中華民國第 56 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

最佳(鄉土)教材獎

030420

電梯謎蹤

學校名稱：臺南市立忠孝國民中學

作者：	指導老師：
國二 洪慎彌 國二 鄭莉葳 國二 郭岱昀	郭佩宜

關鍵詞：乘次、樓層、電梯部數

摘要

先解答老師給的「 電梯謎題 」後,再深入去研究：若是建築物有 n 層樓,每部電梯（ 底層和頂層以外 ）只停留其中的 k 個樓層，由任一樓層到另一樓層都可直達，不需要更換。那麼，最少需要幾部電梯呢？

我們先計算出樓層與樓層之間互通的總乘次，再去計算每一部電梯可以承擔的乘次，不足、重複了多少？需要新增幾部？最少（短少一個乘次、短少一個樓層的範圍以上）需要幾部？結果發現 ： ① k=3、4 時，n 與最少電梯部數之間存在著規律性 ； k=3 時，奇數樓層（ 2r+1 ）比偶數樓層（ 2r ）需要多新增〔$\frac{2r}{6}$〕部電梯

② n 與 k 在特定的對應範圍下，3 部、4 部、6 部電梯即可

③ 結合多邊形的頂點數、邊數、對角線數，所找到的最少電梯部數的可行配置方式，發現不僅僅只有一種

壹、研究動機

老師的腳傷一直還沒完全好，常需要搭乘電梯上下樓，同學們也就爭在電梯口前笑鬧著說：我也要坐！我也要坐！後來，老師順勢在課後拋給了我們一道與電梯有關的數學題目。我們發現，和之前在假日的時候，到市圖分館去借還書時，曾經從架子上拿下來翻閱過的 數學概念謎題 這本書中的「電梯謎題 」(p18) 很相近。我們覺得很有趣，有挑戰性，想要試一試，於是就選定這個「 最少需要幾部電梯 ？」，做為我們的研究主題。

從「 籃球要比賽幾場 ？」、「 握手的次數 ？」、「 要設計幾種車票 ？」、……這些題目解題的發想開始，我們運用了一上第二章「分數的運算」、第三章「以符號代表數」的概念，結合二上第二章「幾何圖形」中的 2-1 「平面圖形」的知識，利用其中所學習到的多邊形的頂點數、邊數與對角線數的關係，去做研究、計算與設計。結果發現，整理、歸納出來的規律性，和二下第一章剛學習過的「數列與級數 」也有相關。

貳、研究目的

解答謎題，延伸思考，自我挑戰，體現數學的生活性與趣味性。

叁、研究設備及器材

原子筆，計算紙，電腦

肆、研究過程與方法

某公司所在的辦公樓共有 8 層，只有三部電梯供人們上下樓，經常出現電梯在一層樓停留時間過長或停留過於頻繁導致的效率低下的情況。因而公司決定加裝幾部電梯，每部電梯 (包括原有的) 除了在底層和頂層停留以外，中間只停留某三層 (向上和向下都停)，而且一旦方案確定，就要在電梯口張榜公布，不能更改。若要求從每一樓層去往任意其他樓層的人都能通過一部電梯直達，則最少需要幾部這樣的電梯？並給出具體的方案。

上面，就是老師考我們的「 電梯謎題 」。我們的做法是，先定義 「要求從每一樓層去往任意其他樓層的人都能通過一部電梯直達」，這樣是一個乘次。

因為，每部電梯都必須停留底層和頂層　　所以，我們就先將這兩個樓層扣除，針對中間剩餘的 8—2=6 層樓來作探討。 中間剩餘的這 6 層樓，存在著必須提供的 C_2^6=15 個乘次。

又因為 每部電梯都只停留中間某 3 層　　所以，每部電梯可以解決 C_2^3=3 個乘次

故　至少需要 15÷3=5 部電梯。

只是，5 部電梯真的足夠嗎？接下來，我們再針對單一樓層來做思考。

任一樓層到其他的 6—1=5 個樓層，就是 5 個乘次

任一停留該樓層的電梯，可以往外提供 3—1=2 個乘次

所以共需要〔 $\frac{5}{2}$ 〕+1=3 部電梯（ 可提供 3 • 2=6 個乘次 ）

也因此多出、重複了 6—5=1 個乘次

即　任兩個樓層多出、重複了 1 個乘次

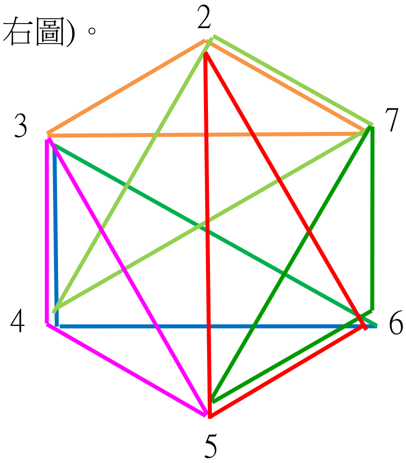
5÷2=2……1　2—1=1 1÷2=$\frac{1}{2}$ 共剩餘、重複 0+$\frac{1}{2}$ • 6=3 個乘次

6 個樓層會總共多出、重複了 3 個乘次　所以 需要新增 〔 $\frac{3}{3}$ 〕=1 部電梯

故　最少需要 5+1=6 部電梯

若是以中間剩餘的 6 個樓層，當作六邊形的六個頂點，邊及對角線就代表電梯的乘次，

每一個小黑點，代表電梯停留在該樓層。我們發現，6 部電梯恰可達成任 2 層樓之間直達的任務（如右圖）。



樓層 \ 電梯	1	2	3	4	5	6
8	●	●	●	●	●	●
7		●	●			●
6	●			●		●
5	●				●	●
4			●	●	●	
3		●		●	●	
2	●	●	●			
1	●	●	●	●	●	●

我們進一步去延伸思考的是：

若是假設建築物有 n 層樓，每部電梯（除了在底層和頂層以外）只可停留其中的 k 個樓層，而且由任一樓層到另一樓層都可以直達，不需要更換電梯。那麼，最少需要幾部電梯呢？

一、n=6 （我們去探討的是 k=3、4 的情況）

(一)k=3 ① 中間剩餘 6—2=4 層樓　　必須提供 C_2^4=6 個乘次

每部電梯可以解決 C_2^3=3 個乘次，故 至少需要 6÷3=2……0 部電梯……(a)

但是，任一樓層到其他的 4—1=3 個樓層，就是 3 個乘次

停留在該樓層的每一部電梯，可以往外提供 3—1=2 個乘次　3÷2=1……1

所以 共需要〔 $\frac{3}{2}$ 〕+1=2 部電梯

（可提供 2 • 2=4 個乘次）

多出、重複了 4—3=1 個乘次

2—1=1　1÷2=$\frac{1}{2}$

共剩餘、重複 0+$\frac{1}{2}$ • 4=2 個乘次

即　任兩個樓層多出、重複了 1 個乘次

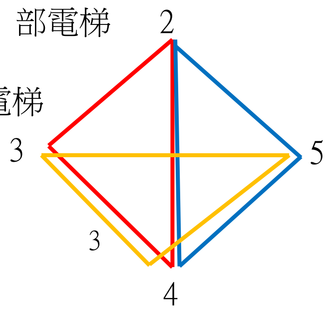
4 個樓層總共多出、重複了 2 個乘次……(b)

由（a）(b)知道，共剩餘、重複 0+2＝2 個乘次

所以 需要新增〔$\frac{2}{3}$〕+1=1 部電梯

故　最少需要 2+1=3 部電梯

② 2 部電梯是不可行的

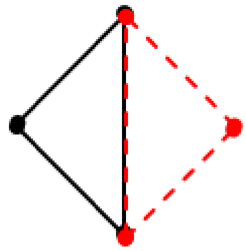


樓層 \ 電梯	1	2	3
6	●	●	●
5		●	●
4	●	●	●
3	●		●
2	●	●	
1	●	●	●

n=6、k=3

(如下頁)

因為 2 部電梯會同時經過 3 • 2—4=2 個樓層，



所以 每 2 個樓層就必須新增 1 部電梯

又　每一部電梯可以往外提供 3—1=2 個乘次，

到達其他的 2 個樓層　即　至少需要新增 〔 $\frac{2}{2}$ 〕=1 部電梯，

故　最少需要 2+1=3 部電梯

③ 短少 1 個乘次的情況下……… C_2^4—1=5　5÷3=1……2

4—1=3　3—1=2　3÷2=1……1　2—1=1　1÷2=$\frac{1}{2}$

共剩餘、重複 2+$\frac{1}{2}$ • 4=4 個乘次，　所以需要新增 〔 $\frac{4}{3}$ 〕+1=2 部電梯

故　最少需要 1+2=3 部電梯

④ 短少直達 1 個樓層的情況下………　C_2^4=6　C_2^3=3

6÷3=2……0　(4—1)—1=2　3—1=2　2÷2=1……0

無剩餘、重複的乘次，所以毋需新增電梯　　故 最少需要 2 部電梯

(二)k=4　　中間剩餘 6—2=4 層樓　　1 部電梯恰好適用

二、n=7 (我們去探討的是 k=3、4、5 的情況)

