中華民國第56屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

佳作

030418

發現「星」奧妙
—正n邊形邊長延伸形成多角星之性質

學校名稱：新北市立三峽國民中學

作者：	指導老師：
國二 張書豪	戴坤邦
國二 温健喬	劉嘉雯
國二 鍾秉辰	

關鍵詞：正n邊形、正多角星

摘要

本研究探討正 n 邊形各邊邊長延伸經過 p 次交點所形成的 p 階 n 角星多邊形之角度及邊長，我們求出 p 階角星頂角的公式，證明：「$n > 2(p+1)$時，就存在 p 階角星」，並和正 n 邊形內部連線問題做比對，提出兩者的對應關係。對於多角星的邊長與各角星頂角的連線線段，我們使用三角函數列式求長度及使用電腦軟體 *EXCEL* 輔助計算討論。在這樣的觀察中，發現「正 n 邊形邊長在特定的狀況下會等於 p 階角星的邊長」等一些有趣的性質，而這些幾何特性的證明也能夠呼應它複雜的代數算式成立，除此之外，多角星的角度與角星頂點連線上計算都和原正 n 邊形的角度、邊長有一致性的關係，因此本研究把正 n 邊形視為一個 0 階角星。

壹、研究動機

「原來正 n 邊形可以形成漂亮且規律的正 n 角星！」某天看見一份科展報告「小星星之旅－多邊形與多角星」(2014)其中探討正多邊形與正多角星的關係，這些漂亮的圖形引起我們的興趣，也剛好和我們國二所學的三角形性質相關，於是我們在網路上搜尋這主題的相關研究，發現全國科展在第 29 屆與 45 屆皆有以此為主題的研究，但它們這些研究皆是探討正 n 邊形內部連線所形成的正 n 角星，僅 2014 的研究對「正 n 邊形各個邊長延伸交點也會形成正 n 角星」這議題提出了簡單的觀察結果，並無進一步的探索，基於好奇心，我們嘗試進一步的探討這個議題，而為了想知道這外部正 n 角星的邊長長度，我們發現只要將我們學到的直角三角形 30°、60°、90°，45°、45°、90°的比例關係加以應用，就能使用三角函數來克服！

貳、研究目的

一、探討正 n 邊形邊長延伸交點所形成的 p 階多角星之種類

二、探討正 n 邊形 p 階多角星頂角的角度

三、探討正 n 邊形 p 階多角星的長度與周長

四、探討正 n 邊形 p 階多角星的頂角連線線段長度

五、正 n 邊形內部連線與外部延伸所形成的 p 階多角星之對應關係

參、研究設備及器材

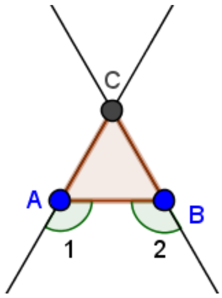
電腦軟體 *GeoGebra*(*GGB*)、電腦軟體 *EXCEL*、筆、紙

肆、研究方法與過程

一、 正 *n* 邊形外部邊長延伸之 *n* 角星頂角角度探討

我們將各種正 n 邊形的邊長延伸，知道隨著 n 的改變，它們的邊長延伸直線交點數也會不同，這會影響它們形成 n 角星的狀況，譬如正三邊形、四邊形的邊長延伸沒有交點所以無法形成 n 角星，正五、六邊形的邊會有一個交點，因此會形成一種角星，正九邊形的每一個邊延伸會有三個交點，因此會形成三種不同九角星，這項規律在小星星之旅(2014)的研究中已經提到，但他們只是畫圖歸納，我們則進一度提出代數證明，並且利用代數運算說明正 n 邊形在這種狀況究竟能形成幾種多角形。

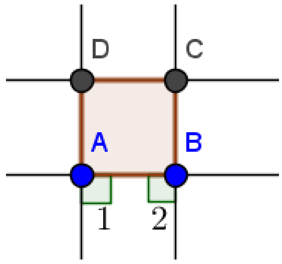
以下我們針對各種正 n 邊形的外角度數用代數式的探討，**當正 n 邊形的外角大於等於 90 度，則二線不會有交點，反之，小於 90 度則有交點**，以下我們也利用此性質說明 n 角星的成立 n 必然大於 4，以及其規律：



(一) 正三、四邊形無法形成多角星，正五邊形以上一定能形成多角星

1. 因為邊長延伸出去的∠1+∠2>180° ，

   所以兩線不能相交，不會形成多角星。



2. 正四邊形邊長延伸出去的∠1+∠2=180°，

   所以兩線不能相交，不會形成多角星。

3. 證明正 n 邊形當 n>4 時(正五邊形以上)，才能形成多角星。

$$\left(180-\frac{180(n-2)}{n}\right)\times 2 < 180$$

$$\Rightarrow \quad \frac{360}{n}\times 2 < 180$$

$$\Rightarrow \quad \frac{360}{n} < 90$$

$$\Rightarrow \quad 90n > 360$$

$$\Rightarrow \quad n > 4$$

正 n 邊形的二個外角和，如同以上正三、四邊形的∠1、∠2

(二) 正 *n* 邊形外延邊長 1 階 *n* 角星之頂角角度計算

以下先以五、六、七邊形為例說明再推導 *n* 邊形之通式(其中正七邊形可以形成 2 階 *n* 角星，這是我們下一段的主題)

1. 正五邊形 1 階角星頂角度數計算　*設所求頂角 $\angle AGB$ 為 x

一內角:180°×(5–2)÷5=108°

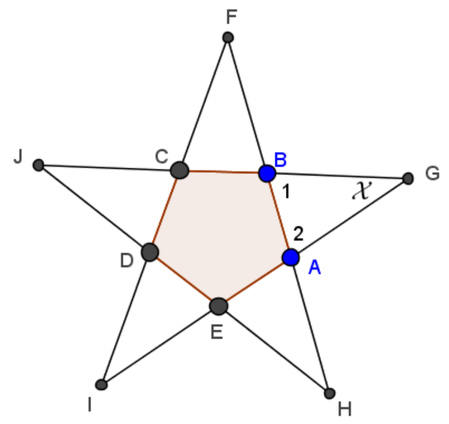
2 個外角　$\angle 1$=180°–108°=72°

$\angle 2$=180°–108°=72°

因為 GAB 是三角形，

所以 x =180°–$\angle 1$–$\angle 2$

=180°–72°–72°=36°



2. 正六邊形 1 階角星頂角度數計算　*設所求頂角 $\angle AIB$ 為 x

一內角:180°×(6–2)÷6=120°

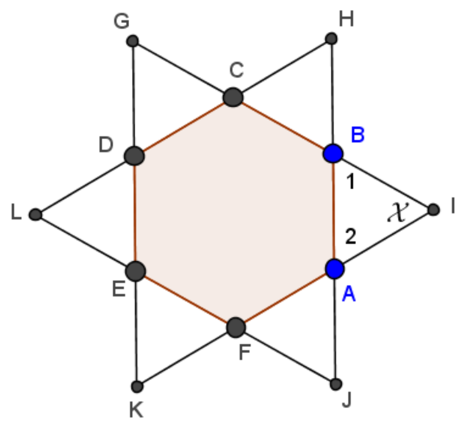
2 個外角　$\angle 1$=180°–120°=60°

$\angle 2$=180°–120°=60°

因為 IAB 是三角形，

所以 x =180°–$\angle 1$–$\angle 2$

=180°–60°–60°=60°



3. 正七邊形 1 階角星頂角度數計算　*設所求頂角 $\angle AHB$ 為 x

一內角:180°×(7–2)÷7=$\frac{900}{7}$°

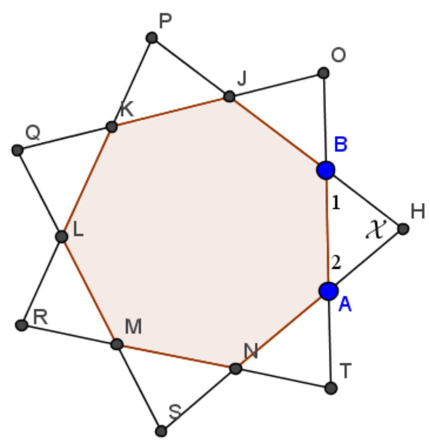
2 個外角 $\angle 1$=180°–$\frac{900}{7}$°=$\frac{360}{7}$°

$\angle 2$=180°–$\frac{900}{7}$°=$\frac{360}{7}$°

因為 HAB 是三角形，

所以 x=180°–$\angle 1$–$\angle 2$

=180°–$\frac{360}{7}$°–$\frac{360}{7}$°=$\frac{540}{7}$°



4. 正 n 邊形 1 階角星頂角度數計算:

一內角: $\dfrac{180\times(n-2)}{n}=(180-\dfrac{360}{n})°$

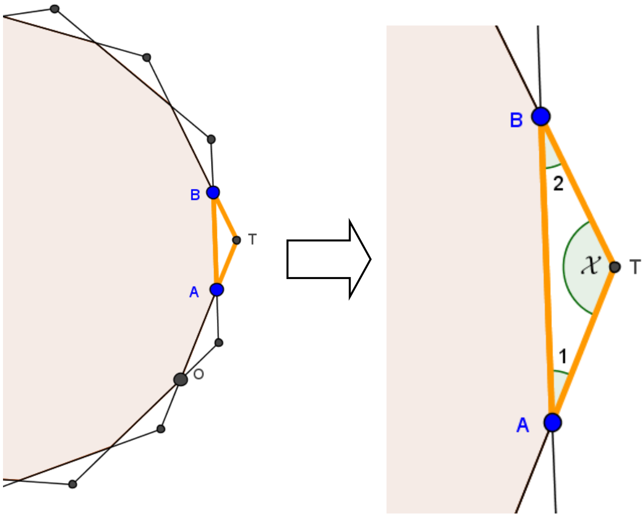
$\angle 1=180°-\dfrac{180\times(n-2)}{n}=\dfrac{360}{n}$。

$\angle 2=180°-\dfrac{180\times(n-2)}{n}=\dfrac{360}{n}$。

$x=180°-\angle 1-\angle 2$

$=180°-\dfrac{360}{n}-\dfrac{360}{n}$

$=(180-\dfrac{720}{n})°$



(三) 正 *n* 邊形外延邊長 2 階 *n* 角星之頂角角度計算

以下我們證明 2 階 n 角星的出現 n 必須大於 6，其中除了如同探討 1 階時須考慮 2 個正 n 邊形的外角 $\dfrac{360}{n}$ 度，如圖中 $\angle VOA(\angle 1)$、$\angle TBA(\angle 2)$，還需要再考慮 1 個 $360-\dfrac{180\times(n-2)}{n}$ 度的角，如下圖的正 n 邊形的大角 $BAO(\angle 3)$所示，此三角 $\angle 1+\angle 2+\angle 3<360$ 度才能形成一個封閉的四邊形，圖形才能畫出 2 階 n 角星。

1. 證明正 n 邊形當 $n>6$ 時，才會形成第二階角星

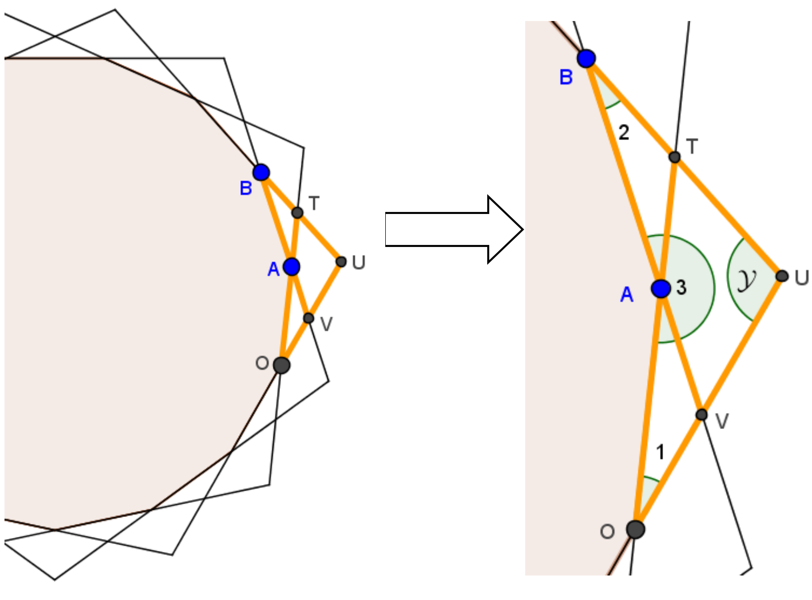
$2\times(180-\dfrac{180\times(n-2)}{n})+360-\dfrac{180\times(n-2)}{n}<360$

$\Rightarrow \dfrac{720}{n}+180+\dfrac{360}{n}<360$

$\Rightarrow \dfrac{1080}{n}<180$

$\Rightarrow 1080<180n$

$\Rightarrow n>6$



2. 正七邊形 2 階角星頂角角度計算

設所求頂角度數為 y

一內角: $180\times(7-2)\div7=\dfrac{900}{7}$。

2 個外角度數: $\angle 1=\angle 2=180-\dfrac{900}{7}$。$=\dfrac{360}{7}$。

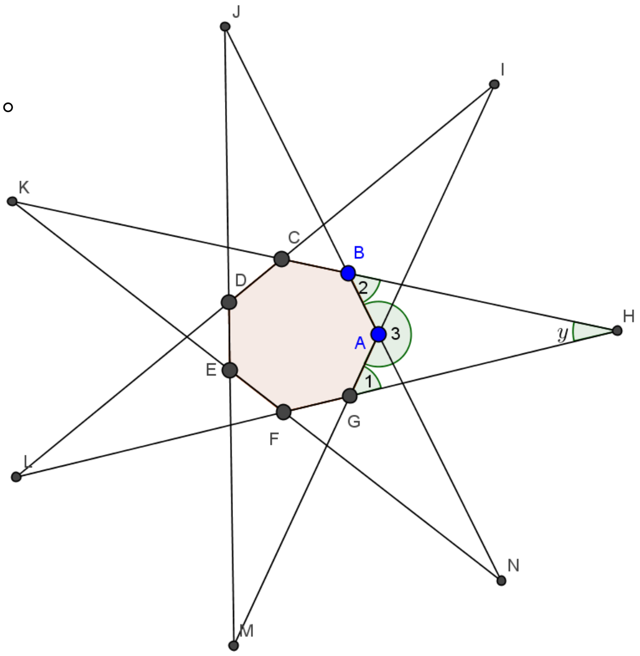
1 個大角 BAG 度數： $\angle 3=360-\dfrac{900}{7}$。$=\dfrac{1620}{7}$。

