中華民國第56屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

佳作

030417

再探均分問題的動態穩定

學校名稱：苗栗縣立興華高級中學(附設國中)

作者：	指導老師：
國一 林建銘 國一 高暐芬 國一 廖昇瑋	蘇柏奇

關鍵詞：二進位、動態穩定

摘要

本文探究是否能將三堆石頭移動成數量皆相等的狀態（稱之為「穩定狀態」），因為遊戲進行中，石頭的總數不變，故以石頭數量總和進行分類觀察，我們逐步探討得到：數量總和不是6的倍數之非穩定狀態數對無法形成穩定狀態，進而得到形成穩定狀態的充要條件，並且利用二進位表法歸納三堆時的移動次數型態，得到不須二進位即可操作的移動方法。最後，我們將此結果擴展到多堆石頭時，形成穩定狀態的充要條件及移動方法。

壹、 研究動機：

老師介紹一個學長探索過的數學遊戲，遊戲條件是：「有2堆石頭，每次進行移動時，都從數量較多的那一堆拿出當下較少數量那堆個數，將其放到數量較少的那一堆，反覆進行這種動作，直至因2堆數量相等而無法移動」。我們嘗試從2堆變成3堆，平分2堆石頭的移動方式總是由多的一堆移動至少的一堆，但3堆時，移動的方法不只一種，該移動哪兩堆是一個很大的考驗，我們試圖找出可形成穩定狀態的條件及移動方法與次數。

貳、 研究目的：

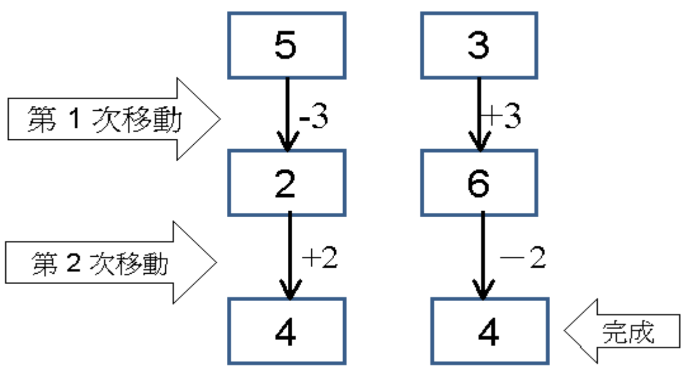
1. 探索數對可形成穩定狀態的條件。
2. 探索數對形成穩定狀態所需的移動次數。

叁、 研究設備及器材：紙、筆、*Word*。

肆、 研究過程或方法結果：

第一部分：文獻探討

陳奕均探討是否能將分別有 x, y 顆的兩堆石頭，記為數對 (x, y)，移動成兩堆皆為 $\frac{x+y}{2}$ 顆的狀態（稱為『穩定狀態』），並探討其移動次數。其移動方法為從數量較多的那一堆拿出當下較少數量那堆的個數，將其放到數量較少的那堆，反覆進行這種動作，直到兩堆個數相等。以兩堆石頭分別有5顆、3顆為例，其移動過程如下圖所示。



陳奕均觀察數對變化過程中，二進位制表法的規律，得到結論如下：

兩堆石頭分別有 x、 y 顆，記為 (x, y)。
若 $x+y=q\times 2^k$ (q 為奇數)，且 x, y 的最大公因數為 $r\times 2^m$，則：
1. $q=r$ 時，(x, y) 形成穩定狀態的次數為 $k-1-m$ 次。
2. $q\neq r$ 時，(x, y)無法形成穩定狀態。

第二部分：初步探討

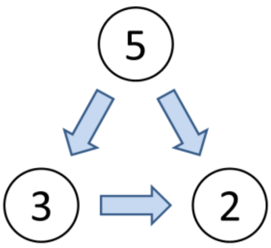
一、符號定義與移動方式探討

本文延伸陳奕均的研究，探討三堆石頭是否能形成數量均分的狀態，定義符號如下：

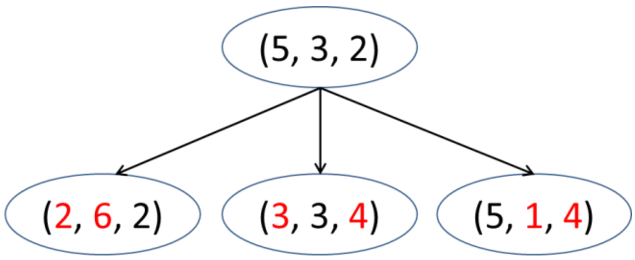
定義：
1. 三堆石頭分別有 x, y, z 個，以數對(x, y, z)表示。
2. 若三堆石頭的個數相等，即 $x=y=z$，則 (x, y, z) 稱為「穩定狀態」。
反之，則稱為「非穩定狀態」。

因為三堆石頭並無編號，當三堆數量分別有 1, 2, 3 顆時，記為(1, 2, 3)或(2, 3, 1)或(3, 2, 1)等狀態都視為同一種，一般而言，我們通常規定 $x\geqq y\geqq z\geqq 1$。

僅有兩堆石頭時，其移動方法總是由多的一堆移至少的一堆，但當有三堆石頭時，其移動方法有更多可能性，例如：數對(5, 3, 2)有三種移動方式如下：

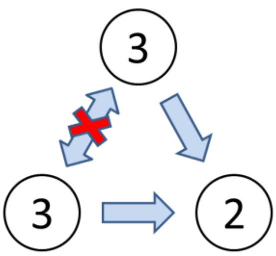


有 3 種移動方式

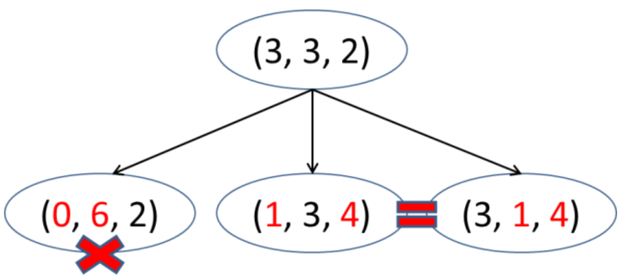


形成 3 種數對

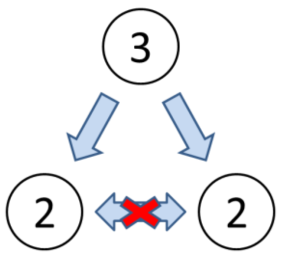
當其中兩堆數量相同時，雖然有多種移動方式，但因為不允許將某堆全部移完，而且某些移動方式形成的數對會相同，因此僅能形成 1 種數對。