7	●	●	●	●
6		●	●	●
5	●			●
4	●		●	
3		●	●	●
2	●	●		
1	●	●	●	●
樓層 電梯	1	2	3	4

n=7
k=3

(一)k=3 ① 7—2=5　C_2^5=10　C_2^3=3　10÷3=3……1

5—1=4　3—1=2　4÷2=2……0

共剩餘、重複 1+0 • 5=1 個乘次，

所以需要新增〔 $\frac{1}{3}$ 〕+1=1 部電梯

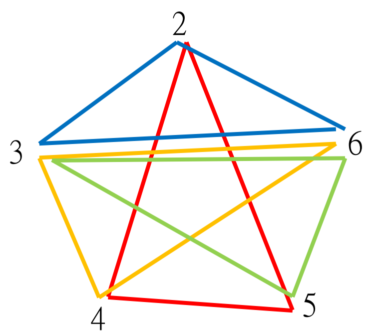
故　最少需要 3+1=4 部電梯

② 2 部電梯是不可行的 (如下頁)

因為　2 部電梯會同時經過 3 • 2—5=1 個樓層

所以　每 1 個樓層就必須新增 1 部電梯

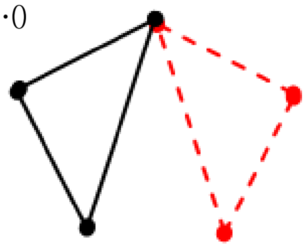
又　每一部電梯可以往外提供 3—1=2 個乘次，



到達其他的 2 個樓層

即　至少需要新增〔 $\frac{2}{1}$ 〕=2 部電梯，　故　最少需要 2+2=4 部電梯

③ 短少 1 個乘次的情況下………　C_2^5—1=9　9÷3=3……0



5—1=4　3—1=2　4÷2=2……0

無剩餘、重複的乘次，所以毋需新增電梯

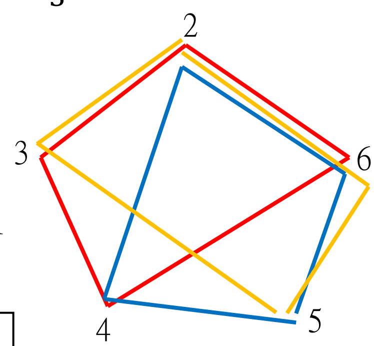
故 最少需要 3 部電梯

④ 短少直達 1 個樓層的情況下………　C_2^5=10　C_2^3=3　10÷3=3……1

(5—1)—1=3　3—1=2　3÷2=1……1　2—1=1　1÷2=$\frac{1}{2}$

共剩餘、重複 1+$\frac{1}{2}$ • 4=3 個乘次，所以需要新增 $\frac{3}{3}$=1 部電梯

故　最少需要 3+1=4 部電梯



(二)k=4 ① 7—2=5　C_2^5=10　C_2^4=6　10÷6=1……4

5—1=4　4—1=3　4÷3=1……1　3—1=2　2÷2=1

共剩餘、重複 4+1 • 5=9 個乘次，

所以需要新增〔 $\frac{9}{6}$ 〕+1=2 部電梯

故　最少需要 1+2=3 部電梯

n=7
k=4

7	●	●	●
6	●	●	●
5		●	●
4	●	●	
3	●		●
2	●	●	●
1	●	●	●
樓層 / 電梯	1	2	3

② 2 部電梯是不可行的（如右下圖）

因為　2 部電梯會同時經過 4 • 2—5=3 個樓層

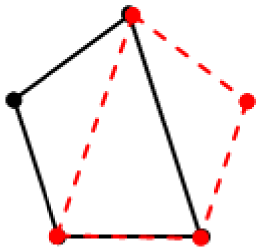
所以　每 3 個樓層就必須新增 1 部電梯

又　每一部電梯可以往外提供 4—1=3 個乘次，

到達其他的 3 個樓層

即　至少需要新增〔 $\frac{3}{3}$ 〕=1 部電梯，

故　最少需要 2+1=3 部電梯



③ 短少 1 個乘次的情況下………　C_2^5—1=9　9÷6=1……3

$5-1=4$　　$4-1=3$　　$4\div3=1\cdots\cdots1$　　$3-1=2$　　$2\div2=1$

共剩餘、重複 $3+1\bullet5=8$ 個乘次，　所以需要新增〔$\frac{8}{6}$〕$+1=2$ 部電梯

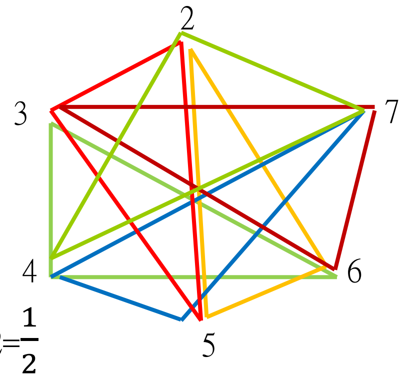
故　最少需要 $1+2=3$ 部電梯

④ 短少直達 1 個樓層的情況下………　$C^5_2=10$　$C^4_2=6$　$10\div6=1\cdots\cdots4$

$(5-1)-1=3$　$4-1=3$　$3\div3=1\cdots\cdots0$

共剩餘、重複 $4+0\bullet4=4$ 個乘次，　所以需要新增〔$\frac{4}{6}$〕$+1=1$ 部電梯

故　最少需要 $1+1=2$ 部電梯



(三)k=5　中間剩餘 $7-2=5$ 層樓　1 部電梯恰好適用

三、n=8 （我們去探討的是 k=3、4、5、6 的情況）

(一)k=3 ① $8-2=6$　$C^6_2=15$　$C^3_2=3$　$15\div3=5\cdots\cdots0$

$6-1=5$　$3-1=2$　$5\div2=2\cdots\cdots1$　$2-1=1$　$1\div2=\frac{1}{2}$

共剩餘、重複 $0+\frac{1}{2}\bullet6=3$ 個乘次，　所以需要新增 $\frac{3}{3}=1$ 部電梯

故　最少需要 $5+1=6$ 部電梯

② 短少 1 個乘次的情況下………

$C^6_2-1=14$　$14\div3=4\cdots\cdots2$

$6-1=5$　$3-1=2$　$5\div2=2\cdots\cdots1$

$2-1=1$　$1\div2=\frac{1}{2}$

共剩餘、重複 $2+\frac{1}{2}\bullet6=5$ 個乘次

所以需要新增〔$\frac{5}{3}$〕$+1=2$ 部電梯

故　最少需要 $4+2=6$ 部電梯

8	●	●	●	●	●	●
7			●		●	●
6		●		●	●	
5	●		●	●		
4		●	●			●
3	●	●			●	
2	●			●		●
1	●	●	●	●	●	●
樓層 電梯	1	2	3	4	5	6

n=8，k=3

③ 短少直達 1 個樓層的情況下………　$C^6_2=15$　$C^3_2=3$　$15\div3=5\cdots\cdots0$

$(6-1)-1=4$　$3-1=2$　$4\div2=2\cdots\cdots0$

無剩餘、重複的乘次，所以毋需新增電梯，　故　最少需要 5 部電梯

(二)k=4 ① 8—2=6　C_2^6=15　C_2^4=6　15÷6=2……3

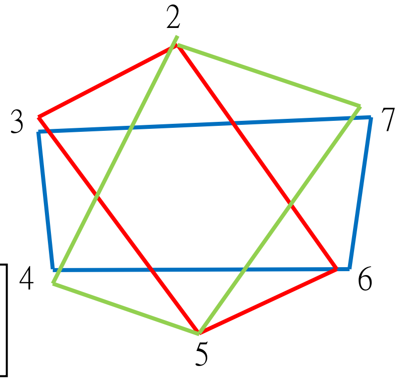
6—1=5　4—1=3　5÷3=1……2　3—2=1　1÷2=$\frac{1}{2}$

