# 中華民國第 56 屆中小學科學展覽會

# 作品說明書

國中組　數學科

030422

## 四格六邊形的棋盤覆蓋

學校名稱：桃園市立武漢國民中學

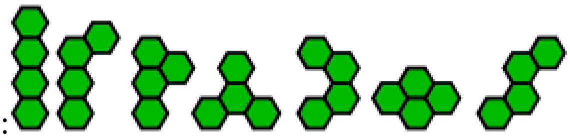
| 作者： | 指導老師： |
| --- | --- |
| 國一　王柏元<br>國一　簡汶柔<br>國一　葉柏鋒 | 章寧靜 |

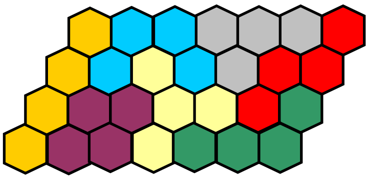

關鍵詞：棋盤、六邊形、塗色

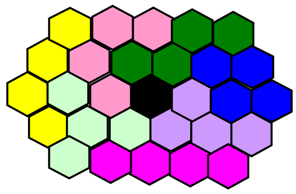
# 摘要

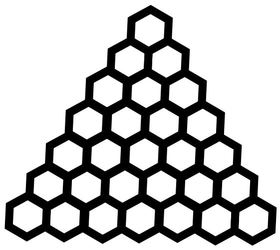
象棋和國際象棋都是由正方格所組成的棋盤，而棋盤覆蓋的研究也大多以正方形為主，那是不是只有正方形才可以當成棋盤的基本圖形呢？事實上，如果只採用一種圖形，那正三角形、正方形、正六邊形都可以鋪滿平面，而達爾文稱讚蜂巢為「在已知的僅憑本能的建構中是最令人驚奇的成就」，各蜂窩的六個側面緊連其他六個蜂窩，這是自然界中所能找到最節省空間及建材的建築設計。本篇研究主要是利用實際操作的過程中來找尋四格六邊形覆蓋平行四邊形、三角形、六邊形，再將發現的結果做歸納分析並深入探討，找出其規則。


## 壹、研究動機

本研究始於偶然的情形下，在學校圖書館看到了「數學放輕鬆」書裡有一道題目為下面 7 種四格六邊形中:  各取一個，請問哪些能拼成下面之圖案?







因為完成了這個問題的挑戰,而覺得有趣,想要繼續發展。在我們拼湊圖形的時候發現,如果我們只取其中一種四格六邊形來覆蓋平行四邊形、六邊形或三角形棋盤也有機會完成。

## 貳、研究目的

一、證明 I 形、P 形、L 形或 O 形的四格六邊形是否可以不重疊地覆蓋平行四邊形棋盤。
二、證明 P 形的四格六邊形是否可以不重疊地覆蓋三角形棋盤。
三、證明正六邊形棋盤去除中間的正六邊形後，是否可以被 I 形、P 形或 L 形四格六邊形不重疊地覆蓋。
四、證明 Y 形、Z 形或 U 形的四格六邊形為何無法不重疊地覆蓋平行四邊形棋盤。
五、證明 Y 形、Z 形、O 形、U 形或 I 形的四格六邊形為何無法不重疊地覆蓋三角形棋盤。
六、證明 Y 形、Z 形或 O 形的四格六邊形為何無法不重疊地覆蓋去除中間的正六邊形棋盤。
七、特殊情況的討論。

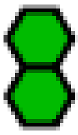
## 參、研究設備及器材

自製六邊形棋盤、六邊形紙片、筆、電腦軟體 Microsoft Office Excel

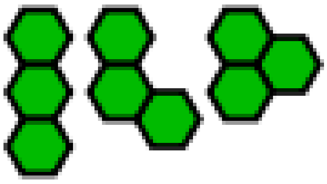
## 肆、名詞介紹及研究方法

### 一、多六邊形的種類：

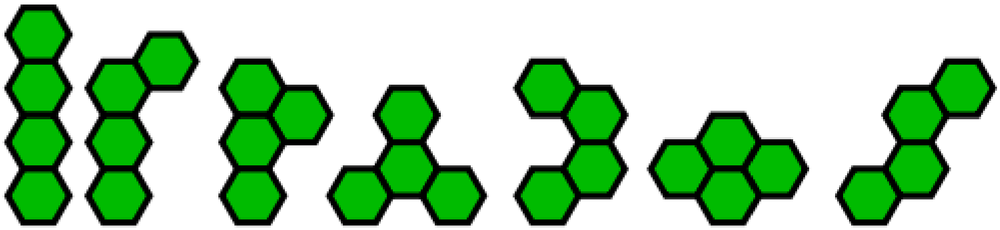
(一) 二格六邊形只有 1 種。



(二) 三格六邊形共有 3 種。

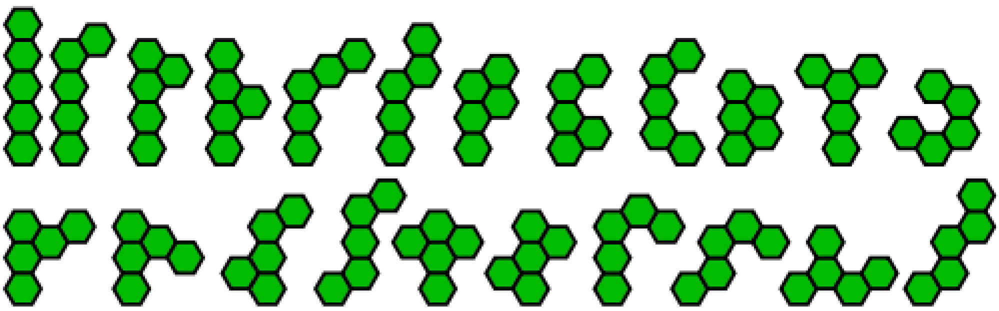


(三) 四格六邊形共有 7 種。我們分別稱它們為 I 形、L 形、P 形、Y 形、U 形、O 形、Z 形。

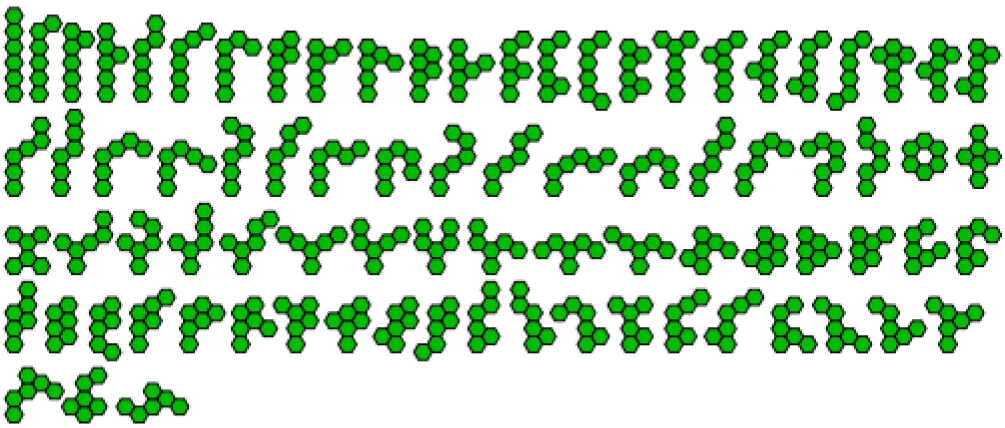


I　L　P　Y　U　O　Z

(四) 五格六邊形共有 22 種。

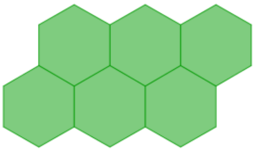


(五) 六格六邊形共有 82 種。

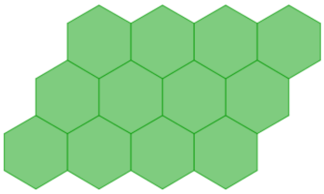


## 二、名詞定義：

(一) 平行四邊形棋盤（Parallelogram）：將數個全等的正六邊形不重疊且緊密排列，外層正六邊形中心可形成平行四邊形的棋盤，我們稱為平行四邊形棋盤。如果平行四邊形棋盤最上層的正六邊形個數為 n，共有 m 層，我們稱為 n×m 平行四邊形棋盤。

