中華民國第56屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

第二名

030421

你說…三線共不共點?

學校名稱：臺北市立蘭雅國民中學

作者：	指導老師：
國三 邱培庭	林靖捷 章念慈

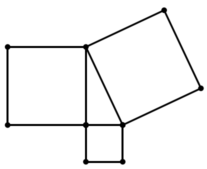
關鍵詞：三線共點、多線共點

摘要

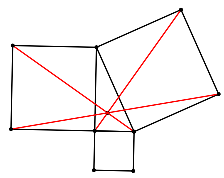
本研究主要在探討正 n 邊形包圍任意三角形時，會出現三線共點或多線共點的情形。研究中發現，其交點位置分別會受到內部任意三角形及外圍正 n 邊形的內角影響。另外，如果只移動內部任意三角形的其中一個頂點，可以發現其三線或多線共點之交點的軌跡為一個圓。而正 n 邊形包圍任意三角形的性質也可推廣至正 n 邊形包圍任意 m 邊形，且其三線或多線共點之線數與組數會隨著外圍正 n 邊形和內部任意 m 邊形邊數的增加而增加。

壹、　研究動機

在八上的數學課程中，常常以圖形（如圖一）證明畢氏定理，在解題目時我發現若將圖一中的直角三角形及正方形的頂點連接，可以得到三條線交於一點(如圖二)，引起我的興趣，因此想要探討如果換成其他圖形是否還會有相同的情形。



圖一



圖二

貳、　研究目的

一、　正三角形包圍任意三角形之三線共點與交點位置的探討及證明

二、　正方形包圍任意三角形之三線共點與交點位置的探討及證明

三、　正 n 邊形包圍任意三角形之 $n-1$ 線共點與交點位置的探討及證明

四、　正 n 邊形包圍任意三角形之 $n-1$ 線共點之交點的軌跡探討及證明

五、　正 n 邊形包圍任意 m 邊形之 m 組 $n-1$ 線共點的探討及證明

參、　研究設備與器材

紙、筆、尺、圓規、電腦、GSP、Word

肆、　研究過程

一、名詞解釋

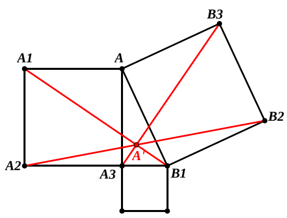
本研究主要是探討正 n 邊形包圍任意三角形及任意 m 邊形的三線或 n−1線共點，其中 n 為正多邊形邊數（n≥3, n∈ ℕ），m 為內部任意多邊形之邊數（m≥4, m∈ ℕ），在本文中的各段有特別限定 n 及 m 的範圍。而三線共點代表三條線段交於一點的狀態，若是n−1條直線交於一點，則稱為 n−1線共點。正 n 邊形包圍任意三角形或任意 m 邊形則表示以任意三角形或任意 m 邊形的各邊分別向外作出相連之正 n 邊形的圖形。內部任意三角形或任意 m 邊形則是指被正 n 邊形包圍的任意三角形或任意 m 邊形。另外，θ為角的度數，在本文中的各段分別代表不同的角。

二、研究準備

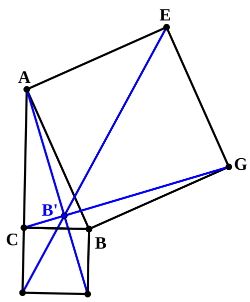
如圖三，在正方形包圍直角三角形中，將各頂點以逆時針的方向作標示，若連接$\overleftrightarrow{A_1B_1}$、$\overleftrightarrow{A_2B_2}$、$\overleftrightarrow{A_3B_3}$，可得到$\overleftrightarrow{A_1B_1}$、$\overleftrightarrow{A_2B_2}$、$\overleftrightarrow{A_3B_3}$交於 A'點，這組三線共點不過 A 點，而且所有直線均只經過兩個正方形的內部。之後，如圖四、圖五，以相同的方式連接直線，還可以再得到兩組三線共點，其交點分別為 B'及 C'點，其中 C'點位於值幾三角形的頂點 C 點上。

接下來，我想先將外圍的正方形改成正三角形，從最少的邊數開始研究，探討是否也能以相同的方式得到三線共點。如圖六，由直角三角形 ABC 的各邊向外作正三角形 ABF、BCE、CAD，形成正三角形包圍直角三角形，再連接$\overleftrightarrow{AE}$、$\overleftrightarrow{BD}$、$\overleftrightarrow{CF}$，發現三線交於 Q 點。

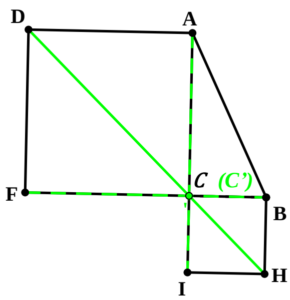
此連接方式不同於圖三中外圍為正方形的連接方式，每一個正三角形的頂點都會與一個直角三角形的頂點連接，且只有一組三線共點。因此我決定將它獨立出來討論與證明，再將直角三角形改成銳角三角形與鈍角三角形，並探討其交點的情形。



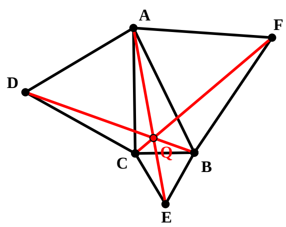
圖三



圖四



圖五



圖六

三、正 n 邊形包圍任意三角形（n=3）

以下為正三角形△ABF、△BCE、△CAD 包圍直角三角形△ABC 之三線$\overleftrightarrow{AE}$、$\overleftrightarrow{BD}$、$\overleftrightarrow{CF}$共點的證明：

如圖七，作正三角形△CAD、△ABF 的外接圓 O_1、O_2，設兩圓交於 Q 點（和 A 點），連接$\overline{QA}$、$\overline{QD}$、$\overline{QC}$、$\overline{QB}$、$\overline{QF}$

∵在 O_1 中，$\angle AQD=\frac{1}{2}\,AD\ =60°$，$\angle DQC=\frac{1}{2}\,DC\ =60°$，

又在 O_2 中，$\angle AQF=\frac{1}{2}\,AF\ =60°$，$\angle FQB=\frac{1}{2}\,FB\ =60°$

$\therefore \angle AQD+\angle FQA+\angle BQF=180°$且$\angle DQC+\angle AQD+\angle FQA=180°$

即 B、Q、D 三點共線且 C、Q、F 三點共線 $\Rightarrow$ $\overleftrightarrow{BD}$和$\overleftrightarrow{CF}$交於 Q 點

如圖八，作正三角形△BCE 外接圓 O_3，兩圓交於 P 點（和 C 點），連接$\overline{PA}$、$\overline{PD}$、$\overline{PC}$、$\overline{PE}$、$\overline{PB}$

∵在 O_1 中，$\angle APD=\frac{1}{2}\,AD\ =60°$，$\angle DPC=\frac{1}{2}\,DC\ =60°$，

在 O_3 中，$\angle CPE=\frac{1}{2}\,CE\ =60°$，$\angle EPB=\frac{1}{2}\,EB\ =60°$

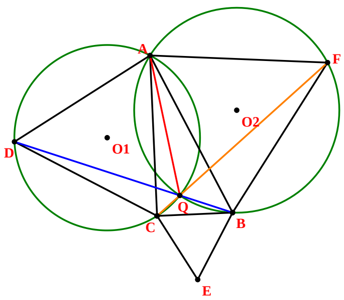
$\therefore \angle DPC+\angle CPE+\angle EPB=180°$且$\angle APD+\angle DPC+\angle CPE=180°$

即 B、P、D 三點共線且 A、P、E 三點共線 $\Rightarrow$ $\overleftrightarrow{BD}$和$\overleftrightarrow{AE}$交於 P 點

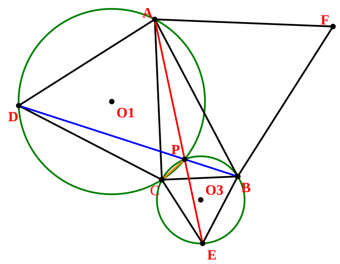
∵Q 點、P 點均為$\overline{BD}$和圓 O_1 的交點

∴P 點即為 Q 點

$\Rightarrow$ $\overleftrightarrow{AE}$、$\overleftrightarrow{BD}$、$\overleftrightarrow{CF}$三線共點



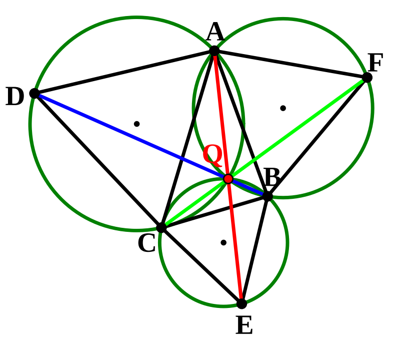
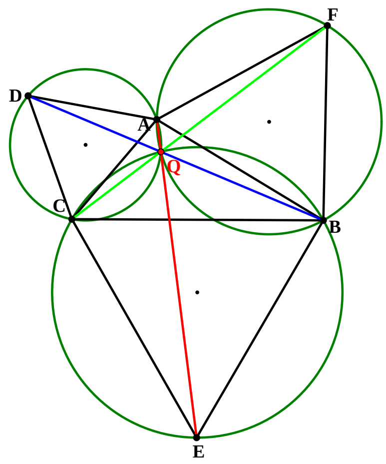
圖七



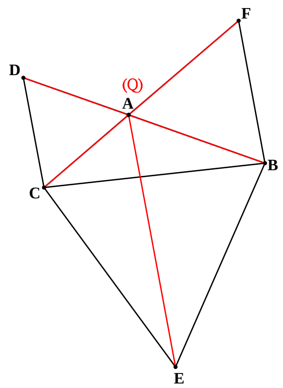
圖八

正三角形包圍直角三角形時有一組三線共點，且外圍正三角形的三個外接圓也相交於此三線之交點。從上述證明可以得知，此三線共點與△ABC 是否為直角三角形無關，因為∠AQD、∠DQC、∠FQA、∠BQF、∠EQB、∠CQE 均是正三角形之外接圓的圓周角，所以不論△ABC 為哪種三角形，其度數均為 60°。因此，即使內部三角形並無直角，只要外圍仍是正三角形，也會形成三線共點。