共剩餘、重複 3+$\frac{1}{2}$ • 6=6 個乘次

所以需要新增 〔 $\frac{6}{6}$ 〕=1 部電梯

故　最少需要 2+1=3 部電梯

n=8
k=4



② 2 部電梯是不可行的（ 如右下圖 ）

∵ 2 部電梯會同時經過 4 • 2—6=2 個樓層

∴ 每 2 個樓層就必須新增 1 部電梯

又　每一部電梯可以往外提供 4—1=3 個乘次

，到達其他的 3 個樓層

即　至少需要新增 〔 $\frac{3}{2}$ 〕=1 部電梯

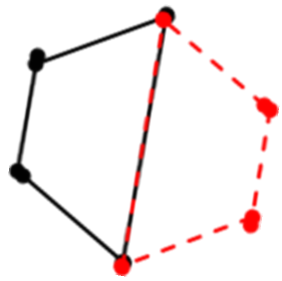
故　最少需要 2+1=3 部電梯

樓層＼電梯	1	2	3
8	●	●	●
7		●	●
6	●	●	
5	●		●
4		●	●
3	●	●	
2	●		●
1	●	●	●

③ 短少 1 個乘次的情況下………

C_2^6—1=14　14÷6=2……2　6—1=5　4—1=3

5÷3=1……2　3—2=1　1÷2=$\frac{1}{2}$



共剩餘、重複 2+$\frac{1}{2}$ • 6=5 個乘次，

所以需要新增〔 $\frac{5}{6}$ 〕+1=1 部電梯　　故　最少需要 2+1=3 部電梯

④ 短少直達 1 個樓層的情況下………　C_2^6=15　C_2^4=6　15÷6=2……3

(6—1)—1=4　4—1=3　4÷3=1……1　3—1=2　2÷2= 1

共剩餘、重複 3+1 • 5=8 個乘次，　所以需要新增〔 $\frac{8}{6}$ 〕+1=2 部電梯

故　最少需要 2+2=4 部電梯

(三)k=5 ① 8—2=6　C_2^6=15　C_2^5=10　15÷ 10=1……5

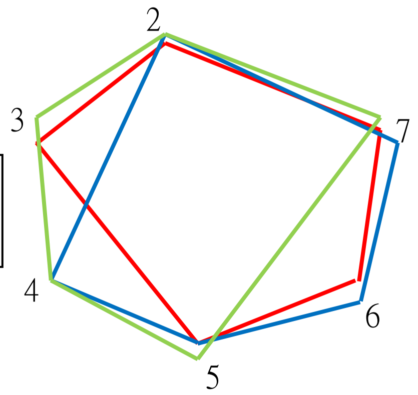
6—1=5　5—1=4　5÷ 4=1……1　4—1=3　3÷ 2=$\frac{3}{2}$

共剩餘、重複 $5+\frac{3}{2}\bullet 6=14$ 個乘次

所以需要新增 〔$\frac{14}{10}$〕$+1=2$ 部電梯

故　最少需要 $1+2=3$ 部電梯

n=8
k=5



② 2 部電梯是不可行的（ 如右下圖 ）

∵ 2 部電梯會同時經過 $5\bullet 2—6=4$ 個樓層

∴ 每 4 個樓層就必須新增 1 部電梯

又　每一部電梯可以往外提供 $5—1=4$ 個乘次

，到達其他的 4 個樓層

即　至少需要新增 〔$\frac{4}{4}$〕$=1$ 部電梯，

故　最少需要 $2+1=3$ 部電梯

8	●	●	●
7	●	●	●
6	●	●	
5	●	●	●
4		●	●
3	●		●
2	●	●	●
1	●	●	●
樓層 / 電梯	1	2	3

③ 短少 1 個乘次的情況下………

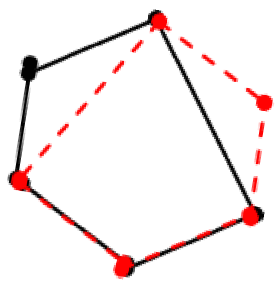
$C_2^6—1=14$　$14\div 10=1\cdots\cdots 4$　$6—1=5$　$5—1=4$

$5\div 4=1\cdots\cdots 1$　$4—1=3$　$3\div 2=\frac{3}{2}$

共剩餘、重複 $4+\frac{3}{2}\bullet 6=13$ 個乘次，

所以需要新增〔$\frac{13}{10}$〕$+1=2$ 部電梯

故　最少需要 $1+2=3$ 部電梯



④ 短少直達 1 個樓層的情況下………　$C_2^6=15$　$C_2^5=10$　$15\div 10=1\cdots\cdots 5$

$(6—1)—1=4$　$5—1=4$　$4\div 4=1\cdots\cdots 0$

共剩餘、重複 $5+0\bullet 5=5$ 個乘次，　所以需要新增〔$\frac{5}{10}$〕$+1=1$ 部電梯

故　最少需要 $1+1=2$ 部電梯

(四)k=6　　中間剩餘 $8—2=6$ 層樓　　1 部電梯恰好適用

四、n=9 （ 我們去探討的是 k=3、4、5、6、7 的情況 ）

(一)k=3 ① $9—2=7$　$C_2^7=21$　$C_2^3=3$　$21\div 3=7\cdots\cdots 0$

7—1=6　 3—1=2　 6÷2=3……0

無剩餘、重複的乘次，所以毋需新增電梯　　故　最少需要 7 部電梯

② 短少 1 個乘次的情況下………　C_2^7—1=20　 20÷3=6……2

7—1=6　3—1=2　 6÷2=3……0

共剩餘、重複 2+0 • 7=2 個乘次　　所以需要新增〔 $\frac{2}{3}$ 〕+1=1 部電梯

故　最少需要 6+1=7 部電梯

③ 短少直達 1 個樓層的情況下………　C_2^7=21　 C_2^3=3　 21÷3=7……0

(7—1)—1=5　 3—1=2　 5÷2=2……1　 2—1=1　 1÷2=$\frac{1}{2}$

共剩餘、重複 0+$\frac{1}{2}$ • 6=3 個乘次，　所以需要新增 $\frac{3}{3}$ =1 部電梯

故　最少需要 7+1=8 部電梯

n=9，k=3

9	●	●	●	●	●	●	●
8				●		●	●
7			●		●	●	
6		●		●	●		
5	●		●	●			
4		●	●				●
3	●	●				●	
2	●				●		●
1	●	●	●	●	●	●	●
樓層／電梯	1	2	3	4	5	6	7

n=9，k=4

9	●	●	●	●	●
8		●	●	●	
7			●		●
6	●	●	●		
5		●		●	●
4	●	●			●
3	●		●	●	
2	●			●	●
1	●	●	●	●	●
樓層／電梯	1	2	3	4	5

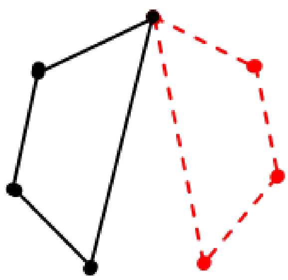
(二)k=4 ① 9—2=7　 C_2^7=21　 C_2^4=6　 21÷6=3……3