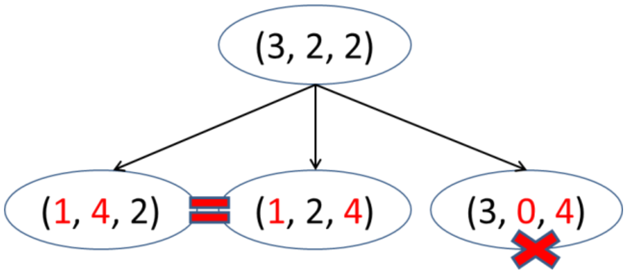
有 2 種移動方式



形成 1 種數對

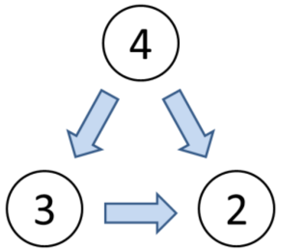


有 2 種移動方式

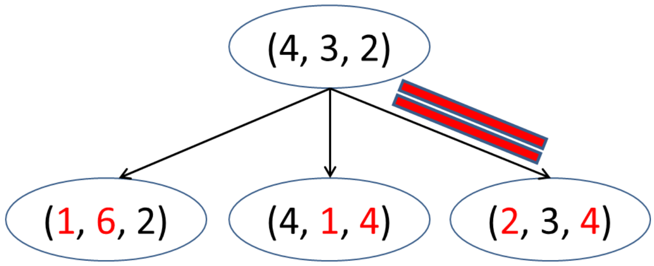


形成 1 種數對

當某堆數量恰為另一堆的 2 倍時，雖然有多種移動方式，但因為不允許將某堆全部移完，且某些移動方式形成的數對會相同，因此僅能形成 2 種數對。



有 3 種移動方式



形成 2 種數對

二、可形成穩定狀態的條件

首先，我們將檢驗是否所有數對皆能形成穩定狀態，依序探討幾個基本問題。

問題 1：所有非穩定狀態數對皆能形成「穩定狀態」嗎？

一個非穩定狀態的數對(x, y, z)，經過干次移動後變成穩定狀態 (k, k, k)，

$$(x, y, z) \longrightarrow \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \longrightarrow (k, k, k)$$

因為移動過程中，石頭數量總和不會改變，我們得到：

$$\boldsymbol{x+y+z=3k}，$$

即：數量總和 $x + y + z$ 為 3 的倍數，數對(x, y, z) 才能形成穩定狀態。由此可知數對(2, 1, 1)、(2, 2, 1)、(3, 1, 1)無法形成穩定狀態。歸納如下。

結論 1：

數量和不是 3 的倍數之非穩定狀態數對無法形成穩定狀態。

問題 2：數量和為 3 的倍數之非穩定狀態數對皆能形成「穩定狀態」嗎？

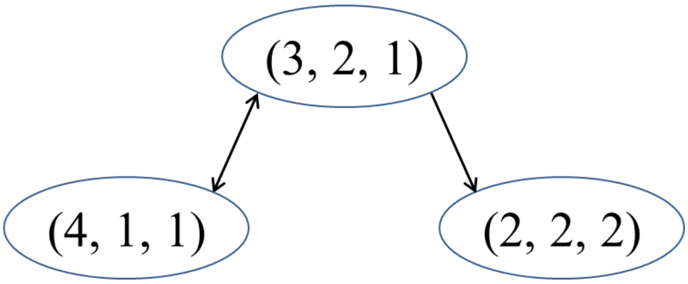
所有數量和為 3 的倍數的非穩定狀態數對都能形成穩定狀態嗎？觀察和為 6、9 的情況。

1、$x+y+z=6$

當 $x+y+z=6$ 且 $x \geqq y \geqq z \geqq 1$ 時，(x, y, z)可能的情況有：(4,1,1), (3,2,1), (2,2,2)，其經過一次移動可能的數對如下：

數對	經過一次移動可能數對
(4,1,1)	(3,2,1)
(3,2,1)	(2,2,2) (4,1,1) (3,2,1)

其中(4,1,1)可能形成(3,2,1)，而(3,2,1)也可能形成(4,1,1)，用圖形表示如下：



因此得到：當 $x+y+z=6$ 時，所有數對皆能形成穩定狀態。

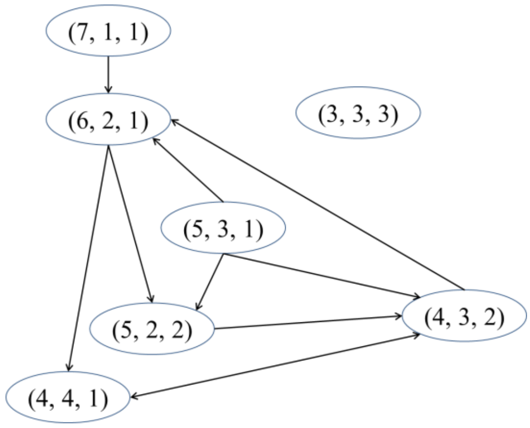
數對	形成穩定狀態的過程	次數
(4,1,1)	→ (3,2,1) → (2,2,2)	2
(3,2,1)	→ (2,2,2)	1
(2,2,2)		0

2、$x+y+z=9$

當 $x+y+z=9$ 且 $x \geqq y \geqq z \geqq 1$ 時，(x, y, z)可能的情況有：(7,1,1), (6,2,1), (5,3,1) (5,2,2), (4,4,1), (4,3,2), (3,3,3)，其經過一次移動可能的數對如下：

數對	經過一次移動可能數對
(7,1,1)	(6,2,1)
(6,2,1)	(6,2,1) (4,4,1) (5,2,2)
(5,3,1)	(6,2,1) (5,2,2) (4,3,2)
(5,2,2)	(4,3,2)
(4,4,1)	(4,3,2)
(4,3,2)	(6,2,1) (4,4,1) (4,3,2)

用圖形表示如下：



因此得到：當 $x+y+z=9$ 時，僅有(3,3,3)能形成穩定狀態。歸納如下。

結論 2：

並非所有數量和為 3 的數對之非穩定狀態皆能形成穩定狀態。

我們接著探討，當三堆石頭總量為 3 的倍數時，何時無法形成穩定狀態。

問題 3：數量和為 3 的倍數之非穩定狀態數對，何時無法形成穩定狀態？

移動時，自三堆中選定兩堆進行移動，所選定的兩堆之奇偶性變化有以下四種：

（奇數、奇數）➔（偶數、偶數）；

（偶數、偶數）➔（偶數、偶數）；

（偶數、奇數）➔（奇數、偶數）；

（奇數、偶數）➔（偶數、奇數）。

我們發現：移動後至少有一堆的數量為偶數。

當三堆數量和 $x+y+z$ 為奇數時，其穩定狀態的各堆數量為奇數，分兩類討論如下：

1. 數對(x, y, z)即為穩定狀態（不須經任何移動）。
2. 數對(x, y, z)為非穩定狀態，需經過移動才有可能形成穩定狀態，但不論經過多少次移動，至少有一堆的數量為偶數（無法形成三堆皆為奇數），即無法形成穩定狀態。

因此一個非穩定狀態的數對(x, y, z)，數量和 $x + y+ z$ 須為偶數，數對(x, y, z) 才能形成穩定狀態。歸納如下。

結論 3：

數量和為奇數的非穩定狀態的數對無法形成穩定狀態。

由此可說明前述總和為 9 時的數對 (7, 1, 1)、(6, 2, 1)、(5, 3, 1)…等皆無法形成穩定狀態。因為 $x+y+z$ 為 2 和 3 的倍數，故為 6 的倍數，接下來的探討僅討論 $x+y+z$ 為 6 的倍數的情形。