因為 $HBAG$ 是四邊形，

所以 $y=360-\angle 1-\angle 2-\angle 3$

$=360-\dfrac{360}{7}$。$-\dfrac{360}{7}$。$-\dfrac{1620}{7}$。

$=\dfrac{180}{7}$。



3. 正八邊形 2 階角星頂角角度計算

仿照以上對正七邊形的探討我們就可以算出八角星的頂角角度

設所求頂角度數為 y

一內角: $180\times(8-2)\div8=135°$

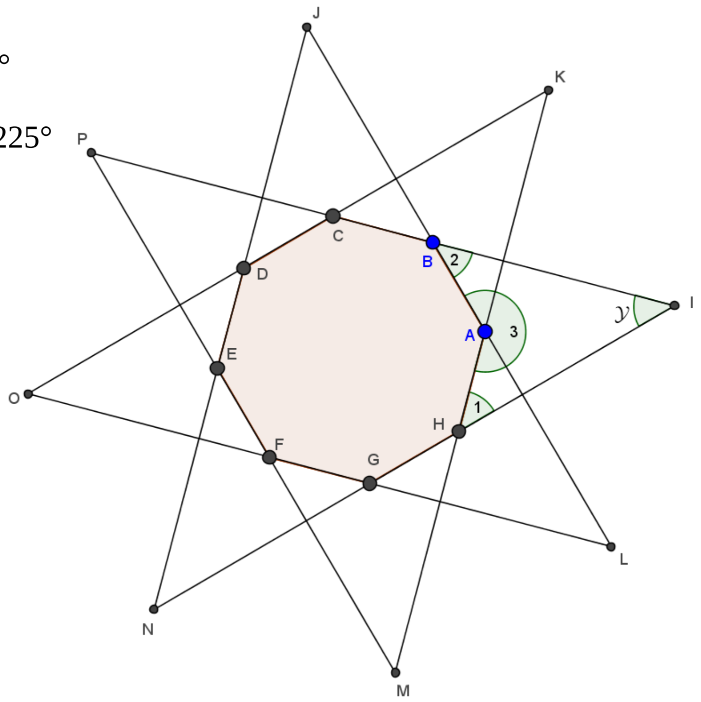
2 個外角度數： $\angle 1=\angle 2=180°-135°=45°$

1 個大角 BAH 度數： $\angle 3=360°-135°=225°$

因為 $IBAH$ 是四邊形，

所以 $y=360°-\angle 1-\angle 2-\angle 3$

$=360°-45°-45°-225°=45°$



4. 正 n 邊形 2 階 n 角星頂角角度計算

如以上分析，假設下圖為一個正 n 邊形，我們要求出它的頂角角度是多少，要利用四邊形內角和為 360 度之性質，再減去 2 個正 n 邊形外角度數以及一個 $360-\dfrac{180\times(n-2)}{n}$ 度：

設所求頂角度數為 y

正 n 邊形一內角$=180°\times(n-2)\div n=(180-\dfrac{360}{n})°$

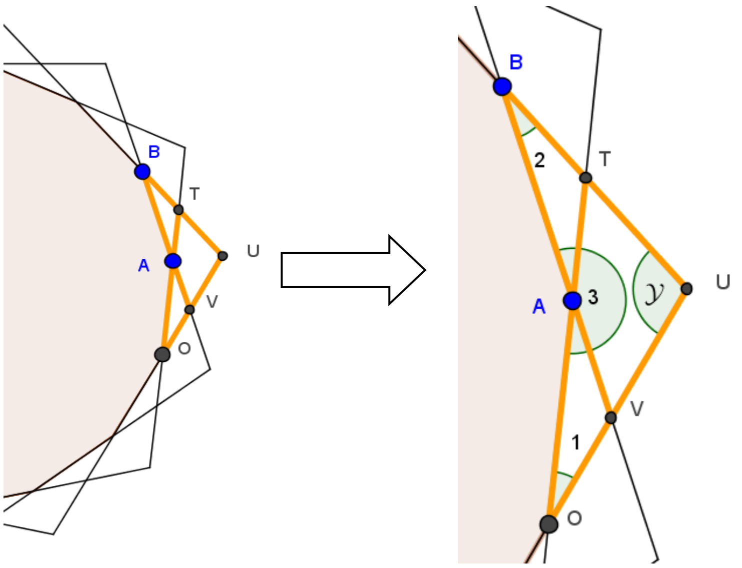
2 個外角：$\angle 1=\angle 2=180°-(180-\dfrac{360}{n})°=(\dfrac{360}{n})°$

1 個大角 BAO：$\angle 3=360°-(180-\dfrac{360}{n})°=(180+\dfrac{360}{n})°$

因為 $UBAO$ 為一四邊形，　$\therefore\ y=360°-\angle 1-\angle 2-\angle 3$

$$=360°-(\frac{360}{n})°-(\frac{360}{n})°-(180+\frac{360}{n})°$$

$$=(180-\frac{1080}{n})°$$



註：我們發現可以利用以上探討 2 階角星的方法來求出 3 階角星以及更高階角星，只要利用正 n 邊形的外角$(\dfrac{360}{n})°$，以及一個大角的度數，去探討它們是否可形成一個封閉四邊形即可，藉此，我們就能有效的求出各種 n 角星之頂角度數。

2 階要考慮的大角是 $360°-$正 n 邊形內角度數；
3 階要考慮的大角是 $360°-1$ 階 n 角星頂角度數；
4 階要考慮的大角是 $360°-2$ 階 n 角星頂角度數，依此推論。

(四) 正 n 邊形外延邊長 3 階 n 角星之頂角角度計算

1. 證明正 n 邊形當 n>8 時，才會形成 3 階角星

我們要使用正 n 邊形的 2 個外角度數$(\frac{360}{n})°$，如以下圖∠KDE(∠1)、∠KAE(∠2)表示，

還有 1 個大角度數 = 360–1 階 n 角星頂角的度數

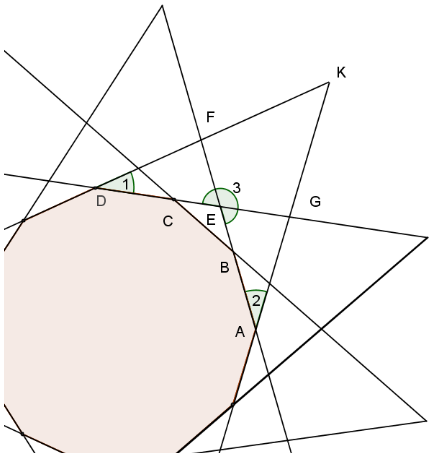
$$= [\,360-(180-\frac{720}{n})\,]°= (180+\frac{720}{n})°$$，下圖大角 DEA(∠3)

則 $2\times\frac{360}{n}+180+\frac{720}{n}<360$ (需要小於一個四邊形內角和才能有交點形成 n 角星)

$\Rightarrow\ 180+(\frac{1440}{n})<360 \quad \Rightarrow\ \frac{1440}{n}<180$

$\Rightarrow\ 1440<180n \qquad \Rightarrow\ n>8$

所以當 n 大於 8 才能形成第 3 階角星



2. 正九邊形 3 階角星頂角角度計算

設所求頂角度數為 z

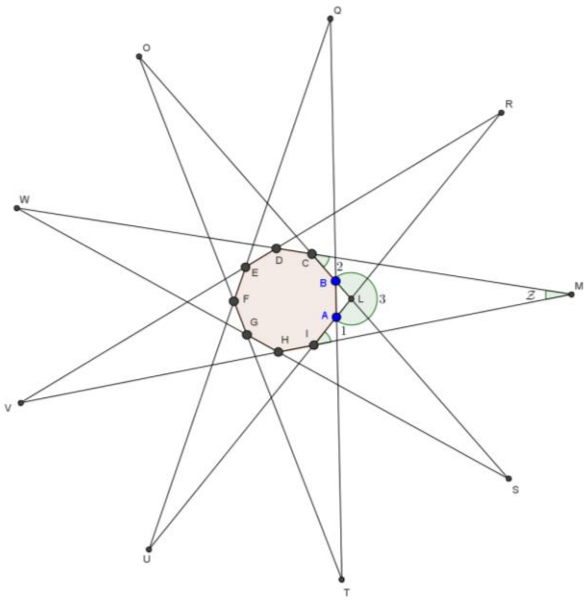
一內角=180°×(9–2)÷9=140°

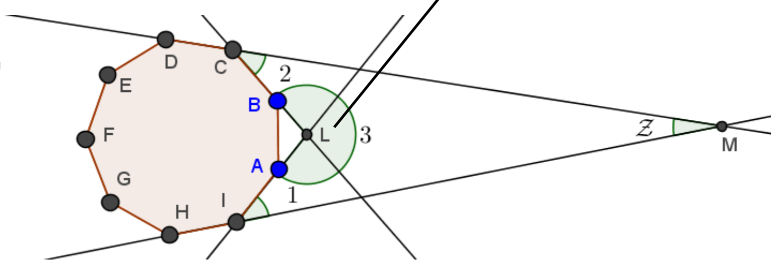
∠1=∠2=180°–140°=40°

∠3=360°–{180°–2[180°–$\frac{180(9-2)}{9}$]}° =260°

∴z=360°–∠1–∠2–∠3=20°

即是正九邊形的 1 階角星頂角度數，∠3 是大角 BLA





邊長延伸的正九角星

局部放大圖

3. 正十邊形 3 階角星頂角角度計算

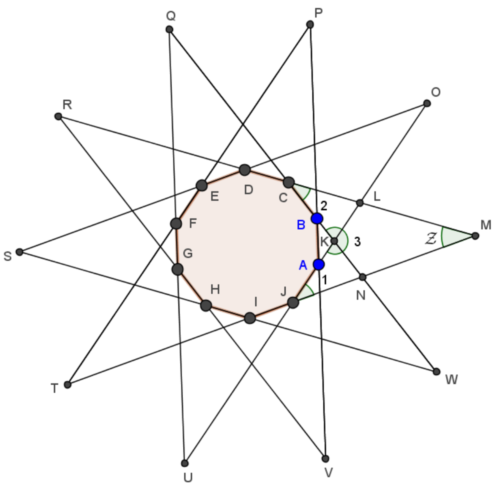
設所求頂角度數為 z

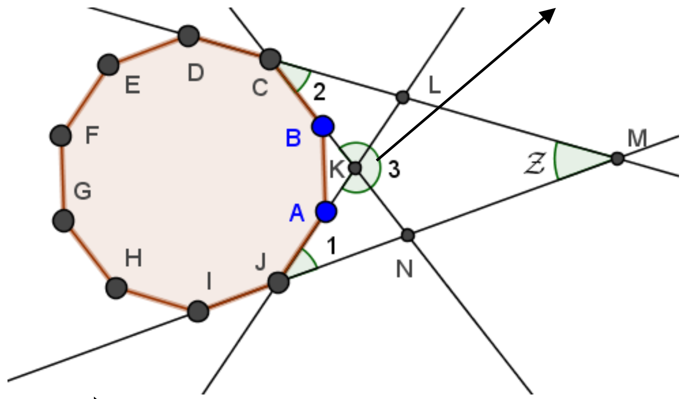
一內角=180°×(10–2)÷10=144°

$\angle 1=\angle 2=180°-144°=36°$　　$\angle 3=360°-\{180°-2[180°-\dfrac{180(10-2)}{10}]\}°=252°$

$\therefore z=360°-\angle 1-\angle 2-\angle 3=36°$

即是正十邊形的 1 階角星頂角度數，∠3 是大角 *BKA*





邊長延伸的正十角星

局部放大圖

4. 計算正 n 邊形外延邊長 3 階 n 角星之頂角角度公式

如同之前計算與證明的方法一樣，假設所求的頂角 $\angle DKA=z$，

則 *KDEA* 為一四邊形，利用四邊形之內角和我們可以列出如以上證明所使用的算式：

$\angle 1=\angle 2=(\dfrac{360}{n})°$ (正 n 邊形之外角)