7—1=6　 4—1=3　 6÷3=2……0

共剩餘、重複 3+0 • 7=3 個乘次，　所以需要新增〔 $\frac{3}{6}$ 〕+1=1 部電梯

故　最少需要 3+1=4 部電梯

② 2 部電梯是不可行的（ 如右圖 ）



∵ 2 部電梯會同時經過 4 • 2—7=1 個樓層

∴ 每 1 個樓層就必須新增 1 部電梯

又 每一部電梯可以往外提供 4—1=3 個乘次，到達其他的 3 個樓層

即 至少需要新增 $\lceil \frac{3}{1} \rceil$=3 部電梯， 故 最少需要 2+3=5 部電梯

③ 短少 1 個乘次的情況下……… C_2^7—1=20 20÷6=3……2

7—1=6 4—1=3 6÷3=2……0

共剩餘、重複 2+0 • 7=2 個乘次， 所以需要新增 $\lceil \frac{2}{6} \rceil$+1=1 部電梯

故 最少需要 3+1=4 部電梯

④ 短少直達 1 個樓層的情況下……… C_2^7=21 21÷6=3……3

(7—1)—1=5 4—1=3 5÷3=1……2 3—2=1 1÷2=$\frac{1}{2}$

共剩餘、重複 3+$\frac{1}{2}$ • 6=6 個乘次， 所以需要新增 $\lceil \frac{6}{6} \rceil$=1 部電梯

故 最少需要 3+1=4 部電梯

(三)k=5 ① 9—2=7 C_2^7=21 C_2^5=10 21÷ **10**=2……1

7—1=6 5—1=4 6÷ **4**=1……2 4—2=2 2÷ **2**=1

共剩餘、重複 1+1 • 7=8 個乘次

所以需要新增 $\lceil \frac{8}{10} \rceil$+1=1 部電梯

故 最少需要 2+1=3 部電梯

n=9
k=5

9	●	●	●
8		●	●
7	●	●	
6		●	●
5	●	●	●
4	●		●
3	●	●	
2	●		●
1	●	●	●
樓層 \ 電梯	1	2	3

② 2 部電梯是不可行的（ 如下頁 ）

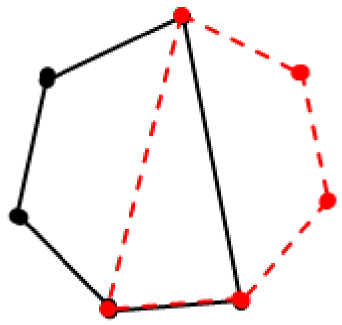
∵ 2 部電梯會同時經過 5 • 2—7=3 個樓層

∴ 每 3 個樓層就必須新增 1 部電梯

又 每一部電梯可以往外提供 5—1=4 個乘次，到達其他的 4 個樓層

即　至少需要新增 〔$\frac{4}{3}$〕=1 部電梯

故　最少需要 2+1=3 部電梯



③ 短少 1 個乘次的情況下………

C_2^7—1=20　20÷10=2……0

7—1=6　5—1=4　6÷4=1……2　4—2=2　2÷ 2=1

共剩餘、重複 0+1 • 7=7 個乘次， 所以需要新增〔$\frac{7}{10}$〕+1=1 部電梯

故　最少需要 2+1=3 部電梯

④ 短少直達 1 個樓層的情況下………　C_2^7=21　21÷10=2……1

(7—1)—1=5　5—1=4　5÷4=1……1　4—1=3　3÷2=$\frac{3}{2}$

共剩餘、重複 1+$\frac{3}{2}$ • 6=10 個乘次， 所以需要新增 $\frac{10}{10}$=1 部電梯

故　最少需要 2+1=3 部電梯

(四)k=6 ① 9—2=7　C_2^7=21　C_2^6=15　21÷ 15=1……6

7—1=6　6—1=5　6÷ 5=1……1　5—1=4　4÷ 2=2

共剩餘、重複 6+2 • 7=20 個乘次

所以需要新增〔$\frac{20}{15}$〕+1=2 部電梯

n=9
k=6

樓層＼電梯	1	2	3
9	●	●	●
8		●	●
7	●	●	●
6	●	●	●
5	●	●	●
4	●	●	
3	●	●	●
2	●		●
1	●	●	●

故　最少需要 1+2=3 部電梯

② 2 部電梯是不可行的（ 如右下圖 ）

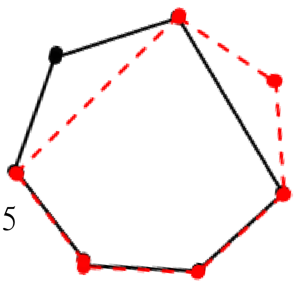
∵ 2 部電梯會同時經過 6 • 2—7=5 個樓層

∴ 每 5 個樓層就必須新增 1 部電梯

又　每一部電梯可以往外提供 6—1=5 個乘次，到達其他的 5 個樓層

即　至少需要新增 〔$\frac{5}{5}$〕=1 部電梯

故　最少需要 2+1=3 部電梯



③ 短少 1 個乘次的情況下………C_2^7—1=20　20÷15=1……5

7—1=6　 6—1=5　 6÷5=1……1　 5—1=4　 4÷ 2=2

共剩餘、重複 5+2 • 7=19 個乘次，　所以需要新增〔 $\frac{19}{15}$ 〕+1=2 部電梯

故　最少需要 1+2=3 部電梯

④ 短少直達 1 個樓層的情況下………　 C_2^7=21　 21÷15=1……6

(7—1)—1=5　 6—1=5　 5÷5=1……0

共剩餘、重複 6+0 • 6=6 個乘次，　所以需要新增〔 $\frac{6}{15}$ 〕+1=1 部電梯

故　最少需要 1+1=2 部電梯

(五)k=7　　中間剩餘 9—2=7 層樓　 1 部電梯恰好適用

五、n=10 （ 我們去探討的是 k=3、4、5、6、7、8 的情況 ）

(一)k=3　最少需要 11 部電梯　　(二)k=4　最少需要 6 部電梯

(三)k=5　最少需要 4 部電梯　　(四)k=6　最少需要 3 部電梯

(五)k=7　最少需要 3 部電梯　　(六)k=8　中間剩餘 11—2=9　層樓　1 部電梯恰好適用

n=10，k=3

10	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
9			●						●	●	●
8		●		●		●					●
7					●	●		●		●	
6	●			●	●				●		
5			●	●			●	●		●	
4		●	●		●		●				
3	●	●						●	●		
2	●					●	●				●
1	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
樓層 \ 電梯	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

n=10，k=4

10	●	●	●	●	●	●
9			●	●		●
8		●		●	●	
7	●		●		●	
6		●	●			●
5		●			●	●
4	●	●		●		
3	●			●		●
2	●		●		●	
1	●	●	●	●	●	●
樓層 / 電梯	1	2	3	4	5	6

n=10，k=5

10	●	●	●	●
9		●	●	●
8	●		●	
7		●	●	●
6	●	●		
5		●	●	●
4	●	●		
3	●			●
2	●		●	●
1	●	●	●	●
樓層 / 電梯	1	2	3	4

n=10
k=6

10	●	●	●
9		●	●
8	●	●	
7	●		●
6	●	●	●
5		●	●
4	●	●	
3	●		●
2	●	●	●
1	●	●	●
樓層 / 電梯	1	2	3

n=10
k=7

10	●	●	●
9	●	●	●
8	●	●	●
7		●	●
6	●	●	●
5	●		●
4	●	●	●
3	●	●	
2	●	●	●
1	●	●	●
樓層 / 電梯	1	2	3

六、n=11 （ 我們去探討的是 k=3、4、5、6、7、8、9 的情況 ）

(一)k=3　最少需要 12 部電梯　(二)k=4　最少需要 8 部電梯

(三)k=5　最少需要 5 部電梯　(四)k=6　最少需要 3 部電梯

(五)k=7　最少需要 3 部電梯　(六)k=8　最少需要 3 部電梯

(七)k=9　中間剩餘 11—2=9 層樓　1 部電梯恰好適用

n=11
k=3

11	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
10				●	●		●			●		
9	●				●				●		●	
8		●			●			●				●
7			●					●		●	●	
6			●				●		●			●
5		●				●	●				●	
4	●					●				●		●
3				●		●		●	●			
2	●	●	●	●								
1	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
樓層 電梯	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

n=11，k=4

11	●	●	●	●	●	●	●	●
10	●			●		●	●	
9				●	●		●	
8			●	●				●
7			●		●	●		
6	●	●			●			●
5	●		●			●	●	●
4		●	●				●	
3	●	●			●			●
2		●		●		●		
1	●	●	●	●	●	●	●	●
樓層 電梯	1	2	3	4	5	6	7	8

n=11，k=6

11	●	●	●
10		●	●
9	●	●	
8		●	●
7	●	●	
6		●	●
5	●	●	
4	●		●
3	●		●
2	●		●
1	●	●	●
樓層 電梯	1	2	3

n=11
k=5

11	●	●	●	●	●
10		●		●	●
9		●	●		●
8		●		●	●
7		●	●		●
6	●		●	●	
5	●		●	●	
4	●				●
3	●		●	●	
2	●	●			
1	●	●	●	●	●
樓層 電梯	1	2	3	4	5

11	●	●	●
10		●	●
9	●	●	●
8	●	●	
7		●	●
6	●	●	●
5	●		●
4	●	●	●
3	●		●
2	●	●	
1	●	●	●
樓層 電梯	1	2	3

n=11
k=7

七、n=12（我們去探討的是k=3、4、5、6、7、8、9、10的情況）

(一)k=3　最少需要 17 部電梯　(二)k=4　最少需要 9 部電梯

(三)k=5　最少需要 6 部電梯　(四)k=6　最少需要 4 部電梯

(五)k=7　最少需要 3 部電梯　(六)k=8　最少需要 3 部電梯

(七)k=9　最少需要 3 部電梯　(八)k=10　中間剩餘 12—2=10 層樓　1 部電梯恰好適用

n=12，k=3

12	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
11						●		●	●					●			●
10				●			●	●			●					●	
9						●	●			●		●				●	
8					●	●					●		●		●		
7		●		●	●							●		●			●
6			●	●					●	●			●				
5	●		●					●				●	●				
4		●	●											●	●	●	
3	●	●								●	●						●
2	●				●		●		●						●		
1	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
樓層 電梯	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17

n=12
k=4

12	●	●	●	●	●	●	●	●	●
11			●		●	●	●		
10	●	●			●				
9				●	●	●		●	
8		●					●	●	
7	●		●					●	●
6		●	●	●					
5		●				●			●
4	●		●					●	●
3	●			●		●	●		
2				●	●		●		●
1	●	●	●	●	●	●	●	●	●
樓層 \ 電梯	1	2	3	4	5	6	7	8	9

n=12
k=7

12	●	●	●
11		●	●
10	●		●
9	●		●
8		●	●
7		●	●
6	●		●
5	●	●	
4	●	●	●
3	●	●	
2	●	●	
1	●	●	●
樓層 \ 電梯	1	2	3

n=12
k=5

12	●	●	●	●	●	●
11			●	●		●
10	●		●		●	
9		●			●	●
8		●	●	●		
7	●			●		●
6		●	●	●		
5		●			●	●
4	●	●				●
3	●		●		●	
2	●			●	●	
1	●	●	●	●	●	●
樓層 \ 電梯	1	2	3	4	5	6

n=12
k=6

12	●	●	●	●
11		●		●
10	●		●	●
9		●	●	
8		●	●	
7	●		●	●
6		●		●
5	●	●		
4	●		●	●
3	●		●	●
2	●	●		
1	●	●	●	●
樓層 \ 電梯	1	2	3	4