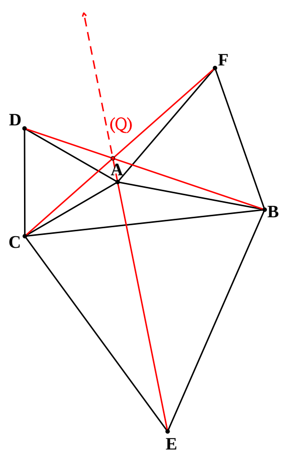
下表為將內部的直角三角形分別改成銳角三角形及鈍角三角形的交點情形：

正三角形包圍銳角三角形	正三角形包圍鈍角三角形
	

由此可知，不論內部三角形是銳角三角形或是鈍角三角形，仍會形成三線共點。但隨著三角形角度的改變，可以發現三線的交點位置也會有所改變，且會靠近內部三角形之最大角的頂點。如上表△ABC 為鈍角三角形時，當∠BAC的度數增加時，Q 點會越來越靠近 A 點，因此我想繼續探討，三線的交點是否有可能出現在三角形之外，於是我繼續增加最大角∠BAC的度數，發現其交點 Q 有可能會落 A 點上（如圖九）或是在三角形之外（如圖十）。



圖九



圖十

接下來，我要證明當$\overleftrightarrow{\mathrm{BD}}$、$\overleftrightarrow{\mathrm{CF}}$的交點 Q 位在內部三角形△ABC 之外時仍會形成三線共點：

如圖十一，作正三角形△CAD、△ABF 的外接圓 O_1、O_2，設兩圓交於 Q 點（和 A 點），連$\overline{\mathrm{QB}}$、$\overline{\mathrm{QF}}$、$\overline{\mathrm{QD}}$、$\overline{\mathrm{QC}}$

∵在 O_1 中，$\angle \mathrm{DQC} = \frac{1}{2} DC = 60°$，$\angle \mathrm{CQA} = \frac{1}{2} CA = 60°$，

又在 O_2 中，$\angle \mathrm{BQF} = \frac{1}{2} BF = 60°$，$\angle \mathrm{AQB} = \frac{1}{2} AB = 60°$

∴ $\angle \mathrm{DQC} + \angle \mathrm{CQA} + \angle \mathrm{AQB} = 180°$且$\angle \mathrm{CQA} + \angle \mathrm{AQB} + \angle \mathrm{BQF} = 180°$

即 B、Q、D 三點共線且 C、Q、F 三點共線

$\Rightarrow$ $\overleftrightarrow{\mathrm{BD}}$和$\overleftrightarrow{\mathrm{CF}}$交於 Q 點

如圖十二，再作正三角形△BCE 的外接圓 O_3，設 O_1、O_3 交於 P 點（和 C 點），連接$\overline{\mathrm{PD}}$、$\overline{\mathrm{PC}}$、$\overline{\mathrm{PA}}$、$\overline{\mathrm{PE}}$、$\overline{\mathrm{PB}}$

∵在圓 O_1 中，$\angle \mathrm{CPA} = \frac{1}{2} CA = 60°$，又在圓 O_3 中，$\angle \mathrm{CPE} = \frac{1}{2} CE = 60°$

∴ $\angle \mathrm{CPA} = \angle \mathrm{CPE} = 60°$ $\Rightarrow$ P、A、E三點共線

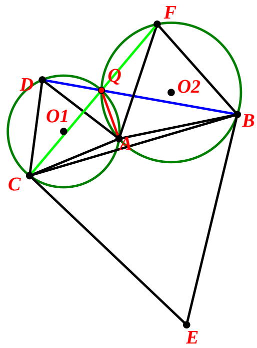
∵ $\angle \mathrm{BPE} + \angle \mathrm{EPC} + \angle \mathrm{DPC} = 180°$

∴B、P、D 三點共線

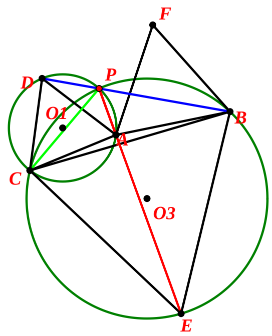
∵Q 點、P 點均為$\overleftrightarrow{\mathrm{BD}}$與圓 O_1 之交點

∴P 點即為 Q 點

$\Rightarrow$ $\overleftrightarrow{AE}$、$\overleftrightarrow{BD}$、$\overleftrightarrow{CF}$三線共點



圖十一

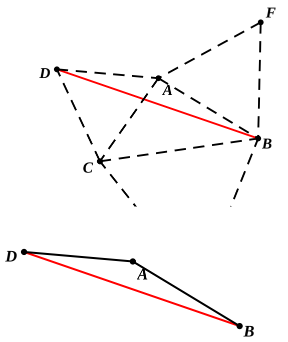


圖十二

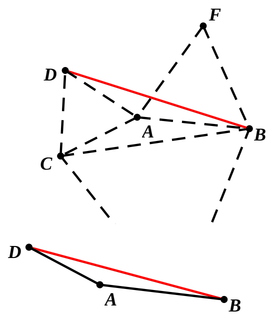
從以上證明可知，正三角形 ABF、BCE、CAD 包圍任意三角形 ABC 之三線共點的交點可能出現在$\triangle$ABC的內部或外部，接下來我將焦點放在三線共點的其中一條直線$\overleftrightarrow{BD}$上，局部觀察頂點 A、B、D 的相對位置與三線共點交點 Q 的位置關係。

從前面的證明已知，當$\triangle$ABC 為銳角三角形或鈍角三角形時，$\overleftrightarrow{AE}$、$\overleftrightarrow{BD}$、$\overleftrightarrow{CF}$三線會交於一點 Q，若從$\overleftrightarrow{BD}$來看，假如頂點 A、B、D 的相對位置如圖十三，$\overleftrightarrow{BD}$在任意三角形$\triangle$ABC 的頂點 A 下方，且 Q 點必會落在$\overleftrightarrow{BD}$上，所以 Q 點必會出現在$\triangle$ABC 內部或正三角形 DCA 內部；若再從$\overleftrightarrow{CF}$來看，同理可知 Q 點必會出現在$\triangle$ABC 內部或正三角形 ABF 內部。又$\overleftrightarrow{BD}$、$\overleftrightarrow{CF}$交於 Q，所以 Q 點必落在$\triangle$ABC 內部。

接下來改變$\triangle$ABC 的角度使 A、B、D 的相對位置如圖十四的形狀，若從$\overleftrightarrow{BD}$來看，因為$\overleftrightarrow{BD}$在任意三角形$\triangle$ABC 的頂點 A 上方，表示 Q 點必會落在$\angle DAB$的區域內；若再從$\overleftrightarrow{CF}$來看，同理可知 Q 點必會出現在$\angle CAF$的區域內。又$\overleftrightarrow{BD}$、$\overleftrightarrow{CF}$交於 Q 點，所以 Q 點必落在$\triangle$ABC 外部的$\angle DAF$的區域內。



圖十三

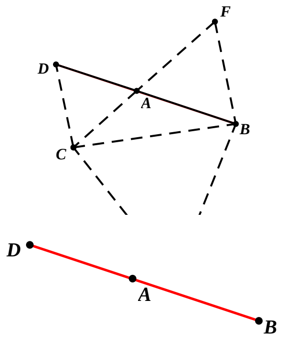


圖十四

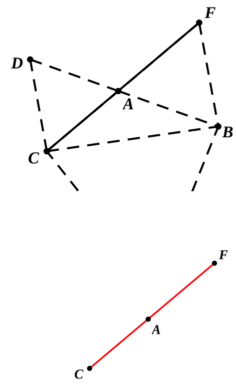
由此可知，交點的位置會和$\angle DAB$和$\angle CAF$的大小有關，其中$\angle DAC=\angle FAB=60°$，因此整體來說只和$\angle CAB$的大小有關，也就是說交點 Q 的位置與內部$\triangle$ABC 的最大角有關。

從$\overleftrightarrow{BD}$來看，若要使 Q 點落在$\triangle$ABC 內部，$\overleftrightarrow{BD}$必須在 A 點的下方，也就是$\angle CAB <120°$；反之，若要使 Q 點落在$\triangle$ABC 外部，$\overline{BD}$必須在 A 點的上方，也就是$\angle CAB >120°$。

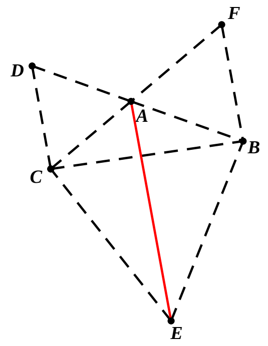
如圖十五、圖十六、圖十七，若$\angle CAB=120°$時，因為 D、A、B 三點共線且 C、A、F 三點共線，故 Q 點剛好落在頂點 A 上。