問題 4：數量和為 6 的倍數之非穩定狀態數對一定能形成穩定狀態嗎？

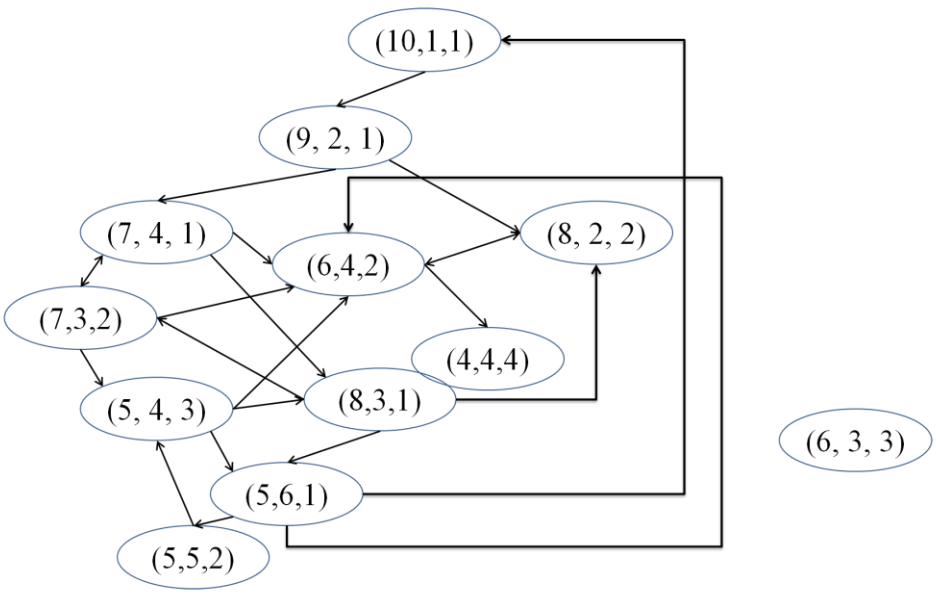
以下針對 $x+y+z=12,18,24$ 進行探討：

1、$x+y+z=12$

當 $x+y+z=12$ 且 $x \geqq y \geqq z \geqq 1$ 時，所有 (x, y, z) 數對經過一次移動後可能的數對如下：

數對	經過一次移動可能數對
(10,1,1)	(9,2,1)
(9,2,1)	(7,4,1) (9,2,1) (8,2,2)
(8,3,1)	(6,5,1) (8,2,2) (7,3,2)
(8,2,2)	(6,4,2)
(7,4,1)	(8,3,1) (7,3,2) (6,4,2)
(7,3,2)	(6,4,2) (7,4,1) (5,4,3)
(6,5,1)	(10,1,1) (6,4,2) (5,5,2)
(6,4,2)	(8,2,2) (6,4,2) (4,4,4)
(6,3,3)	(6,3,3)
(5,5,2)	(5,4,3)
(5,4,3)	(8,3,1) (6,5,1) (6,4,2)

用圖形表示如下：



因此我們得到當 $x+y+z=12$ 時，**除了(6,3,3)之外，所有數對皆能形成穩定狀態。**

數對	形成穩定狀態的過程	次數
(10,1,1)	→ (9,2,1) → (8,2,2) → (6,4,2) → (4,4,4)	4
(9,2,1)	→ (8,2,2) → (6,4,2) → (4,4,4)	3
(8,3,1)	→ (7,3,2) → (6,4,2) → (4,4,4)	3
(5,5,2)	→ (5,4,3)→ (6,4,2) → (4,4,4)	3
(5,4,3)	→ (6,4,2) → (4,4,4)	2
(8,2,2)	→ (6,4,2) → (4,4,4)	2
(7,4,1)	→ (6,4,2) → (4,4,4)	2
(7,3,2)	→ (6,4,2) → (4,4,4)	2
(6,5,1)	→ (6,4,2) → (4,4,4)	2
(6,4,2)	→ (4,4,4)	1
(4,4,4)		0
(6,3,3)	—	—

