第 6 層收斂至 25	
公差 2 首項 2	第 8 層收斂至 0		第 8 層收斂至 0 (0,0,0,0,20,20,0,0)		第 9 層收斂至 0	
公比 2 首項 1	第 3 層收斂至 6		第 3 層收斂至 6 (16,56,96,36,76,16,76,56)		第 3 層 (16,56,96,36,76,16,76,56)	24

公比 3 首項 1	第 3 層收斂至 1		第 3 層收斂至 1 (81,61,41,21,1,81,1,61)		第 3 層 (81,61,41,21,1,81,1,61)	24
費波那契數列	第 8 層收斂至 0		第 8 層收斂至 0 (0,0,0,0,20,20,0,0)		第 9 層收斂至 0	

(二)、 乘法模式研究發現

1. 因$0^2=0$、$1^2=1$、$5^2=25$、$6^2=36$，若運算結果遇上 0、1、5、6 這四個數字時，因其相乘所取出之個位數皆不斷重複，因此乘法模式的運算會收斂至 0、1、5、6 這四個數字。
2. 由於是相鄰二數相乘的因素，無論是取個位數或取末二位數，演算結果這二種方式的個位數皆相同，因此從上述表格歸納可得知，不管是採用「乘積取末 1 位」或「乘積取末 2 位運算，只看末位」其結果皆相同。
3. 在 5 邊形以上的運算，由於填入的數字有 5 個以上，不論是採用公差 1 首項 1、公差 1 首項 2、公差 1 首項 3，因所產生的數字會包含 5、10 及偶數等數字組合，進而產生個位數是 0 的數字，因此皆會收斂至 0。且在 5 邊形以上的運算，公差 1 首項 1 與公差 2 首項 2 二項條件，無論是採乘積取末 1 位或乘積取末 2 位等方法，公差 1 首項 1 與公差 2 首項 2 二項條件的結果相同。
4. 在公差 2 首項 1 的狀況下都會收斂至 5，在此條件下所填入的數字皆為奇數，且會有 5 的倍數，因而在演算過程中會逐漸產出 5 的倍數的數字。
5. 當收斂至 0 時，乘積取 2 位者需多做一層演算，乘積取末 1 位的層數+1=乘積取末 2 位的層數。
6. 經由下圖 5-3-2-1 數字 0~9 平方過程關聯圖，我們發現在採用公比條件的數字時，當公比為偶數(10 除外)時，會收斂至 6；當公比為奇數(5 除外)時，會收斂至 1；當公比為 10 時，會收斂至 0；當公比為 5 時，會收斂至 5。

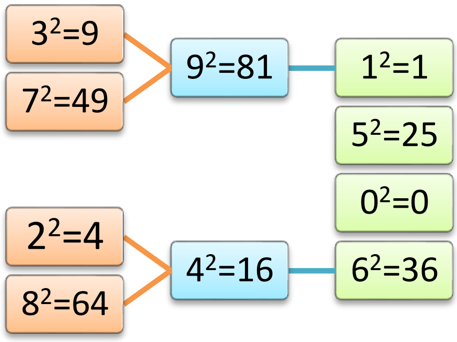


圖 5-3-2-1 數字 0~9 平方過程關聯圖(取個位數運算)

7. 「乘積取末 2 位」之運算，隨著多邊形數越大，雖然末 1 位數皆相同，但二位數字的組成要尋找出相同數字且排列方式相同的循環週期則越加困難，前述表格歸納，在採用公比的條件下，7 邊形測試至第 1600 層仍未發現二位數相同數字排列的週期，8 邊形在第 27 層即產生與第 3 層相同數字組成且排列方式相同的數列，而 16 邊形則須 624 層後方才尋獲。

四、頂角數字相加的研究

(一)、 數字相加的成果歸納

假設第 1 個頂角數字為 1，其餘頂角依公差數填入，此為第 1 層數字。將相鄰頂角的數字相加往內層演算，依序作業至第 N 層，將各個多邊形相關數據資料整理如下

1. 三角形加法模式

公差	1	2	……	d
第 1 層總和	6	9		2^{1-1}x(3+3d)
第 2 層總和	12	18		2^{2-1}x(3+3d)
第 3 層總和	24	36		2^{3-1}x(3+3d)
……	……	……		……
第 n 層總和	2^{n-1}x6	2^{n-1}x9	……	2^{n-1}x(3+3d)