圖十五



圖十六



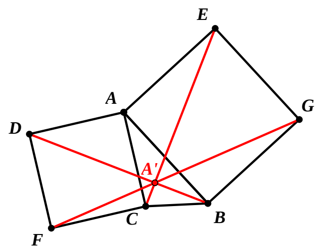
圖十七

接下來，我將繼續探討若以相同方式連接直線，將正 n 邊形的邊數增加時是否也會有多線共點的情況出現。

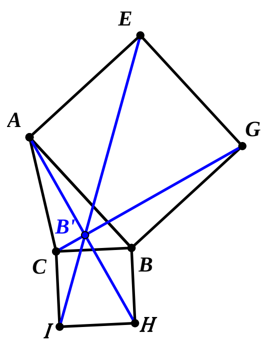
三、正 n 邊形包圍任意三角形（n≥4）

（一）n=4

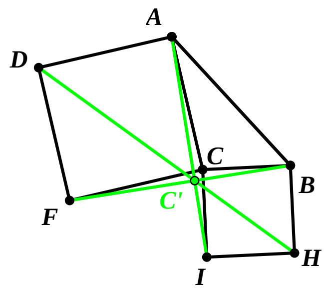
正方形包圍任意三角形時，可以得到三組三線共點（如圖十八、圖十九、圖二十）。



圖十八



圖十九



圖二十

如圖二十一，接下來我提出正方形包圍任意三角形之三線共點的證明：

作正方形 ACFD 和正方形 AEGB 的外接圓 O_1、O_2，設兩圓交於 Q 點（和 A 點）

連接$\overline{QA}$、$\overline{QD}$、$\overline{QF}$、$\overline{QC}$、$\overline{QB}$、$\overline{QG}$、$\overline{QE}$。

∵在 O_1 中，$\angle AQD = \frac{1}{2}\,AD = 45°$，$\angle DQF = \frac{1}{2}\,DF = 45°$，$\angle FQC = \frac{1}{2}\,FC = 45°$，

在 O_2 中，$\angle EQA = \frac{1}{2}\,EA = 45°$，$\angle GQE = \frac{1}{2}\,GE = 45°$，$\angle BQG = \frac{1}{2}\,BG = 45°$

$\therefore \angle DQF + \angle AQD + \angle EQA + \angle GQE = 180°$

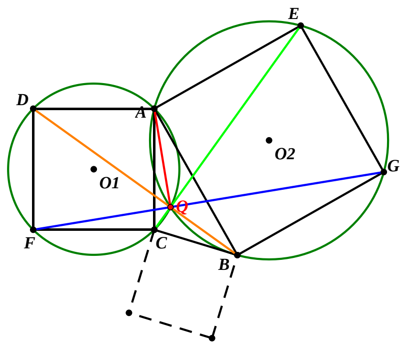
且$\angle AQD + \angle EQA + \angle GQE + \angle BQG = 180°$

且$\angle FQC + \angle DQF + \angle AQD + \angle EQA = 180°$

∴F、Q、G 三點共線，D、Q、B 三點共線，

E、Q、C 三點共線

$\Rightarrow \overleftrightarrow{FG}$、$\overleftrightarrow{BD}$、$\overleftrightarrow{CE}$交於 Q 點

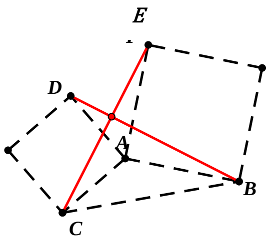


圖二十一

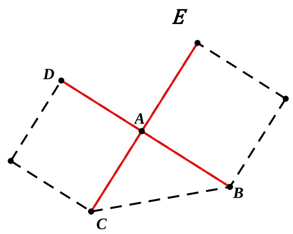
同理，也可以使用相同方式證明如圖十九和圖二十的另外兩組三線共點。接下來，我把焦點放在正方形包圍任意三角形的三組三線共點之交點的位置變化。

先以圖十八為例，從$\overleftrightarrow{BD}$來看，已知三線共點的交點 A’點必會落在$\overleftrightarrow{BD}$上，因為$\overleftrightarrow{BD}$在任意三角形△ABC 的頂點 A 下方，所以 A’點必會出現在△ABC 內部或正方形 DFCA 內部；若再連接$\overleftrightarrow{CE}$，可知 A’點必會出現在△ABC 內部或正方形 ABGE 內部。又$\overleftrightarrow{BD}$、$\overleftrightarrow{CE}$交於 A’點，所以 A’點必落在△ABC 內部。故按照上述的探討，可知當$\angle CAB < 90°$，正方形包圍任意三角形 ABC 之三線共點的交點會落在三角形 ABC 的內部。

依照此方法推論，當$\angle CAB > 90°$，正方形包圍任意三角形 ABC 之三線共點的交點會落在三角形 ABC 外部的$\angle DAF$之區域內（如圖二十二）；當$\angle CAB = 90°$，也就是正方形包圍直角三角形 ABC 時的三線共點之交點會剛好落在三角形 ABC 的頂點 A 上（如圖二十三）。



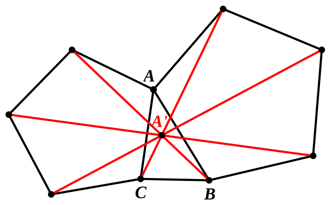
圖二十二



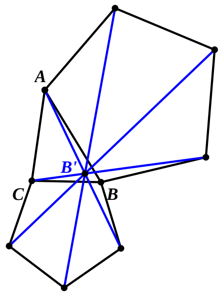
圖二十三

（二）n>4

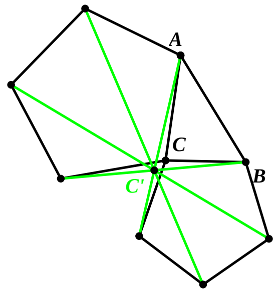
接下來我探討 n= 5的情形，也可以使用相同方式得到三組四線共點（如圖二十四、圖二十五、圖二十六）。但是可以從圖中發現，共點線段比 n=4 時多了一條。



圖二十四

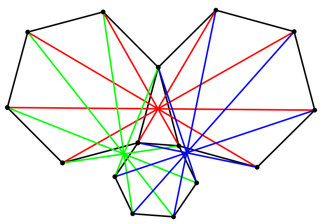
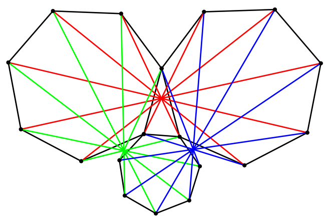
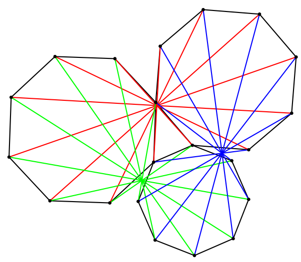


圖二十五



圖二十六

為了了解正 n 邊形的邊數不斷增加時的多線共點的線數，我將 n=6、7、8 的圖形整理如下：

名稱	正六邊形包圍任意三角形	正七邊形包圍任意三角形	正八邊形包圍任意三角形
多線共點	3 組五線共點	3 組六線共點	3 組七線共點
圖示			

由上表可知，正 n 邊形包圍任意三角形時，會形成 3 組 n-1 線共點，另外，隨著內部三角形角度及外圍正 n 邊形內角的不同，其 n-1 線共點之交點位置也會有所改變，會出現交點在三角形內部、外部或是頂點上的情況，接下來，我繼續提出正 n 邊形包圍任意三角形時，n-1 線共點證明，及其交點 Q 之位置的探討。

其中雖然 n-1 線共點的交點 Q 位置有所不同，但無論是在任意三角形 ABC 的內部或外部，均可利用相同的概念證明，故以下一併說明：

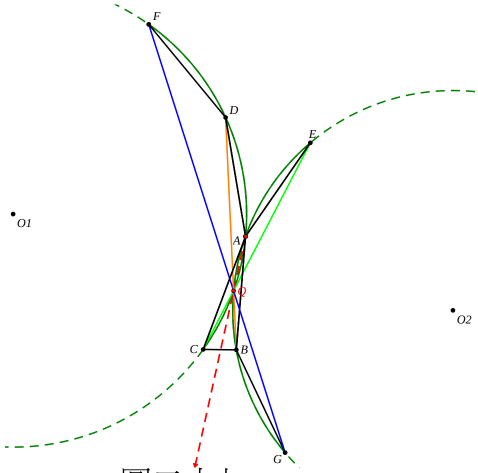
如圖二十七，作正 n 邊形包圍任意三角形ABC，再作正 n 邊形外接圓 O_1、O_2，設兩圓交於 Q 點（和 A 點）且 Q 點在任意三角形 ABC 內部，從 Q 點出發作$\overleftrightarrow{QA}$、$\overleftrightarrow{QD}$、$\overleftrightarrow{\mathrm{QF}}$、$\overleftrightarrow{QC}$、$\overleftrightarrow{QB}$、$\overleftrightarrow{QG}$、$\overleftrightarrow{QE}$。

$\because$在 O_1 中，$\angle DQF = \frac{1}{2}$ DF $= \frac{1}{2} \times \frac{360°}{n}$ ，

$\angle AQD = \frac{1}{2}$ AD $= \frac{1}{2} \times \frac{360°}{n}$ ，

又在 O2 中，$\angle AQE = \frac{1}{2}$ AE $= \frac{1}{2} \times \frac{360°}{n}$

$\therefore \angle DQF = \angle AQD = \angle AQE = \frac{1}{2} \times \frac{360°}{n}$



圖二十七

$\because$從$\overline{AC}$作出的正 n 邊形共會有 n 個頂點，而在$\angle FQC$所對的弧上共有 $n-4$個頂點（扣除頂點 F、D、A、C），可構成以 Q 為頂點的$(n-4)+1$ 個角，每個角均為 O_1 上的圓周角，每個圓周角均等於$\frac{1}{2} \times \frac{360°}{n}$。同理，從$\overline{AB}$作出的正 n 邊形，在$\angle EQG$所對的弧上共有 $n-4$個頂點（扣除頂點 E、A、B、G），可構成以 Q 為頂點的$(n-4)+1$ 個角，每個角均為 O_2 上的圓周角，每個圓周角均等於$\frac{1}{2} \times \frac{360°}{n}$。

$\therefore \angle FQC = \angle EQG = \frac{1}{2} \times \frac{360°}{n} \times (n-3)$

$\because \angle FQG = \angle DQF + \angle AQD + \angle AQE + EQG$

$= \frac{1}{2} \times \frac{360°}{n} \times 3 + \frac{1}{2} \times \frac{360°}{n} \times (n-3)$