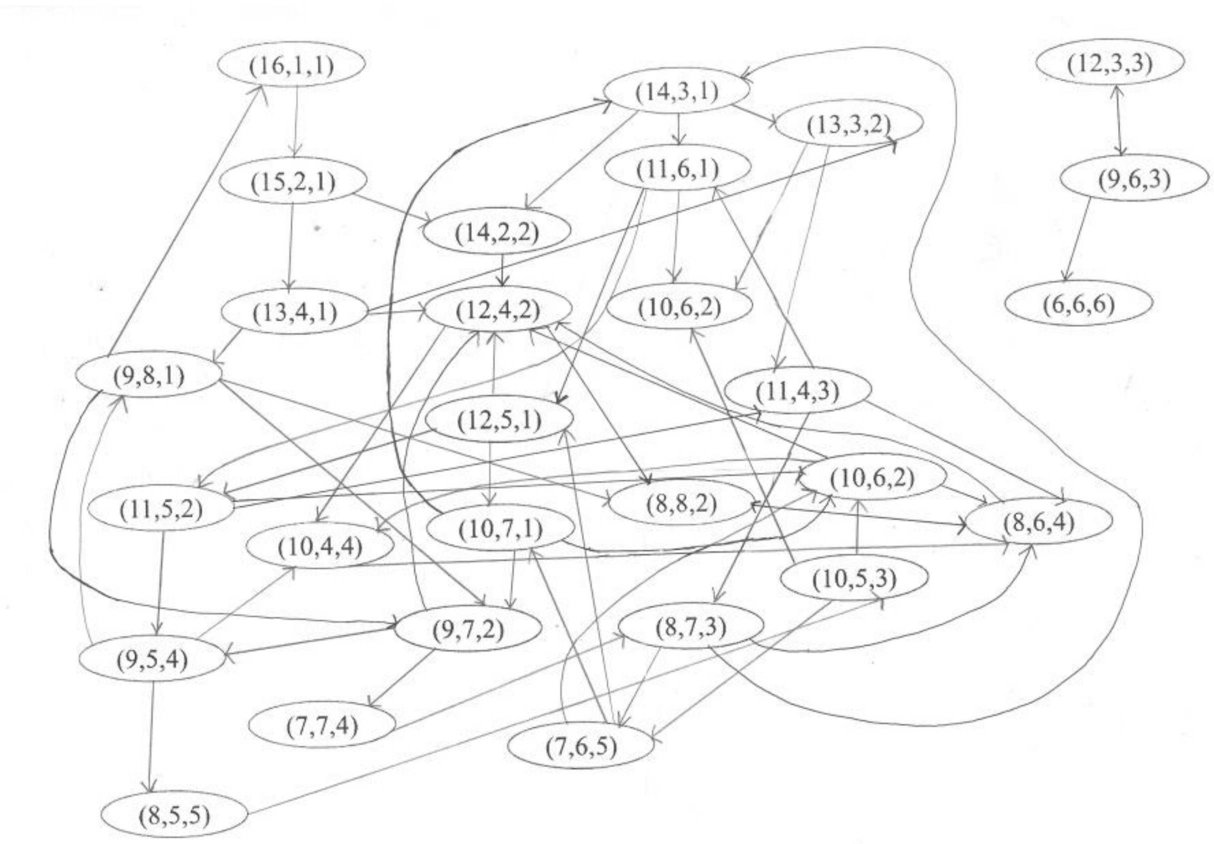
2、$x+y+z=18$

當 $x+y+z=18$ 且 $x \geqq y \geqq z \geqq 1$ 時，所有(x, y, z)數對經過一次移動後可能的數對如下：

數對	經過一次移動可能數對
(16,1,1)	(15,2,1)
(15,2,1)	(13,4,2) (15,2,1) (14,2,2)
(14,3,1)	(11,6,1) (14,2,2) (13,3,2)
(14,2,2)	(12,4,2)
(13,4,1)	(9,8,1) (13,3,2) (12,4,2)
(13,3,2)	(10,6,2) (13,4,1) (11,4,3)
(12,5,1)	(10,7,1) (12,4,2) (11,5,2)
(12,4,2)	(8,8,2) (12,4,2) (10,4,4)
(12,3,3)	(9,6,3)
(11,5,2)	(10,6,2) (11,4,3) (9,5,4)
(11,4,3)	(8,7,3) (11,6,1) (8,6,4)
(10,7,1)	(14,3,1) (10,6,2) (9,7,2)

(10,6,2)	(12,4,2) (10,4,4) (8,6,4)
(10,5,3)	(10,5,3) (10,6,2) (7,6,5)
(10,4,4)	(8,6,4)
(9,8,1)	(16,1,1) (9,7,2) (8,8,2)
(9,7,2)	(14,2,2) (9,5,4) (7,7,4)
(9,6,3)	(12,3,3) (9,6,3) (6,6,6)
(9,5,4)	(10,4,4) (9,8,1) (8,5,5)
(8,8,2)	(8,6,4)
(8,7,3)	(14,3,1) (8,6,4) (7,6,5)
(8,6,4)	(12,4,2) (8,8,2) (8,6,4)
(8,5,5)	(10,5,3)
(7,7,4)	(8,7,3)
(7,6,5)	(12,5,1) (10,7,1) (10,6,2)