2. 正方形加法模式

公差	1	2	……	d
第 1 層總和	10	16		2^{1-1}x(4+6d)
第 2 層總和	20	32		2^{2-1}x(4+6d)
第 3 層總和	40	64		2^{3-1}x(4+6d)
……	……	……		……
第 n 層總和	2^{n-1}x10	2^{n-1}x16	……	2^{n-1}x(4+6d)

3. 五邊形加法模式

公差	1	2	……	d
第 1 層總和	15	25		2^{1-1}x(5+10d)
第 2 層總和	30	50		2^{2-1}x(5+10d)
第 3 層總和	60	100		2^{3-1}x(5+10d)
……	……	……		……
第 n 層總和	2^{n-1}x15	2^{n-1}x25	……	2^{n-1}x(5+10d)

4. 六邊形加法模式

公差	1	2	……	d
第 1 層總和	21	36		2^{1-1}x(6+15d)
第 2 層總和	42	72		2^{2-1}x(6+15d)
第 3 層總和	84	144		2^{3-1}x(6+15d)
……	……	……		……
第 n 層總和	2^{n-1}x21	2^{n-1}x36	……	2^{n-1}x(6+15d)

5. 七邊形加法模式

公差	1	2	……	d
第 1 層總和	28	49		2^{1-1}x(7+21d)

第 2 層總和	56	98		2^{2-1}x(7+21d)
第 3 層總和	112	196		2^{3-1}x(7+21d)
……	……	……		……
第 n 層總和	2^{n-1}x28	2^{n-1}x49	……	2^{n-1}x(7+21d)

6. 八邊形加法模式

公差	1	2	……	d
第 1 層總和	36	64		2^{1-1}x(8+28d)
第 2 層總和	72	128		2^{2-1}x(8+28d)
第 3 層總和	144	256		2^{3-1}x(8+28d)
……	……	……		……
第 n 層總和	2^{n-1}x36	2^{n-1}x64	……	2^{n-1}x(8+28d)

(二)、 加法模式的研究發現

從上述表格歸納，若起始數字是 1，在公差 2 時，第一層總和是 N 邊形的平方。

例如：六邊形在公差 2 時，

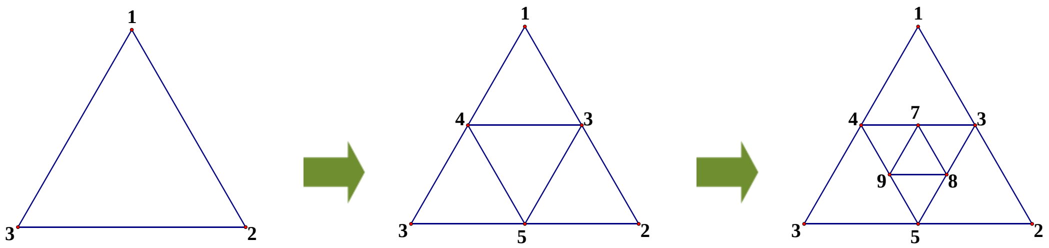
第一層數字加總為 1+3+5+7+9+11=36，36 正好是 6 的平方。

例如：七邊形在公差 2 時，

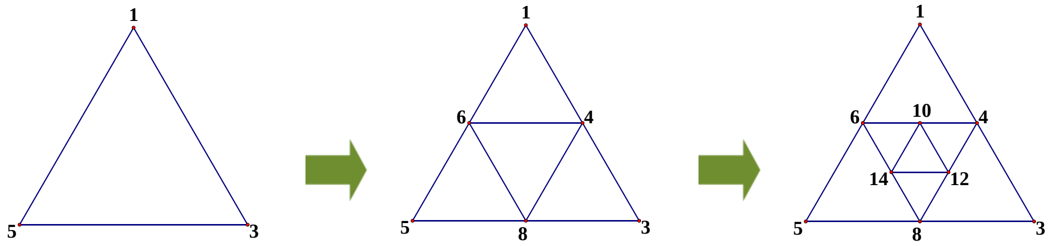
第一層數字加總為 1+3+5+7+9+11+13=49，49 正好是 7 的平方。