$= \frac{1}{2} \times \frac{360°}{n} \times n = 180°$

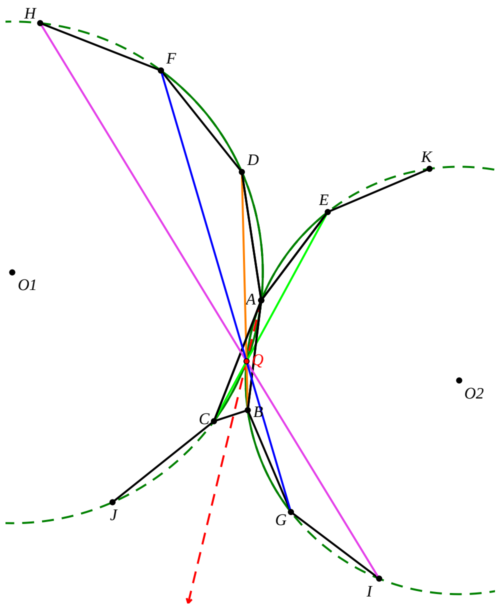
$\therefore$F、Q、G 三點共線且 C、Q、E 三點共線

（$\angle EQG = \angle FQC$）

$\because \angle DQF = \angle GQB = \frac{1}{2} \times \frac{360°}{n}$

$\therefore$ D、Q、B 三點共線（對頂角相等）

$\Rightarrow \overleftrightarrow{DB}$、$\overleftrightarrow{FG}$、$\overleftrightarrow{CE}$交於 Q 點



圖二十八

如圖二十八，再連接$\overline{QH}$、$\overline{QI}$

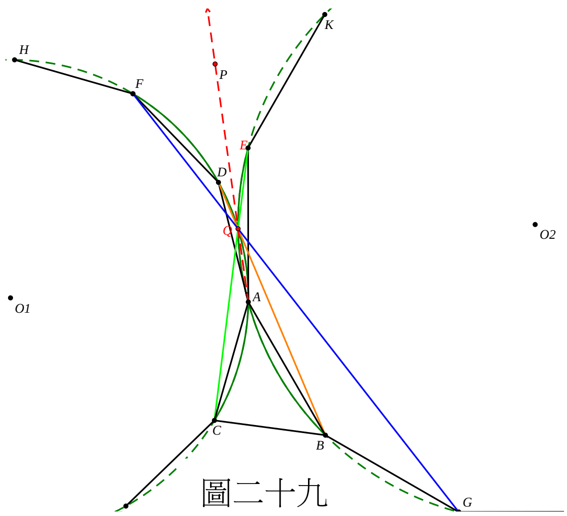
$\because$在 O_1 中，$\angle HQF = \frac{1}{2}$ HF $= \frac{1}{2} \times \frac{360°}{n}$ ，又在 O_2 中，$\angle GQI = \frac{1}{2}$ GI $= \frac{1}{2} \times \frac{360°}{n}$

$\therefore \angle HQF = \angle GQI = \frac{1}{2} \times \frac{360°}{n}$又 F、Q、G 三點共線

$\therefore$ H、Q、I 三點共線

故沿此方式連接，共可得 n-1 線共點。

另外，如圖二十九，作正 n 邊形包圍任意三角形，再作正 n 邊形外接圓 O_1、O_2，設兩圓交於 Q 點（和 A 點）且 Q 點在任意三角形 ABC 外部，從 Q 點出發作$\overrightarrow{QA}$、$\overline{QD}$、$\overline{QF}$、$\overline{QC}$、$\overline{QB}$、$\overline{QG}$、$\overline{QE}$。



圖二十九

在正 n 邊形包圍任意三角形 ABC 時，若 n-1 線共點的交點 Q 在任意三角形 ABC 的外部時，會出現以下情形：

$\because$在圓 O1 中，$\angle DQF = \frac{1}{2}\overset{\frown}{DF} = \frac{1}{2}\times\frac{360°}{n}$，

$\angle PQD = \angle DAQ + \angle ADQ = \frac{1}{2}\overset{\frown}{DQ} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{AQ} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AD} = \frac{1}{2}\times\frac{360°}{n}$，

又在圓 O_2 中，$\angle PQE = \angle QAE + \angle QEA = \frac{1}{2}\overset{\frown}{QE} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{AQ} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AE} = \frac{1}{2}\times\frac{360°}{n}$

$\therefore \angle DQF = \angle PQD = \angle PQE = \frac{1}{2}\times\frac{360°}{n}$

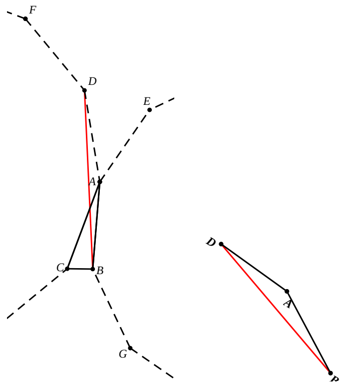
其餘證明，均與正 n 邊形包圍任意三角形 ABC 時，n-1 線共點的交點 Q 在任意三角形 ABC 的內部之推論相同。

在探討正方形包圍直角三角形 ABC 時，已知其中一組三線共點的交點落在任意三角形 ABC 的頂點上。接下來我將沿用先前的探討方式，先取 n-1 線共點的其中一條連線$\overleftrightarrow{BD}$，局部觀察頂點 D、A、B 的相對位置與 n-1 線共點交點位置的關係。

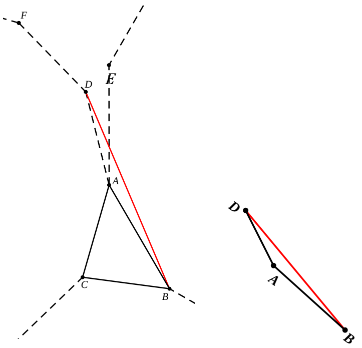
從前面證明已知，正 n 邊形包圍任意三角形 ABC 時，$\overleftrightarrow{BD}$、$\overleftrightarrow{CE}$、$\overleftrightarrow{FG}$三線會交於一點 Q，若從$\overleftrightarrow{BD}$來看，若頂點 D、A、B 的相對位置如圖三十，因為$\overleftrightarrow{BD}$在頂點 A 左下方，由於 Q 點落在$\overleftrightarrow{BD}$上，所以 Q 點在任意三角形 ABC 的內部或是以$\overline{AC}$向外做出的正 n 邊形的內部；若從$\overleftrightarrow{CE}$來看，會推得 Q 點在三角形 ABC 的內部或是以$\overline{AB}$向外做出的正 n 邊形的內部，故可知 Q 點必會落在任意三角形 ABC 的內部。

同理，若頂點 D、A、B 的相對位置如圖三十一，因為$\overleftrightarrow{BD}$頂點 A 上方，表示 Q 點會出現在∠DAE區域內或是以$\overline{AB}$向外做出的正 n 邊形的內部；若從$\overleftrightarrow{CE}$來看，也會推得 Q

點∠DAE區域內或是以$\overline{AC}$向外做出的正 n 邊形的內部，故可知 Q 點必會落在任意三角形 ABC 外部的∠DAE之區域內。



圖三十



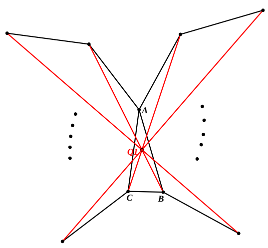
圖三十一

由以上推論可知，正 n 邊形包圍任意三角形且 $n\geq 4$時，會出現三個不同位置的 n-1 線共點，且交點的位置會跟∠DAB和∠CAE的大小有關，其中$\angle DAC=\angle BAE=180-\frac{360^\circ}{n}$，因此整體來說交點的位置只會和∠CAB的大小有關。當$\angle CAB<\frac{360^\circ}{n}$，A'點落在△ABC 的內部；當$\angle CAB>\frac{360^\circ}{n}$，A'點落△ABC 的外部的∠DAE區域內；當$\angle CAB=\frac{360^\circ}{n}$時， D、A、B 三點共線，此時 A 點即為 A'點。

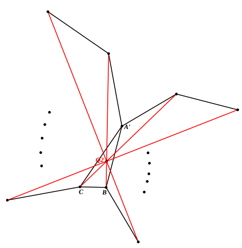
四、正 n 邊形包圍任意三角形 $n-1$線共點之交點 Q 的軌跡探討及證明

在研究正 n 邊形包圍任意三角形時，為了探討三角形與交點位置的關係，我開始變更內部三角形的形狀，因而發現當固定$\overline{BC}$只移動 A 點時， $n-1$線共點的交點 Q 所移動的軌跡是一個圓。

接下來，我為了確認此發現題出證明如下：



圖三十二



圖三十三

如圖三十二，作正 n 邊形包圍任意三角形 ABC，連出 n−1 線共點交於 Q_1，接著只動 A 點至 A'點，再作正 n 邊形包圍三角形 A'BC 之 n−1 線共點交於 Q_2（如圖三十三）。

如圖三十四，從之前的證明已知：

Q_1 為兩正 n 邊形之外接圓 O_1、O_2 之交點

$$\therefore \angle DQ_1F = \angle DQ_1A + \angle AQ_1F = \frac{1}{2}\,AD + \frac{1}{2}\,AF \;= \frac{1}{2} \times \frac{360°}{n} \times 2$$

如圖三十五，同理可得$D'Q_2F' = \frac{360°}{n}$

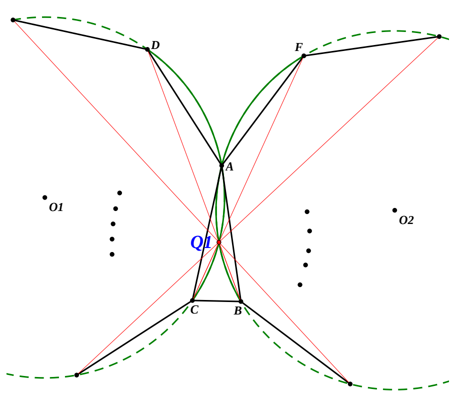
又$\angle BQ_1C = DQ_1F$，$\angle BQ_2C =$ $D'Q_1F'$（對頂角相等）且$\angle DQ_1F = \angle D'Q_2F'$