伍、研究結果與討論

我們一直計算、研究到「建築物有 35 層樓」，暫時停頓下來，將所得的資料先做整理。

有 n 個樓層，每部電梯只可停留其中的 k 個樓層，最少需要幾部以上的電梯

k \ n	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
3	3	4	6	7	11	12	12	19	24	26	33	35	43	46	54
4	1	3	3	**5**	6	**8**	**9**	11	12	13	18	19	20	26	27
5		1	3	3	4	**5**	6	**8**	**9**	8	12	12	13	14	18
6			1	3	3	3	4	**6**	6	7	7	8	8	12	12
7				1	3	3	3	4	4	4	6	7	7	8	8
8					1	3	3	3	3	4	4	4	6	7	7
9						1	3	3	3	3	4	4	4	4	6
10							1	3	3	3	3	3	4	4	4
11								1	3	3	3	3	3	4	4
12									1	3	3	3	3	3	3
13										1	3	3	3	3	3
14											1	3	3	3	3
15												1	3	3	3
16													1	3	3
17														1	3
18															1

紅色粗體數字為
實際可行的最少電梯部數≧前面所計算出來的數值

k \ n	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
3	57	67	70	81	85	96	100	113	117	131	136	150	155	171	176
4	29	35	37	39	46	48	50	59	61	63	73	75	78	88	91
5	19	20	21	27	28	29	30	37	38	40	41	48	50	52	53
6	13	14	14	19	20	20	21	22	27	28	29	30	31	38	39
7	9	12	12	13	14	14	15	19	20	20	21	22	23	28	29
8	8	8	8	9	12	12	13	13	14	14	15	19	20	20	21
9	7	7	7	8	8	8	9	12	12	13	13	14	14	15	15
10	4	6	7	7	7	8	8	8	9	9	12	12	13	13	14
11	4	4	4	6	7	7	7	8	8	8	8	9	9	13	10
12	4	4	4	4	4	6	7	7	7	7	8	8	8	8	9
13	3	4	4	4	4	4	4	6	7	7	7	7	8	8	8
14	3	3	3	4	4	4	4	4	4	6	7	7	7	7	8
15	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	6	7	7	7
16	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	6	7
17	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4

根據計算、研究過程中所得的直覺，再將資料內容依「奇數樓層」、「偶數樓層」去做分類、分析與研究。

有 n (=2r，r ∊ N)個樓層，每部電梯只可停留其中的 k 個樓層，最少需要幾部以上的電梯

k \ n	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34
3	3	6	11	17	24	33	43	54	67	81	96	113	131	150	171
4	1	3	6	9	12	18	20	27	35	39	48	59	63	75	88
5		3	4	6	9	12	13	18	20	27	29	37	40	48	52
6		1	3	4	6	7	8	12	14	19	20	22	28	30	38
7			3	3	4	6	7	8	12	13	14	19	20	22	28
8			1	3	3	4	6	7	8	9	12	13	14	19	20
9				3	3	4	4	6	7	8	8	12	13	14	15
10				1	3	3	4	4	6	7	8	8	9	12	13
11						3	3	4	4	6	7	8	8	9	13
12						3	3	3	4	4	6	7	7	8	8
13						3	3	3	4	4	4	6	7	7	8
14						1	3	3	3	4	4	4	6	7	7
15							3	3	3	3	4	4	4	6	7
16							1	3	3	3	3	4	4	4	6
17								3	3	3	3	4	4	4	4
18								1	3	3	3	3	4	4	4
19									3	3	3	3	3	4	4
20									1	3	3	3	3	3	4
21										3	3	3	3	3	4
22											3	3	3	3	3
23											3	3	3	3	3
24											1	3	3	3	3
25												3	3	3	3
26												1	3	3	3
27													3	3	3
28													1	3	3
29															3
30															3
31															3
32															1

最少需要 3 部上的電梯

樓層 n	只可停留其中 k 個樓層
6	3
8	4～5
10	6～7
12	7～9
14	8～11
16	10～13
18	11～15
20	12～17
22	14～19
24	15～21
26	16～23
28	18～25
30	19～27
32	20～29
34	22～31

由以上資料，我們推測

6r	4r−1～6r−3
6r+2	4r～6r−1
6r+4	4r+2～6r+1

需要 4 部以上的電梯

樓層 n	只可停留其中 k 個樓層
10	5
12	6
14	7
16	8～9
18	9～10
20	10～11
22	11～13
24	12～14
26	13～15
28	14～17
30	15～18
32	16～19
34	17～21

我們以黃色網底標示「6 的倍數的樓層，每部電梯只可停留其中的 3 個樓層」的分析：

$$\begin{array}{ll}
\cancel{a_2}-a_1=14 & \\
 & 12 \\
\cancel{a_3}-\cancel{a_2}=26 & \\
 & 12 \\
\cancel{a_4}-\cancel{a_3}=38 & \\
 & 12 \\
\vdots & \\
+)\ a_n-\cancel{a_{n-1}}=14+12(n-2)=12n-10 & \\
\hline
\end{array}$$

$$a_n-a_1=\frac{[14+(12n-10)](n-1)}{2}=6n^2-4n-2$$

樓層	最少需要電梯部數
6=6×1	$3=a_1$
12=6×2	$17=a_2$
18=6×3	$43=a_3$
24=6×4	$81=a_4$
⋮	⋮
⋮	⋮
A=6n	$?=a_n$

$a_n=6n^2-4n+1$　　$n=\frac{A}{6}$ 代入　　$a_n=6(\frac{A}{6})^2-4(\frac{A}{6})+1=\frac{A^2-4A+6}{6}$

我們以綠色網底標示「6 的倍數加 2 的樓層，每部電梯只停留其中的 3 個樓層」的分析：

$$\begin{array}{ll}
\cancel{b_2}-b_1=18 & \\
 & 12 \\
\cancel{b_3}-\cancel{b_2}=30 & \\
 & 12 \\
\cancel{b_4}-\cancel{b_3}=42 & \\
 & 12 \\
\vdots & \\
+)\ b_n-\cancel{b_{n-1}}=18+12(n-2)=12n-6 & \\
\hline
\end{array}$$

$$b_n-b_1=\frac{[18+(12n-6)](n-1)}{2}=6n^2-6$$

樓層	最少需要電梯部數
8=6×1+2	$6=b_1$
14=6×2+2	$24=b_2$
20=6×3+2	$54=b_3$
26=6×4+2	$96=b_4$
⋮	⋮
⋮	⋮
B=6n+2	$?=b_n$

$b_n=6n^2$　　$n=\frac{B-2}{6}$ 代入　　$b_n=6(\frac{B-2}{6})^2=\frac{B^2-4B+4}{6}$

我們以橘色網底標示「6 的倍數加 4 的樓層，每部電梯只停留其中的 3 個樓層」的分析：

$$\begin{array}{ll}
\cancel{c_2}-c_1=22 & \\
 & 12 \\
\cancel{c_3}-\cancel{c_2}=34 & \\
 & 12 \\
\cancel{c_4}-\cancel{c_3}=46 & \\
 & 12 \\
\vdots & \\
+)\ c_n-\cancel{c_{n-1}}=22+12(n-2)=12n-2 & \\
\hline
\end{array}$$

$$c_n-c_1=\frac{[22+(12n-2)](n-1)}{2}=6n^2+4n-10$$

樓層	最少需要電梯部數
10=6×1+4	$11=c_1$
16=6×2+4	$33=c_2$
22=6×3+4	$67=c_3$
28=6×4+4	$113=c_4$
⋮	⋮
⋮	⋮
C=6n+4	$?=c_n$

$c_n=6n^2+4n+1$　　$n=\frac{C-4}{6}$ 代入　　$c_n=6(\frac{C-4}{6})^2+4(\frac{C-4}{6})+1=\frac{C^2-4C+6}{6}$