另外，我們分別將公差 1、公差 2 與公差 3 時的多邊形圖形及總和計算式整理如下：

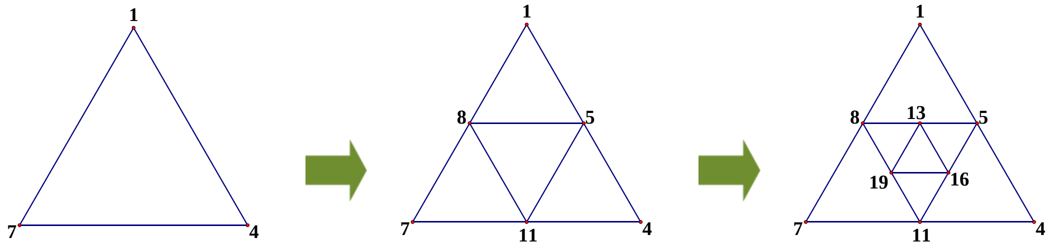
1. 以三角形為例



2^{1-1}x(3+3x1)=6 2^{2-1}x(3+3x1)=12 2^{3-1}x(3+3x1)=24

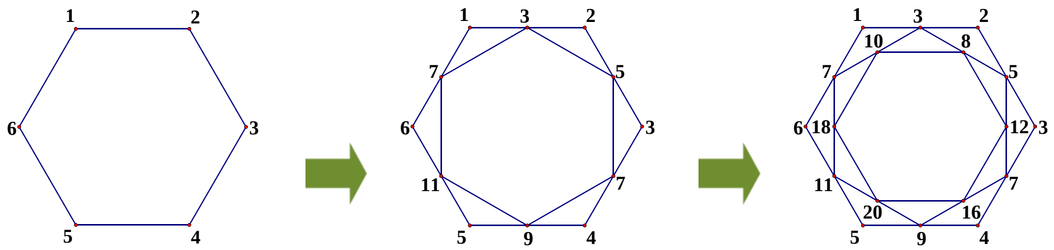


2^{1-1}x(3+3x2)=9 2^{2-1}x(3+3x2)=18 2^{3-1}x(3+3x2)=36

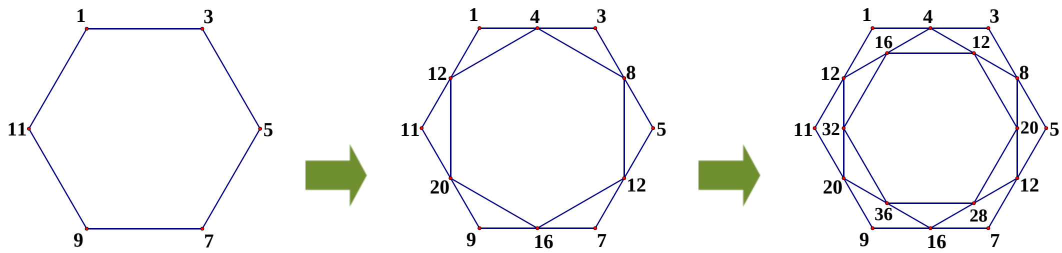


2^{1-1}x(3+3x3)=12 2^{2-1}x(3+3x3)=24 2^{3-1}x(3+3x3)=48

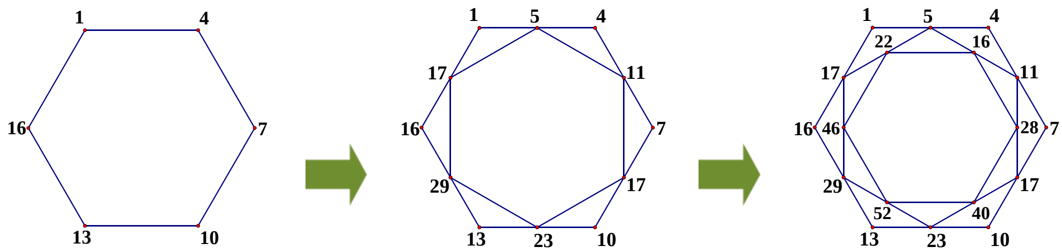
2. 以六邊形為例



2^{1-1}x(6+6x2.5)=21 2^{2-1}x(6+6x2.5)=42 2^{3-1}x(6+6x2.5)=84

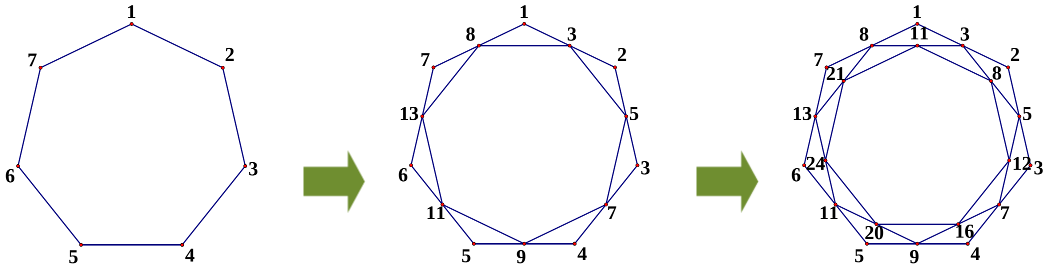


2^{1-1}x(6+6x5)=36 2^{2-1}x(6+6x5)=72 2^{3-1}x(6+6x5)=144

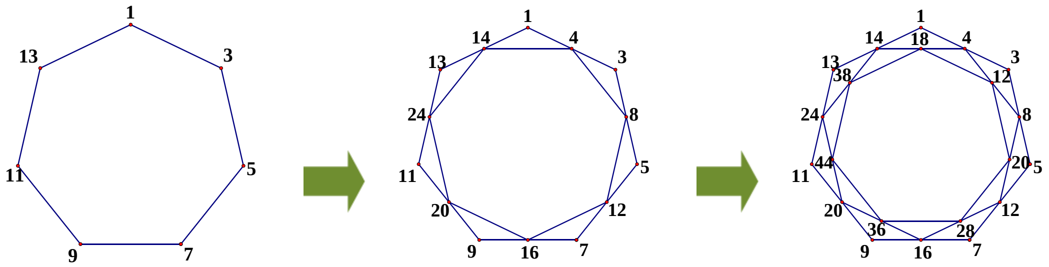


2^{1-1}x(6+6x7.5)=51 2^{2-1}x(6+6x7.5)=102 2^{3-1}x(6+6x7.5)=204

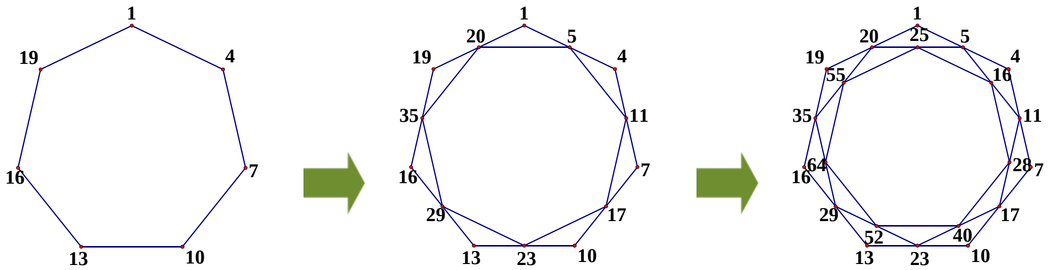
3. 以七邊形為例



2^{1-1}x(7+7x3)=28　2^{2-1}x(7+7x3)=56　2^{3-1}x(7+7x3)=102