$\Rightarrow \angle BQ_1C = \angle BQ_2C$

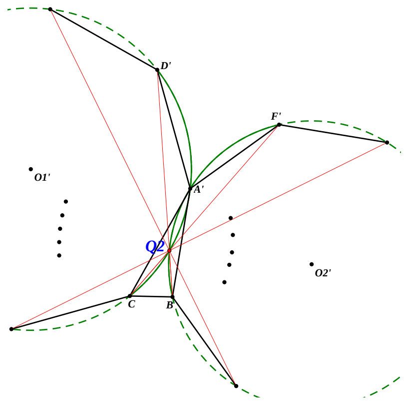
如圖三十六，圖三十七，作$\triangle Q_1CB$、$\triangle Q_2BC$ 之外接圓 O_3、O_4。

$\because \angle BQ_1C = \angle BQ_2C$ 且$\overline{BC}$同為圓 O_3 和圓 O_4 的弦

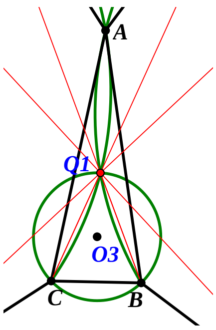
$\therefore$圓 O_3 即為圓 O_4



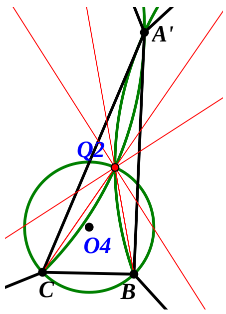
圖三十四



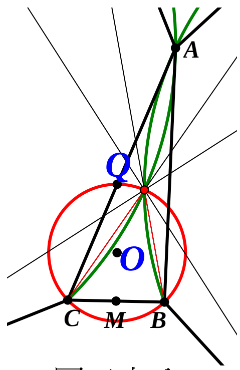
圖三十五



圖三十六



圖三十七



圖三十八

由以上的證明可知，在固定$\overline{BC}$只動 A 點的情況下，無論 A 點的位置如何改變，所形成的 Q 點均會共圓，此圓即為圖三十八中的圓 O，接著我要進一步說明圓 O 上的點都是正 n 邊形包圍任意三角形之 n-1 線共點的交點。

在圓 O 上任取一點 Q’，作$\overrightarrow{Q'B}$、$\overrightarrow{Q'C}$及$\angle CQ'B$的角平分線 L，在直線 L 上任取一點 A’，假設$\overrightarrow{Q'B}$與直線 L 之夾角為θ，以 Q 為頂點從$\overrightarrow{Q'B}$開始每隔θ度作直線（如圖三十九）。

從之前的證明可知，圓 O 中的 $\overset{\frown}{BC} = \frac{360°}{n}$

$\because \angle CQB = \angle CQ'B = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC} = \frac{360°}{n}$

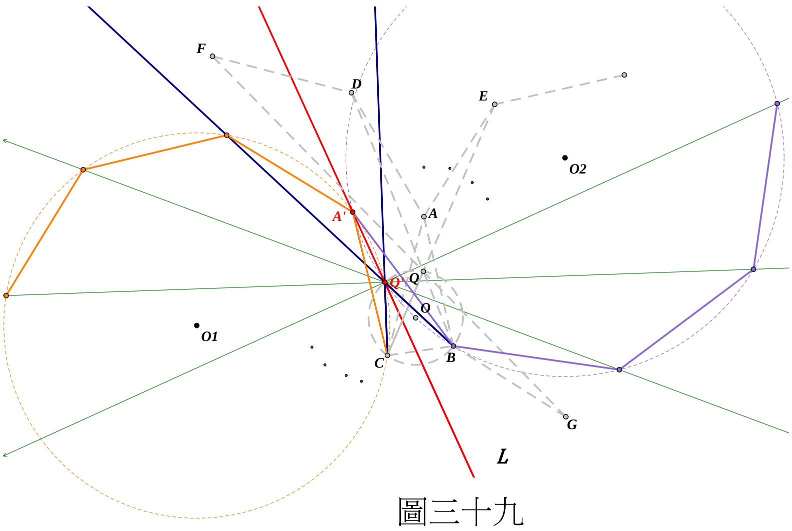
$\therefore$ $\overrightarrow{Q'B}$與直線 L 之夾角$\theta = \frac{1}{2} \times \frac{360°}{n}$，以 Q’為頂點從$\overrightarrow{Q'B}$開始每隔θ作直線可以得出$\frac{360°}{\theta}$=2 n個等角，表示有 n 條直線同時交在 Q’上，扣除角平分線 L 可得 n-1 條直線共點。

接下來，連接$\overline{A'C}$、$\overline{A'B}$，即可得到內部任意三角形 A’CB，分別從$\overline{A'C}$、$\overline{A'B}$旋轉 $180° - \frac{360°}{n}$，可以得到外圍兩正 n 邊形，並作出其外接圓 O_1、O_2。

則外圍正 n 邊形之頂點均落在過 Q 的 n-1 條直線上（∵相差兩直線的夾角即為外接圓 O_1、O_2 的圓周角），及 Q’點為正 n 邊形包圍任意三角形 A’BC 之 n-1 線共點之交點。

⇒正 n 邊形包圍任意三角形時 n-1 線共點 Q 的軌跡為一個圓

此外，因為 A’點為角平分線 L 上的任一點，表示固定$\overline{BC}$只改變任意三角形 ABC 的頂點 A 時，若沿著$\overrightarrow{QA'}$移動 A 點至 A’點，不會改變 n-1 條共點 Q 的位置。

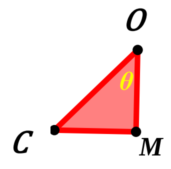


圖三十九

如圖三十八，接下來我針對ΔQCB的外接圓 O 的半徑與其弦$\overline{BC}$的長度關係進行探討：

如圖四十，設$\overline{CO}=r$，$\overline{BC}=x$，M 為$\overline{BC}$中點，則$\overline{CM}=\frac{x}{2}$，且$\angle COM=\theta=\frac{1}{2}BC=\angle BQC=\frac{360°}{n}$

$$\because \sin\theta=\frac{\overline{CM}}{\overline{CO}}=\frac{\frac{x}{2}}{r}=\frac{x}{2r}\quad \therefore r=f(x)=\frac{x}{2}\times\csc\theta=\frac{x}{2}\times\csc\frac{360°}{n}$$



圖四十

五、正 n 邊形包圍任意 m 邊形之 m 組 n−1線共點探討

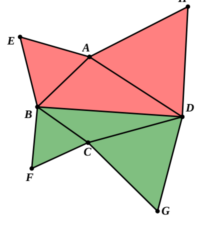
（一）m=4

在正 n 邊形包圍任意三角形的研究中，已知可以獲得 3 組 n−1線共點，而我也好奇，若將內部任意三角形改為任意四邊形是否也會有相同情形。

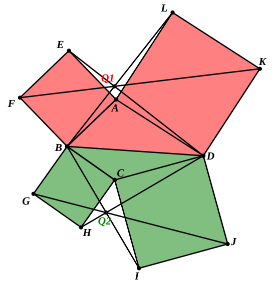
如圖四十一、圖四十二，我先做出正三角形包圍任意四邊形 ABCD 及正方形包圍任意四邊形 ABCD，並連接對角線$\overline{BD}$則可形成ΔABD、ΔBCD兩任意三角形。

從前面的研究已知，若外圍為正三角形時，需要有三個正三角形包圍內部任意三角形才可以形成三線共點，但從圖四十一發現可以將其看成ΔABD被兩個正三角形 AEB、ADH 包圍（如紅色區域），但$\overline{BD}$邊上的三角形為任意三角形 BCD，故不會有三線共點的情況。同理，圖四十一中綠色區域也不會有三線共點的情況發生，因此 n必須大於 3。

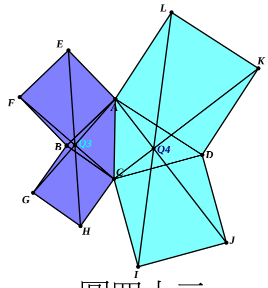
而在圖四十二中，可以將此圖形看成ΔABD被兩個正方形 AEFB、ADKL 包圍，在前面研究已知若 n≥ 4，只需兩個正 n 邊形即可構成 n−1線共點，因此在圖四十二中也可以相同方式連接$\overleftrightarrow{DE}$、$\overleftrightarrow{BL}$、$\overleftrightarrow{FK}$得到交點 Q_1，同理也可以相同方式得到另一組三線共點，交點為 Q_2。如圖四十三，若連接對角線$\overline{AC}$，也可再得到兩組三線共點，交點為 Q_3、Q_4。



圖四十一



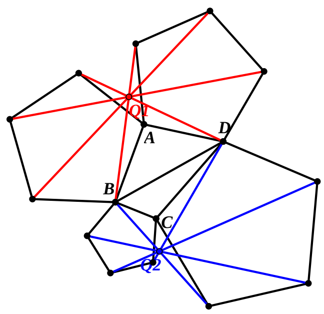
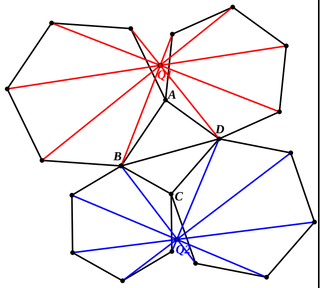
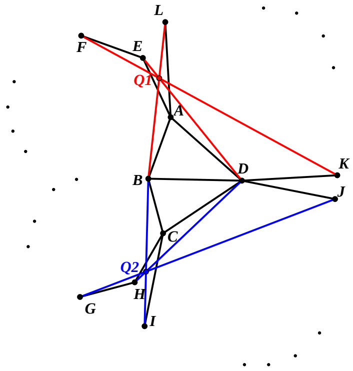
圖四十二