用圖形表示如下：



我們得到當 $x+y+z=18$ 時，僅有下列數對能形成穩定狀態。

數對	形成穩定狀態的過程	次數
(12, 3, 3)	→ (9,6,3) → (6,6,6)	2
(9,6,3)	→ (6,6,6)	1
(6,6,6)		0

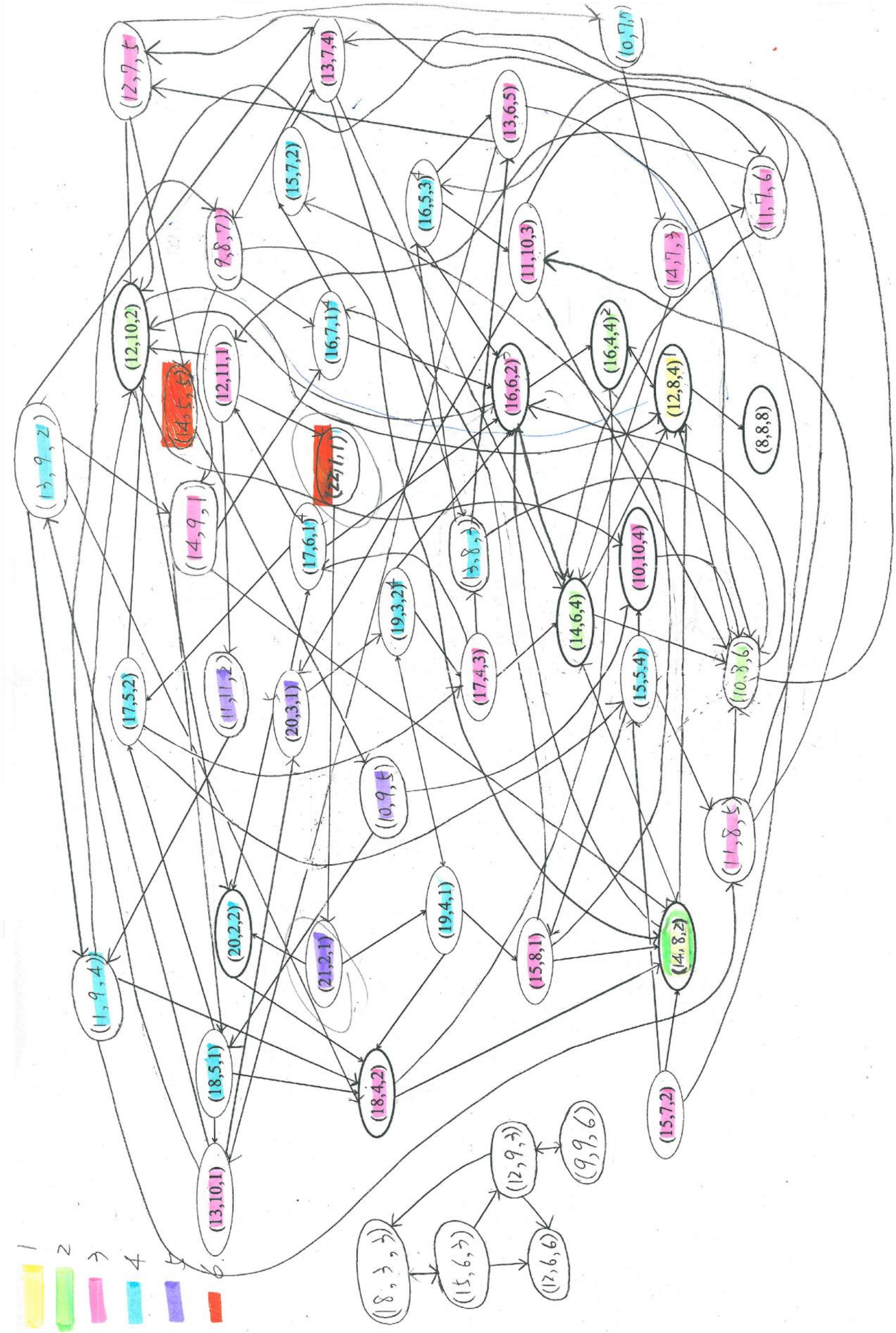
3、$x+y+z=24$

當 $x+y+z=24$ 且 $x \geqq y \geqq z \geqq 1$ 時，(x, y, z)可能的情況及其經過一次移動可能的數對如下：

數對	經過一次移動可能數對
(22,1,1)	(21,2,1)
(21,2,1)	(19,4,1) (21,2,1) (20,2,2)
(20,3,1)	(17,6,1) (20,2,2) (19,3,2)
(20,2,2)	(18,4,2)
(19,4,1)	(15,8,1) (19,3,2) (18,4,2)
(19,3,2)	(16,6,2) (19,4,1) (17,4,3)
(18,5,1)	(13,10,1) (18,4,2) (17,5,2)
(18,4,2)	(14,8,2) (18,4,2) (16,4,4)
(18,3,3)	(15,6,3)
(17,6,1)	(16,6,2) (12,11,1) (17,5,2)
(17,5,2)	(12,10,2) (17,4,3) (15,5,4)
(17,4,3)	(13,8,3) (17,6,1) (14,6,4)
(16,7,1)	(14,9,1) (16,6,2) (15,7,2)
(16,6,2)	(12,10,2) (16,4,4) (14,6,4)
(16,5,3)	(11,10,3) (16,6,2) (13,6,5)
(16,4,4)	(12,8,4)
(15,8,1)	(16,7,1) (15,7,2) (14,8,2)
(15,7,2)	(14,8,2) (15,5,4) (13,7,4)
(15,6,3)	(12,9,3) (15,6,3) (12,6,6)
(15,5,4)	(10,10,4) (15,8,1) (11,8,5)
(14,9,1)	(18,5,1) (14,8,2) (13,9,2)
(14,8,2)	(16,6,2) (14,6,4) (12,8,4)
(14,7,3)	(14,7,3) (14,6,4) (11,7,6)
(14,6,4)	(12,8,4) (14,8,2) (10,8,6)

數對	經過一次移動可能數對
(14,5,5)	(10,9,5)
(13,10,1)	(20,3,1) (13,9,2) (12,10,2)
(13,9,2)	(18,4,2) (13,7,4) (11,9,4)
(13,8,3)	(16,5,3) (13,6,5) (10,8,6)
(13,7,4)	(14,6,4) (13,8,3) (9,8,7)
(13,6,5)	(12,7,5) (13,10,1) (10,8,6)
(12,11,1)	(22,1,1) (12,10,2) (11,11,2)
(12,10,2)	(20,2,2) (12,8,4) (10,10,4)
(12,9,3)	(18,3,3) (12,6,6) (9,9,6)
(12,8,4)	(16,4,4) (12,8,4) (8,8,8)
(12,7,5)	(14,5,5) (12,10,2) (10,7,7)
(12,6,6)	(12,6,6)
(11,11,2)	(11,9,4)
(11,10,3)	(20,3,1) (11,7,6) (10,8,6)
(11,9,4)	(18,4,2) (11,8,5) (9,8,7)
(11,8,5)	(16,5,3) (11,10,3) (10,8,6)
(11,7,6)	(14,6,4) (12,11,1) (12,7,5)
(10,10,4)	(10,8,6)
(10,8,6)	(16,6,2) (12,10,2) (12,8,4)
(10,9,5)	(18,5,1) (10,10,4) (10,9,5)
(10,7,7)	(14,7,3)
(9,9,6)	(12,9,3)
(9,8,7)	(16,7,1) (14,9,1) (14,8,2)

用圖形表示如下：



我們得到當 $x+y+z=24$ 時，各數對形成穩定狀態的過程與次數如下表：

數對	形成穩定狀態的過程	次數
(22,1,1)	→(21,2,1)→(19,4,1)→(15,8,1)→(14,8,2,)→(12,8,4)→(8,8,8)	6
(14,5,5)	→(10,9,5)→(18,5,1)→(18,4,2)→(16,4,4)→(12,8,4)→(8,8,8)	6
(21,2,1)	→(19,4,1) → (15,8,1) →(14,8,2)→(12,8,4) →(8,8,8)	5
(20,3,1)	→ (19,3,2)→(17,4,3) → (14,6,4)→(12,8,4) →(8,8,8)	5
(10,9,5)	→(18,5,1)→(18,4,2)→(14,8,2) →(12,8,4)→(8,8,8)	5
(11,11,2)	→(11,9,1)→(18,4,2)→(16,4,4)→(12,8,4)→(8,8,8)	5
(20,2,2)	→ (18,4,2)→(14,8,2) → (12,8,4)→(8,8,8)	4
(19,4,1)	→ (15,8,1)→(14,8,2) → (12,8,4)→(8,8,8)	4
(19,3,2)	→ (16,6,2)→(16,4,4) → (12,8,4)→(8,8,8)	4
(18,5,1)	→ (18,4,2)→(14,8,2) → (12,8,4)→(8,8,8)	4
(17,6,1)	→ (16,6,2)→(16,4,4) → (12,8,4)→ (8,8,8)	4
(17,5,2)	→ (17,4,3)→(14,6,4) → (12,8,4)→ (8,8,8)	4
(16,7,1)	→(16,6,2) → (16,4,4)→ (12,8,4)→(8,8,8)	4
(16,5,3)	→(11,10,3)→(10,8,6)→ (12,8,4)→(8,8,8)	4
(15,5,4)	→(10,10,4)→(10,8,6)→(12,8,4) →(8,8,8)	4
(13,9,2)	→(14,9,1)→(14,8,2)→(12,8,4) →(8,8,8)	4
(13,8,3)	→(13,6,5)→(10,8,6)→(12,8,4) →(8,8,8)	4
(11,9,4)	→(18,4,2)→(14,8,2)→(12,8,4)→(8,8,8)	4
(10,7,7)	→(14,7,3)→(14,6,4)→(12,8,4) →(8,8,8)	4
(18,4,2)	→ (14,8,2)→(12,8,4)→(8,8,8)	3
(17,4,3)	→(14,6,4)→(12,8,4)→(8,8,8)	3
(16,6,2)	→(16,4,4)→(12,8,4)→(8,8,8)	3
(15,8,1)	→(14,8,2)→(12,8,4)→(8,8,8)	3
(15,7,2)	→(14,8,2)→(12,8,4)→(8,8,8)	3
(14,9,1)	→(14,8,2)→(12,8,4)→(8,8,8)	3
(14,7,3)	→(14,6,4)→(12,8,4)→(8,8,8)	3
(13,10,1)	→(12,10,2)→(12,8,4)→(8,8,8)	3
(13,7,4)	→(14,6,4)→(12,8,4)→(8,8,8)	3
(13,6,5)	→(10,8,6)→(12,8,4)→(8,8,8)	3
(12,11,1)	→(12,10,2)→(12,8,4)→(8,8,8)	3
(12,7,5)	→(12,10,2)→(12,8,4)→(8,8,8)	3
(11,10,3)	→(10,8,6)→(12,8,4)→(8,8,8)	3
(11,8,5)	→(10,8,6)→(12,8,4)→(8,8,8)	3