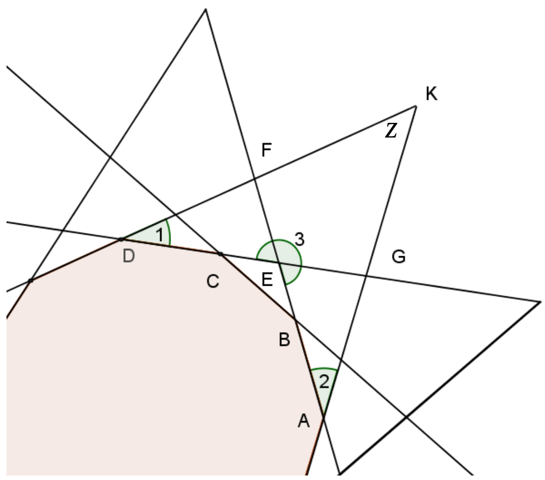
$\angle 3=360°-(180-\dfrac{720}{n})°$

$=(180+\dfrac{720}{n})°$

$\therefore z=360°-\angle 1-\angle 2-\angle 3$

$=360°-(\dfrac{360}{n})°-(\dfrac{360}{n})°-(180+\dfrac{720}{n})°$

$=(180-\dfrac{1440}{n})°$



(五) 正 *n* 邊形外延邊長 4 階 *n* 角星之頂角角度計算

和以上同樣的方式，可推導 4 階 n 角星頂角度數：

正 n 邊形一內角$=180°\times(n-2)\div n=(180-\frac{360}{n})$ °

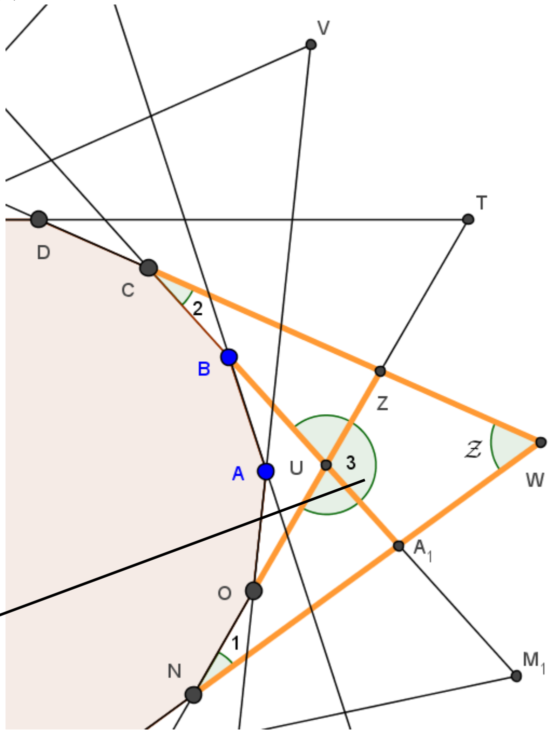
$\angle 1=\angle 2=(\frac{360}{n})$ °

$\angle 3=360°-[180-\frac{1080}{n}]$ °

$=(180+\frac{1080}{n})$ °

$\therefore z=360°-\angle 1-\angle 2-\angle 3=(180-\frac{1800}{n})$ °

$(180-\frac{1080}{n})$°也就是 2 階 n 角星的頂角度數，$\angle 3$ 是圖中的大角 CUN



(六) 正 *n* 邊形邊長延伸所形成之 *p* 階角星之頂角角度公式(算法一)

根據以上計算結果，我們可列出以下角度的關係式，並將正 n 邊形內角設為代號 $A_{(n,0)}$，1 階角星角度代號為 $A_{(n,1)}$，2 階角度為 $A_{(n,2)}$，3 階為 $A_{(n,3)}$等依此類推，因此我們可以列出以下關係式，並計算出 $A_{(n,p)}$也就是 p 階的通式：

$$A_{(n,0)}=180°-(\frac{360}{n})°$$

$$A_{(n,1)}=180°-(\frac{360}{n})\times 2° \quad = (180-\frac{720}{n})°$$

$$A_{(n,2)}=360°-(\frac{360}{n})\times 2°-(360°-A_{(n,0)})=A_{(n,0)}-(\frac{720}{n})° \quad = (180-\frac{1080}{n})°$$

$$A_{(n,3)}=360°-(\frac{360}{n})\times 2°-(360°-A_{(n,1)})=A_{(n,1)}-(\frac{720}{n})° \quad = (180-\frac{1440}{n})°$$

$$A_{(n,4)}=360°-(\frac{360}{n})\times 2°-(360°-A_{(n,2)})=A_{(n,2)}-(\frac{720}{n})° \quad = (180-\frac{1800}{n})°$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$A_{(n,p)}=360°-(\frac{360}{n})\times 2°-(360°-A_{(n,p-2)})=A_{(n,p-2)}-(\frac{720}{n})° \quad = [180-\frac{360(p+1)}{n}]°$$

(七) 正 *n* 邊形外部延伸之頂角角度表格如下(*EXCEL* 四捨五入取到小數點第四位，單位:度)

根據以上的計算，我們知道正 n 邊形 p 階角星頂角公式為：$A_{(n,p)}=[180-\frac{360(p+1)}{n}]°$

依此，我們以下使用 *EXCEL* 的計算各 p 皆角星頂角之角度，將計算結果為負的角度改為「不存在」，譬如 n=5，p=2 的計算結果其實是 $A_{(5,2)}=[180-\frac{360(2+1)}{5}]°=-36°$ (因為角度不為負)，這時我們也可以清楚的看出 n 與 p 之間的規律：

p \ n	n 邊形一內角	1 階角星角度	2 階角星角度	3 階角星角度	4 階角星角度	......
5	108.0000	36.0000	不存在	不存在	不存在	......
6	120.0000	60.0000	不存在	不存在	不存在	......
7	128.5714	77.1429	25.7143	不存在	不存在	......
8	135.0000	90.0000	45.0000	不存在	不存在	......
9	140.0000	100.0000	60.0000	20.0000	不存在	......
10	144.0000	108.0000	72.0000	36.0000	不存在	......
11	147.2727	114.5455	81.8182	49.0909	16.3636	......
12	150.0000	120.0000	90.0000	60.0000	30.0000	......
13	152.3077	124.6154	96.9230	69.2308	41.5385	......
14	154.2857	128.5714	102.8571	77.1429	51.4286	......
15	156.0000	132.0000	108.0000	84.0000	60.0000	......
16	157.5000	135.0000	112.5000	90.0000	67.5000	......
17	158.8235	137.6471	116.4706	95.2941	74.1176	......
18	160.0000	140.0000	120.0000	100.0000	80.0000	......
: :	: :	: :	: :	: :	: :	: :
n	$(180-\frac{360}{n})$	$(180-\frac{720}{n})$	$(180-\frac{1080}{n})$	$(180-\frac{1440}{n})$	$(180-\frac{1800}{n})$	$180-\frac{360(p+1)}{n}$

n	5	6	7	8	9	10	......
p 的最大值	1	1	2	2	3	3	......

$n > 2(p+1)$

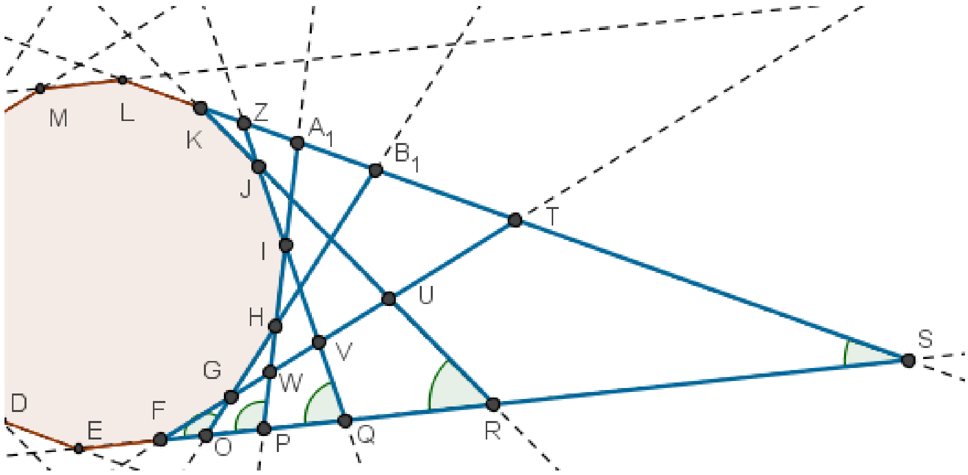
而此規律可用公式證明：

$A_{(n,p)}=[180-\frac{360(p+1)}{n}]° > 0$ ，其中 $n\geq 5$，$p\geq 1$ 為整數

$\Rightarrow$ $n > 2(p+1)$ <u>依此可由 ***n*** 推算 ***p*** 的最大值，也就是角星會有幾種。</u>

(八) 另一種計算 $A_{(n,p)}=[180-\dfrac{360(p+1)}{n}]°$ 的方法(算法二)

我們發現只要轉換一下思考的觀點，我們可以從不同的幾何關係推算出多角星個頂角的角度公式，譬如以下我們是鎖定圖中的 ΔGFO、ΔWFP 等三角形推算出 $A_{(n,p)}$ 與 $A_{(n,p-1)}$ 的關係式，並依此求出通式 $A_{(n,p)}=[180-\dfrac{360(p+1)}{n}]°$。



此時我們故意將正 n 邊形的內角角度視為 $A_{(n,0)}$，因為我們發現在 n 角星角度公式計算時，把它視為 p=0 的 0 階角，公式會更具一致性

ΔGFO 中　$A_{(n,1)}=180°-(\dfrac{360}{n})°-(180-A_{(n,0)})°$　　$\cancel{A_{(n,1)}}=A_{(n,0)}-(\dfrac{360}{n})°$

ΔWFP 中　$A_{(n,2)}=180°-(\dfrac{360}{n})°-(180-A_{(n,1)})°$　　$\cancel{A_{(n,2)}}=\cancel{A_{(n,1)}}-(\dfrac{360}{n})°$

ΔVFQ 中　$A_{(n,3)}=180°-(\dfrac{360}{n})°-(180-A_{(n,2)})°$　　$\cancel{A_{(n,3)}}=\cancel{A_{(n,2)}}-(\dfrac{360}{n})°$

ΔUFR 中　$A_{(n,4)}=180°-(\dfrac{360}{n})°-(180-A_{(n,3)})°$　　$\cancel{A_{(n,4)}}=\cancel{A_{(n,3)}}-(\dfrac{360}{n})°$

:　　:　　:　　:　　:

$A_{(n,p-1)}=180°-(\dfrac{360}{n})°-(180-A_{(n,p-2)})$　　$\cancel{A_{(n,p-1)}}=\cancel{A_{(n,p-2)}}-(\dfrac{360}{n})°$

$A_{(n,p)}=180°-(\dfrac{360}{n})°-(180-A_{(n,p-1)})$　　$+)\ A_{(n,p)}=\cancel{A_{(n,p-1)}}-(\dfrac{360}{n})°$

共有 p 個 $\dfrac{360}{n}$

$$A_{(n,p)}=A_{(n,0)}-(\frac{360}{n})°\times p$$
$$=180°-(\frac{360}{n})°-(\frac{360}{n})°\times p$$
$$=180°-(\frac{360}{n})°\times(p+1)$$

算式中，$\dfrac{360}{n}$ 為 n 邊形之外角，$A_{(n,p)}$ 為 p 階角星的頂角，如 ΔGFO 中的 $\angle GOF$、ΔWFP 中的 $\angle WPF$…等)

※ 在算法一與算法二中，我們都能得到結果 $A_{(n,p)}=[180-\dfrac{360(p+1)}{n}]°$，其中算法一是描述 p 階與 p-2 階的角度關係，算法二是描述 p 階與 p-1 階的角度關係，而我們發現當遞迴關係是描述 p 階與 p-1 階時，我們可以利用上頁的計算技巧，將各項抵消得到 p 階頂角通式。

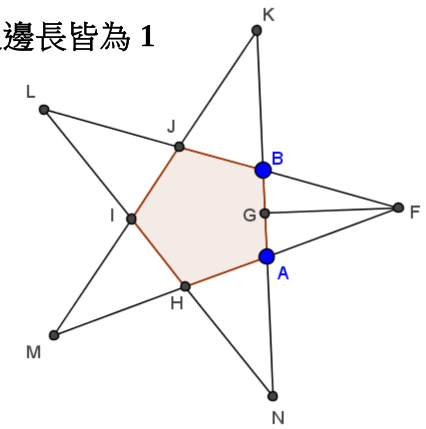
$$\begin{cases} A_{(n,0)}=180°-\dfrac{360°}{n} \\ A_{(n,p)}=A_{(n,p-1)}-\dfrac{360(p+1)}{n} \end{cases}。\qquad n\geq 5，p\geq 1 \text{ 為整數}$$

二、正 *n* 邊形延伸所形成之 *n* 角星邊長計算

當我們想探討正 n 角星的邊長問題時，我們首先解決了正六邊形與正八邊形的狀況，因為可使用「直角三角形 30°、60°、90°及 45°、45°、90°的比例關係」，但對於其它邊形的角度卻沒有辦法，直到跟老師討論後，發現其它的角度也都有比例性質，只是用三角函數的方式表達而已，因此我們在網路上搜尋了三角函數的講義，了解它們的基本性質並用來研究多角星問題。

我們首先假設我們每一個正 n 邊形的邊長皆為 1，再以此為基本圖形去探討，並且定義 1 階的邊長代號 $K_{(n,1)}$，2 階邊長代號 $K_{(n,2)}$，p 階邊長代號 $K_{(n,p)}$ 等：

(一) 1 階 *n* 角星之邊長($K_{(n,1)}$)計算，假設所有正 *n* 邊形之邊長皆為 1

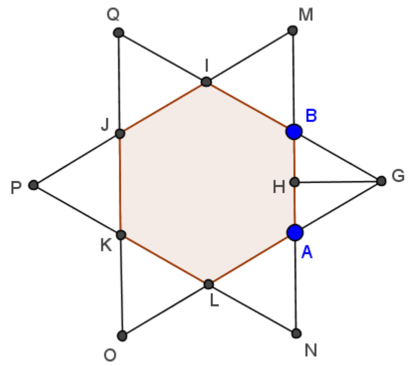


1. 正五邊形，所求 $\overline{BF}=K_{(5,1)}$，而 $\overline{BG}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}=\dfrac{1}{2}$

   $\angle FBG=360°\div 5=72°$

   $\dfrac{K_{(5,1)}}{\overline{BG}}=sec72° \quad\Rightarrow\quad 2K_{(5,1)}=sec72°$

   $\therefore K_{(5,1)}=\dfrac{\sec 72°}{2}$



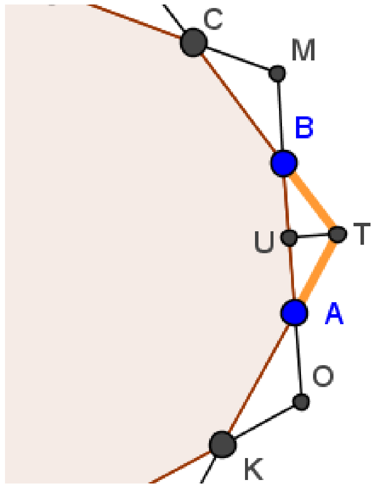
2. 正六邊形，所求 $\overline{BG}=K_{(6,1)}$，而 $\overline{BH}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}=\dfrac{1}{2}$