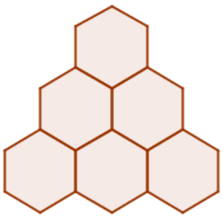


3×2 平行四邊形棋盤

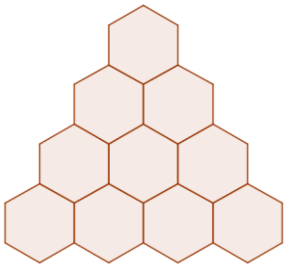


4×3 平行四邊形棋盤

(二) 三角形棋盤（Triangle）：將數個全等的正六邊形以三角形數排列方式組成的棋盤，我們稱為三角形棋盤，每邊 *n* 個正六邊形組成的稱為 *n* 階三角形棋盤。

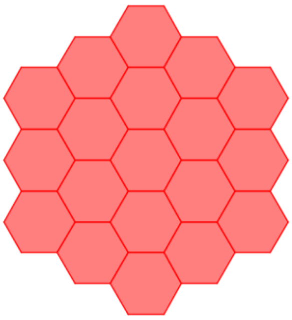


3 階三角形棋盤

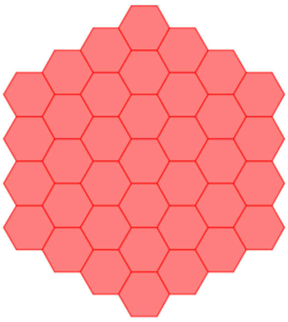


4 階三角形棋盤

(二) 六邊形棋盤（Hexagon）：將數個全等的正六邊形以中心六邊形數排列方式組成的棋盤，我們稱為六邊形棋盤，由最外層每邊 *n* 個正六邊形組成的稱為 *n* 階六邊形棋盤。



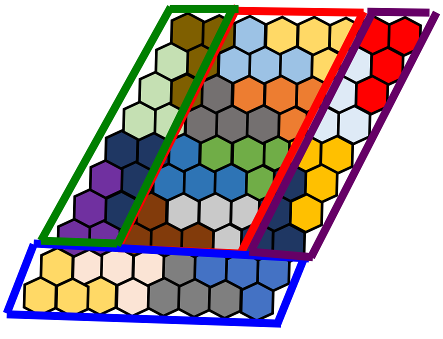
3 階六邊形棋盤



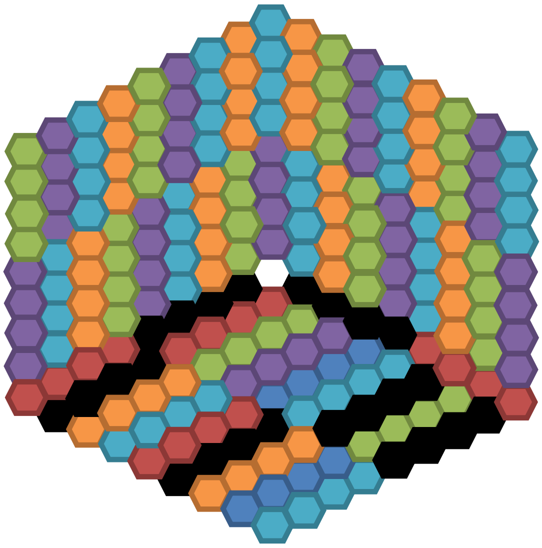
4 階六邊形棋盤

## 三、研究方法：

1.先分割後連結法:在比較大的棋盤中,可分解成數個相同的小棋盤相連結,只需找出小棋盤的覆蓋方式即可推出整個大棋盤的覆蓋情況。



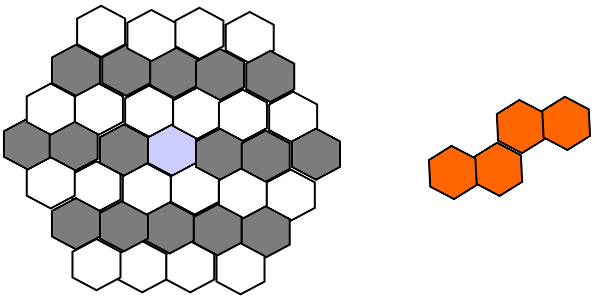
2.利用旋轉對稱去找出排列的方法。



3. 塗色說明無法覆蓋棋盤之原因。

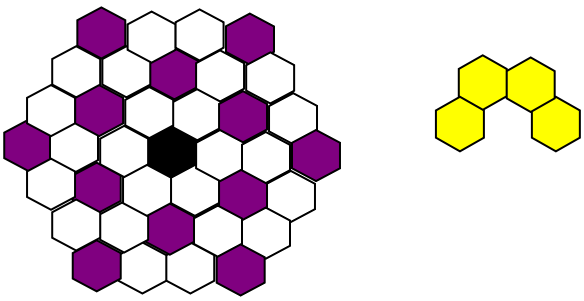
例. 用 9 個 Z 形四格六邊形不能覆蓋 4 階的六邊形棋盤(中空)。

我們將棋盤如圖的方式塗上黑色或白色，由於任一片 Z 形的四格六邊形蓋住 2 個黑格 2 個白格，所以棋盤中黑格與白格的個數應當相等，但圖中的棋盤卻有 16 個黑格，20 個白格，所以 9 個 Y 形、Z 形或 O 形四格六邊形無法覆蓋 4 階的六邊形棋盤(中空)。



4.將棋盤塗上紫色及白色，再利用方程式計算出不同覆蓋情況所需數量。

例:如圖之塗色方法,我們可以得知 U 形四格六邊形無論如何擺放必定覆蓋住 4 白或 2 紫 2 白。



假設 4 白需 x 個，則 2 紫 2 白需 9-x 個

| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 9-x | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 |
| 4x+2(9-x)[共需 24 白] | 20 | 22 | 24 | 26 | 28 | 30 |
| 2(9-x)[共需 12 紫] | 16 | 14 | 12 | 10 | 8 | 6 |
| | 不合 | 不合 | 合 | 不合 | 不合 | 不合 |

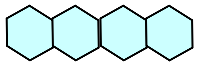
## 伍、研究過程與討論

### 一、平行四邊形棋盤

**1.設 n 是正整數，$4\times n$ 平行四邊形棋盤可以被 I 形四格六邊形不重疊地覆蓋。**

【證明】

(1) 當 $n=1$ 時，如圖為 4x1 平行四邊形棋盤，可以被 I 形四格六邊形不重疊地覆蓋，命題成立。



(2) 設 $n=k$ 時，命題成立，即 $4\times k$ 平行四邊形棋盤，可以被 I 形四格六邊形不重疊地覆蓋。

(3)當 $n=k+1$ 時，圖形為 $4\times(k+1)$ 平行四邊形棋盤。可以分成兩個部份，一個 $4\times k$ 平行四邊形棋盤，一個 $4\times 1$ 平行四邊形棋盤。

由假設知，$4\times K$ 平行四邊形棋盤，可以被 I 形四格六邊形不重疊地覆蓋；由圖知，一個 $4\times 1$ 平行四邊形棋盤顯然可以被 I 形四格多六邊形不重疊地覆蓋。

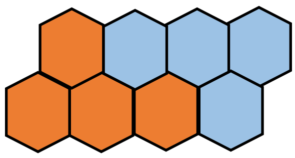
所以當 $n=k+1$ 時，命題也成立。

由(1)(2)及數學歸納法原理得證，$4\times n$ 平行四邊形棋盤可以被 I 形四格多六邊形不重疊地覆蓋。

**2.設 n 是正整數，4x2n 平行四邊形棋盤可以被 P 形四格六邊形不重疊地覆蓋。**

【證明】

(1) 當 n=1 時，如圖為 4x2 平行四邊形棋盤，可以被 P 形四格六邊形不重疊地覆蓋，命題成立。

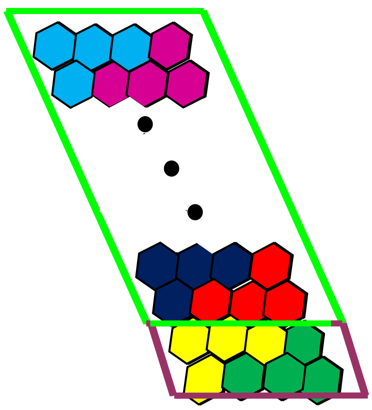


(2) 設 n=k 時，命題成立，即 4x2k 平行四邊形棋盤可以被 P 形四格六邊形不重疊地覆蓋。

當 n=k+1 時，圖形為 4x(2k+2)平行四邊形棋盤。

其中<4,2k+2>=<4,2k>+<4,2>

即圖形可分為一個 4x2k 平行四邊形棋盤和一個 4x2 平行四邊形棋盤，由假設知 4x2k 平行四邊形棋盤可以被 P 形四格六邊形不重疊地覆蓋；由(1)知，4x2 平行四邊形棋盤也可以被 P 形四格六邊形不重疊地覆蓋。故兩個部分都可以被 P 形四格六邊形不重疊地覆蓋，所以當 n=k+1 時，命題也成立。