我們發現 k＝4 時，最少電梯部數似乎也有規律性，所以補充資料、繼續計算到 n＝52

「12 的倍數減 6 的樓層，每部電梯只可停留其中的 4 個樓層」的分析：

$$\begin{array}{ll}
\cancel{d_2}-d_1=19 & \\
 & 24 \\
\cancel{d_3}-\cancel{d_2}=43 & \\
 & 24 \\
\cancel{d_4}-\cancel{d_3}=67 & \\
 & 24 \\
\vdots & \\
+)\ d_n-\cancel{d_{n-1}}=19+24(n-2)=24n-29 & \\
\hline
d_n-d_1=\dfrac{[19+(24n-29)](n-1)}{2}=12n^2-17n+5 &
\end{array}$$

樓層	最少需要電梯部數
6=12×1−6	$1=d_1$
18=12×2−6	$20=d_2$
30=12×3−6	$63=d_3$
42=12×4−6	$130=d_4$
⋮	⋮
⋮	⋮
D=12n−6	$?=d_n$

$d_n=12n^2-17n+6$ 　　 $n=\dfrac{D+6}{12}$ 代入 　　 $d_n=12\left(\dfrac{D+6}{12}\right)^2-17\left(\dfrac{D+6}{12}\right)+6=\dfrac{D^2-5D+6}{12}$

「12 的倍數減 4 的樓層，每部電梯只可停留其中的 4 個樓層」的分析：

$$\begin{array}{ll}
\cancel{e_2}-e_1=24 & \\
 & 24 \\
\cancel{e_3}-\cancel{e_2}=48 & \\
 & 24 \\
\cancel{e_4}-\cancel{e_3}=72 & \\
 & 24 \\
\vdots & \\
+)\ e_n-\cancel{e_{n-1}}=24+24(n-2)=24n-24 & \\
\hline
e_n-e_1=\dfrac{[24+(24n-24)](n-1)}{2}=12n^2-12n &
\end{array}$$

樓層	最少需要電梯部數
8=12×1−4	$3=e_1$
20=12×2−4	$27=e_2$
32=12×3−4	$75=e_3$
44=12×4−4	$147=e_4$
⋮	⋮
⋮	⋮
E=12n−4	$?=e_n$

$e_n=12n^2-12n+3$ 　　 $n=\dfrac{E+4}{12}$ 代入 　　 $e_n=12\left(\dfrac{E+4}{12}\right)^2-12\left(\dfrac{E+4}{12}\right)+3=\dfrac{E^2-4E+4}{12}$

「12 的倍數減 2 的樓層，每部電梯只可停留其中的 4 個樓層」的分析：

$$\begin{array}{ll}
\cancel{f_2}-f_1=29 & \\
 & 24 \\
\cancel{f_3}-\cancel{f_2}=53 & \\
 & 24 \\
\cancel{f_4}-\cancel{f_3}=77 & \\
 & 24 \\
\vdots & \\
+)\ f_n-\cancel{f_{n-1}}=29+24(n-2)=24n-19 & \\
\hline
f_n-f_1=\dfrac{[29+(24n-19)](n-1)}{2}=12n^2-7n-5 &
\end{array}$$

樓層	最少需要電梯部數
10=12×1−2	$6=f_1$
22=12×2−2	$35=f_2$
34=12×3−2	$88=f_3$
46=12×4−2	$165=f_4$
⋮	⋮
⋮	⋮
F=12n−2	$?=f_n$

$f_n=12n^2-7n+1$ 　　 $n=\dfrac{F+2}{12}$ 代入 　　 $f_n=12\left(\dfrac{F+2}{12}\right)^2-7\left(\dfrac{F+2}{12}\right)+1=\dfrac{F^2-3F+2}{12}$

「12 的倍數的樓層，每部電梯只可停留其中的 4 個樓層」的分析：

n＝12，k＝4 時 $g_1=9$ 暫以 8 取代

$$
\begin{aligned}
&\cancel{g_2}-g_1=31 \\
&\cancel{g_3}-\cancel{g_2}=55 \quad (24) \\
&\cancel{g_4}-\cancel{g_3}=79 \quad (24) \\
&\vdots \quad (24) \\
+)\ &g_n-\cancel{g_{n-1}}=31+24(n-2)=24n-17
\end{aligned}
$$

$$g_n-g_1=\frac{[31+(24n-17)](n-1)}{2}=12n^2-12n-7$$

$g_n=12n^2-5n+1$ $\quad n=\frac{G}{12}$ 代入 $\quad g_n=12\left(\frac{G}{12}\right)^2-5\left(\frac{G}{12}\right)+1=\frac{G^2-5G+12}{12}$

樓層	最少需要電梯部數
12=12×1	$8=g_1$
24=12×2	$39=g_2$
36=12×3	$94=g_3$
48=12×4	$173=g_4$
⋮	⋮
⋮	⋮
G=12n	? = g_n

「12 的倍數加 2 的樓層，每部電梯只可停留其中的 4 個樓層」的分析：

$$
\begin{aligned}
&\cancel{h_2}-h_1=36 \\
&\cancel{h_3}-\cancel{h_2}=60 \quad (24) \\
&\cancel{h_4}-\cancel{e_3}=84 \quad (24) \\
&\vdots \quad (24) \\
+)\ &h_n-\cancel{h_{n-1}}=36+24(n-2)=24n-12
\end{aligned}
$$

$$h_n-h_1=\frac{[36+(24n-12)](n-1)}{2}=12n^2-12$$

$h_n=12n^2$ $\quad n=\frac{H-2}{12}$ 代入 $\quad e_n=12\left(\frac{H-2}{12}\right)^2=\frac{(H-2)^2}{12}$

樓層	最少需要電梯部數
14=12×1＋2	$12=h_1$
26=12×2＋2	$48=h_2$
38=12×3＋2	$108=h_3$
50=12×4＋2	$192=h_4$
⋮	⋮
⋮	⋮
H=12n＋2	? = h_n

「12 的倍數加 4 的樓層，每部電梯只可停留其中的 4 個樓層」的分析：

$$
\begin{aligned}
&\cancel{j_2}-j_1=41 \\
&\cancel{j_3}-\cancel{j_2}=65 \quad (24) \\
&\cancel{j_4}-\cancel{j_3}=89 \quad (24) \\
&\vdots \quad (24) \\
+)\ &j_n-\cancel{j_{n-1}}=41+24(n-2)=24n-7
\end{aligned}
$$

$$j_n-j_1=\frac{[41+(24n-7)](n-1)}{2}=12n^2+5n-17$$

$j_n=12n^2+5n+1$ $\quad n=\frac{J-4}{12}$ 代入 $\quad j_n=12\left(\frac{J-4}{12}\right)^2+5\left(\frac{J-4}{12}\right)+1=\frac{J^2-3J+8}{12}$

樓層	最少需要電梯部數
16=12×1+4	$18=j_1$
28=12×2+4	$59=j_2$
40=12×3+4	$124=j_3$
52=12×4+4	$213=j_4$
⋮	⋮
⋮	⋮
J=12n＋4	? = j_n

有 n(=2r+1，r ∊ N)個樓層，每部電梯只可停留其中的 k 個樓層，最少需要幾部以上的電梯

k \ n	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35
3	4	7	12	19	26	35	46	57	70	85	100	117	136	155	176
4	3	5	8	11	13	19	26	29	37	46	50	61	73	78	91
5	1	3	5	8	8	12	14	19	21	28	30	38	41	50	53
6		3	3	6	7	8	12	13	14	20	21	27	29	31	39
7		1	3	4	4	7	8	9	12	14	15	20	21	23	29
8			3	3	4	4	7	8	8	12	13	14	15	20	21
9			1	3	3	4	4	7	7	8	9	12	13	14	15
10				3	3	3	4	4	7	7	8	9	12	13	14
11				1	3	3	4	4	4	7	7	8	8	9	10
12					3	3	3	4	4	4	7	7	8	8	9
13					1	3	3	3	4	4	4	7	7	8	8
14							3	3	3	4	4	4	7	7	8
15							3	3	3	4	4	4	4	7	7
16							3	3	3	3	4	4	4	4	7
17							1	3	3	3	3	4	4	4	4
18								3	3	3	3	3	4	4	4
19								1	3	3	3	3	4	4	4
20									3	3	3	3	3	4	4
21									1	3	3	3	3	3	4
22										3	3	3	3	3	3
23										1	3	3	3	3	3
24											3	3	3	3	3
25											1	3	3	3	3
26												3	3	3	3
27												1	3	3	3
28													3	3	3
29													1	3	3
30														3	3
31														1	3
32															3
33															1
34															