   $\angle GBH=360°\div 6=60°$

   $\dfrac{K_{(6,1)}}{\overline{BH}}=sec60° \quad\Rightarrow\quad 2K_{(6,1)}=sec60°$

   $\therefore K_{(6,1)}=\dfrac{\sec 60°}{2}$

3. 正 n 邊形，所求 $\overline{BT}=K_{(n,1)}$，而 $\overline{BU}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}$



$$\frac{K_{(n,1)}}{\overline{BU}}=sec(\frac{360}{n})°$$

$$2K_{(n,1)}=sec(\frac{360}{n})°$$

$$\therefore K_{(n,1)}=\frac{\sec(\frac{360}{n})°}{2}$$

(二) 2 階 n 角星之邊長($K_{(n,2)}$)計算，假設所有正 n 邊形之邊長皆為 1

1. 正七邊形，作線段 $\overline{AO}\perp\overline{BH}$，所求為 $K_{(7,2)}=\overline{HP}=\overline{OH}-\overline{OP}$

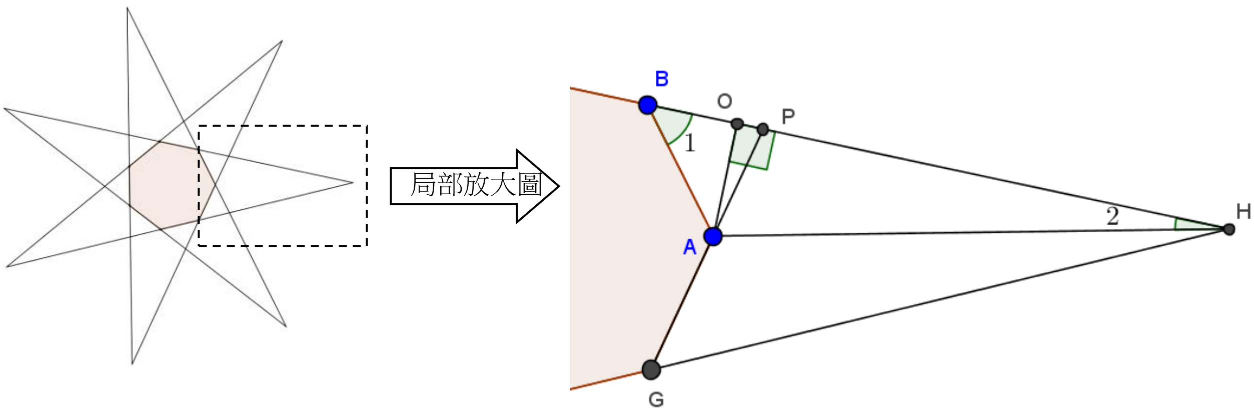
$$\frac{\overline{AO}}{1}=\overline{AO}=sin\angle 1=sin(\frac{360}{7})° \qquad cot\angle 2=cot[\frac{180°-(\frac{1080}{7})°}{2}]=cot(\frac{90}{7})°=\frac{\overline{OH}}{\sin(\frac{360}{7})°}$$

$$\overline{OH}=[cot(\frac{90}{7})°][sin(\frac{360}{7})°] \qquad \frac{\overline{OP}}{\overline{AO}}=\frac{\overline{OP}}{\sin(\frac{360}{7})°}=cot[180°-\frac{360(1+1)}{7}°]°$$

$$\overline{OP}=[sin(\frac{360}{7})°][cot(\frac{540}{7})°]$$

$$\therefore \overline{OH}-\overline{OP}=[cot(\frac{90}{7})°][sin(\frac{360}{7})°]-[sin(\frac{360}{7})°][cot(\frac{540}{7})°]$$

$$=[sin(\frac{360}{7})°][cot(\frac{90}{7})°-cot(\frac{540}{7})°]$$



2. 正八邊形，作線段 $\overline{AO}\perp\overline{BI}$，所求 $K_{(8,2)}=\overline{IQ}=\overline{OI}-\overline{OQ}$

(正八邊形的案例中，O 和 Q 其實是同一點，但為了推導出一致的公式，我們還是採用同樣的假設方法，而我們也知道三角函數的 $cot90°=0$，會滿足計算結果)

$$\frac{\overline{AO}}{1}=\overline{AO}=sin\angle 1=sin(\frac{360}{8})°=sin45°$$

$$cot\angle 2=\frac{\cot[180-(\frac{1080}{8})]°}{2}=cot(\frac{45}{2})°=\frac{\overline{OI}}{\sin 45°}$$

$$\overline{OI}=[cot(\frac{45}{2})°](sin45°)$$

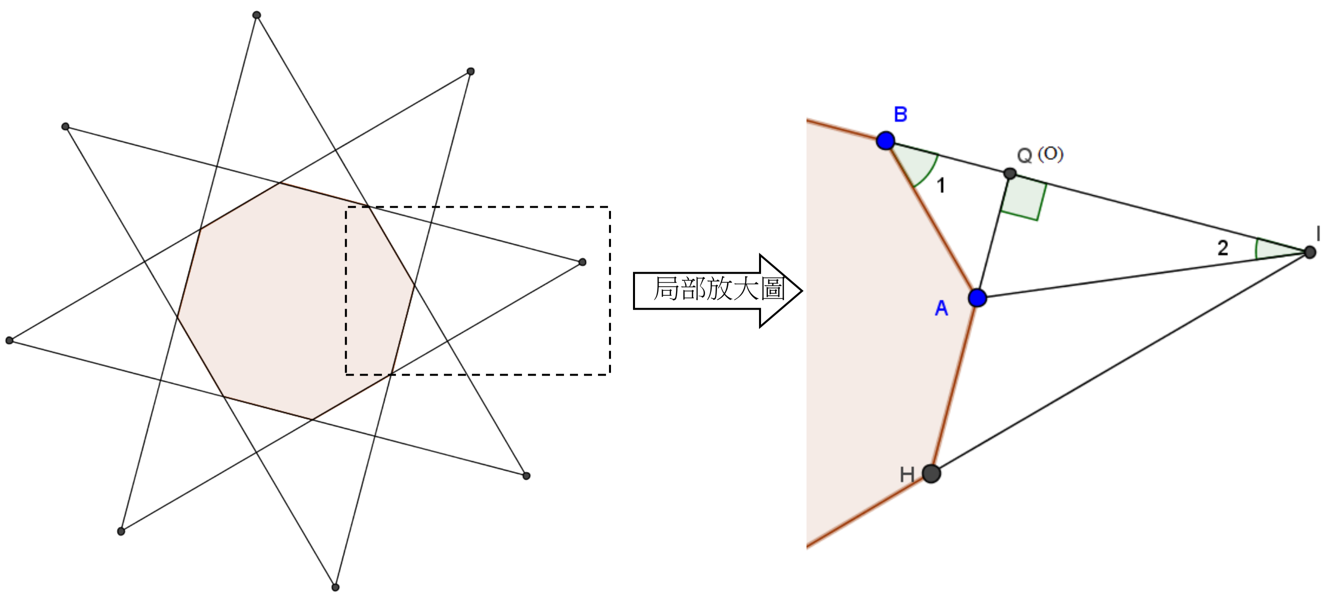
$$\frac{\overline{OQ}}{\overline{AO}}=\frac{\overline{OQ}}{\sin45°}=cot(180°-\frac{360(1+1)}{8}°)°=cot90°$$

$$\overline{OQ}=(sin45°)(cot90°) \qquad (\text{此時}\ \overline{OQ}=0)$$

$$\therefore \overline{OI}-\overline{OQ}=[cot(\frac{45}{2})°](sin45°)-(sin45°)(cot90°)$$

$$=(sin45°)[cot(\frac{45}{2})°-cot90°]$$

(再將 $cot90°=0$ 化簡，即可得 $sin45°\times cot(\frac{45}{2})°$)



3. 正九邊形，作線段 $\overline{AO} \perp \overline{BU}$ ，所求 $K_{(9,2)} = \overline{UT} = \overline{OU} - \overline{OT}$

$$\frac{\overline{AO}}{1} = \overline{AO} = \sin\angle 1 = \sin(\frac{360}{9})° = \sin 40° \qquad \cot\angle 2 = \frac{\cot[180 - (\frac{1080}{9})\ ]°}{2} = \cot 30° = \frac{\overline{OU}}{\sin 40°}$$

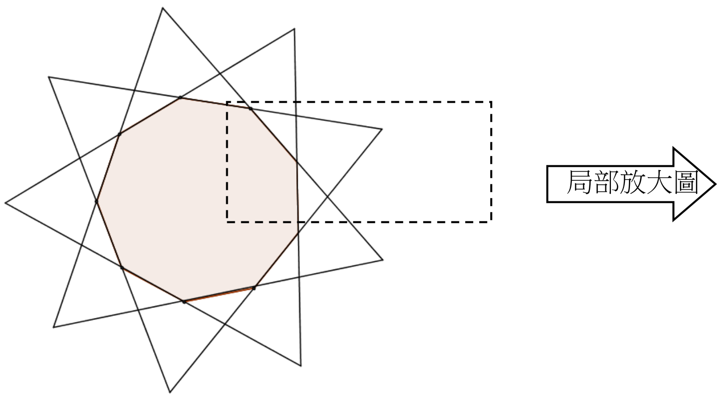
$$\overline{OU} = (\cot 30°)(\sin 40°)$$

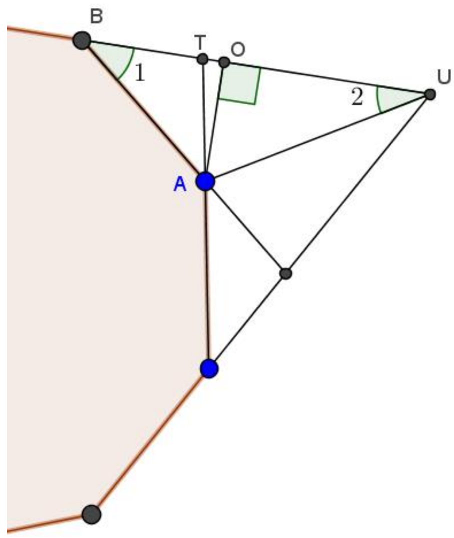
$$\frac{\overline{OT}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{OT}}{\sin 40°} = \cot(180° - \frac{360(1+1)}{9}°)° = \cot 100° \qquad \overline{OT} = (\sin 40°)(\cot 100°)$$

$$\therefore \overline{OU} - \overline{OT} = (\cot 30°)(\sin 40°) - (\sin 40°)(\cot 100°)$$

$$= (\sin 40°)[(\cot 30°) - (\cot 100°)]$$

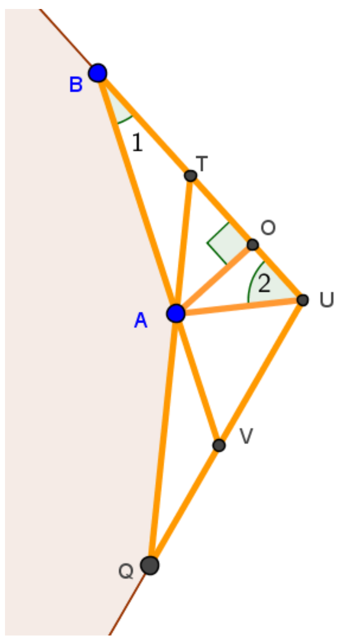
(因為 $\cot 100°$ 為負數，所以 $\overline{OU} - \overline{OT} = \overline{OU} + \overline{OT}$





4. 正 n 邊形

右圖為一個正 n 邊形的一部分截角，我們也能使用以上的方式來求出 2 階角星的邊長，並使用三角函數來列式：



已知 $\overline{AB} = 1$，作線段 $\overline{AO} \perp \overline{BU}$ ，所求 $\overline{TU} = \overline{OU} - \overline{OT}$

$$\frac{\overline{AO}}{1} = \overline{AO} = \sin\angle 1 = \sin(\frac{360}{n})°$$

$$\cot\angle 2 = \frac{\cot[180 - (\frac{1080}{n})\ ]°}{2} = \cot[90° - (\frac{540}{n})°] = \frac{\overline{OU}}{\sin(\frac{360}{n})°}$$

$$\overline{OU} = \cot[90° - (\frac{540}{n})°]\ [\sin(\frac{360}{n})°]$$

$$\frac{\overline{OT}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{OT}}{\sin(\frac{360}{n})°} = \cot[180° - \frac{360(1+1)}{n}°]° = \cot(180 - \frac{720}{n})°$$

$\overline{OT}$ =[$sin(\frac{360}{n})$ °][$cot(180°–\frac{720}{n}$ °) °]

$\therefore K_{(n,2)} = \overline{OU} - \overline{OT}$ =$cot[90–(\frac{540}{n})]°$ [$sin(\frac{360}{n})$ °]– [$sin(\frac{360}{n})$ °][$cot(180–\frac{720}{n})$ °]

=[$sin(\frac{360}{n})$°] {$cot[90–(\frac{540}{n})]$ °– $cot[180–(\frac{720}{n})]$ °}

(三) 3 階 *n* 角星之邊長($K_{(n,3)}$)計算，假設所有正 *n* 邊形之邊長皆為 1

(為求版面簡潔，以下圖形皆以局部放大圖的方式呈現)

1. 正九邊形

已知 $\overline{AB}=1$，作線段 $\overline{LZ} \perp \overline{MC}$， 所求 $K_{(9,3)}= \overline{ME} = \overline{MZ} - \overline{ZE}$

因為∠1=40°，且 $\overline{BC}=1$，所以知道：$\frac{\overline{LZ}}{\overline{BL}+\overline{BC}} = \frac{\overline{LZ}}{K_{(9,1)}+1} = sin40°$

$\Rightarrow \overline{LZ}$ =($K_{(9,1)}$+1)($sin40°$)