由(1) (2)及數學歸納法原理得證，4x2n 平行四邊形棋盤可以被 P 形四格六邊形不重疊地覆蓋。

**3.設 $m$、$n$ 是正整數，4m×2n 平行四邊形棋盤可以被 P 形四格六邊形不重疊地覆蓋。**

【證明】

(1) 當 m=1 時，圖形為 4×2n 平行四邊形棋盤，由 2 得知，命題成立。

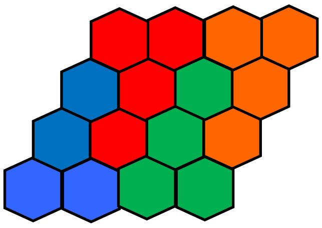
(2) 設 m=k 時，命題成立，即 4k×2n 平行四邊形棋盤可以被 P 形四格六邊形不重疊地覆蓋。

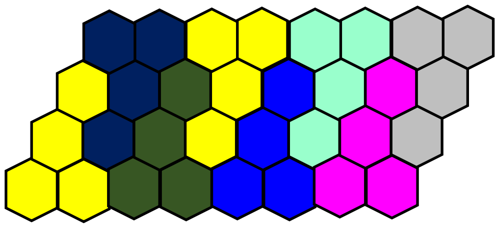
當 m=k+1 時，圖形為(4k+4)x2n 平行四邊形棋盤。

其中<4k+4,2n>=<4k,2n>+<4,2n>

即圖形可分為一個 4k×2n 平行四邊形棋盤和一個 4×2n 平行四邊形棋盤。由假設知，4k×2n 平行四邊形棋盤可以被 P 形四格六邊形不重疊地覆蓋；由 2 知，4×2n 平行四邊形棋盤可以被 P 形四格六邊形不重疊地覆蓋。所以當 $n=k+1$ 時，命題也成立。

由(1) (2)及數學歸納法得證，4m×2n 平行四邊形棋盤可以被 P 形四格六邊形不重疊地覆蓋。

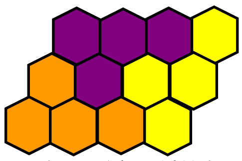




**4.設 n 是正整數，4×(2n+1)平行四邊形棋盤可以被 P 形四格六邊形不重疊地覆蓋。**

【證明】

(1) 當 n=1 時，如圖為 4×3 平行四邊形棋盤，可以被 P 形四格六邊形不重疊地覆蓋，命題成立。



(2) 設 n=k 時，命題成立，即 4×(2k+1)平行四邊形棋盤可以被 P 形四格六邊形不重疊地覆蓋。

當 n=k+1 時，圖形為 4×(2k+3)平行四邊形棋盤。

其中<4,2k+3>=<4,2k+1>+<4,2>

即圖形可分為一個 4×(2k+1)平行四邊形棋盤和一個 4×2 平行四邊形棋盤，由假設知 4×(2k+1)平行四邊形棋盤可以被 P 形四格六邊形不重疊地覆蓋；由 2(1)知，4×2 平行四邊形棋盤也可以被 P 形四格六邊形不重疊地覆蓋。故兩個部分都可以被 P 形四格六邊形不重疊地覆蓋，所以當 n=k+1 時，命題也成立。

由(1) (2)及數學歸納法原理得證，4×(2n+1)平行四邊形棋盤可以被 P 形四格六邊形不重疊地覆蓋。

**5.設 $m$、$n$ 是正整數，4m×(2n+1)平行四邊形棋盤可以被 P 形四格六邊形不重疊地覆蓋。**

【證明】

(1) 當 m=1 時，圖形為 4×(2n+1)平行四邊形棋盤，由 4 得知，命題成立。

(2) 設 m=k 時，命題成立，即 4k×(2n+1)平行四邊形棋盤可以被 P 形四格六邊形不重疊地覆蓋。

當 m=k+1 時，圖形為(4k+4)×(2n+1)平行四邊形棋盤。

其中<4k+4,2n+1>=<4k,2n+1>+<4,2n+1>

即圖形可分為一個 4k×(2n+1)平行四邊形棋盤和一個 4×(2n+1)平行四邊形棋盤。由假設

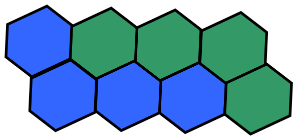
知，4k×(2n+1)平行四邊形棋盤可以被 P 形四格六邊形不重疊地覆蓋；由 4 知，4×(2n+1)平行四邊形棋盤可以被 P 形四格六邊形不重疊地覆蓋。所以當 $n=k+1$ 時，命題也成立。由(1) (2)及數學歸納法得證，4m×(2n+1)平行四邊形棋盤可以被 P 形四格六邊形不重疊地覆蓋。

**<附加說明>由 2~5 的證明，可以得知 P 形的四格六邊形可以不重疊地覆蓋 $4m\times n(n\neq 1)$ 平行四邊形棋盤，另外同理可證 I 形的四格六邊形可以不重疊地覆蓋 $4m\times n$ 平行四邊形棋盤。**

**6.設 n 是正整數，4×2n 平行四邊形棋盤可以被 L 形四格六邊形不重疊地覆蓋。**

【證明】

(1) 當 n=1 時，圖形為 4×2 平行四邊形棋盤，可以被 L 形四格六邊形不重疊地覆蓋，命題成立。



(2) 設 n=k 時，命題成立，即 4×2k 平行四邊形棋盤可以被 L 形四格六邊形不重疊地覆蓋。當 n=k+1 時，圖形為 4×(2k+2)平行四邊形棋盤。

其中<4,2k+2>=<4,2k>+<4,2>

即圖形可分為一個 4×2k 平行四邊形棋盤和一個 4×2 平行四邊形棋盤，由假設知 4×2k 平行四邊形棋盤可以被 L 形四格六邊形不重疊地覆蓋；由(1)知，4×2 平行四邊形棋盤也可以被 L 形四格六邊形不重疊地覆蓋。故兩個部分都可以被 L 形四格六邊形不重疊地覆蓋，所以當 n=k+1 時，命題也成立。

由(1) (2)及數學歸納法原理得證，4×2n 平行四邊形棋盤可以被 L 形四格六邊形不重疊地覆蓋。

**7.設 *m*、*n* 是正整數，4m×2n 平行四邊形棋盤可以被 L 形四格六邊形不重疊地覆蓋。**

【證明】

(1) 當 m=1 時，圖形為 4×2n 平行四邊形棋盤，由 6 得知，命題成立。

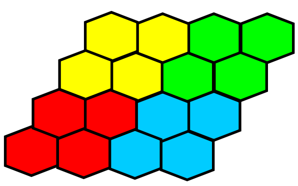
(2) 設 m=k 時，命題成立，即 4k×2n 平行四邊形棋盤可以 L 形四格六邊形不重疊地覆蓋。當 m=k+1 時，圖形為(4k+4)×2n 平行四邊形棋盤。

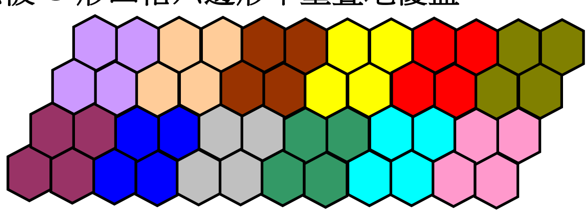
其中<4k+4,2n>=<4k,2n>+<4,2n>

即圖形可分為一個 4k×2n 平行四邊形棋盤和一個 4×2n 平行四邊形棋盤。由假設知，4k×2n 平行四邊形棋盤可以被 L 形四格六邊形不重疊地覆蓋；由 6 知，4×2n 平行四邊形棋盤可以被 L 形四格六邊形不重疊地覆蓋。所以當 $n=k+1$ 時，命題也成立。