2^{1-1}x(7+7x6)=49　2^{2-1}x(7+7x6)=98　2^{3-1}x(7+7x6)=196



2^{1-1}x(7+7x9)=70　2^{2-1}x(7+7x9)=140　2^{3-1}x(7+7x9)=280

4.　公式推導

根據上述分析，可以推導出多邊形加法公式：

發現後一層皆是前一層的兩倍，並將第一層的數總和分解，得以上結果，再由以上結果找出規律，得以下式子

三角形第 n 層總和→$2^{n-1}\times[3+3\times(3-1)\times 0.5\times d]$

四方形第 n 層總和→$2^{n-1}\times[4+4\times(4-1)\times 0.5\times d]$

五邊形第 n 層總和→$2^{n-1}\times[5+5\times(5-1)\times 0.5\times d]$

六邊形第 n 層總和→$2^{n-1}\times[6+6\times(6-1)\times 0.5\times d]$

七邊形第 n 層總和→$2^{n-1}\times[7+7\times(7-1)\times 0.5\times d]$

八邊形第 n 層總和→$2^{n-1}\times[8+8\times(8-1)\times 0.5\times d]$

……

N 邊形第 n 層總和→$\boldsymbol{2^{n-1}\times\{a_1\times N+[N\times(N-1)\times 0.5]\times d\}}$

其中：n為層數，a_1為首項，N為多邊形的邊數，d為公差

陸、 結論與未來研究方向

過去數字方塊是一個從正方形和減法運算開始的遊戲。而我們在研究中採用以等差(等比)數列為主的數字，當中也測試過以任意整數、費氏數列等，搭配改變運算符號為加法、乘法和除法去進行運算，並延伸至其他多邊形的研究。