圖四十三

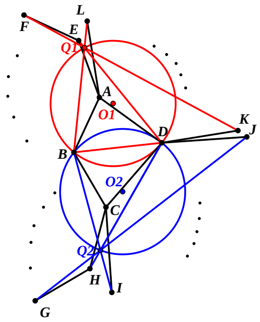
接下來若繼續增加外圍正 n 邊形邊數，同樣包圍任意四邊形，也會有相同的情形

出現，整理如下：

正五邊形包圍任意四邊形	正六邊形包圍任意四邊形	．．．．	正 n 邊形包圍任意四邊形
		．．．．	

由上表得知，可將正方形包圍任意四邊形的作法延伸至正 n 邊形包圍任意四邊形，同理若連接任意四邊形 ABCD 的另一條對角線$\overline{AC}$，同樣也會得到另外兩組 n−1線共點。

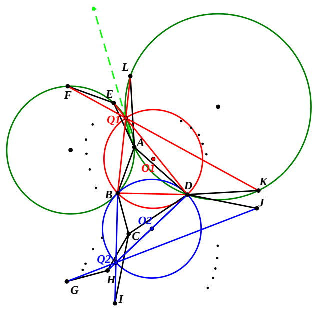
由於經由對角線的連接，即可以將正 n 邊形包圍任意四邊形的情形看成正 n 邊形包圍任意三角形，故其交點位置的判別方式都與前面的研究相同，接下來，我想繼續探討在正 n 邊形包圍任意四邊形時，n−1線共點的交點 Q 的軌跡。



圖四十四

如圖四十四，以連接對角線$\overline{BD}$為例，可以得到正 n 邊形包圍△ABD 及△BCD，再以相同連線方式作出這兩組 n−1線共點及其交點 Q_1、Q_2 的軌跡，也就是△Q_1BD 及△Q_2BD 的外接圓 O_1、圓 O_2，而接下來我想探討這兩圓之間的關係。

先將焦點放在 Q_1 的軌跡圓 O_1 上。如圖四十五，作出外圍兩正 n 邊形的外接圓並連接射線 AQ_1，由前面的研究可知：



圖四十五

$$\because \angle EQ_1L = \angle AEQ_1 + \angle EAQ_1 + \angle ALQ_1 + \angle LAQ_1$$

$$= \frac{1}{2}\,AE + \frac{1}{2}\,AL = \frac{1}{2} \times \frac{360°}{n} \times 2 = \frac{360°}{n}$$

又$\angle EQ_1L = \angle BQ_1D$（對頂角相等）$\therefore \angle BQ_1D = \frac{360°}{n}$

同理，再將焦點放在 Q_2 的軌跡圓 O_2 上，也可知：

$$\angle HQ_2I = \angle BQ_2D = \frac{360°}{n} \quad \Rightarrow \angle BQ_1D = \angle BQ_2D$$

在 O_1 中，$\angle BQ_1D = \frac{1}{2}\,BD$，而在 O_2 中，$\angle BQ_2D = \frac{1}{2}\,BD$，故可知 O_1、O_2 兩圓中

的 BD 度數相等。

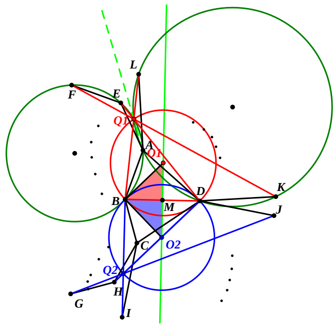
又圓 O_1、圓 O_2 有一共用弦$\overline{BD}$，如圖四十六，作$\overline{BD}$的中垂線可平分 O_1、O_2 中的 BD，交$\overline{BD}$於 M 點，再連接$\overline{BO_1}$、$\overline{BO_2}$，可形成ΔBO_1M 及ΔBO_2M。

由先前推導的半徑公式：$r = f(x) = \frac{x}{2} \times \csc\theta = \frac{x}{2} \times \csc\frac{360°}{n}$

可知因為圓 O_1、圓 O_2 中$\overline{BM}$、θ均相等，故 r 相等

⇒圓 O_1 與圓 O_2 為兩等圓

從以上證明可知，當正 n 邊形包圍任意四邊形時，若連接任一條對角線會形成兩組正 n 邊形包圍任意三角形，其的兩組 n−1 線共點之交點的軌跡為兩個等圓。故在圖四十三中，若連接對角線$\overline{AC}$時，所形成的兩組 n−1 線共點的兩個交點 Q_3、Q_4 之軌跡也是兩個等圓。

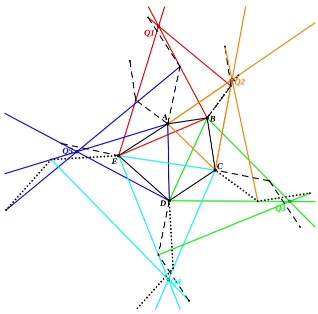


圖四十六

（二）m>4

在正 n 邊形包圍任意四邊形時，可以從對角線的連接得到四組正 n 邊形包圍任意三角形，形成 4 組 n−1線共點。因此接下來我要增加內部任意 m 邊形的邊數，做出正 n 邊形包圍任意 m 邊形（m>4）。

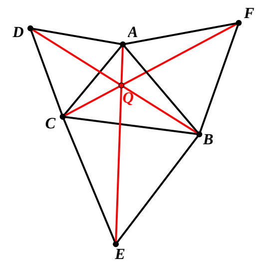
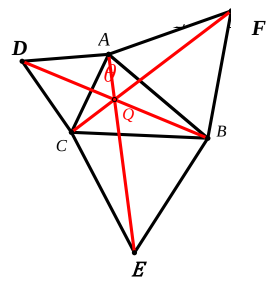
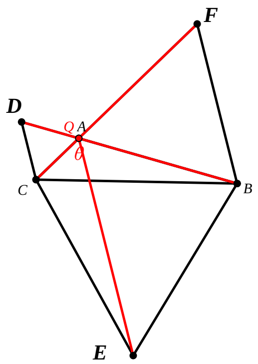
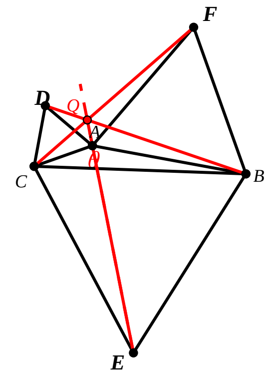
如圖四十七，我作出正 n 邊形包圍任意五邊形。同樣地，連接內部任意五邊形 ABCDE 的頂點可以形成 5 組正 n 邊形包圍任意三角形，並且每一組都有 n−1 線共點。但與正 n 邊形包圍任意四邊形時不同，當 m>4 時，連接內部任意 m 邊形隔一點的對角線並不會剛好將其分成兩個任意三角形，故不會出現 m=4 時兩個等圓的情形。


圖四十七

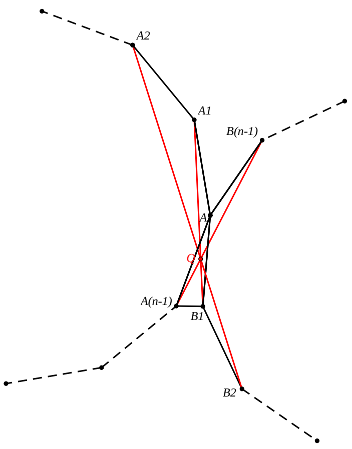
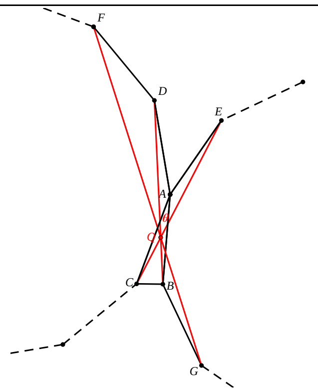
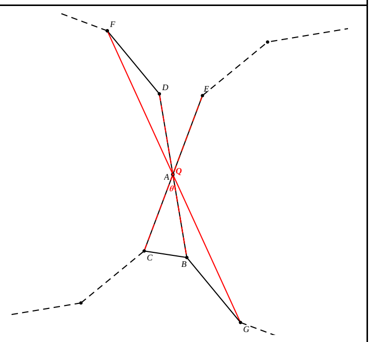
無論內部是任意四邊形或五邊形，都可以經由對角線的連接，形成正 n 邊形包圍任意三角形，進而形成 n−1 線共點。從前面的研究可以發現，內部的任意 m 邊形的每個頂點附近都有一組多線共點，故正 n 邊形包圍任意 m 邊形可以形成 m 組 n−1 線共點。