最少需要 3 部以上的電梯

樓層 n	只可停留其中 k 個樓層
7	4
9	5～6
11	6～8
13	8～10
15	9～12
17	10～14
19	12～16
21	13～18
23	14～20
25	16～22
27	17～24
29	18～26
31	20～28
33	21～30
35	22～32

由以上資料，我們推測

6r+1	4r～6r−2
6r+3	4r+1～6r
6r+5	4r+2～6r+2

我們以黃色網底標示「6 的倍數加 1 的樓層，每部電梯只停留其中的 3 個樓層」的分析：

$$
\begin{aligned}
&a'_2-a'_1=15\\
&a'_3-a'_2=27\\
&a'_4-a'_3=39\\
&\quad\vdots\\
+)\;&a'_n-a'_{n-1}=15+12(n-2)=12n-9
\end{aligned}
\qquad \text{differences: } 12,\ 12,\ 12
$$

$$a'_n-a'_1=\frac{[15+(12n-9)](n-1)}{2}=6n^2-3n-3$$

樓層	最少需要電梯部數
$7=6\times1+1$	$4=a'_1$
$13=6\times2+1$	$19=a'_2$
$19=6\times3+1$	$46=a'_3$
$25=6\times4+1$	$85=a'_4$
⋮	⋮
⋮	⋮
$A'=6n+1$	$?=a'_n$

$a'_n=6n^2-3n+1$　　$n=\dfrac{A'-1}{6}$ 代入　　$a'_n=6\left(\dfrac{A'-1}{6}\right)^2-3\left(\dfrac{A'-1}{6}\right)+1=\dfrac{A'^2-5A'+10}{6}$

我們以綠色網底標示「6 的倍數加 3 的樓層，每部電梯只停留其中的 3 個樓層」的分析：

$$
\begin{aligned}
&b'_2-b'_1=19\\
&b'_3-b'_2=31\\
&b'_4-b'_3=43\\
&\quad\vdots\\
+)\;&b'_n-b'_{n-1}=19+12(n-2)=12n-5
\end{aligned}
\qquad \text{differences: } 12,\ 12,\ 12
$$

$$b'_n-b'_1=\frac{[19+(12n-5)](n-1)}{2}=6n^2+n-7$$

樓層	最少需要電梯部數
$9=6\times1+3$	$7=b'_1$
$15=6\times2+3$	$26=b'_2$
$21=6\times3+3$	$57=b'_3$
$27=6\times4+3$	$100=b'_4$
⋮	⋮
⋮	⋮
$B'=6n+3$	$?=b'_n$

$b'_n=6n^2+n$　　$n=\dfrac{B'-3}{6}$ 代入　　$b'_n=6\left(\dfrac{B'-3}{6}\right)^2+\left(\dfrac{B'-3}{6}\right)=\dfrac{B'^2-5B'+6}{6}$

我們以橘色網底標示「6 的倍數加 5 的樓層，每部電梯只停留其中的 3 個樓層」的分析：

$$
\begin{aligned}
&c'_2-c'_1=22\\
&c'_3-c'_2=34\\
&c'_4-c'_3=46\\
&\quad\vdots\\
+)\;&c'_n-c'_{n-1}=22+12(n-2)=12n-1
\end{aligned}
\qquad \text{differences: } 12,\ 12,\ 12
$$

$$c'_n-c'_1=\frac{[22+(12n-1)](n-1)}{2}=6n^2+5n-11$$

樓層	最少需要電梯部數
$11=6\times1+5$	$12=c'_1$
$17=6\times2+5$	$35=c'_2$
$23=6\times3+5$	$70=c'_3$
$29=6\times4+5$	$117=c'_4$
⋮	⋮
⋮	⋮
$C'=6n+5$	$?=c'_n$

$c'_n=6n^2+5n+1$　　$n=\dfrac{C'-5}{6}$ 代入　　$c'_n=6\left(\dfrac{C'-5}{6}\right)^2+5\left(\dfrac{C'-5}{6}\right)+1=\dfrac{C'^2-5C'+6}{6}$

為了能發揮最大的經濟效益，我們嘗試著去將最少需要 3 部、4 部、6 部以上的電梯，n 與 k 之間的對應關係式，再做進一步的歸納與整理。

最少需要 3 部以上的電梯

樓層 n	只可停留其中 k 個樓層
6r	4r−1～6r−3
6r+2	4r～6r−1
6r+4	4r+2～6r+1

令 $6r=t_1$　$r=\frac{t_1}{6}$ 代入　$4\left(\frac{t_1}{6}\right)-1=\frac{2t_1-3}{3}$ ～ t_1-3

令 $6r+2=t_2$　$r=\frac{t_2-2}{6}$ 代入　$4\left(\frac{t_2-2}{6}\right)=\frac{2t_2-4}{3}$ ～ t_2-3

令 $6r+4=t_3$　$r=\frac{t_3-4}{6}$ 代入　$4\left(\frac{t_3-4}{6}\right)+2=\frac{2t_3-2}{3}$ ～ t_3-3

最少需要 3 部以上的電梯

樓層 n	只可停留其中 k 個樓層
6r+1	4r～6r−2
6r+3	4r+1～6r
6r+5	4r+2～6r+2

令 $6r+1=t'_1$　$r=\frac{t'_1-1}{6}$ 代入　$4\left(\frac{t'_1-1}{6}\right)=\frac{2t'_1-2}{3}$ ～ t'_1-3

令 $6r+3=t'_2$　$r=\frac{t'_2-3}{6}$ 代入　$4\left(\frac{t'_2-3}{6}\right)+1=\frac{2t'_2-3}{3}$ ～ t'_2-3

令 $6r+5=t'_3$　$r=\frac{t'_3-5}{6}$ 代入　$4\left(\frac{t'_3-5}{6}\right)+2=\frac{2t'_3-4}{3}$ ～ t'_3-3

由 p18 的資料，我們推測

最少需要 4 部以上的電梯

樓層 n (r≧2)	只可停留其中 k 個樓層
6r－2	3r－1～4r−3
6r	3r～4r－2
6r+2	3r+1～4r－1

令 $6r-2=t''_1$　$r=\frac{t''_1+2}{6}$ 代入　$\frac{t''_1}{2}$ ～ $4\left(\frac{t''_1+2}{6}\right)-3=\frac{2t''_1-5}{3}$

令 $6r=t''_2$　$r=\frac{t''_2}{6}$ 代入　$\frac{t''_2}{2}$ ～ $4\left(\frac{t''_2}{6}\right)-2=\frac{2t''_2-6}{3}$

令 $6r+2=t''_3$　$r=\frac{t''_3-2}{6}$ 代入　$\frac{t''_3}{2}$ ～ $4\left(\frac{t''_3-2}{6}\right)-1=\frac{2t''_3-7}{3}$

若是從多邊形的頂點數、邊數與對角線數的這一個角度來思考，

扣除底層和頂層，中間剩餘 (n−2)個樓層

2 部電梯的情況下，最少有 2k−(n−2)= 2k−n+2 個樓層重複 (2 部電梯都停留該樓層)

那麼最多剩下（n−2)−〔2k−n+2〕=2n−2k−4 個樓層，僅有 1 部電梯停留（ 無法完全直達其他樓層 ）

最少需要 6 部上的電梯

樓層 n	只可停留其中 k 個樓層
8	3
10	4
12	5
14	6
16	7
18	8
20	9
22	10
24	11

最少需要 6 部上的電梯

樓層 n	只可停留其中 k 個樓層
26	12
28	13
30	14
32	15
34	16

由以上資料，我們推測

n＝2k＋2

若是 2n−2k−4＞k，新增第 3 部電梯並不足夠

若是 2n−2k−4≦k　 2n≦3k+4，3 部電梯即已足夠

還有，我們也發現到 k＝3 時，奇數樓層、偶數樓層所需最少電梯部數之間的差異性。

k \ n	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34
3	3	6	11	17	24	33	43	54	67	81	96	113	131	150	171
		↓+1			↓+2			↓+3			↓+4			↓+5	

k \ n	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35
3	4	7	12	19	26	35	46	57	70	85	100	117	136	155	176

k \ n	6m	6m+2	6m+4
3			

↓ +m

k \ n	6m+1	6m+3	6m+5
3			

k \ n	6m+ r
3	

r＝0，2，4

↓ +m

k \ n	6m+ (r+1)
3	

k \ n	p
3	

↓ $+\left[\frac{p}{6}\right]$

k \ n	p+1
3	

另外，當我們實地去尋找、繪製電梯的可行配置時，卻也發現：

① n=9，k=4，所需最少電梯是 4+1=5 部　② n=11，k=4，所需最少電梯是 7+1=8 部

③ n=11，k=5，所需最少電梯是 4+1=5 部　④ n=12，k=4，所需最少電梯是 8+1=9 部

⑤ n=13，k=5，所需最少電梯是 7+1=8 部　⑥ n=13，k=6，所需最少電梯是 4+2=6 部

⑦ n=14，k=5，所需最少電梯是 8+1=9 部

我們懷疑，經由計算所得出的所需最少電梯部數，和實際的可行配置是有誤差的。

是哪些乘次的重複、剩餘，我們沒有考量進去的 ？ 再修正、改進我們的計算方式 ？

還有，我們只計算、研究到「建築物有 35 層樓」，所發現到的許多規律性，是恆成立的嗎 ？ 我們的心裏也不踏實的質疑著，該如何去做進一步的證明 ？

可行的電梯配置也不僅僅只有一種，到底可以有多少種呢 ？ 我們也好奇著……

這些，都是我們還有興趣、還想再繼續努力研究的方向。我們的研究未完，剛開始……

陸、結論

1、若是建築物有 n 層樓，每部電梯（ 除了在底層和頂層以外 ）只可停留其中的 3 個、4 個樓層，而且由任一層樓到另一層樓都可以直達，不需要更換電梯。那麼，最少需要的電梯部數是：