數對	形成穩定狀態的過程	次數
(11,7,6)	→(14,6,4)→(12,8,4)→(8,8,8)	3
(10,10,4)	→(10,8,6)→(12,8,4)→(8,8,8)	3
(9,8,7)	→(14,8,2)→(12,8,4)→(8,8,8)	3
(16,4,4)	→(12,8,4) →(8,8,8)	2
(14,8,2)	→(12,8,2)→(8,8,8)	2
(14,6,4)	→(12,8,4)→(8,8,8)	2
(12,10,2)	→(12,8,4)→(8,8,8)	2
(10,8,6)	→(12,8,4)→(8,8,8)	2
(12,8,4)	→(8,8,8)	1
(8,8,8)		0
(18,3,3)		---
(15,6,3)		---
(12,6,6)		---
(12,9,3)		---
(9,9,6)		---

4、綜合討論：

我們列出數量和為 6、12、18、24 的倍數時，能否形成穩定狀態的情形歸納如下：

和	6	12	18	24
能否形成穩定狀態	所有數對 皆可形成	無法形成的數對 (6,3,3) 其餘皆可形成	可以形成的數對 (12,3,3) (9,6,3) (6,6,6) 其餘皆無法形成	無法形成的數對 (18,3,3) (15,6,3) (12,6,6) (12,9,3) (9,9,6) 其餘皆可形成

探究原因之前，需先探討兩項性質：

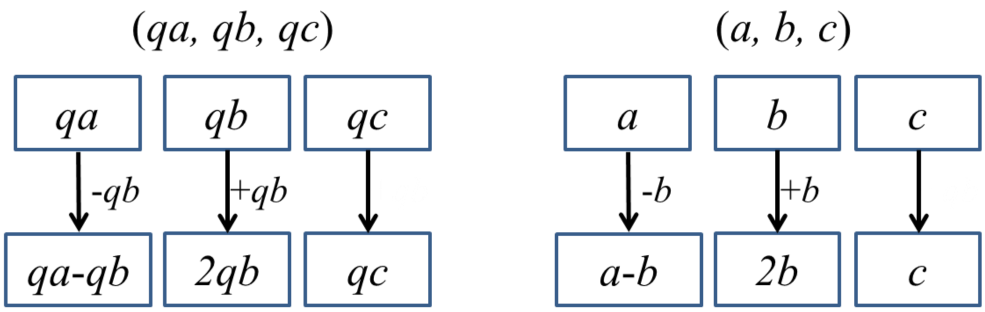
(a) 三堆數量的公因數與數量總和的關係：

若 x, y, z 的最大公因數為 q，三數可假設為 qa, qb, qc，三數和= $q(a+b+c)$，故可得 q 為三數和的因數，歸納如下：

> 性質 1：
> 若 $x+y+z=p$ ，x, y, z 的最大公因數為 q，則 q 為 p 的因數。

(b) 數對的化簡：

由下圖可看出數對(qa, qb, qc)的移動過程與(a, b, c) 的移動過程相對應。



我們得到：

性質 2：
數對(qa, qb, qc)的移動過程與(a, b, c) 的移動過程相對應。

當 $x+y+z=12=3\times2^2$ 時，令 $gcd(x, y, z)=q$，討論如下：

- 根據性質 1，q=1,2,3,4,6,12，x, y, z 三數可假設為 qa, qb, qc，
  根據性質 2，(x, y, z)的移動過程與(a, b, c)的移動過程相對應，
  我們藉由(a, b, c)是否能形成穩定狀態來判斷(x, y, z)是否能形成穩定狀態。
- 其中，當 q=1 時，x, y, z 三數之中必有 2 個奇數、1 個偶數，
  而因最後的穩定狀態為(4,4,4)，在過程中，必會形成 3 個偶數的狀態，
  亦即(x, y, z) → (2a, 2b, 2c), a+b+c=6，
  因任意(a, b, c)皆可形成穩定狀態，
  得：當 q=1，任意(x, y, z) 皆可形成穩定狀態。
  例如：2 奇 1 偶的數對(9,2,1) →3 偶的數對(8,2,2)

q	(x, y, z)	關係式	說明	穩定狀態
1	(2a, 2b, 2c)	a+b+c=6	任意(a, b, c)**皆可**形成穩定狀態	皆可
2				
3	(3a, 3b, 3c)	a+b+c=4	任意(a, b, c)**無法**形成穩定狀態	皆否
4	(4a, 4b, 4c)	a+b+c=3	(a, b, c)=(1,1,1)	(4,4,4)
6	(6a, 6b, 6c)	a+b+c=2	a,b,c 無正整數解	皆否
12	(12a, 12b, 12c)	a+b+c=1		

當 $x+y+z=18=9\times2^1$ 時，令 $gcd(x, y, z)=q$，仿照前述方式討論如下：

q	(x, y, z)	關係式	說明	穩定狀態
1	$(2a, 2b, 2c)$	$a+b+c=9$	任意(a, b, c)**無法**形成穩定狀態	皆否
2				
3	$(3a, 3b, 3c)$	$a+b+c=6$	任意(a, b, c)**皆可**形成穩定狀態	皆可
9	$(9a, 9b, 9c)$	$a+b+c=2$	a,b,c 無正整數解	皆否
18	$(18a, 18b, 18c)$	$a+b+c=1$		

當 $x+y+z=24=3\times2^3$ 時，令 $gcd(x, y, z)=q$，仿照前述方式討論如下：

- 當 $q=1$ 時，x, y, z 三數之中必有 2 個奇數、1 個偶數，
  形成穩定狀態的過程中，必會形成 3 個偶數的狀態，即$(x, y, z)\rightarrow(2l, 2m, 2n)$，
  由性質 2，問題轉變為：考慮(l, m, n) , $l+m+n=12$ 是否能形成穩定狀態？
  若 l, m, n 三數必為 3 個偶數或 2 個奇數、1 個偶數，
  同理，三數在形成穩定狀態過程中，必形成 3 偶數，即$(l, m, n)\rightarrow(2a, 2b, 2c)$
  得到：$(x, y, z)\rightarrow(2l, 2m, 2n)\rightarrow(4a, 4b, 4c)$。即經多次移動後三數的公因數為 4。
- 同理，當 $q=2$ 時，$(x, y, z)\rightarrow(2l, 2m, 2n)\rightarrow(4a, 4b, 4c)$。經多次移動後三數的公因數為 4。

q	(x, y, z)	關係式	說明	穩定狀態
1	$(4a, 4b, 4c)$	$a+b+c=6$	任意(a, b, c)**皆可**形成穩定狀態	皆可
2				
3	$(3a, 3b, 3c)$	$a+b+c=8$	任意(a, b, c)**無法**形成穩定狀態	皆否
4	$(4a, 4b, 4c)$	$a+b+c=6$	任意(a, b, c)**皆可**形成穩定狀態	皆可
6	$(6a, 6b, 6c)$	$a+b+c=4$	任意(a, b, c)**無法**形成穩定狀態	皆否
8	$(8a, 8b, 8c)$	$a+b+c=3$	$(a, b, c)=(1,1,1)$	(8,8,8)
12	$(12a, 12b, 12c)$	$a+b+c=2$	a,b,c 無正整數解	皆否
24	$(24a, 24b, 24c)$	$a+b+c=1$		