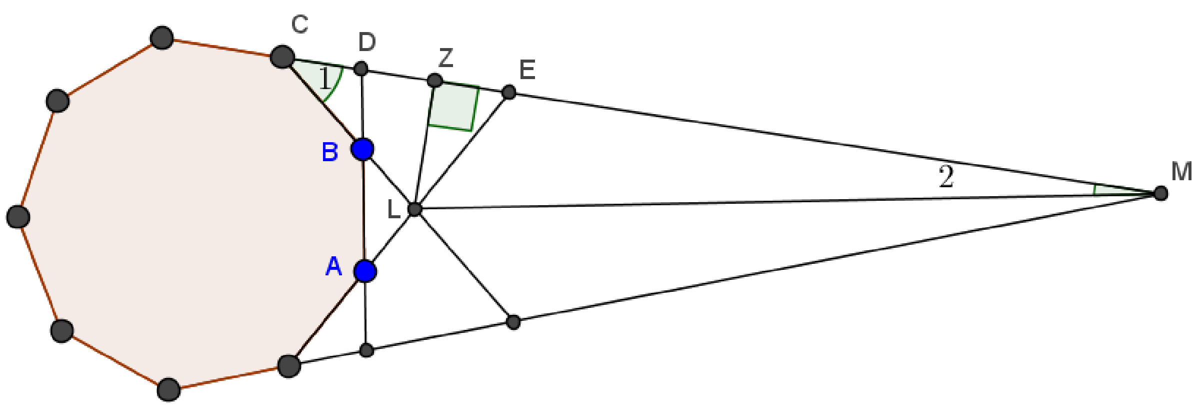
$\frac{\overline{MZ}}{\overline{LZ}} = cot\angle 2 = cot10°$ (∠2 是利用 3 階角星的度數公式除以 2 求得)

$\Rightarrow \overline{MZ}$ =($K_{(9,1)}$+1)($sin40°$)($cot10°$)

$\frac{\overline{ZE}}{\overline{LZ}}$ =$cot[180–\frac{360(2+1)}{9}]°$=$cot60°$ $\Rightarrow \overline{ZE}$ =($K_{(9,1)}$+1)($sin40°$)($cot60°$)

$\overline{MZ} - \overline{ZE}$ =($K_{(9,1)}$+1)($sin40°$)($cot10°$)– (K+1)($sin40°$)($cot60°$)

=($K_{(9,1)}$+1)($sin40°$)[$cot10°$–$cot60°$]



2. 正 n 邊形:

已知 $\overline{AB}=1$，作線段 $\overline{UV}\perp\overline{PC}$ ， 所求 $K_{(n,3)}=\overline{PR}=\overline{PV}-\overline{VR}$

因為 $\angle 1=(\frac{360}{n})°$，且 $\overline{BC}=1$，所以知道：

$\frac{\overline{UV}}{K_{(n,1)}+1}=sin(\frac{360}{n})°$ $\quad\overline{UV}=(K_{(n,1)}+1)[\ sin(\frac{360}{n})°]$

$\frac{\overline{PV}}{\overline{UV}}=cot\angle 2=cot(\frac{180-\frac{1440}{n}}{2})°=cot(90-\frac{720}{n})°$

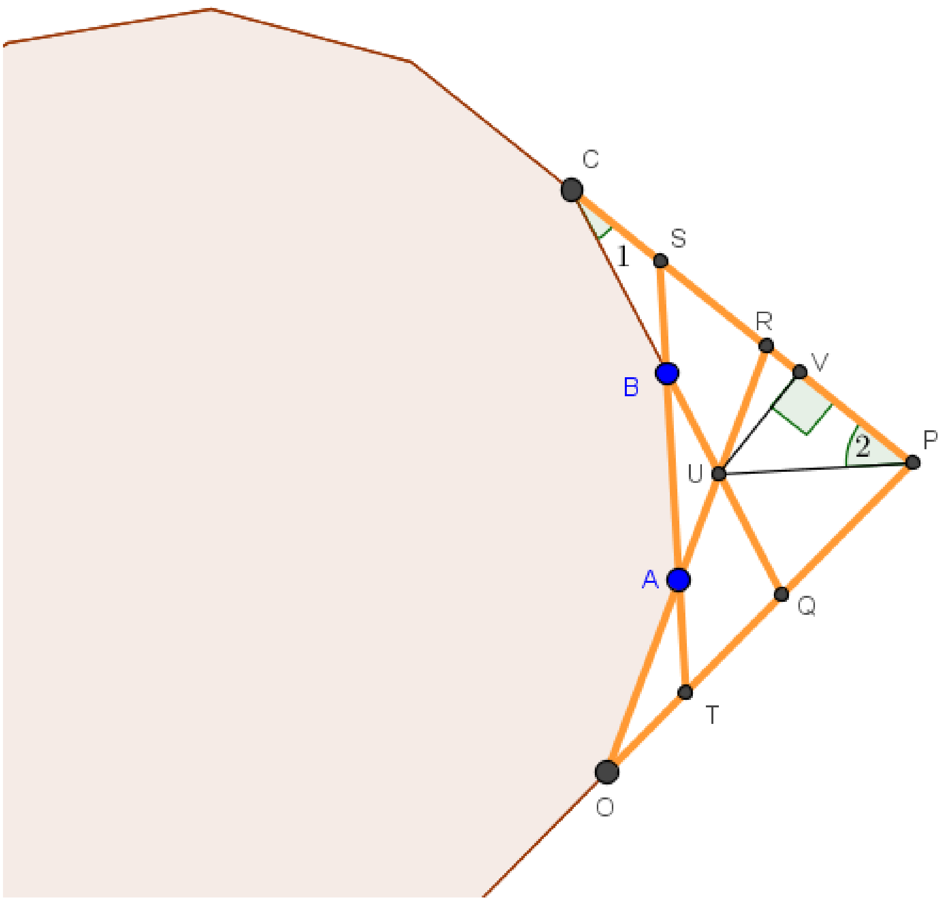
$\overline{PV}=(K_{(n,1)}+1)[\ sin(\frac{360}{n})°][\ cot(90-\frac{720}{n})°]$

$\frac{\overline{VR}}{\overline{UV}}=cot[180-\frac{360(2+1)}{n}]°$ $\quad\overline{VR}=(K_{(n,1)}+1)[\ sin(\frac{360}{n})°]\{cot[180-\frac{1080}{n}]°\}$

$K_{(n,3)}=\overline{PR}=\overline{PV}-\overline{VR}$

$=(K_{(n,1)}+1)[\ sin(\frac{360}{n})°][cot(180-\frac{1440}{n})°]-(K_{(n,1)}+1)[\ sin(\frac{360}{n})°]\{cot[180-\frac{1080}{n}]°\}$

$=(K_{(n,1)}+1)[\ sin(\frac{360}{n})°][\ cot(90-\frac{720}{n})°-cot(180-\frac{1080}{n})°]$



(四) 4 階 n 角星之邊長($K_{(n,4)}$)計算，假設所有正 n 邊形之邊長皆為 1

(為求版面簡潔，以下圖形以局部放大圖的方式呈現)

已知 $\overline{AB}=\overline{BC}=1$，作線段 $\overline{UV}\perp\overline{TC}$，所求 $K_{(n,4)}=\overline{TF}=\overline{VT}-\overline{VF}$

因為 $\angle 1=(\frac{360}{n})°$，且 $\overline{BC}=1$，所以知道：

$$\frac{\overline{UV}}{K_{(n,1)}+K_{(n,2)}+1}=sin(\frac{360}{n})° \qquad \overline{UV}=(K_{(n,1)}+K_{(n,2)}+1)\times sin(\frac{360}{n})°$$

$$\frac{\overline{VT}}{\overline{UV}}=cot(\frac{180-\frac{1800}{n}}{2})°=cot(90-\frac{900}{n})° \qquad \overline{VT}=(K_{(n,1)}+K_{(n,2)}+1)\times sin(\frac{360}{n})°\times cot(90-\frac{900}{n})°$$

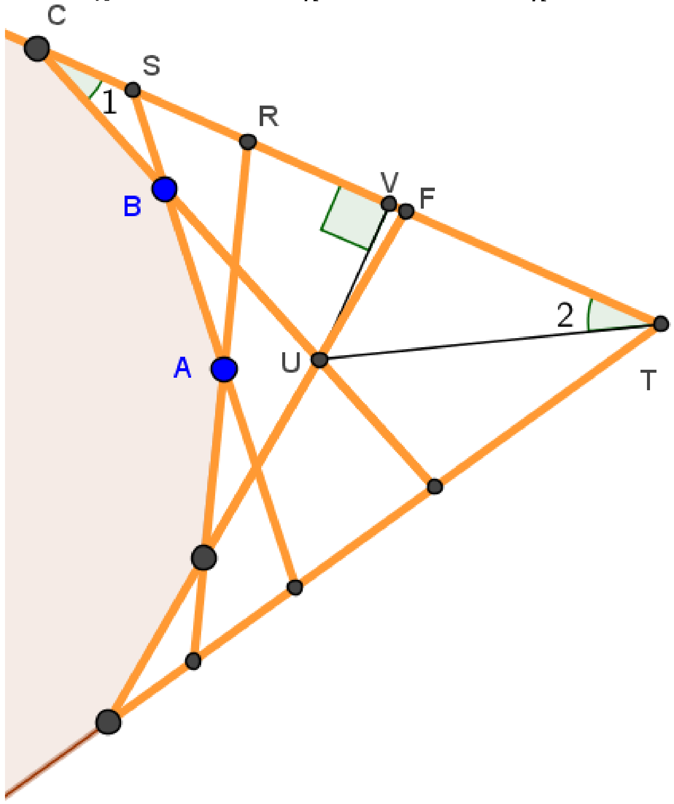
$$\frac{\overline{VF}}{\overline{UV}}=cot[180-\frac{360(3+1)}{n}]°=cot(180-\frac{1440}{n})°$$

$$\overline{VF}=(K_{(n,1)}+K_{(n,2)}+1)[sin(\frac{360}{n})°][cot(180-\frac{1440}{n})°]$$

$$K_{(n,4)}=\overline{TF}=\overline{VT}-\overline{VF}$$

$$=(K_{(n,1)}+K_{(n,2)}+1)[sin(\frac{360}{n})°][cot(90-\frac{900}{n})°]-(K_{(n,1)}+K_{(n,2)}+1)[sin(\frac{360}{n}°][cot(180-\frac{1440}{n})°]$$

$$=(K_{(n,1)}+K_{(n,2)}+1)[sin(\frac{360}{n})°][cot(90-\frac{900}{n})°-cot(180-\frac{1440}{n})°]$$



(五) 5 階 n 角星之邊長($K_{(n,5)}$)計算，假設所有正 n 邊形之邊長皆為 1

(為求版面簡潔，以下圖形以局部放大圖的方式呈現)

已知 $\overline{SD}=1$，作線段 $\overline{QV}\perp\overline{PS}$， 所求 $K_{(n,5)}=\overline{PT}=\overline{PV}-\overline{VT}$

因為 $\angle 1=(\frac{360}{n})°$，且 $\overline{SD}=1$，所以知道：

$$\frac{\overline{QV}}{K_{(n,1)}+K_{(n,2)}+K_{(n,3)}+1}=sin(\frac{360}{n})° \quad \overline{QV}=(K_{(n,1)}+K_{(n,2)}+K_{(n,3)}+1)[sin(\frac{360}{n})°]$$

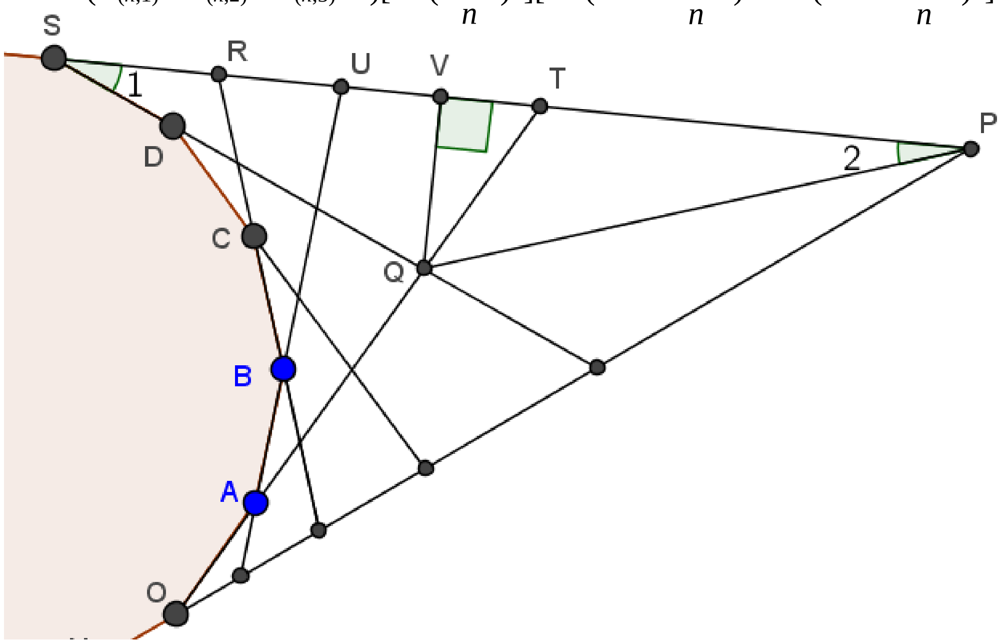
$$\frac{\overline{PV}}{\overline{QV}}=cot(\frac{180-\frac{2160}{n}}{2})°=cot(90-\frac{1080}{n})°$$

$$\overline{PV}=(K_{(n,1)}+K_{(n,2)}+K_{(n,3)}+1)[sin(\frac{360}{n})°][cot(90-\frac{1080}{n})°]$$

$$\frac{\overline{VT}}{\overline{QV}}=cot[180-\frac{360(4+1)}{n}]°=cot(180-\frac{1800}{n})°$$

$$\overline{VT}=(K_{(n,1)}+K_{(n,2)}+K_{(n,3)}+1)[sin(\frac{360}{n})°][cot(180-\frac{1800}{n})°]$$

$$\begin{aligned}K_{(n,5)}=\overline{PT}&=\overline{PV}-\overline{VT}\\&=(K_{(n,1)}+K_{(n,2)}+K_{(n,3)}+1)[sin(\frac{360}{n})°][cot(90-\frac{1080}{n})°]\\&\qquad-(K_{(n,1)}+K_{(n,2)}+K_{(n,3)}+1)[sin(\frac{360}{n})°][cot(180-\frac{1800}{n})°]\\&=(K_{(n,1)}+K_{(n,2)}+K_{(n,3)}+1)[sin(\frac{360}{n})°][cot(90-\frac{1080}{n})°-cot(180-\frac{1800}{n})°]\end{aligned}$$