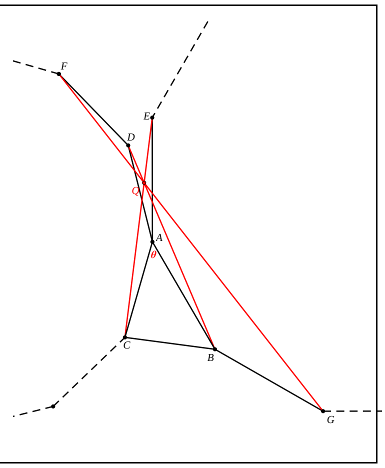
伍、　研究結果

一、正 n 邊形（n=3）包圍任意三角形之三線共點

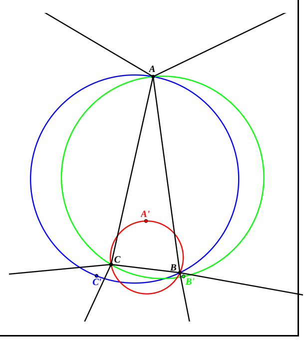
<table>
<tr><th></th><th>說明</th><th>圖示</th></tr>
<tr><td>連接方式</td><td>由△ABC 的各邊向外作正三角形△ABF、△BCE、△CAD，再將任意三角形各頂點與它對邊上正三角形的頂點連接，可得 $\overleftrightarrow{AE}$、$\overleftrightarrow{BD}$、$\overleftrightarrow{CF}$三線交於 Q 點。</td><td rowspan="2">
</td></tr>
<tr><td>共點組數</td><td>一組三線共點</td></tr>
<tr><td rowspan="4">交點位置</td><td colspan="2">Q 點位置由△ABC 最大角度數決定。</td></tr>
<tr><td>交點在△ABC 內：
$f(\theta)=\theta+60°<180° \Rightarrow 0°<\theta<120°$
$\because \angle DAC+\angle CAB+\angle BAF+\angle DAF=360°$
$\therefore \theta+\angle DAF=240°$
又 $0°<\theta<120° \Rightarrow 120°<\angle DAF<240°$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>交點在△ABC 最大角的頂點上：
$f(\theta)=\theta+60°=180° \Rightarrow \theta=120°$
$\because \angle DAC+\angle CAB+\angle BAF+\angle DAF=360°$
$\therefore \theta+\angle DAF=240°$
又$\theta°=120° \Rightarrow \angle DAF=120°$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>交點在△ABC 外∠DAF區域內：
$f(\theta)=\theta+60°>180°，\theta<180°$
$\Rightarrow 120°<\theta<180°$
$\because \angle DAC+\angle CAB+\angle BAF+\angle DAF=360°$
$\therefore \theta+\angle DAF=240°$
又$120°<\theta<180° \Rightarrow 60°<\angle DAF<120°$</td><td>
</td></tr>
</table>

二、正 n 邊形（n≥4）包圍任意三角形之三線共點

<table>
<tr><td></td><td>說明</td><td>圖示</td></tr>
<tr><td>連接方式</td><td>在正 n 邊形包圍任意三角形 ABC 時，將各頂點以逆時針的方向做標示（如右圖），連接$\overleftrightarrow{A_1B_1}$、$\overleftrightarrow{A_2B_2}$、$\overleftrightarrow{A_3B_3}$……$\overleftrightarrow{A_{n-1}B_{n-1}}$，可以得到$\overleftrightarrow{A_1B_1}$、$\overleftrightarrow{A_2B_2}$、$\overleftrightarrow{A_3B_3}$……$\overleftrightarrow{A_{n-1}B_{n-1}}$共 n-1 條線交於 Q 點，且各連線不通過頂點 A。另外還可以依相同連接方式，找到其他兩組分別不通過頂點 B 及頂點 C 的 n−1線共點。</td><td rowspan="2">
</td></tr>
<tr><td>共點組數</td><td>3組 n−1線共點</td></tr>
<tr><td rowspan="3">交點位置</td><td colspan="2">Q 點位置可由△ABC 中不被任一連線通過之頂點 A 的角度(θ)決定。</td></tr>
<tr><td>交點在△ABC 內：
$f(\theta,n)=\theta+180^\circ-\frac{360^\circ}{n}<180^\circ$，$\theta>0^\circ\Rightarrow 0^\circ<\theta<\frac{360^\circ}{n}$
$\because \angle DAC+\angle CAB+\angle BAE+\angle DAE=360^\circ$
$\therefore \theta+\angle DAE=\frac{720^\circ}{n}$
又 $0^\circ<\theta<\frac{360^\circ}{n}\Rightarrow\frac{360^\circ}{n}<\angle DAE<\frac{720^\circ}{n}$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>交點在△ABC 的頂點 A 上：
$f(\theta,n)=\theta+180^\circ-\frac{360^\circ}{n}=180^\circ\Rightarrow\theta=\frac{360^\circ}{n}$
$\because \angle DAC+\angle CAB+\angle BAF+\angle DAE=360^\circ$
$\therefore \theta+\angle DAE=\frac{720^\circ}{n}$ 又 $\theta=\frac{360^\circ}{n}\Rightarrow\angle DAE=\frac{360^\circ}{n}$</td><td>
</td></tr>
</table>

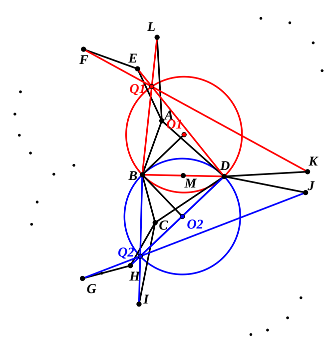
	交點在△ABC 外$\angle DAE$區域內： $f(\theta,n)=\theta+180^\circ-\frac{360^\circ}{n}>180^\circ$，$\theta<180^\circ$ $\Rightarrow \frac{360^\circ}{n}<\theta<180^\circ$ $\because \angle DAC+\angle CAB+\angle BAF+\angle DAE=360^\circ$ $\therefore \theta+\angle DAE=\frac{720^\circ}{n}$ 又$\frac{360^\circ}{n}<\theta<180^\circ \Rightarrow \frac{720^\circ}{n}-180^\circ<\angle DAE<\frac{360^\circ}{n}$	

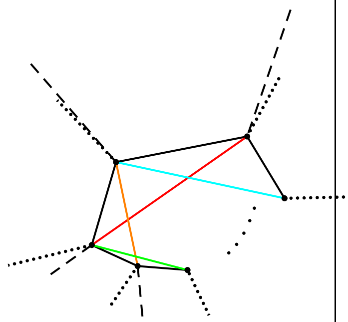
三、正 n 邊形包圍任意三角形 n−1線共點之交點 Q 的軌跡探討

說明	圖示
正 n 邊形包圍任意三角形 ABC 時，可以得到 3 組 n−1線共點（交點分別為 A'點、B'點、C'點）。以 A'點為例，若固定$\overline{BC}$只移動 A 點，可以得到 A'點的軌跡為一個圓。同理，若分別固定$\overline{AC}$移動 B 點與固定$\overline{AB}$移動 C 點，也可以得到 B'及 C'點的軌跡為一個圓。	

四、正 n 邊形包圍任意 m 邊形之 m 組 n−1線共點探討

當 n=3 時需要有三個正三角形包圍任意三角形才可以形成三線共點，但在正三角形包圍任意四邊形時，若連接內部任意四邊形的對角線，並無法形成三個正三角形包圍三角形。故在正 n 邊形包圍任意 m 邊形時，須滿足 n>3。

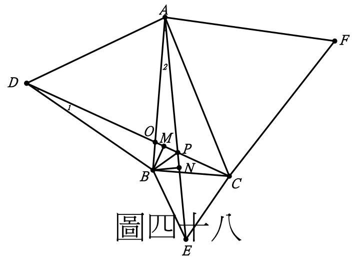
	n−1線共點組數	特性	圖示
m=4	4 組	連接內部任意四邊形的一條對角線，即可將其切割成兩組正 n 邊形包圍任意三角形。若固定$\overline{BD}$只移動 A 點、C 點，其 n−1線共點的交點 Q_1 及 Q_2 的軌跡分別為兩個等圓 O_1 及 O_2。	

		兩圓半徑 r 與共用弦$\overline{BD}$的關係： 設$\overline{\mathrm{BO}}=\mathrm{r}$，$\overline{BD}=x$ 則$\mathrm{r}=f(x)=\frac{x}{2}\times\csc\theta=\frac{x}{2}\times\csc\frac{360°}{n}$	
m>4	m 組	正 n 邊形包圍任意 m 邊形時，可以藉由對角線的連接找出正 n 邊形包圍任意三角形。但當 m>4 時，連接任一條對角線並不會形成兩組正 n 邊形包圍任意三角形，如果連接所有隔一點的對角線，會形成 m 組 n-1 線共點。	

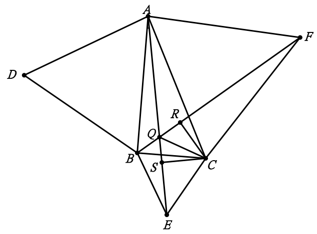
陸、　討論

一、正三角形包圍任意三角形之三線共點的其他證明方法

除了用前面所提到的作外圍正 n 邊形的外接圓，利用圓周角證明三線共點，我還用以下的方式證明：



圖四十八



圖四十九

如圖四十八，連接$\overline{AE}$、$\overline{DC}$交於 P 點

$\because\ \overline{\mathrm{DB}}=\overline{\mathrm{AB}}, \angle\mathrm{DBC}=\angle\mathrm{ABE},\ \overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{BE}}$

$\therefore\ \Delta\mathrm{DBC}\cong\ \Delta\mathrm{ABE}(\mathrm{SAS})$

$\Rightarrow\ \overline{\mathrm{DC}}=\overline{\mathrm{AE}},\ \angle\mathrm{BDC}=\angle 1=\angle\mathrm{BAE}=\angle 2$

作$\overline{\mathrm{BM}}\perp\overline{\mathrm{DC}},\ \overline{\mathrm{BN}}\perp\overline{\mathrm{AE}},$ 連$\overline{\mathrm{BP}}$

$\because\ \overline{\mathrm{DC}}=\overline{\mathrm{AE}}$且$\Delta\mathrm{DBC}=\Delta\mathrm{ABE}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{BM}}=\overline{\mathrm{BN}}\ \Rightarrow\ \overline{\mathrm{BP}}$為$\angle\mathrm{DPE}$的角平分線

$\overline{\mathrm{DC}}$交$\overline{\mathrm{AB}}$於 O 點

在$\Delta\mathrm{DBO}, \Delta\mathrm{APO}$中

$\because\ \angle 1=\angle 2,\ \angle\mathrm{DOB}=\angle\mathrm{AOP}$ (對頂角相等)

$\therefore\ \angle\mathrm{APO}=\angle\mathrm{DBO}=60°$

如圖四十九，連接$\overline{\mathrm{BF}}$、$\overline{\mathrm{EA}}$交於 Q 點，作$\overline{\mathrm{RC}}\perp\overline{\mathrm{BF}},\ \overline{\mathrm{CS}}\perp\overline{\mathrm{AE}},$ 連$\overline{\mathrm{CQ}}$