上表中，我們排除 a,b,c 無正整數解的狀況，重新排序如下：

q	(x, y, z)	關係式	說明	穩定狀態
1	$(4a, 4b, 4c)$	$a+b+c=6$	任意(a, b, c)**皆可**形成穩定狀態	皆可
2				
4				
8	$(8a, 8b, 8c)$	$a+b+c=3$	$(a, b, c)=(1,1,1)$	(8,8,8)
3	$(3a, 3b, 3c)$	$a+b+c=8$	任意(a, b, c)**無法**形成穩定狀態	皆否
6				

5、推論：

當 $x+y+z=6\times2^k$ 時，仿照前述方式討論如下：

- 當 q=1 時，x, y, z 三數之中必有 2 個奇數、1 個偶數，
  形成穩定狀態的過程中，必形成 3 個偶數的狀態，即$(x, y, z)\rightarrow(2l_1, 2m_1, 2n_1)$，
  問題轉變為：考慮(l_1, m_1, n_1) , $l_1+m_1+n_1=6\times2^{k-1}$能否形成穩定狀態？
  同理，(l_1, m_1, n_1) 必為 3 個偶數或 2 個奇數、1 個偶數，
  在形成穩定狀態過程中，必形成 3 偶數，即$(l_1, m_1, n_1)\rightarrow(2l_2, 2m_2, 2n_2)$
  同理，$(l_2, m_2, n_2)\rightarrow(2l_3, 2m_3, 2n_3)$；$(l_3, m_3, n_3)\rightarrow(2l_4, 2m_4, 2n_4)$；…
  得到：$(x, y, z)\rightarrow(2l_1, 2m_1, 2n_1)\rightarrow(4l_2, 4m_2, 4n_2)\rightarrow(8l_3, 8m_3, 8n_3)\rightarrow\ldots$
  因此，當 q=1,2,4,…,2^k 時，在形成穩定狀態的過程中，q 會變成 2^{k+1}，
  亦即$(x, y, z)\rightarrow\ldots\rightarrow(2^k a,2^k b,2^k c)$, $a+b+c=6$ 任意(a, b, c)**皆可**形成穩定狀態。
- 當 q=3,3×2, 3×4,…, $3\times2^{k+1}$ 時，
  $(x, y, z)\rightarrow(3a, 3b, 3c)$, $a+b+c=2^k$ 不是 6 的倍數，任意(a, b, c)**無法**形成穩定狀態。

q	(x, y, z)	關係式	說明	穩定狀態
1	$(2^k a,2^k b,2^k c)$	$a+b+c=6$	任意(a, b, c) **皆可**形成穩定狀態	皆可
2				
…				
2^k				
2^{k+1}	$(2^{k+1}a,2^{k+1}b,2^{k+1}c)$	$a+b+c=3$	(a, b, c)=(1,1,1)	$(2^{k+1},2^{k+1},2^{k+1})$
3×1	$(3a,3b,3c)$	$a+b+c=2^k$	任意(a, b, c) **無法**形成穩定狀態	皆否
3×2				
…				
3×2^k				
$3\times2^{k+1}$				

當 $x+y+z=3\times p\times2^k$, $p\neq3$ 為奇質數時，仿照前述方式討論如下：

q	(x, y, z)	關係式	說明	穩定狀態
$p\times2^r$ r=0~k	$(2^k ap,2^k bp,2^k cp)$	$a+b+c=3$	任意(a, b, c) **皆可**形成穩定狀態	皆可
2^r r=0~k	$(2^k a,2^k b,2^k c)$	$a+b+c=3p$	任意(a, b, c) **無法**形成穩定狀態	皆否
3×2^r r=0~k	$(3a, 3b, 3c)$	$a+b+c=p\times2^k$		
$3p\times2^r$ r=0~k	$(3a, 3b, 3c)$	$a+b+c=2^k$		

當 $x+y+z=3\times p\times 2^k$, p=3 時，仿照前述方式討論如下：

q	(x, y, z)	關係式	說明	穩定狀態
3×2^r r =0~k	$(2^k ap, 2^k bp, 2^k cp)$	$a+b+c=3$	任意(a, b, c) **皆可**形成穩定狀態	皆可
2^r r =0~k	$(2^k a, 2^k b, 2^k c)$	$a+b+c=9$	任意(a, b, c) **無法**形成穩定狀態	皆否
$3^2\times 2^r$ r =0~k	$(9a, 9b, 9c)$	$a+b+c=2^k$		

當 $x+y+z=3\times pt\times 2^k$, p 與 t 為奇質數時，仿照前述方式討論如下：

q	(x, y, z)	關係式	說明	穩定狀態
$pt\times 2^r$ r =0~k	$(2^k apt, 2^k bpt, 2^k cpt)$	$a+b+c=3$	任意(a, b, c) **皆可**形成穩定狀態	皆可
2^r r =0~k	$(2^k a, 2^k b, 2^k c)$	$a+b+c=3pt$	任意(a, b, c) **無法**形成穩定狀態	皆否
$p\times 2^r$ r =0~k	$(2^k ap, 2^k bp, 2^k cp)$	$a+b+c=3t$		
$t\times 2^r$ r =0~k	$(2^k at, 2^k bt, 2^k ct)$	$a+b+c=3p$		

當 $x+y+z=3\times p\times 2^k$，$p=p_1\times p_2\times\ldots\times p_s$，$p_1\sim p_s$ 為奇質數時，仿照前述方式討論，得到僅有當 $q=p\times 2^r$, r =0~k 時可以形成穩定狀態。

q	(x, y, z)	關係式	說明	穩定狀態
$p\times 2^r$ r =0~k	$(2^k ap, 2^k bp, 2^k cp)$	$a+b+c=3$	任意(a, b, c) **皆可**形成穩定狀態	皆可

經由上述討論，我們得到：

> 定理 1：
>
> 當 $x+y+z=3p\times 2^k$, p 為奇數，
>
> (x, y, z) 形成穩定狀態的充要條件為 $gcd\,(x, y, z)=p\times 2^r$, $r\leqq k$。

第二部分：形成穩定狀態的次數

以下將利用觀察二進位的變化，求得數對形成穩定狀態的次數，而因為定理 1 及性質 2，以下只需討論 $x+y+z=3\times 2^k$ ， $\gcd(x,y,z)=2^t, t\leqq k$ 的狀況。

首先，我們觀察數對(x, y, z)二進位表法 $\begin{cases} x=a_{k+1}\times 2^{k+1}+\ldots+a_1\times 2^1+a_0\times 2^0 \\ y=b_{k+1}\times 2^{k+1}+\ldots+b_1\times 2^1+b_0\times 2^0 \\ z=c_{k+1}\times 2^{k+1}+\ldots+c_1\times 2^1+c_0\times 2^0 \end{cases}$ 的特徵：

- $x+y+z=3\times 2^k=(11\underbrace{000000}_{k個0})_2$ 。
- 可以找到一個 m，使得 $\begin{cases} a_i=b_i=c_i=0, 0<i<m \\ a_m+b_m+c_m=2 \end{cases}$