(六) 統整 p 階 n 角星之邊長($K_{(n,p)}$)計算與周長之推導，假設所有正 n 邊形之邊長皆為 1

1 階角星邊長($K_{(n,1)}$) $=\dfrac{\sec\dfrac{360}{n}°}{2}$

2 階角星邊長($K_{(n,2)}$) $=[sin(\frac{360}{n})°]\ [cot(90–\frac{540}{n})°– cot(180–\frac{720}{n})°]$

3 階角星邊長($K_{(n,3)}$) $=(K_{(n,1)}+1)[\ sin(\frac{360}{n})°][\ cot(90–\frac{720}{n})°–cot(180–\frac{1080}{n})°]$

4 階角星邊長($K_{(n,4)}$) $=(K_{(n,1)}+ K_{(n,2)}+1)[sin(\frac{360}{n})°][cot(90-\frac{900}{n})°–cot(180-\frac{1440}{n})°]$

5 階角星邊長($K_{(n,5)}$) $=(K_{(n,1)}+ K_{(n,2)}+ K_{(n,3)}+1)[sin(\frac{360}{n})°][\ cot(90\frac{1080}{n})°–cot(180–\frac{1800}{n})°]$

由上我們知道：

$K_{(n,p)}=(K_{(n,1)}+ K_{(n,2)}+\ldots+ K_{(n,p-2)}+1)[sin(\frac{360}{n})°][cot(90–\frac{180(p+1)}{n})°–cot(180–\frac{360p}{n})°]$，$p\geq 3$ 為整數

※ 以上的 n 角星邊長公式($K_{(n,p)}$)只要改為「$2\times n\times K_{(n,p)}$」即是 n 角星的周長公式

(七) 使用 *EXCEL* 計算 p 階 n 角星長度，發現「正 n 邊形的邊長」=「$\frac{n-2}{4}$階角星邊長」

假設所有正 n 邊形之邊長皆為 1，使用 *EXCEL* 計算四捨五入取到小數點第 4 位

p \ n	正 n 邊形邊長	1 階長度	2 階長度	3 階長度	4 階長度	……
5	1	1.6180	不存在	不存在	不存在	……
6	1	1	不存在	不存在	不存在	……
7	1	0.8019	3.2470	不存在	不存在	……
8	1	0.7071	1.7071	不存在	不存在	……
9	1	0.6527	1.2267	5.4115	不存在	……
10	1	0.6180	1	2.6180	不存在	……
11	1	0.5944	0.8708	1.7635	8.1148	……
12	1	0.5774	0.7887	1.3660	3.7321	……
13	1	0.5647	0.7325	1.1417	2.4100	……
14	1	0.5550	0.6920	1	1.8019	……
15	1	0.5473	0.6617	0.9035	1.4618	……
16	1	0.5412	0.6384	0.8341	1.2483	……
17	1	0.5362	0.6199	0.7822	1.1036	……
18	1	0.5321	0.6051	0.7422	1	……
：	：	：	：	：	：	：

發現： 使用 *EXCEL* 計算後，我們還發現一個有趣的現象(表格中的黃色底色部分)：

正 6 邊形的 1 階角星邊長為 1 (和原正 6 邊形一樣)

正 10 邊形的 2 階角星邊長為 1 (和原正 10 邊形一樣)

正 14 邊形的 3 階角星邊長為 1 (和原正 14 邊形一樣)

正 18 邊形的 4 階角星邊長為 1 (和原正 18 邊形一樣)

對此我們先提出一個猜想：「**正 n 邊形的邊長會剛好和 $\frac{n-2}{4}$ 階角星的邊長一樣**」，

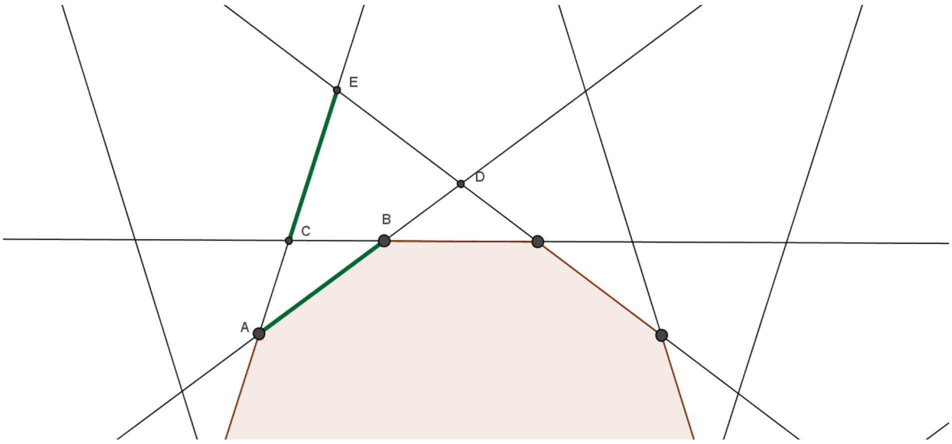
而這個猜想若成立，則以下算式成立：**當** $p=\frac{n-2}{4}$ **時**，

$$\mathbf{(K_{(n,1)}+K_{(n,2)}+\ldots+K_{(n,p-2)}+1)[\sin(\tfrac{360}{n})°][\cot(90-\tfrac{180(p+1)}{n})°-\cot(180-\tfrac{360p}{n})°]=1}$$

面對這個算式，我們嘗試進行代數的化簡計算，但它實在太複雜了，我們無法做到，於是我們回歸到圖形去思考，能不能用幾何的性質反過來證明這代數式是正確的？

猜想證明：

「以下如圖例，證明多角星圖中 $K_{(n,p)}$ =正 n 邊形邊長 ($\overline{CE}=\overline{AB}$)的條件為 $p=\frac{n-2}{4}$ 」



步驟一、已知同階角星邊長等長 $\overline{AC}=\overline{BD}=K_{(n,1)}$，$A_{(n,p)}=180-\frac{360(p+1)}{n}$

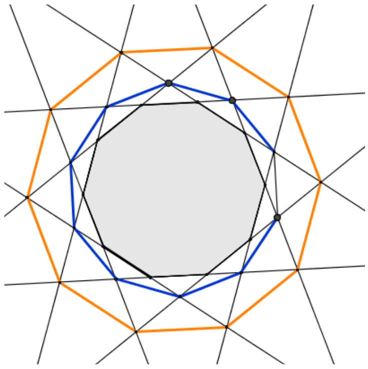
步驟二、假設 ΔADE 中 $\overline{AE}=\overline{AD}$，根據步驟一，則可推論出 $\overline{AE}-\overline{AC}=\overline{AD}-\overline{BD}\Rightarrow\overline{CE}=\overline{AB}$

步驟三、證明 $\overline{AE}=\overline{AD}$ 之條件：其中 $\angle AED=A_{(n,p)}$， $\angle ADE=180-A_{(n,p-1)}$

$$\Rightarrow 180-\frac{360(p+1)}{n}=180-(180-\frac{360p}{n}) \qquad \Rightarrow n=4p+2 \qquad \Rightarrow p=\frac{n-2}{4}$$

根據以上三步驟說明，可知「**正 n 邊形的邊長會剛好和 $\frac{n-2}{4}$ 階角星的邊長一樣**」猜想成立。(隨著不同的情況，步驟一僅須跟著修改 $K_{(n,p)}$之相等條件就可以論證)

三、計算正 n 邊形多角星頂角連線之線段與 $K_{(n,p)}$計算方法二



以下討論 p 階多角星頂點的連線，定義正 n 邊形邊長為 $L_{(n,0)}$，1 階 n 角星頂點連線長為 $L_{(n,1)}$，2 階 n 角星頂點連線長 $L_{(n,2)}$依此類推，如圖中的藍色線段長為 $L_{(10,1)}$橘色線長為 $L_{(10,2)}$，在探討 $L_{(n,p)}$的同時，也提出另一種求角星邊長 $K_{(n,p)}$的方法。

(一) 1 階 n 角星頂點連接長度($L_{(n,1)}$)計算 ($A_{(n,p)}$是角星的頂角角度)

如下圖，設所求$\overline{CD}=L_{(n,1)}$，在Δ ABC 中作直角ΔBCN，N 為$\overline{AB}$中點$\angle BNC=90°$

在Δ BCD 中作直角ΔBCQ，Q 為$\overline{CD}$中點$\angle BQC=90°$

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{BN}}=csc(\frac{A_{(n,1)}}{2})\Rightarrow \overline{BC}=\overline{BN}\times csc(\frac{A_{(n,1)}}{2})\Rightarrow K_{(n,1)}=\frac{L_{(n,0)}}{2}\times csc(\frac{A_{(n,1)}}{2}) \quad 而\ \frac{A_{(n,1)}}{2}=(90-\frac{360}{n})°$$

$$\frac{\overline{QC}}{\overline{BC}}=sin\frac{A_{(n,0)}}{2}\Rightarrow \frac{\overline{CD}}{2}=\overline{BC}\times sin\frac{A_{(n,0)}}{2}\Rightarrow L_{(n,1)}=2K_{(n,1)}\times sin\frac{A_{(n,0)}}{2}$$

$$\Rightarrow L_{(n,1)}=L_{(n,0)}\times csc(\frac{A_{(n,1)}}{2})\times sin\frac{A_{(n,0)}}{2}=L_{(n,0)}\times csc(90-\frac{360}{n})°\times sin(90-\frac{180}{n})°$$

(二) 2 階 n 角星頂點連接長度($L_{(n,2)}$)計算

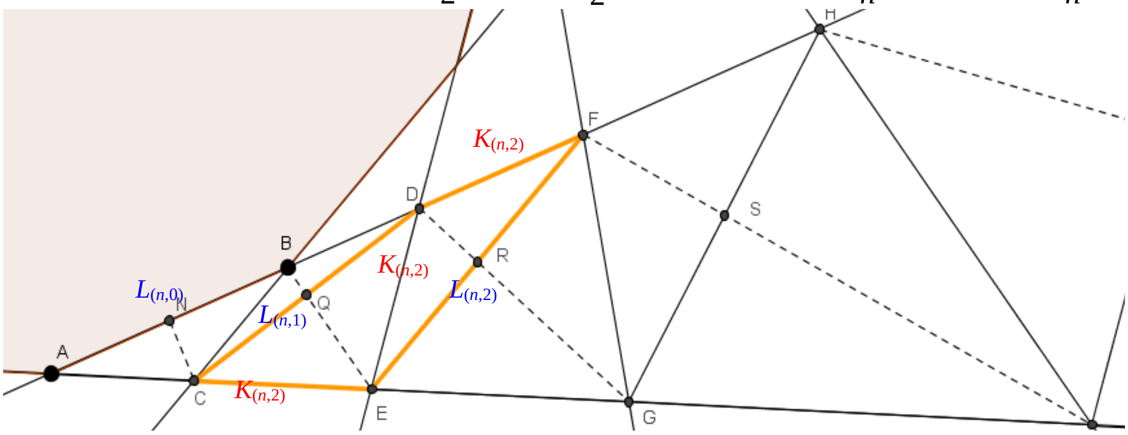
如下圖，設所求$\overline{EF}=L_{(n,2)}$，在ΔECD 中作直角ΔDEQ，Q 為$\overline{CD}$中點 $\angle DQE=90°$

在ΔDEF 中作直角ΔDER，R 為$\overline{EF}$中點 $\angle DRE=90°$

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{DQ}}=csc(\frac{A_{(n,2)}}{2})\Rightarrow \overline{DE}=\overline{DQ}\times csc(\frac{A_{(n,2)}}{2})\Rightarrow K_{(n,2)}=\frac{L_{(n,1)}}{2}\times csc(\frac{A_{(n,2)}}{2}) \quad 而\ \frac{A_{(n,2)}}{2}=(90-\frac{540}{n})°$$

$$\frac{\overline{RE}}{\overline{DE}}=sin\frac{A_{(n,1)}}{2}\Rightarrow \frac{\overline{EF}}{2}=\overline{DE}\times sin\frac{A_{(n,1)}}{2}\Rightarrow L_{(n,2)}=2K_{(n,2)}\times sin\frac{A_{(n,1)}}{2}$$

$$\Rightarrow L_{(n,2)}=L_{(n,1)}\times csc(\frac{A_{(n,2)}}{2})\times sin\frac{A_{(n,1)}}{2}=L_{(n,1)}\times csc(90-\frac{540}{n})°\times sin(90-\frac{360}{n})°$$



(三) p 階 n 角星頂點連接長度($L_{(n,p)}$)計算與($L_{(n,p)}$)與 $K_{(n,p)}$的關係式

我們任意畫出一個正 n 邊形的 p 階 n 角星，利用其中二個 p 階角星的頂點，譬如圖中的 V、U 二點，以及二個 p-1 階角星的頂點，如圖中 T、S 二點，可以找到二個等腰三角形，其二腰階為 $K_{(n,p)}$，如圖(ΔVTU、ΔSTU)，再使用之前計算 $L_{(n,1)}$、$L_{(n,2)}$ 的方式，**就可以得出** $K_{(n,p)}$和 $L_{(n,p)}$及 $L_{(n,p)}$與 $L_{(n,p-1)}$的關係式。

所求:$\overline{UV}=L_{(n,p)}$　　在ΔSTU 中作直角ΔTWU，W 為$\overline{TS}$中點　$\angle TWU=90°$