綜合上述研究結果顯示，可得如下結論：

1. 除法運算時，將相鄰的兩數(任意整數或等差/等比數列的數字)，以大數除以小數後，採用無條件進入法、無條件捨去法與四捨五入法時發現，當在2^{m+2}的多邊形上採用等比數列的數字時，m為從 0 開始的整數，其結果都可以在第$N+2$層使得每一個數字都收斂至 1，N 為多邊形邊數，其餘多邊形的運算結果，都會依多邊形邊數在特定某一層開始出現循環。
2. 減法運算時，獲得的結論除前人的研究結果外，當在2^{m+2}的多邊形上採用等差數列的數字時，m為從 0 開始的整數，其結果都可以在第$N+2$層使得每一個數字都收斂至 0，N 為多邊形邊數，其餘多邊形的運算結果，都會依多邊形邊數在特定某一層開始出現循環。再者，當公差乘以 r 倍時，其最後循環數字也會乘以 r 倍。
3. 乘法運算時，因$0^2=0$、$1^2=1$、$5^2=25$、$6^2=36$，其相乘所取出之個位數皆不斷重複，因此運算結果會收斂至 0、1、5、6 這四個數字，不論是「乘積取末 1 位」或「乘積取末 2 位」其運算結果的個位數皆相同。5 邊形以上由於填入的數字有 5 個以上，公差或費氏數列所產生的數字會包含 5、10 及偶數等，進而產生個位數是 0 的數字，因此皆會收斂至 0。
4. 加法運算時，雖然每一層的數字總和會以 2 倍的方式遞增，但我們推導出當首項、公差、多邊形邊數改變時，可代入$\boldsymbol{2^{n-1}\times\{a_1\times N+[N\times(N-1)\times 0.5]\times d\}}$公式中，獲得多邊形每一層的數字總和，相對也可以利用此公式反求首項、公差、多邊形邊數、層數等數值。
5. 我們用具相同公差或公比的整數數字來進行研究，並且導入 Excel 軟體來輔助計算，另外也利用 GSP 繪圖軟體來進行圖形的建構，運用科技的幫忙讓我們可以快速地進行各種測試，並在表格化的資料中尋找出規律。

由於時間及版面有限，未來我們將朝下列方向繼續深入研究：

1. 加入某些限制條件並利用四則運算交互運用，去觀察其規律性及收斂可能。目前我們使用乘除交替運算，去避免單獨使用乘法時的數字不斷放大問題；使用加減交替運算，去避免單獨使用加法時的數字不斷放大問題。
2. 對於填入任意整數的運算部份之研究做的更完整。
3. 利用科學化及嚴謹的數學方法，去證明所獲得的結果，以更具說服力。
4. 將研究成果與生活連結，例如圖形鎖之開發運用等。

柒、 參考文獻

1. 賴緯綸、林昀緯、方柏翔、蔡淑英、吳慎芬(1994)；數字方塊。國立科學教育館：第 34 屆全國中小學科展國中數學組。
2. 賴緯綸、林昀緯、陳昱臻、方柏翔、蔡淑英、吳慎芬(1995)：從數字方塊到數字八卦。國立科學教育館：第 35 屆全國中小學科展國中數學組。
3. 張建祥、王重凱、林漢良、王玲玉(1995)；方塊數論。國立科學教育館：第 35 全國中小學科展高中數學組。
4. 武良翰、郭梵均、黃亭捷、袁盛博、陳世恩、蔡秀芬(2005)；層出不窮。國立科學教育館：第 45 屆全國中小學科展國中數學組。
5. 唐麒鈞、葉沛鎧、林華葵、李品琦(2010)；數字方尋極限~數字方塊擴展層數極限的探討。國立科學教育館：第 50 屆全國中小學科展國中數學組。
6. 黃柏翰、王榆承、盧佳希、林裕翔(2015)；「乘」先啟後-以乘法探討數字方塊。國立科學教育館：第 55 屆全國中小學科展國小數學組。

【評語】030423

本件作品考慮在多邊形頂點上賦值後，給定一規則是否可連續操作後得新生成的頂點賦值歸於一致。再減法時是古典的結果，其他規則略顯人工。可試著考慮加強特殊數列為值的部分，應有另一番發現。