由(1) (2)及數學歸納法得證，4m×2n 平行四邊形棋盤可以被 L 形四格六邊形不重疊地覆蓋。

**8.設 *m*、*n* 是正整數，4m×2n 平行四邊形棋盤可以被 O 形四格六邊形不重疊地覆蓋。**





## 二、三角形棋盤

我們利用等差級數公式可以得到，*n* 階三角形棋盤的六邊形個數為:

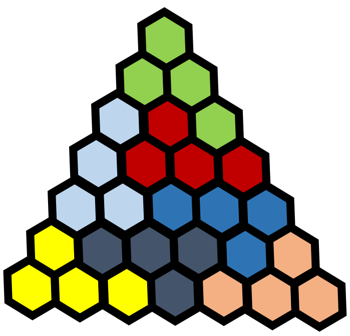
$1+2+3+\cdots+n=\dfrac{(1+n)n}{2}$，而可以不重疊地覆蓋棋盤的必要條件是棋盤中的六邊形個數是 4 的倍數，為便於計算我們利用 excel 去尋找是 4 的倍數的 *n* 階三角形棋盤。

| n | 1+n | n(1+n)/2 | n(1+n)/2/4 |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 0.25 |
| 2 | 3 | 3 | 0.75 |
| 3 | 4 | 6 | 1.5 |
| 4 | 5 | 10 | 2.5 |
| 5 | 6 | 15 | 3.75 |
| 6 | 7 | 21 | 5.25 |
| 7 | 8 | 28 | 7 |
| 8 | 9 | 36 | 9 |
| 9 | 10 | 45 | 11.25 |
| 10 | 11 | 55 | 13.75 |
| 11 | 12 | 66 | 16.5 |
| 12 | 13 | 78 | 19.5 |
| 13 | 14 | 91 | 22.75 |
| 14 | 15 | 105 | 26.25 |
| 15 | 16 | 120 | 30 |
| 16 | 17 | 136 | 34 |
| 17 | 18 | 153 | 38.25 |
| 18 | 19 | 171 | 42.75 |
| 19 | 20 | 190 | 47.5 |
| 20 | 21 | 210 | 52.5 |
| 21 | 22 | 231 | 57.75 |
| 22 | 23 | 253 | 63.25 |
| 23 | 24 | 276 | 69 |
| 24 | 25 | 300 | 75 |

**9. 設 n 是正整數，8n-1 階三角形棋盤可以被 P 形四格六邊形不重疊地覆蓋。**

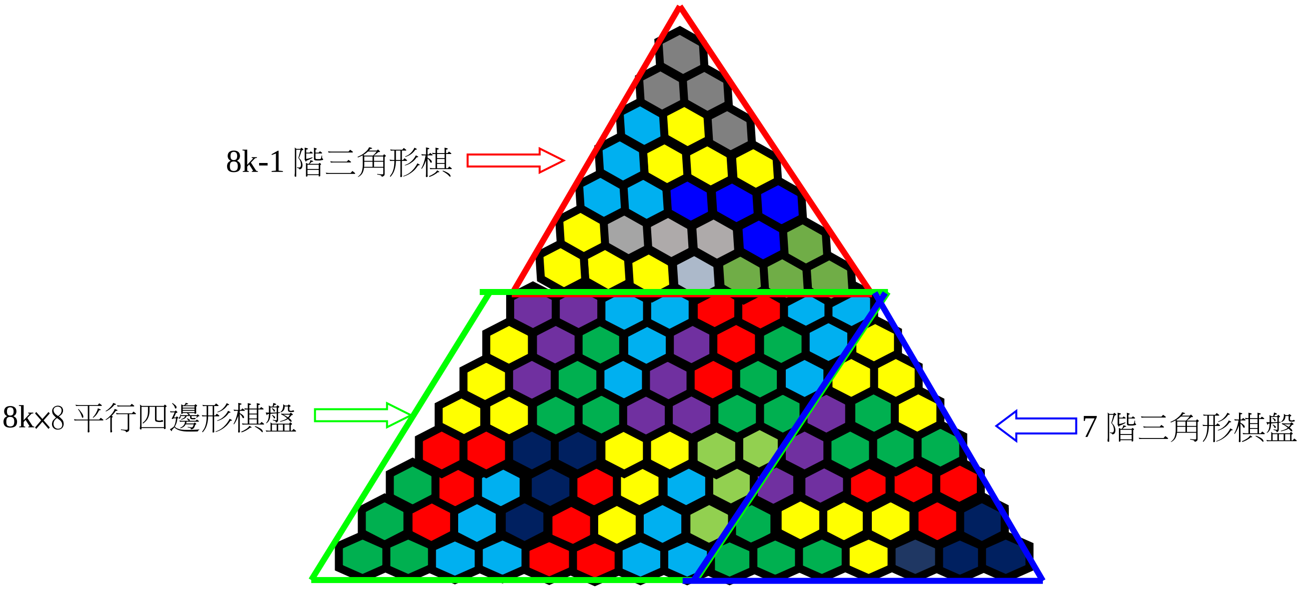
【證明】

(1) 當 $n=1$時，圖形為 7 階三角形棋盤，由下圖可以得知，命題成立。



(2) 設$n=k$時，命題成立，即 8k-1 階三角形棋盤可以被 P 形四格六邊形不重疊地覆蓋。

當$n=k+1$時，圖形為 8k+7 階三角形棋盤，可以分成三個部份，分別是 8k-1 階三角形棋盤、8k×8 平行四邊形棋盤、以及 7 階三角形棋盤。




由假設知，8k-1 階三角形棋盤可以被 P 形四格六邊形不重疊地覆蓋，

由 3 知，8k×8 平行四邊形棋盤可以被 P 形四格六邊形不重疊地覆蓋。

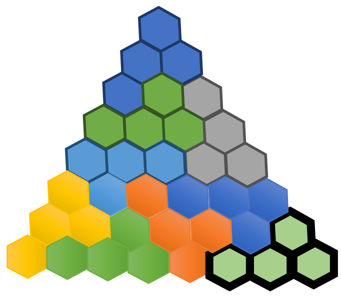
由(1)知，7 階三角形棋盤可以被 P 形四格六邊形不重疊地覆蓋。

因此，三個部分都可以被 P 形四格六邊形不重疊地覆蓋，所以當$n=k+1$時，命題也成立。由(1) (2) 及數學歸納法得證，8n-1 階三角形棋盤可以被 P 形四格六邊形不重疊地覆蓋。

**10. 設 n 是正整數，8n 階三角形棋盤可以被 P 形四格六邊形不重疊地覆蓋。**

【證明】

(1) 當$n=1$時，圖形為 8 階三角形棋盤，由下圖可以得知，命題成立。



(2) 設$n=k$時，命題成立，即 8k 階三角形棋盤可以被 P 形四格六邊形不重疊地覆蓋。

當$n=k+1$時，圖形為 8k+8 階三角形棋盤，可以分成三個部份，分別是 8k 階三角形棋盤、(8k+1)x8 平行四邊形棋盤、以及 7 階三角形棋盤。

由假設知，8k 階三角形棋盤可以被 P 形四格六邊形不重疊地覆蓋，

由 5 知，(8k+1)x8 平行四邊形棋盤可以被 P 形四格六邊形不重疊地覆蓋。

由(1)知，7 階三角形棋盤可以被 P 形四格六邊形不重疊地覆蓋。

因此，三個部分都可以被 P 形四格六邊形不重疊地覆蓋，所以當$n=k+1$時，命題也成立。由(1) (2) 及數學歸納法得證，8n 階三角形棋盤可以被 P 形四格六邊形不重疊地覆蓋。

三、六邊形棋盤(中空)

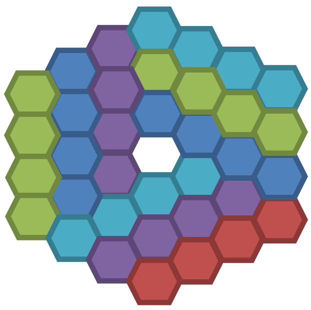
我們利用等差級數公式可以得到，$n$ 階六邊形棋盤(中空)的六邊形個數為:
$6+12+18+\cdots+6n=6(1+2+\cdots+n)=3(1+n)n$ ，而可以不重疊地覆蓋棋盤的必要條件是棋盤中的六邊形個數是 4 的倍數，為便於計算我們利用 excel 去尋找是 4 的倍數的 $n$ 階六邊形棋盤(中空)。

| n | 1+n | 3n(1+n) | 3n(1+n)/4 |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 6 | 1.5 |
| 2 | 3 | 18 | 4.5 |
| 3 | 4 | 36 | 9 |
| 4 | 5 | 60 | 15 |
| 5 | 6 | 90 | 22.5 |
| 6 | 7 | 126 | 31.5 |
| 7 | 8 | 168 | 42 |
| 8 | 9 | 216 | 54 |
| 9 | 10 | 270 | 67.5 |
| 10 | 11 | 330 | 82.5 |
| 11 | 12 | 396 | 99 |
| 12 | 13 | 468 | 117 |
| 13 | 14 | 546 | 136.5 |
| 14 | 15 | 630 | 157.5 |
| 15 | 16 | 720 | 180 |
| 16 | 17 | 816 | 204 |
| 17 | 18 | 918 | 229.5 |
| 18 | 19 | 1026 | 256.5 |
| 19 | 20 | 1140 | 285 |
| 20 | 21 | 1260 | 315 |