樓層數 n：可停留其中的 3 樓層	最少需要電梯部數
6r，6r+4	$\frac{n^2-4n+6}{6}$
6r+1	$\frac{n^2-5n+10}{6}$
6r+2	$\frac{n^2-4n+4}{6}$
6r+3，6r+5	$\frac{n^2-5n+6}{6}$

樓層數 n：可停留其中的 4 樓層	最少需要電梯部數
12r	$\frac{n^2-5n+12}{12}$
12r+2，12r－4	$\frac{n^2-4n+4}{12}$
12r＋4	$\frac{n^2-3n+8}{12}$
12r－2	$\frac{n^2-3n+2}{12}$
12r－6	$\frac{n^2-5n+6}{12}$

唯一例外：
n＝12，k＝4 時 最少電梯部數為 9 部

2. 若是建築物有 n 層樓，每部電梯（ 除了在底層和頂層以外 ）只可停留其中的 3 個樓層，奇數樓層（2r+1）會比偶數樓層（2r）需要多新增 〔 $\frac{2r}{6}$ 〕部電梯。

3、若是建築物有 n 層樓，每部電梯（ 除了在底層和頂層以外 ）只可停留其中的 k 個樓層，而且由任一層樓到另一層樓都可以直達，不需要更換電梯。

① 當 2n≦3k+4 時，3 部電梯即已足夠。

② 當 n＝2k+2 時，6 部電梯即已足夠。

4、若是建築物有 n 層樓，最少需要 3 部、4 部電梯，使得每部電梯（ 除了在底層和頂層以外 ）只可停留其中的 k 個樓層，而且由任一層樓到另一層樓都可以直達，不需要更換電梯。k＝？ （下一頁）

5、所需的最少電梯部數的可行配置方法，不僅僅只有一種。（捌、其他）

柒、參考資料

周東川（1988）・數學概念謎題・譯者林宛明・銀禾文化事業有限公司

例題五 電梯謎題（18-25 頁），

問題 13 電梯難題 I （58-60 頁）

問題 14 電梯難題 II（61-64 頁）

樓層數 n	3 部電梯即已足夠	可停留其中的 k 個樓層
	6r，6r+3	$\frac{2n-3}{3}$～n−3
	6r+1，6r+4	$\frac{2n-2}{3}$～n−3
	6r+2，6r+5	$\frac{2n-4}{3}$～n−3

捌、其他

所需的最少電梯部數的可行配置方法，不僅僅只有一種，以下就是一些例子。

樓層數 n	4 部電梯即已足夠	可停留其中的 k 個樓層
	6r−2	$\frac{n}{2}$ ～ $\frac{2n-5}{3}$
	6r	$\frac{n}{2}$ ～ $\frac{2n-6}{3}$
	6r+2	$\frac{n}{2}$ ～ $\frac{2n-7}{3}$

n=9，k=3 　p9

9	●	●	●	●	●	●	●
8	●	●					●
7		●	●			●	
6	●		●		●		
5			●	●			●
4		●		●	●		
3					●	●	●
2	●			●		●	
1	●	●	●	●	●	●	●
樓層＼電梯	1	2	3	4	5	6	7

n=9，k=4 　p9

9	●	●	●	●	●
8	●	●			●
7	●	●		●	
6			●	●	●
5	●			●	●
4		●	●		●
3		●	●	●	
2	●		●		
1	●	●	●	●	●
樓層＼電梯	1	2	3	4	5

n=10，k=3 p12

10	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
9			●		●		●		●		
8						●	●	●		●	
7	●				●	●					●
6		●			●			●		●	
5				●					●	●	●
4		●	●			●			●		
3	●	●		●			●				●
2	●		●	●				●			
1	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
樓層 電梯	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

n=10，k=4 p13

10	●	●	●	●	●	●
9	●	●				●
8		●		●	●	
7			●		●	●
6	●	●	●			
5		●		●	●	
4	●			●		●
3	●		●	●		
2			●		●	●
1	●	●	●	●	●	●
樓層 電梯	1	2	3	4	5	6

n=10，k=5 p13

10	●	●	●	●
9		●	●	●
8		●	●	●
7	●			●
6	●		●	●
5	●	●		
4		●	●	●
3	●	●		
2	●		●	
1	●	●	●	●
樓層 電梯	1	2	3	4

n=11，k=3 p14

11	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
10		●		●				●				●
9					●		●				●	●
8		●	●							●	●	
7	●							●	●		●	
6						●	●	●		●		
5		●			●	●			●			
4	●			●	●					●		
3			●	●			●		●			
2	●		●			●						●
1	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

n=11，k=4 p14

11	●	●	●	●	●	●	●	●
10	●			●		●		
9		●		●				●
8	●	●					●	●
7			●	●			●	
6	●			●	●			
5		●			●	●	●	
4			●		●	●		●
3	●		●				●	●
2		●	●		●	●		
1	●	●	●	●	●	●	●	●
樓層 / 電梯	1	2	3	4	5	6	7	8

n=11，k=5 p15

11	●	●	●	●	●
10		●	●		●
9	●		●	●	
8	●		●	●	
7		●		●	●
6	●		●	●	
5		●	●		●
4	●	●			
3		●		●	●
2	●				●
1	●	●	●	●	●
樓層 / 電梯	1	2	3	4	5

n=12，k=4 p16

12	●	●	●	●	●	●	●	●	●
11		●					●		●
10			●		●		●		
9		●		●	●			●	
8	●			●		●	●		
7	●				●				●
6		●			●	●		●	
5			●			●		●	●
4	●			●		●	●		
3			●	●				●	●
2	●	●	●						
1	●	●	●	●	●	●	●	●	●
樓層 電梯	1	2	3	4	5	6	7	8	9

n=12，k=6 p16

12	●	●	●	●
11	●		●	
10			●	●
9	●	●		●
8	●	●		●
7			●	●
6	●		●	
5		●	●	
4	●	●		●
3		●	●	
2	●	●		●
1	●	●	●	●
樓層 電梯	1	2	3	4

n=12，k=5 p16

12	●	●	●	●	●	●
11	●	●			●	
10		●		●		●
9		●		●		●
8	●	●			●	
7	●		●			●
6		●	●	●		
5	●			●	●	
4	●		●	●		
3			●		●	●
2			●		●	●
1	●	●	●	●	●	●
樓層 電梯	1	2	3	4	5	6

n=13，k=5

13	●	●	●	●	●	●	●	●
12			●	●	●			
11		●	●			●		●
10	●				●	●		
9	●			●		●		●
8		●			●		●	●
7					●	●	●	
6			●	●	●			
5		●	●			●		●
4	●		●				●	
3	●	●		●			●	●
2	●	●		●			●	
1	●	●	●	●	●	●	●	●
樓層 電梯	1	2	3	4	5	6	7	8

【評語】030420

作者們應該不知道他們所考慮的問題其實是一個標準的圖形覆蓋問題。藉由簡單的計算，針對較小的 n 值，確實可以給出覆蓋數的確切值。但如果要考慮一般化的情況，只是簡單的計算邊的重複數可能就有點說不清楚。事實上，當 m=3 時，最小覆蓋數會是 $\lceil n/3 \lceil (n-2)/2 \rceil \rceil$。m=4 時，這個問題也有答案，只是稍微複雜些（參考：W.H.Mills, On the Covering of Pairs by Quadruples I,II, JOURNAL OF COMBINATORIAL THEORY (A) 13, 55-78 (1972) 和 JOURNAL OF COMBINATORIAL THEORY (A) 15, 138-166 (1973)）。作者們確實下了很大的功夫在分析這個問題，但沒能多作一些資料蒐集的工作，以致於重複了前人的結果，有點可惜了。