在ΔVTU 中作直角ΔTUX，X 為$\overline{UV}$中點　$\angle TXU=90°$

ΔTWU 中 $\dfrac{\overline{TU}}{\overline{TW}}=csc(\dfrac{A_{(n,p)}}{2})\Rightarrow \overline{TU}=\overline{TW}\times csc(\dfrac{A_{(n,p)}}{2})$　($\overline{TU}=K_{(n,p)}$，$\overline{TW}=\dfrac{L_{(n,p-1)}}{2}$)

$$\Rightarrow K_{(n,p)}=\frac{L_{(n,p-1)}}{2}\times csc(\frac{A_{(n,p)}}{2})$$

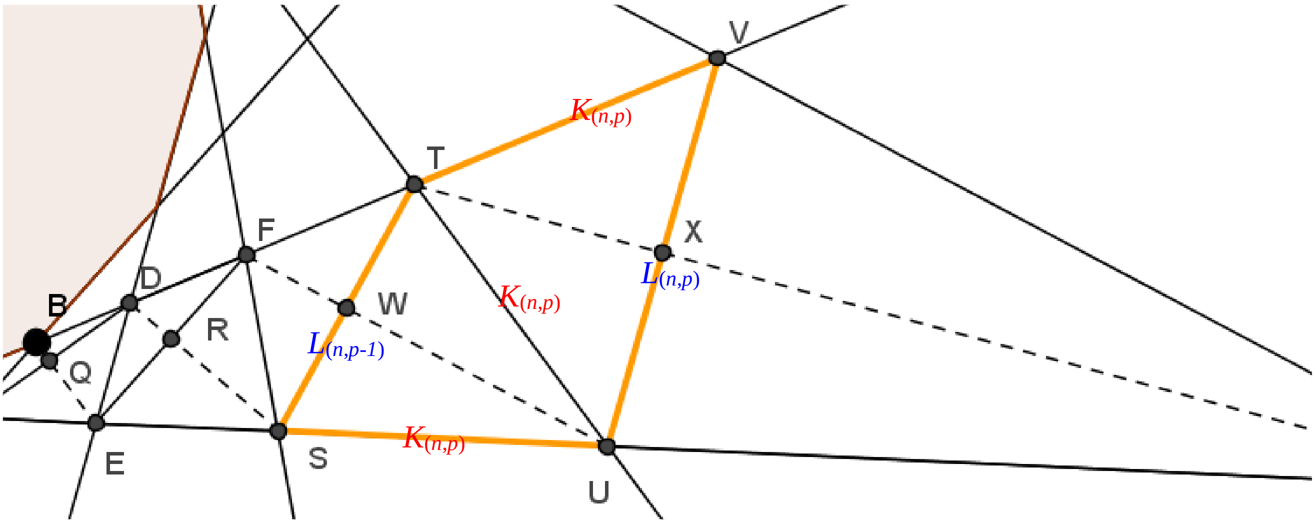
$$\Rightarrow K_{(n,p)}=\frac{L_{(n,p-1)}}{2}\times csc(90-\frac{180(p+1)}{n})°$$

ΔTUX 中 $\dfrac{\overline{UX}}{\overline{TU}}=sin\dfrac{A_{(n,p-1)}}{2}\Rightarrow \overline{UX}=\overline{TU}\times sin\dfrac{A_{(n,p-1)}}{2}$　**(**$\overline{UX}=\dfrac{L_{(n,p)}}{2}$**，**$\overline{TU}=K_{(n,p)}$**)**

$$\Rightarrow L_{(n,p)}=2K_{(n,p)}\times sin\frac{A_{(n,p-1)}}{2}$$

$$\Rightarrow L_{(n,p)}=L_{(n,p-1)}\times csc(\frac{A_{(n,p)}}{2})\times sin\frac{A_{(n,p-1)}}{2}$$

$$\Rightarrow L_{(n,p)}=L_{(n,p-1)}\times csc(90-\frac{180(p+1)}{n})°\times \sin(90-\frac{180p}{n})°$$



$K_{(n,p)}$和 $L_{(n,p-1)}$的關係式：$K_{(n,p)}=\dfrac{L_{(n,p-1)}}{2}\times csc(90-\dfrac{180(p+1)}{n})°$　　$n\geq 5$， $p\geq 1$

$L_{(n,p)}$與 $L_{(n,p-1)}$的關係式：$L_{(n,p)}=L_{(n,p-1)}\times csc(90-\dfrac{180(p+1)}{n})°\times \sin(90-\dfrac{180p}{n})°$

(四) 使用 *EXCEL* 計算 $L_{(n,p)}$與 $K_{(n,p)}$的關係式

我們利用公式以及 *EXCEL* 計算得到下表，其中可以看到當 n=6、9、12、15 時(也就是 $n=3(p+1)$) 對應的 $K_{(n,p)}=L_{(n,p-1)}$，$K_{(n,p+1)}=L_{(n,p+1)}$，而再與 p 階角度表比對，發現這些情形都出現在$(A_{(n,p)})=60°$時(幾何上出現了正三角形)，依此我們可以推論出性質：

$K_{(n,p)}=L_{(n,p-1)}$，$K_{(n,p+1)}=L_{(n,p+1)}$當 $n=3(p+1)$ 時 $n\geq5$，$p\geq1$ 為整數

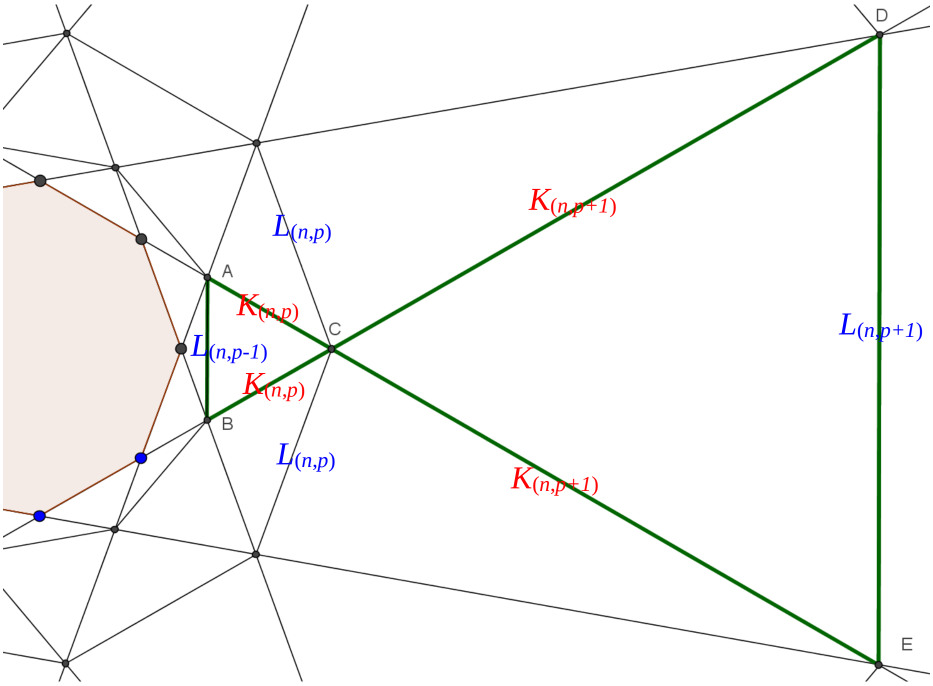
p / n	$L_{(n,0)}$	$K_{(n,1)}$	$L_{(n,1)}$	$K_{(n,2)}$	$L_{(n,2)}$	$K_{(n,3)}$	$L_{(n,3)}$	$K_{(n,4)}$	$L_{(n,4)}$	…
5	1	1.6180	2.6180	不存在	不存在	不存在	不存在	不存在	不存在	…
6	1	1	1.7321	不存在	不存在	不存在	不存在	不存在	不存在	…
7	1	0.8019	1.4450	3.2470	4.0489	不存在	不存在	不存在	不存在	…
8	1	0.7071	1.3066	1.7071	2.4142	不存在	不存在	不存在	不存在	…
9	1	0.6527	1.2267	1.2267	1.8794	5.4115	5.4115	不存在	不存在	…
10	1	0.6180	1.1756	1	1.6180	2.6180	3.0777	不存在	不存在	…
11	1	0.5944	1.1406	0.8708	1.4652	1.7635	2.3097	8.1148	6.7420	…
12	1	0.5774	1.1154	0.7887	1.3660	1.3660	1.9319	3.7321	3.7321	…
13	1	0.5647	1.0965	0.73248	1.2972	1.1417	1.7092	2.4100	2.7381	…
14	1	0.5550	1.0821	0.6920	1.2470	1	1.5637	1.8019	2.2470	…
15	1	0.5473	1.0707	0.6617	1.2091	0.9035	1.4618	1.4618	1.9563	…
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:

上下表的對應，可以清楚看出 $K_{(n,p)}=L_{(n,p-1)}$)，$K_{(n,p+1)}=L_{(n,p+1)}$ 出現在 $n=3(p+1)$ 時

p / n	n 邊形一內角	1 階角星角度	2 階角星角度	3 階角星角度	4 階角星角度	…
5	108.0000	36.0000	不存在	不存在	不存在	…
6	120.0000	60.0000	不存在	不存在	不存在	…
7	128.5714	77.1429	25.7143	不存在	不存在	…
8	135.0000	90.0000	45.0000	不存在	不存在	…
9	140.0000	100.0000	60.0000	20.0000	不存在	…
10	144.0000	108.0000	72.0000	36.0000	不存在	…
11	147.2727	114.5455	81.8182	49.0909	16.3636	…
12	150.0000	120.0000	90.0000	60.0000	30.0000	…
13	152.3077	124.6154	96.9230	69.2308	41.5385	…
14	154.2857	128.5714	102.8571	77.1429	51.4286	…
15	156.0000	132.0000	108.0000	84.0000	60.0000	…
:	:	:	:	:	:	:

證明：$K_{(n,p)} = L_{(n,p-1)}$，$K_{(n,p+1)} = L_{(n,p+1)}$當 n=3(p+1) 時 其中 $n\geq 5$，$p\geq 1$ 為整數

首先我們知道在 n 角星的圖中可以找到很多組由二個 $K_{(n,p)}$與一個 $L_{(n,p-1)}$邊長所組成的三角形，如下圖中的ΔABC，還有很多組由二個 $K_{(n,p+1)}$與一個 $L_{(n,p+1)}$邊長所組成的三角形，如下圖中的ΔCDE，我們只要去證明這樣的三角形在什麼樣的情況下為正三角形，就可以知道其中 n 與 p 的對應關係是否真的是 n=3(p+1)。



步驟一、令 $\overline{AC} = \overline{BC} = K_{(n,p)}$與 $\overline{AB} = L_{(n,p-1)}$邊長所組成的等腰三角形為$\Delta ABC$，若 $K_{(n,p)}=L_{(n,p-1)}$

則代表ΔABC 為正三角形，也就是$\angle ACB$ =60°，又因 $\overline{AC} = \overline{BC} = K_{(n,p)}$，所以$\angle ACB = A_{(n,p)}$：

計算$\angle ACB = A_{(n,p)} =(180-\dfrac{360(p+1)}{n})° = 60°$

$$\Rightarrow \quad 180n-360(p+1) = 60n \quad \Rightarrow \quad 3n-6(p+1) = n$$

$$\Rightarrow \quad 2n = 6(p+1) \quad \Rightarrow n = 3(p+1)$$

步驟二、令 $\overline{CD} = \overline{CE} = K_{(n,p+1)}$與 $\overline{DE} = L_{(n,p+1)}$邊長所組成的等腰三角形為$\Delta CDE$，若 $K_{(n,p+1)}=L_{(n,p+1)}$則代表ΔCDE 為正三角形，又因為$\angle ACB = A_{(n,p)} = \angle DCE$(對頂角相等)，所以 $K_{(n,p+1)}=L_{(n,p+1)}$ 的條件和 $K_{(n,p)}=L_{(n,p-1)}$一樣，也就是步驟一證明的 n =3(p+1)。

根據以上的步驟一、二，即證明 $K_{(n,p)} = L_{(n,p-1)}$，$K_{(n,p+1)} = L_{(n,p+1)}$ 當 n=3(p+1) 時

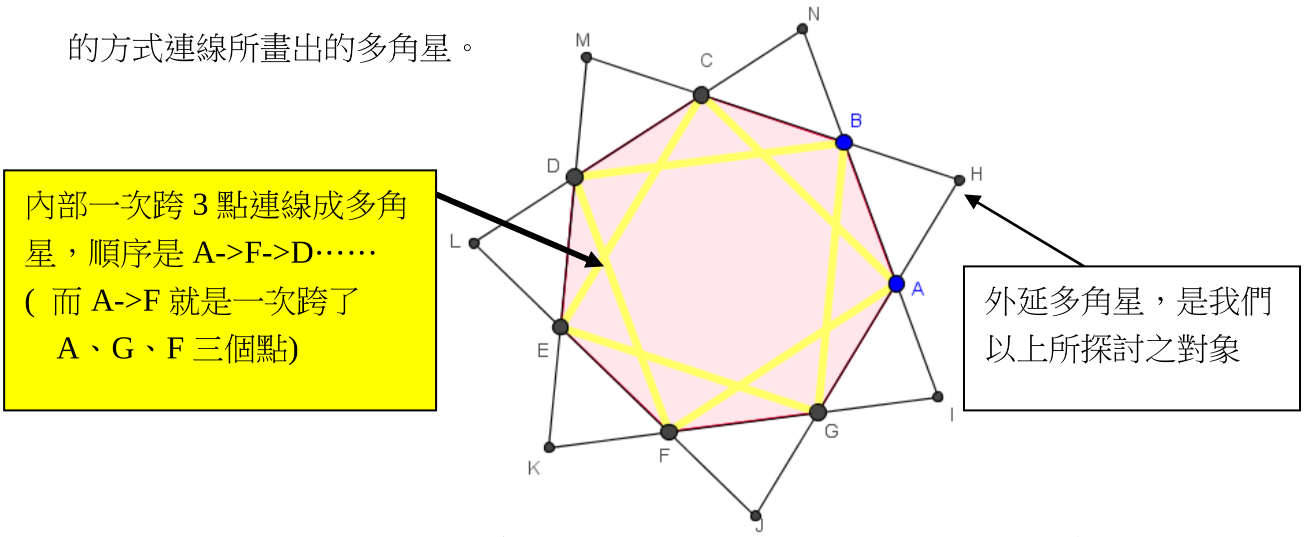
其中 $n\geq 5$，$p\geq 1$ 為整數

四、重新思考正 *n* 邊形內部連線的問題

這個主題是之前文獻已經探討且有結論的部分，所以我們將本結的三部分：第一、簡述之前的研究結果，第二、提出不同文獻的計算方法，第三、探討正 *n* 邊形內部連線的角星角度與外部角星的對應關係。