**11. 設 n 是正整數，4n 階六邊形棋盤(中空)可以被 I 形四格六邊形不重疊地覆蓋。**

【證明】

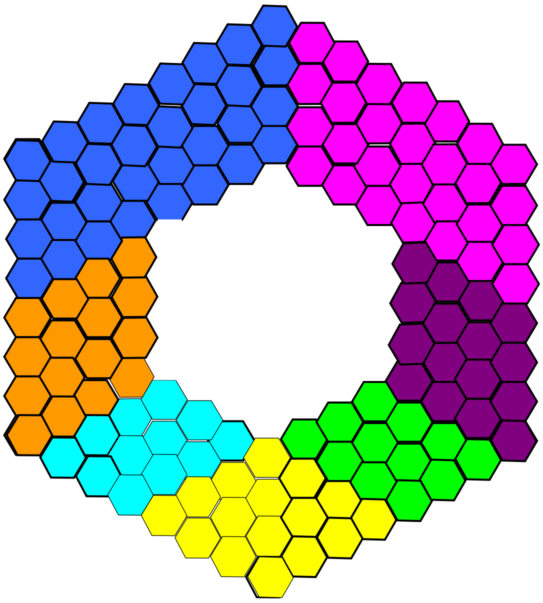
(1) 當 $n=1$ 時，4 階六邊形棋盤(中空)可以被 I 形四格六邊形不重疊地覆蓋，命題成立。



(2) 設 $n=k$ 時，命題成立，即 4k 階六邊形棋盤(中空)可以被 I 形四格六邊形不重疊地覆蓋。

當 $n=k+1$ 時，4k+4 階六邊形棋盤可以分成兩個部分，一個是 4k 階六邊形棋盤，一

個是最外層 4 階六邊形環，如圖之方式分成七個 4xn 的平行四邊形棋盤。



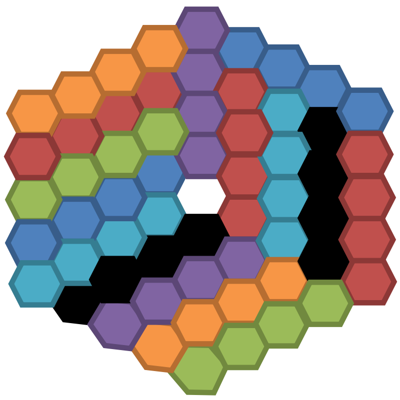
由假設知，4k 階六邊形棋盤(中空)可以被 I 形四格六邊形不重疊地覆蓋；又已知最外層 4 階六邊形環可以被 I 形骨牌不重疊地覆蓋，所以當 $n=k+1$時，命題也成立。

由(1) (2)及數學歸納法原理得證，在 4n 階六邊形棋盤(中空)可以被 I 形四格六邊形不重疊地覆蓋。

**12. 設 n 是正整數，4n+1 階六邊形棋盤(中空)可以被 I 形四格六邊形不重疊地覆蓋。**

【證明】

(1) 當 $n=1$時，5 階六邊形棋盤(中空)可以被 I 形四格六邊形不重疊地覆蓋，命題成立。



(2) 設 $n=k$時，命題成立，即 4k+1 階六邊形棋盤(中空)可以被 I 形四格六邊形不重疊地覆蓋。

當 $n=k+1$時，4k+5 階六邊形棋盤可以分成兩個部分，一個是 4k+1 階六邊形棋盤，一個是最外層 4 階六邊形環，如 11 圖之方式分成七個 4xn 的平行四邊形棋盤。

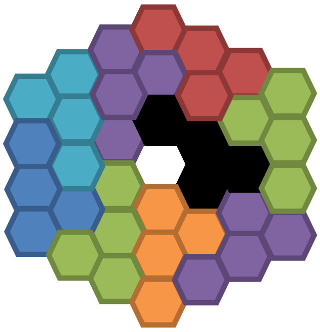
由假設知，4k+1 階六邊形棋盤(中空)可以被 I 形四格六邊形不重疊地覆蓋；又由 1 知最外層 4 階六邊形環可以被 I 形骨牌不重疊地覆蓋，所以當 $n=k+1$時，命題也成立。

由(1) (2)及數學歸納法原理得證，在 4n+1 階六邊形棋盤(中空)可以被 I 形四格六邊形不重疊地覆蓋。

**13. 設 n 是正整數，4n 階六邊形棋盤(中空)可以被 P 形四格六邊形不重疊地覆蓋。**

【證明】

(1) 當 $n=1$ 時，4 階六邊形棋盤(中空)可以被 P 形四格六邊形不重疊地覆蓋，命題成立。



(2) 設 $n=k$ 時，命題成立，即 4k 階六邊形棋盤(中空)可以被 P 形四格六邊形不重疊地覆蓋。

當 $n=k+1$ 時，4k+4 階六邊形棋盤可以分成兩個部分，一個是 4k 階六邊形棋盤，一個是最外層 4 階六邊形環，將其分成七個 4xn 的平行四邊形棋盤。

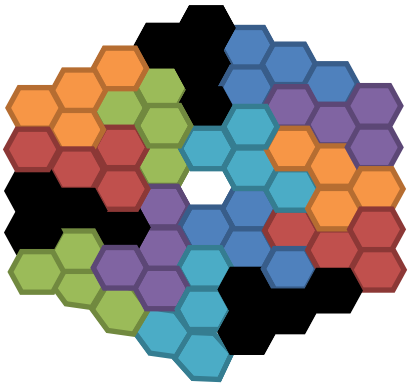
由假設知，4k 階六邊形棋盤(中空)可以被 P 形四格六邊形不重疊地覆蓋；又由 2 知最外層 4 階六邊形環可以被 P 形骨牌不重疊地覆蓋，所以當 $n=k+1$ 時，命題也成立。

由(1) (2)及數學歸納法原理得證，在 4n 階六邊形棋盤(中空)可以被 P 形四格六邊形不重疊地覆蓋。

**14. 設 n 是正整數，4n+1 階六邊形棋盤(中空)可以被 P 形四格六邊形不重疊地覆蓋。**

【證明】

(1) 當 $n=1$ 時，5 階六邊形棋盤(中空)可以被 P 形四格六邊形不重疊地覆蓋，命題成立。



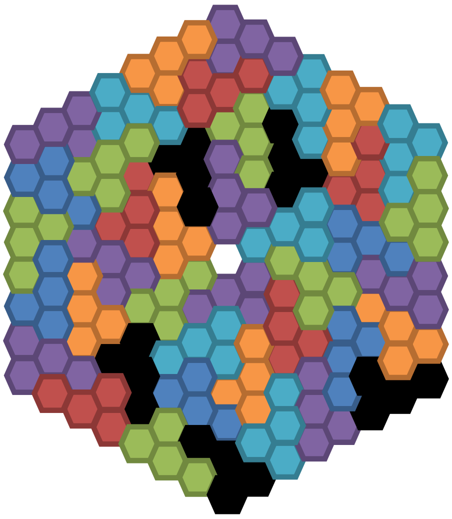
(2) 設 $n=k$ 時，命題成立，即 4k+1 階六邊形棋盤(中空)可以被 P 形四格六邊形不重疊地覆蓋。

當 $n=k+1$ 時，4k+5 階六邊形棋盤可以分成兩個部分，一個是 4k+1 階六邊形棋盤，一個是最外層 4 階六邊形環，如圖之方式分成七個 4xn 的平行四邊形棋盤。