同理可證$\angle\mathrm{AQF}=60°$

$\angle AQF = \angle BQE$ (對頂角相等)

$\because \angle BQE=60°$, 圖四十八中$\angle BPE=60°$

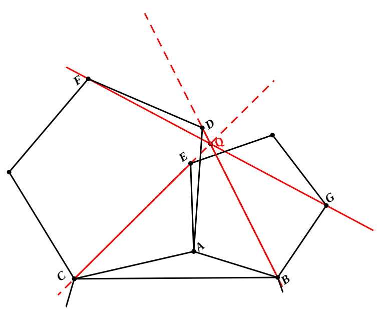
$\Rightarrow$P 與 Q 為同一點, 且$\overline{CD} = \overline{BF} = \overline{AE}$

二、正 n 邊形包圍任意三角形之重疊與交點位置關係探討

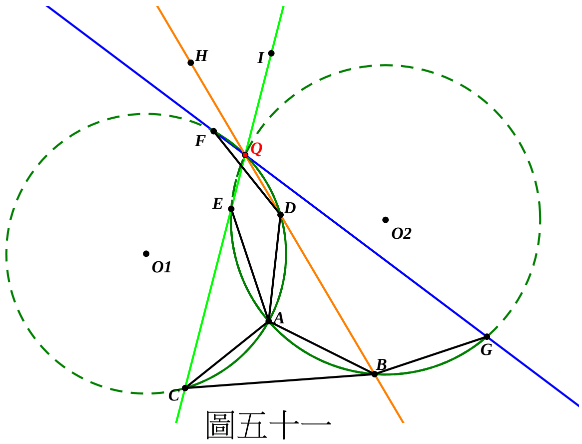
在研究正 n 邊形包圍任意三角形時，當 n=5，改變內部任意三角形的角度至一定大小時，相鄰的兩正五邊形會出現重疊的情況，但並不影響 $n-1$ 線共點（如圖五十）。

由圖五十可知，外圍相鄰正 n 邊形重疊時仍會有 n-1 線共點的情形，以下為其證明：

如圖五十一，作正 n 邊形包圍任意三角形及正 n 邊形的外接圓 O_1、O_2，設兩圓交於 Q 點（和 A 點），再作$\overline{QA}$、$\overline{QC}$、$\overline{QE}$、$\overline{QD}$、$\overline{QB}$、$\overline{QF}$、$\overline{QG}$。



圖五十



圖五十一

$\because$從任意三角形ABC的$\overline{AB}$作出的正 n 邊形共會有 n 個頂點，而在 O_1 左方共有 $n-4$個頂點（扣除頂點 F、D、A 及 C），和 Q 點連接後可構成$(n-3)$個角，每個角均為 O_1 上的圓周角，每個圓周角的度數均等於$\frac{1}{2} \times \frac{360°}{n} = \frac{180°}{n}$

$\therefore \angle FQC = \frac{180°}{n} \times (n-3)$

$\because$在 O_1 中，$\angle CQA = \frac{1}{2}\,CA = \frac{1}{2} \times \frac{360°}{n} = \frac{180°}{n}$，$\angle AQD = \frac{1}{2}\,AD = \frac{1}{2} \times \frac{360°}{n} = \frac{180°}{n}$

又在 O_2 中，$\angle BQG = \frac{1}{2}\,BG = \frac{1}{2} \times \frac{360°}{n} = \frac{180°}{n}$，

且$\angle FQG = \angle FQC + \angle CQA + \angle AQB + \angle BQG$

$\therefore \angle FQG = \frac{180°}{n} \times 3 + \frac{180°}{n} \times (n-3) = \frac{180°}{n} \times n = 180°$ 即 F、Q、G 三點共線—①

$\because$在 O_1 中，$\angle CQA = \frac{1}{2}\,CA = \frac{1}{2} \times \frac{360°}{n} = \frac{180°}{n}$，又在 O_2 中$\angle EQA = \frac{1}{2}\,EA = \frac{1}{2} \times \frac{360°}{n} = \frac{180°}{n}$

$\therefore \angle CQA = \angle EQA$　即 Q、E、C 三點共線—②

$\because$在 O_1 中， $\angle AQD = \frac{1}{2}$ AD $= \frac{1}{2} \times \frac{360°}{n}$，又在 O_2 中$\angle AQB = \frac{1}{2}$ AB $= \frac{1}{2} \times \frac{360°}{n}$

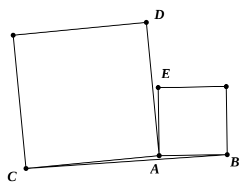
$\therefore \angle AQD = \angle AQB$　即 Q、D、B 三點共線—③

由①、②、③可知：$\overleftrightarrow{GF}$、$\overleftrightarrow{BD}$、$\overleftrightarrow{CE}$三線共點

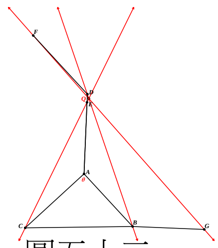
接下來，我將繼續探討在什麼樣的情況下會出現相鄰兩外接正 n 邊形重合。

如圖五十二，若減少邊數成正方形包圍任意三角形時，要使外圍相鄰的正方形區域重疊或邊重疊，必須$\angle DAC + \angle CAB + \angle BAE \geq 360°$，故$\angle CAB \geq 180°$，但任一三角形內角不可能大於 180°，故正方形包圍任意三角形時，相鄰的正方形不會有區域重疊或邊重疊的情形，同理正三角形包圍任意三角形時，也不會有此情況發生。

由於正 n 邊形的內角會隨著邊數增加不斷接近 180°，因此我也想繼續找出在什麼情況下，即使內部任意三角形的$\angle CAB$極小，仍會出現相鄰的兩正 n 邊形區域重疊或邊重疊的情形。



圖五十二



圖五十三

如圖五十三，將$\angle CAB$設為θ時，外圍的正 n 邊形內角為$\frac{360°-\theta}{2}$，因為正 n 邊形外角和為 360°，故$(180° - \frac{360°-\theta}{2})n=360°$，也就是當 $n=\frac{720°}{\theta}$時，相鄰正 n 邊形的邊就會重疊，故要使正 n 邊形包圍任意三角形不出現相鄰正 n 邊形重疊的情況，必須 $n<\frac{720°}{\theta}$，且因$\theta < 180°$，故當 $n \leq 4$ 時不會有相鄰正 n 邊形重疊的情況。

柒、 結論

一、正 n 邊形（n=3）包圍任意三角形之三線共點

	說明
連接方式	由內部任意三角形的各邊向外作正三角形，再將任意三角形各頂點與它對邊上正三角形的頂點連接，可得到三線交於一點。
共點組數	1 組三線共點
交點位置	當 $0°<\theta<120°$時，交點在內部任意三角形ΔABC 內：
	當$\theta =120°$時，交點在內部任意三角形ΔABC 最大角的頂點上：
	當$120° < \theta <180°$時，交點在內部任意三角形ΔABC 外：

二、正 n 邊形（n≥4）包圍任意三角形之 $n-1$線共點

	說明
連接方式	由內部任意三角形的各邊向外作正 n 邊形，選定頂點後，從另兩頂點分別連到不相鄰正 n 邊形的頂點，再連接兩正 n 邊相對應的頂點，可得到 $n-1$線交於一點。
交點組數	3組 $n-1$線共點
交點位置	當$0° < \theta < \frac{360°}{n}$時，交點在內部任意三角形$\Delta ABC$ 內
	當$\theta = \frac{360°}{n}$時，交點在內部任意三角形ΔABC 的頂點上
	當$\frac{360}{n}° < \theta <180°$時，交點在內部任意三角形$\Delta ABC$ 外

三、正 n 邊形包圍任意三角形 $n-1$線共點的交點軌跡之探討

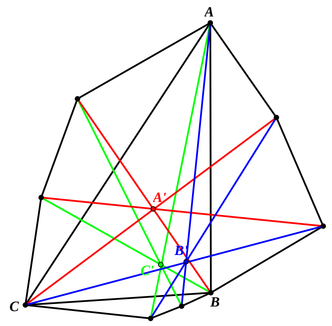
說明
正 n 邊形包圍任意三角形時，可以得到 3 組 $n-1$線共點，若固定一邊只移動另一頂點，$n-1$線共點之交點的軌跡為一個圓。

四、正 n 邊形包圍任意 m 邊形之 m 組 n−1線共點探討

	n−1線共點組數	特性
m=4	4 組	當正 n 邊形包圍任意四邊形時，連接內部任意四邊形的一條對角線，形成兩組正 n 邊形包圍任意三角形，其兩組 n−1線共點的交點軌跡為分別為兩個等圓。
m>4	m 組	正 n 邊形包圍任意 m 邊形時，可以藉由對角線的連接找出正 n 邊形包圍任意三角形。但當 m>4 時，連接任一條對角線並不會形成兩組正 n 邊形包圍任意三角形，如果連接所有隔一點的對角線，會形成 m 組 n-1 線共點。

捌、　未來展望

本研究已延伸到正 n 邊形包圍任意三角形或任意 m 邊形，因此我想再將外圍正 n 邊形改為任意多邊形，觀察是否也會有三線或多線共點的情形。如圖五十四，先從任意四邊形包圍任意三角形開始，以同樣的方式做出三線共點，我發現在特定情況下，任意四邊形包圍任意三角形也會有三組三線共點的情形，因此我也想進一步針對此發現做出探討及研究。



圖五十四

玖、　參考資料

一、國中數學課本第五冊 張幼賢 翰林出版社

二、費馬點 https://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%B2%BB%E9%A6%AC%E9%BB%9E

【評語】030421

本作品考慮三角形三邊外接多邊形某些特定連線的共點性質。想法是古典的，亦有得到一些不錯的性質，可考慮應用複變數或是向量來處理，亦可考慮內接的情況，應有另一系列新的性質及更簡潔的處理方式。