(一) 文獻中的正 *n* 邊形內部連線之多角星頂角角度計算

說明：正 *n* 邊形可以先鎖定一個起始點，再以一次跨 *q* 個的方式作內部連線，以下圖為例，圖中的黃色多角形，即是先鎖定正 7 邊形 *ABCEDEFG* 中的 A 點，再以一次跨 3 格的方式連線所畫出的多角星。



小星星之旅(2014)的研究則是參考其他文獻用圓周角的性質來說明，並有以下性質：

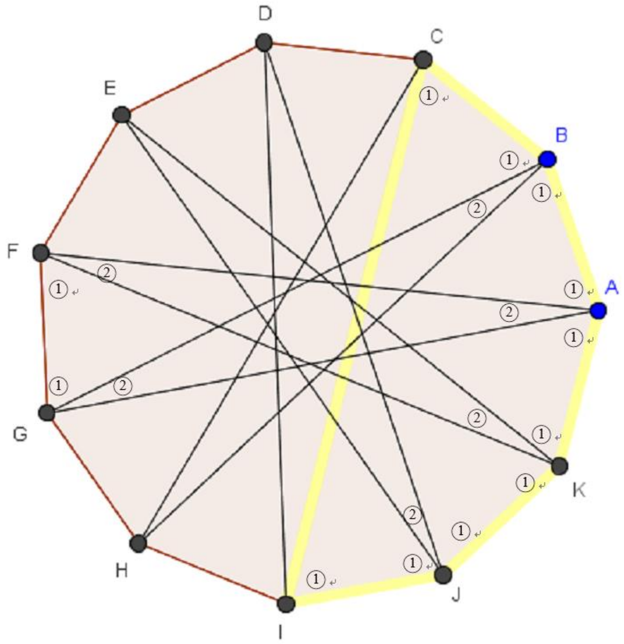
正 *n* 邊形內部一次跨 *q* 個點連線形成的 *n* 角星每一頂角角度=$[180-\frac{360(q-1)}{n}]$。

(二) 利用多邊形的內角和去求正 *n* 邊形內部連線之多角星頂角角度

面對這個問題時，我們在想能否只用我們國二目前數學課所學到的內容來解決這問題(文獻中是使用國三所學的圓周角性質)：

1. 以「正 11 邊形一次跨 6 個點連線畫 11 角星」之頂角度數解法為例

以下圖為例，我們發現只要觀察它連線的方式(一次跨幾個點)，就能之到它的一筆畫會形成幾邊形，接下來只要再使用一階角度的計算就可以推導出公式，譬如以下這個正 11 邊形，它是以一次跨 6 個點的方式進行連線，它的的一筆(如右圖黃色線段所示)就會形成一個 6 邊形，再分析這 6 邊形中的角度又可以恰好分成兩類①和②，如圖所示：



其中六邊形中有①類角 10 個，②類角 4 個，我們可以列式： 10①+ 4② =180×(6–2)

而正 11 邊形的一個內角剛好又是中有 ①類角 2 個+②類角 1 個: 2①+② $=\dfrac{180(11-2)}{11}$

再使用解聯立方程式的方法求解可得：n 角星的頂角度數 ② $=\dfrac{180°}{11}$

2. 「正 n 邊形一次跨 6 個點連線畫 q 角星」之頂角度數解法

第一筆畫形成 q 邊形，當所有線段畫完形成角星後，分析最初的 q 邊形內的所有角度可分兩大類①和②——————(1 式) (比照上圖所示)

譬如在 n 邊形中，一次跨 6 點會形成 6 邊形 $ABCDEF$，其中有①類角度 10 個、②類角度 4 個，所以我們能夠推論一次跨 q 點的 q 邊形有$(2q+2)$個①，以及$(q–2)$個②——(2 式)

根據正 n 邊形的內角公式可推論 2①+②=一內角⇒2①+②$=\dfrac{180(n-2)}{n}$————(3 式)

根據(1 式)、(2 式)可推論$(2q–2)$①+$(q–2)$② = q 邊形的內角和

⇒$(2q–2)$①+$(q–2)$② = $180(q–2)$———(4 式)

計算②、q、n 的關係式： (3 式)×$(q–1)$–(4)⇒ ②$=\dfrac{180(n-2)}{n}\times(q-1)-180(q-2)$

$\Rightarrow n\times②=(180n-360)(q-1)-180n(q-2)$

$\Rightarrow n\times②=\cancel{180nq}-180n-360q+360-\cancel{180nq}+360n$

$\Rightarrow n\times②=180n-360q+360$ $\quad\Rightarrow n\times②=180(n-2q+2)$ $\quad\Rightarrow ②=180-\dfrac{360(q-1)}{n}$

所以在正 n 邊形內跨點連線形成的 n 角星每一角的角度=$[180-\dfrac{360(q-1)}{n}]$。

(三)正 n 邊形邊長外部延伸所形成之 n 與內部連線形成之 n 角星的關聯

綜合以上探討正 n 邊形邊長延伸交點所形成的 n 角星之角度公式$[180-\frac{360(p+1)}{n}]°$，我們思考$[180-\frac{360(q-1)}{n}]°=[180-\frac{360(p+1)}{n}]°$，也就是 $q-1=p+1$ 之情形

發現 q 與 p 的關係式為 $q=p+2$ 或 $p=q-2$，由此可知：正 n 邊形邊長延伸所形成的 p 階 n 角星角度等於正 n 邊形內部跨 $p+2$ 個點連線方式所畫出之內部 n 角星，其對應表格如下 ：

	形成相同角星所需要的條件					
p	1	2	3	4	……	p
q	3	4	5	6	……	$p+2$

伍、研究結果

一、正 n 邊形邊長延伸交點所形成的 p 階多角星之度數 $A_{(n,p)}$ 與種類

以下定義正 n 邊形的一內角度數為 $A_{(n,0)}$ (視為 0 階 n 角星的頂角度數)

1. 遞迴關係： $A_{(n,p)}=\begin{cases} A_{(n,0)}=180°-\frac{360°}{n}, p=0 \\ A_{(n,p)}=A_{(n,p-1)}-\frac{360°}{n}, p\geq 1\text{時} \end{cases}$ ，$n\geq 5$，n、p 為整數

2. 通式： $A_{(n,p)}=180°-(\frac{360}{n})°\times(p+1)$ ，$n\geq 5$，$p\geq 0$ 為整數

3. p 階角存在之判別式： $n>2(p+1)$ ，而 p 的最大值即代表正 n 邊形角星的種類個數。

二、p 階多角星的邊長 $K_{(n,p)}$與周長，當正 n 邊形的邊長為 1，$n\geq 5$

1. 1 階角星邊長($K_{(n,1)}$) $=\frac{1}{2}\sec\frac{360}{n}$。

2. 2 階角星邊長($K_{(n,2)}$) $=[sin(\frac{360}{n})°][cot(90-\frac{540}{n})°-cot(180-\frac{720}{n})°]$

3. 3 階角星邊長($K_{(n,3)}$) $=(K_{(n,1)}+1)[sin(\frac{360}{n})°][cot(90-\frac{720}{n})°-cot(180-\frac{1080}{n})°]$

4. p 階角星邊長($K_{(n,p)}$) 當 $p>2$ 時：

$$K_{(n,p)}=(K_{(n,1)}+K_{(n,2)}+\ldots+K_{(n,p-2)}+1)[sin(\frac{360}{n})°][cot(90-\frac{180(p+1)}{n})°-cot(180-\frac{360p}{n})°]$$

5. 各 n 角星之周長為 $2\times n\times K_{(n,p)}$

三、p 階多角星的邊長 $K_{(n,p)}$與頂點連線 $L_{(n,p)}$

令 $L_{(n,0)}$為正 n 邊形邊長，$n \geq 5$、 $p \geq 1$ 為整數

1. $K_{(n,p)}=\dfrac{L_{(n,p-1)}}{2}\times csc(90-\dfrac{180(p+1)}{n})°$ (可和上述第二點之 $K_{(n,p)}$ 公式結合)
2. $L_{(n,p)}=L_{(n,p-1)}\times csc(90-\dfrac{180(p+1)}{n})°\times \sin(90-\dfrac{180p}{n})°$

四、一些多角星邊長 $K_{(n,p)}$與頂點連線 $L_{(n,p)}$ 的等式

令 $L_{(n,0)}$為正 n 邊形邊長，$n \geq 5$、$p \geq 1$ 為整數

1. $K_{(n,p)} = L_{(n,0)}$ ，當 $p = \dfrac{n-2}{4}$
2. $K_{(n,p)} = L_{(n,p-1)}$，$K_{(n,p+1)} = L_{(n,p+1)}$ 當 n=3(p+1)

五、正 n 邊形內部一次跨 q 點連線與外部邊長延伸所形成 p 階多角星之對應關係

「外部的第 p 階角星度數=內部一次跨 p+2 個點連線所形成之內部角星度數」

陸、討論

一、可將正 n 邊形可視為正 n 邊形的 0 階 n 角星

我們在計算角度與各階角星頂角的連線，發現若將正 n 邊形視為 0 階角星，則在數學公式上顯示出一致性：

1. 角度關係的一致性： $A_{(n,p)} = 180°-(\dfrac{360}{n})°\times(p+1)$ ，$n \geq 5$，$p \geq 0$ 為整數

   p=0 代入剛好就是正 n 邊形一內角的計算方法，所以我們可以將正 n 邊形內角視為 0 階角度 $A_{(n,0)}$。

2. 計算角星邊長 $K_{(n,p)}$時角星頂角連線的一致性：

$$K_{(n,p)}=\frac{L_{(n,p-1)}}{2}\times csc(90-\frac{180(p+1)}{n})°，n \geq 5，p \geq 1 \text{ 為整數}$$

一開始我們只有在 $p \geq 2$ 時使用 $L_{(n,p-1)}$來表示角星邊長 $K_{(n,p)}$ 的關係(避開 p=1，出現 $L_{(n,0)}$ 的形情)，但在 $K_{(n,1)}$ 的計算上，我們發現它的計算方法其實和 $K_{(n,2)}$ 、$K_{(n,2)}$等一樣，只是用的不是 $L_{(n,1)}$ 、$L_{(n,2)}$等而是自己假設的正 n 邊形邊長 1，因此我們發現只要重新將 $L_{(n,0)}$定義為正 n 邊形的邊長，公式就能適用於 $p \geq 1$ 的情形。

二、透過 *EXCEL* 計算各角星邊長長度，幫助我們發現一些幾何關係式

譬如我們意外發現的「正 n 邊形的邊長會和 $\frac{n-2}{4}$ 階角星的邊長一樣」，也就是當正 n 邊形邊長=1， $p=\frac{n-2}{4}$ ，還有 $K_{(n,p)}=L_{(n,p\text{-}1)}$，$K_{(n,p+1)}=L_{(n,p+1)}$ 當 n=3(p+1) 這二個關係式，是我們先利用三角函數得到算式後使用 *EXCEL* 計算，觀察 *EXCEL* 計算結果後所發覺的特殊關係，最後我們再回到圖形上證明這些性質是正確的。

三、幾何的性質證明可以證明難以化簡的代數算式

承上點，「正 n 邊形的邊長會和 $\frac{n-2}{4}$ 階角星的邊長一樣，當正 n 邊形邊長=1」算式為：$(K_{(n,1)}+K_{(n,2)}+\ldots+K_{(n,p\text{-}2)}+1)[sin(\frac{360}{n})°][cot(90-\frac{180(p+1)}{n})°-cot(180-\frac{360p}{n})°]=1$，其實我們一開始想要透過算式的計算來證明它成立的條件是 $p=\frac{n-2}{4}$，但這代數式難倒了我們，最後是發現這問題相當於多角星圖形上的「$A_{(n,p)}=180-A_{(n,p\text{-}1)} \Rightarrow 180-\frac{360(p+1)}{n}=180-(180-\frac{360p}{n})$ 」，而當圖形問題解決後，反而也因此證明代數式是正確的。

柒、結論

多角星問題是個擁有漂亮幾何構造的幾何問題並且和正 n 邊形的邊長角度有一致性的關係，當我們求出它的各個邊長代數式時，可以反過來利用它漂亮的幾何性質來論證，譬如本研究發現的 $K_{(n,p)}=L_{(n,0)}$ ，當 $p=\frac{n-2}{4}$ 與 $K_{(n,p)}=L_{(n,p\text{-}1)}$、 $K_{(n,p+1)}=L_{(n,p+1)}$ 當 n=3(p+1)；我們相信一定還存在更多有趣的性質躲在這美麗的角星之中；而本研究所推導的 $K_{(n,p)}$與頂點連線 $L_{(n,p)}$ 的關係式預期能進一步將正 n 邊形內部連線形成 n 角星之長度問題做進一步討論。

捌、參考資料及其他

小星星之旅－多邊形與多角星(2014)。新北市 102 學年度市科展作品。

正多角星繪圖的研究(1989)。全國中小學科展作品第 29 屆作品-國小組數學科。

物換星移 折折稱奇(2005)。全國中小學科展作品第 45 屆作品-國小組數學科。

教育部(2008)。國高中數學銜接教材 http://mathcenter.ck.tp.edu.tw/MCenter/Center/TopResources.aspx

國中數學第四冊(2015)。翰林出版。

【評語】030418

從多邊形聯想到層層相疊的多角星形，想法十分有趣。作者們針對所提出的問題，給出了完整的解答，說明清楚，頗為難得。可惜的是，受限於問題的本身，能夠討論的內容不多。多邊形的內接多角星形和向外衍生得出的多角星形應該有一些自然的關係，如果能增加一些相關的討論會更好。