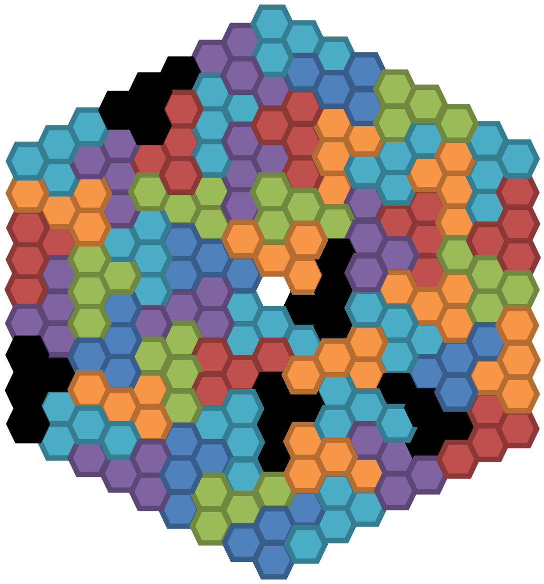
由假設知，4k+1 階六邊形棋盤(中空)可以被 P 形四格六邊形不重疊地覆蓋；又由 2 知最外層 4 階六邊形環可以被 P 形骨牌不重疊地覆蓋，所以當 $n=k+1$ 時，命題也成立。

由(1) (2)及數學歸納法原理得證，在 4n+1 階六邊形棋盤(中空)可以被 P 形四格六邊形不重疊地覆蓋。

8 階六邊形棋盤(中空)



9 階六邊形棋盤(中空)

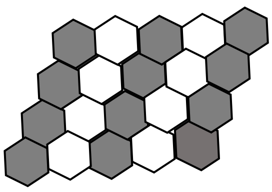


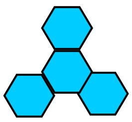
**四、其他**

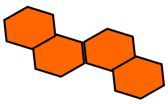
**15. 設 n 是正整數，用 2n+1 個 Y 形、Z 形或 O 形四格六邊形無法不重疊地覆蓋(2n+1)×4 的平行四邊形棋盤。**

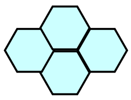
【說明】

我們將棋盤如圖的方式塗上黑色或白色，由於任一片 Y 形、Z 形或 O 形的四格六邊形蓋住 2 個黑格 2 個白格，所以棋盤中黑格與白格的個數應當相等，但圖中的棋盤卻有 12 個黑格，8 個白格，所以 5 個 Y 形無法不重疊地覆蓋這個棋盤。









【證明】

我們將棋盤如上圖的方式塗上黑色或白色，由於任一片 Y 形、Z 形或 O 形的四格六邊形蓋住 2 個黑格 2 個白格，所以棋盤中黑格與白格的個數應當相等，但圖中的棋盤卻有 4n+4 個黑格，4n 個白格，所以 2n+1 個 Y 形無法不重疊地覆蓋這個棋盤。

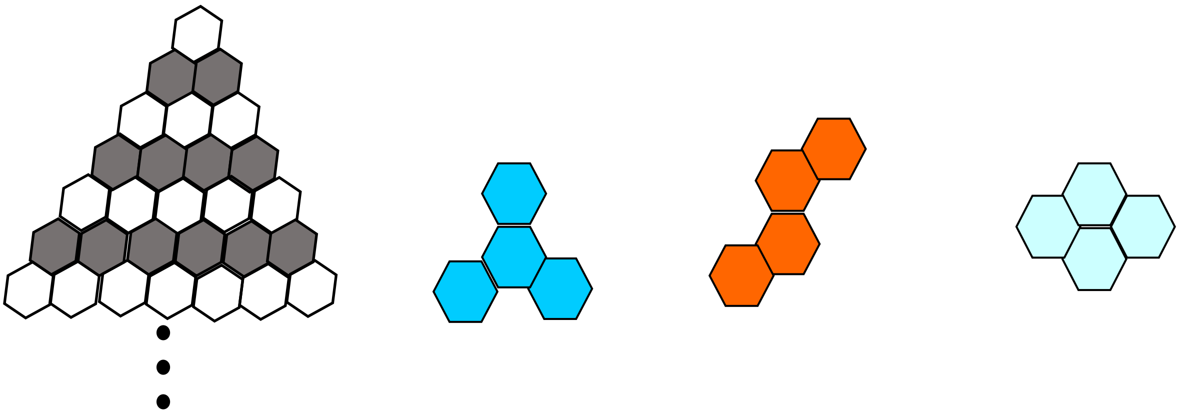
**16. 設 n 是正整數，用 Y 形、Z 形或 O 形四格六邊形無法不重疊地覆蓋 n 階的三角形棋盤。**

【證明】

若六邊形個數不能被 4 整除，四格六邊形必然無法不重疊地覆蓋三角形棋盤。故只需討論 n=8t 及 n=8t-1 的情況。若 n=8t，我們將棋盤下圖的方式塗上黑色或白色，由於任一片 Y 形、Z 形或 O 形的四格六邊形蓋住 2 個黑格 2 個白格，所以棋盤中黑格與白格的個數應當相等，但圖中的棋盤卻有 $2+4+6+\cdots+8t=\dfrac{(2+8t)4t}{2}=16t^2+4t$ 個黑格，

$1+3+5+\cdots+8t-1=\dfrac{(1+8t-1)4t}{2}=16t^2$ 個白格，所以 $8t^2+t$ 個 Y 形、Z 形或 O 形四格六邊形

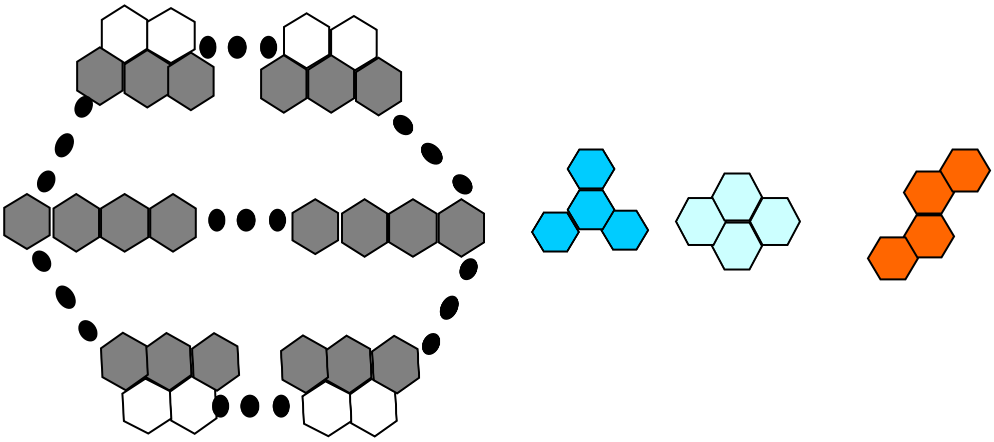
無法不重疊地覆蓋 n=8t 階的三角形棋盤。若 n=8t-1，我們將棋盤如圖的方式塗上黑色或白色，由於任一片 Y 形、Z 形或 O 形的四格六邊形蓋住 2 個黑格 2 個白格，所以棋盤中黑格與白格的個數應當相等，但圖中的棋盤卻有 $2+4+6+\cdots+8t-2=\dfrac{(2+8t-2)(4t-1)}{2}=16t^2-4t$ 個黑格，$1+3+5+\cdots+8t-1=\dfrac{(1+8t-1)4t}{2}=16t^2$ 個白格，所以 $8t^2-t$ 個 Y 形、Z 形或 O 形四格六邊形無法不重疊地覆蓋 n=8t-1 階的三角形棋盤。



**17. 設 n 是正整數，用 Y 形、Z 形或 O 形四格六邊形無法不重疊地覆蓋 n 階的六邊形棋盤(中空)。**

【證明】

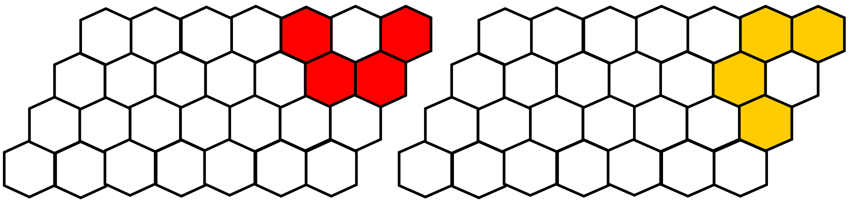
若六邊形個數不能被 4 整除，四格六邊形必然無法不重疊地覆蓋三角形棋盤。故只需討論 n=4t 及 n=4t+1 的情況。若 n=4t，我們將棋盤如圖的方式塗上黑色或白色，由於任一片 Y 形、Z 形或 O 形的四格六邊形蓋住 2 個黑格 2 個白格，所以棋盤中黑格與白格的個數應當相等，但圖中的棋盤黑格與白格的差為(8t+8t-4)-(4t+4t-1-1)-2t=6t-4，所以 Y 形、Z 形或 O 形四格六邊形無法不重疊地覆蓋 n=4t 階的六邊形棋盤(中空)。若 n=4t+1，我們將棋盤如圖的方式塗上黑色或白色，由於任一片 Y 形、Z 形或 O 形的四格六邊形蓋住 2 個黑格 2 個白格，所以棋盤中黑格與白格的個數應當相等，但圖中的棋盤黑格與白格的差為(4t+4t+1-1)-(4t) =4t，所以 Y 形、Z 形或 O 形四格六邊形無法不重疊地覆蓋 n=4t 階的六邊形棋盤(中空)。。



**18. 用 U 形四格六邊形無法不重疊地覆蓋平形四邊形棋盤。**

【證明】

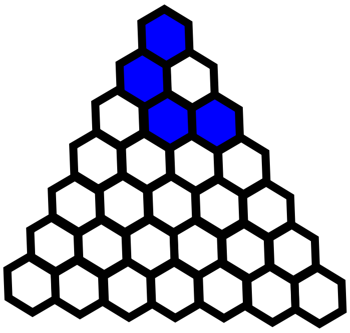
因右上角的格子僅有如圖的兩個放法，不論如何擺放均會發現有一格無法再放



**19. 用 U 形四格六邊形無法不重疊地覆蓋三角形棋盤。**

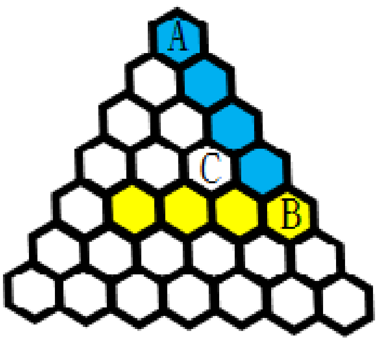
【證明】

因右上角的格子僅有如圖的兩個放法，不論如何擺放均會發現有一格無法再放



**20. 用 I 形四格六邊形無法不重疊地覆蓋 7 階三角形棋盤。**

【證明】

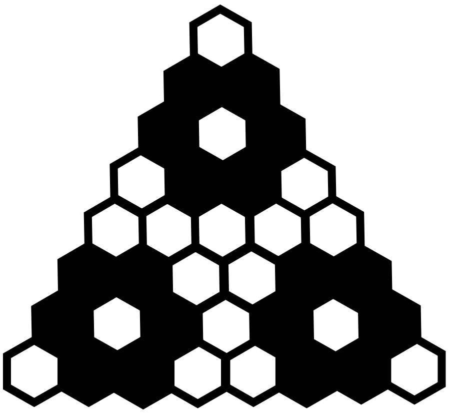



因 A 格放入 I 形四格六邊形後，B 格僅有一種放法，此時 C 格無法覆蓋，故 I 形四格六邊形無法不重疊地覆蓋 7 階三角形棋盤。

**21. 用 I 形四格六邊形無法不重疊地覆蓋 8 階三角形棋盤。**

【證明】

如下圖之塗色方法，我們可以得知 I 形四格六邊形無論如何擺放必定覆蓋住 2 黑 2 白或 4 白。

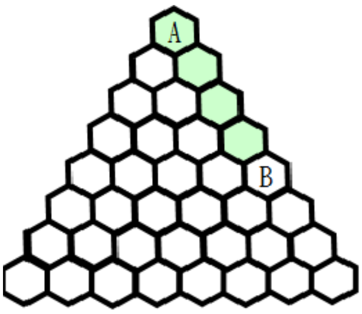


假設 2 黑 2 白需 x 個，則 4 白需 9-x 個

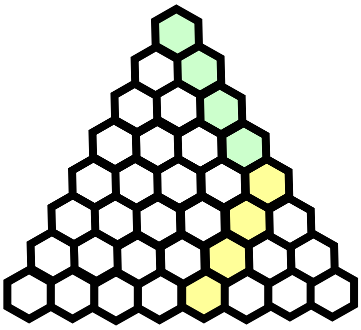
| x | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 9-x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2x+4(9-x) [共需 18 白] | 18 | 20 | 22 | 24 | 26 | 28 |
| 2x[共需 18 黑] | 18 | 16 | 14 | 12 | 10 | 8 |
| | 合 | 不合 | 不合 | 不合 | 不合 | 不合 |

由此可以得出唯有九個 2 黑 2 白，才會成立。

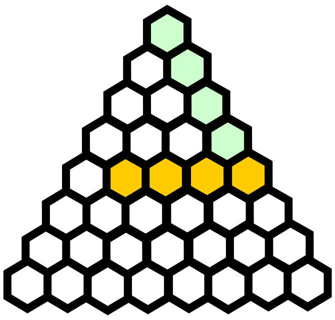
先放入 A 格，可得如下的圖形



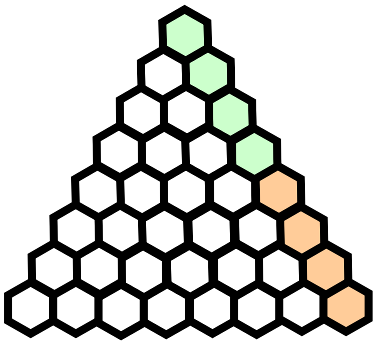

接著放入 B 格，可得下面 3 種情況:



右下角的格子格數不夠，所以不能成功。



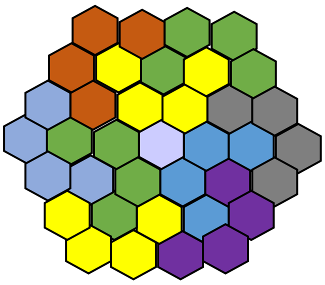
因僅需 2 黑 2 白，所以此覆蓋方式不合。



因為填滿了 8 格後，剩下 7 階，上面我們已經證明出 7 階不能成功。

綜合以上得知，I 形四格六邊形無法不重疊地覆蓋 8 階三角形棋盤。

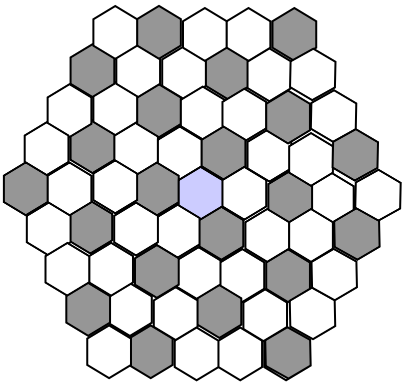
**22.**用 **9** 個 **U** 形四格六邊形可以不重疊地覆蓋 4 階的六邊形棋盤(中空)。

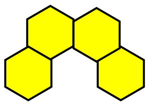


23. 用 **15** 個 **U** 形四格六邊形無法不重疊地覆蓋 5 階的六邊形棋盤(中空)。

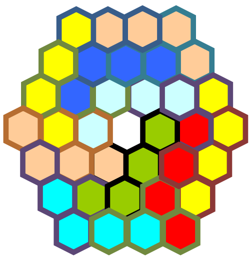
【證明】

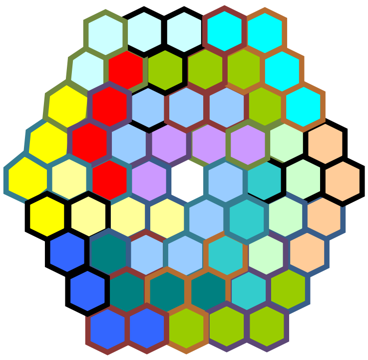
如圖之塗色方法，我們可以得知 U 形四格六邊形無論如何擺放必定覆蓋住偶數個白格(4 白或 2 黑 2 白)，然而圖中白格的總數是奇數個(39 個)，所以 U 形四格六邊形無法不重疊地覆蓋 5 階的六邊形棋盤(中空)。

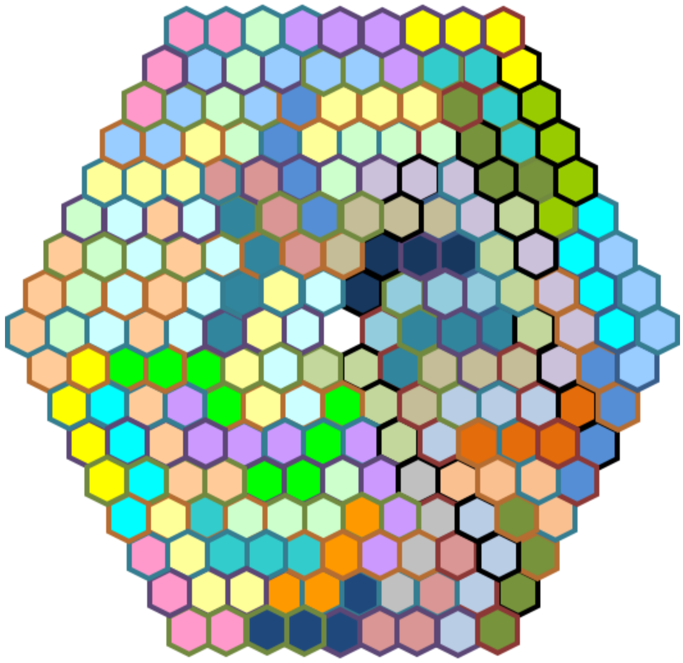




**24.**用 **9** 個 **L** 形四格六邊形可以不重疊地覆蓋 4 階、5 階、8 階及 9 階的六邊形棋盤(中空)。







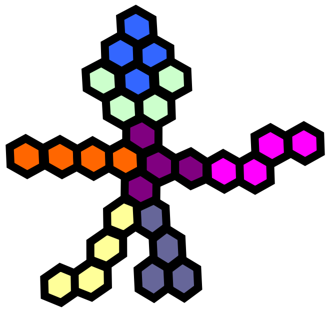
## 陸、研究結果

一、I 形的四格六邊形可以不重疊地覆蓋 $4m \times n$ 平行四邊形棋盤。
二、P 形的四格六邊形可以不重疊地覆蓋 $4m \times n(n \neq 1)$ 平行四邊形棋盤。
三、L 形或 O 形的四格六邊形可以不重疊地覆蓋 $4m \times 2n$ 平行四邊形棋盤。
四、P 形的四格六邊形可以不重疊地覆蓋 8n+1 階及 8n 階三角形棋盤。
五、4n 階及 4n+1 正六邊形棋盤(中空)，可以被 I 形或 P 形四格六邊形不重疊地覆蓋。
六、Y 形、Z 形或 U 形的四格六邊形無法不重疊地覆蓋平行四邊形棋盤。
七、Y 形、Z 形、O 形或 U 形的四格六邊形無法不重疊地覆蓋三角形棋盤。
八、Y 形、Z 形、O 形或 U 形的四格六邊形無法不重疊地覆蓋三角形棋盤。
九、 I 形的四格六邊形無法不重疊地覆蓋 7 階及 8 階三角形棋盤。
十、4 階六邊形棋盤(中空)，可以被 U 形四格六邊形不重疊地覆蓋。
十一、5 階六邊形棋盤(中空)，無法被 U 形四格六邊形不重疊地覆蓋。
十二、4 階、5 階、8 階及 9 階六邊形棋盤(中空)，可以被 L 形四格六邊形不重疊地覆蓋。

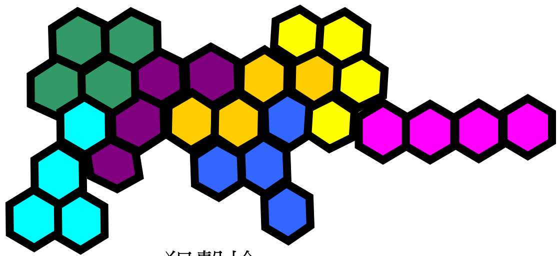
## 柒、未來發展

多六邊形的覆蓋在我們搜尋的資料中，大多是採用多種圖形來完成指定的圖形覆蓋，而我們在這次的作品中，採用的是用單一形狀的四格六邊形，來不重疊地覆蓋指定的圖形。本來我們想從二格、三格六邊形開始研究，但已有人討論，至於單一形狀的五格多六邊形或者是更多格的情況，亦或是指定各種不同的圖形覆蓋則是未來可以再研究的方向。

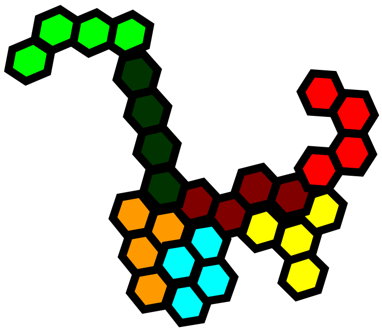
七塊四格六邊形組合而成的造型拼圖:



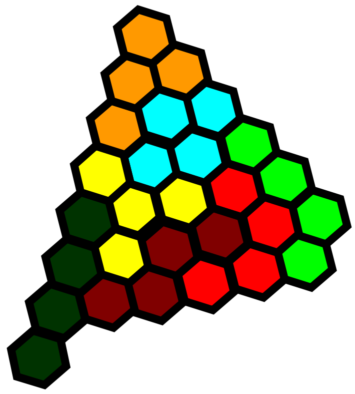
忍者



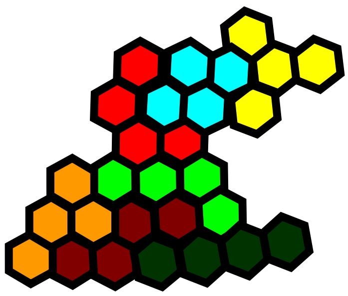
狙擊槍



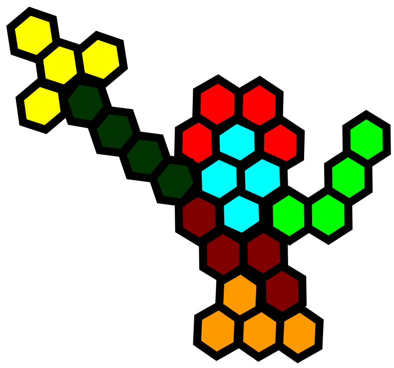
長頸鹿



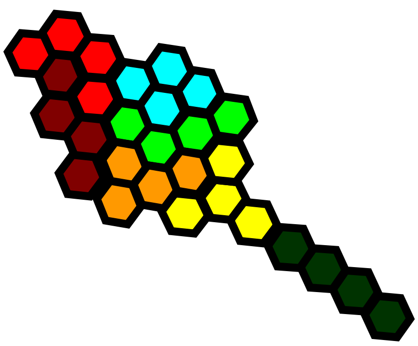
旗子



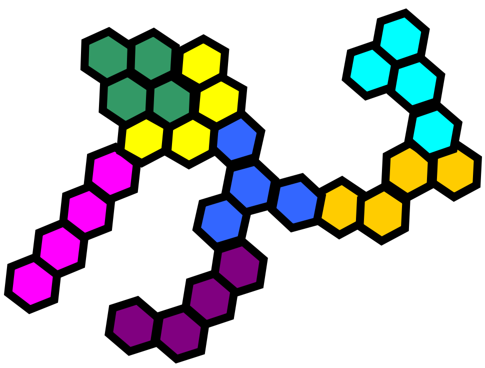
戰車



雕像



火炬



猴子

## 捌、參考資料

1. 國民中學數學課本一元一次方程式、等差數列與級數。
2. 數學放輕鬆。T.帕帕斯 著 世茂出版。出版日期：2004
3. 單墫(民 93)。棋盤上的數學。台北市:九章出版社。
4. 多六邊形骨牌中的三格骨牌定理。https://etoe.tc.edu.tw/index/vrs/did/25228
5. Polyhex。維基百科。http://en.wikipedia.org/wiki/Polyhex_(mathematics)
6. Polyhexes: Puzzles & Solutions。取自 http://puzzler.sourceforge.net/docs/polyhexes.html
7. Polyhex Oddities。取自 http://recmath.org/PolyCur/hexodd/index.html

## 【評語】030422

有趣的圖形拼貼問題。作者們利用簡單的分析技巧，說明了用哪些形式的四格六邊形可以拼出三角形、平行四邊形和六邊形棋盤。分析方式精簡且能充分掌握處理問題的關鍵點，十分難得。稍嫌美中不足的是，部分的結果不是太完整，如果能將所有的情形作完整的討論，結果會更好。