不失一般性，假設 $a_m=b_m=1$,$c_m=0$，以表格表示如下：

	2^{k+1}	2^k	2^{k-1}	2^{k-2}	……	2^{m+1}	2^m	2^{m-1}	…	2^0
x		0 或 1					1	0	…	0
y		0 或 1					1	0	…	0
z		0 或 1					0	0	…	0
$x+y+z$	1	1	0	0	0	0	0	0	…	0

形成穩定狀態的過程為(x, y, z) → … → $(2^k, 2^k, 2^k)$，

最後三堆數量皆為 2^k ，以二進位表法為 $(1\underbrace{000000}_{k個0})_2$ ，

移動的過程是要將三數二進表法中，依序讓 2^0、2^1、⋯、2^{k-1} 的位值 a_i、b_i、c_i 變為 0，

在上面的表格中，首要的移動要使得 a_m 及 b_m 變為 0，因此，我們得到移動的規則如下：

> 定理 2：移動規則
>
> 以二進位表法來表示 x, y, z 三數，令 $x=\sum_{i=0}^{k+1}a_i\times 2^i$, $y=\sum_{i=0}^{k+1}b_i\times 2^i$, $z=\sum_{i=0}^{k+1}c_i\times 2^i$,
>
> 若(1) $a_i=b_i=c_i=0$, $i<m$ (2) $c_m=0$, $a_m=b_m=1$ (3) $x>y$， 則將(x, y, z) 移動為$(x-y, 2y, z)$.

我們實際做出所有數對(x, y, z), $x+y+z=24$ 的移動過程，從中得到形成穩定狀態所需移動次數之公式，分成 6 個型態討論如下：

型態 1：$(x, 2^r, 2^s)$：

當有兩個數是 2^r 及 2^s 時，形成穩定狀態的過程為：

$2^r \to 2^{r+1} \to 2^{r+2} \to \ldots \to 2^k$ ，二進位表法 $1\underbrace{0\ldots0}_{r\text{ 個}0} \to 1\underbrace{0\ldots0}_{k\text{ 個}0}$ ，需要 $k-r$ 次；

$2^s \to 2^{s+1} \to 2^{s+2} \to \ldots \to 2^k$ ，二進位表法 $1\underbrace{0\ldots0}_{s\text{ 個}0} \to 1\underbrace{0\ldots0}_{k\text{ 個}0}$ ，需要 $k-s$ 次；

	2^{k+1}	2^k	……	2^r	…	2^s	…	2^0
x		0 或 1			…	1	…	0
y		0	0	1	…	0	…	0
z		0	0	0	…	1	…	0
$x+y+z$	1	1	0	0	0	0	…	0

合計需要 $2k-r-s$ 次。歸納如定理 3-1(a)。

型態 2：$(x, 2^r+2^s, 2^s)$

以表格表示數對$(x, 2^r+2^s, 2^s)$如下

	2^{k+1}	2^k	……	2^r	…	2^{s+1}	2^s	…	2^0
x		0 或 1			…	1	0	…	0
y		0	0	1	…	0	1	…	0
z		0	0	0	…	0	1	…	0
$x+y+z$	1	1	0	0	0	0	0	…	0

經過 1 次移動變成$(x, 2^r, 2^{s+1})$如下表：

	2^{k+1}	2^k	……	2^r	…	2^{s+1}	2^s	…	2^0
x		0 或 1			…	1	0	…	0
y		0	0	1	…	0	0	…	0
z		0	0	0	…	1	0	…	0
$x+y+z$	1	1	0	0	0	0	0	…	0

由定理 3(a)，再經 $2k-r-(s+1)$ 次移動即為穩定狀態。

因此，形如$(x, 2^r+2^s, 2^s)$的數對合計經過 $2k-r-s$ 次移動即為穩定狀態。

歸納如定理 3-1(b)。

型態 3：$(x, 2^r+x, 2^s)$，x 為奇數

若 x 為奇數，則 $x, 2^r+x$ 為 2 奇數，根據移動規則，先做兩個奇數間的移動，而若此兩個奇數相差 2^r，則可得到此型態的移動次數如下：

$(x, x+2^r, 2^s)$經過 1 次移動變成$(2x, 2^r, 2^s)$，

由定理 $3(a)$，再經 $2k-r-s$ 次移動即為穩定狀態，

因此，形如$(x, x+2^r, 2^s)$的數對合計經過$2k-r-s+1$次移動即為穩定狀態。

歸納如定理 3-1(c)。

定理 3-1：移動次數型態 1

$x+y+z=3\times 2^k$，$s<r<k$

(a) 若$(x, y, z) = (x, 2^r, 2^s)$，則移動次數為 $2k-r-s$；

(b) 若$(x, y, z) = (x, 2^r+2^s, 2^s)$，則移動次數為 $2k-r-s$；

(c) 若$(x, y, z) = (x, 2^r+x, 2^s)$，$x$ 為奇數，則移動次數為 $2k-r-s+1$。

型態 4：$(x, y, 2^k)$

有一堆已達穩定狀態，僅需做兩堆間的移動，

其形成穩定狀態的次數等於(x, y)→$(2^k, 2^k)$的次數，

若 $\gcd(x, y)=2^r$，則形成穩定狀態需 $k-r$ 次移動。歸納如定理 3-2(a)。

	2^{k+1}	2^k	…	2^r	…	2^0
x	0	0	0 或 1	1	0	0
y	0	0	0 或 1	1	0	0
z	0	1	0 或 1	0	0	0
$x+y+z$	1	1	0	0	0	0

型態 5：$(x, y, 2^k+y)$，y 為奇數

若 y 為奇數，則 $y, 2^k+y$ 為 2 奇數，根據移動規則，先做兩個奇數間的移動，而若此兩個奇數相差 2^k，則可得到此型態的移動次數如下：

$(x, y, 2^k+y)$經過 1 次移動變成$(x, 2y, 2^k)$，

一堆已達穩定狀態，僅需將$(x,2y)$移動為$(2^k, 2^k)$, 若 $gcd(x,2y)=2^t$, 需 $k-t$ 次移動。

因此，形如$(x, y, 2^k+y)$，y 為奇數的數對合計經過$k-t+1$次移動即為穩定狀態。

歸納如定理 3-2(b)。

型態 6：$(x,y,2^{k+1}),\ \gcd(x,y)=2^r$

若數對的情形為$(x,y,2^{k+1})$時，$x+y=3\times2^k-2^{k+1}=3\times2^k-2\times2^k=2^k$，所以先讓$(x,y)$達到穩定狀態$(2^{k-1},2^{k-1})$，則$(2^{k-1},2^{k-1},2^{k+1})$再經 2 次移動也會達到穩定狀態。

若$(x,y,2^{k+1}),\ \gcd(x,y)=2^r$，其二進位表法如下：

	2^{k+1}	2^k	2^{k-1}	…	2^r	…	2^0
x	0	0	0 或 1	0 或 1	1	0	0
y	0	0	0 或 1	0 或 1	1	0	0
z	1	0	0	0	0	0	0
$x+y+z$	1	1	0	0	0	0	0

經過$(k-1-r)$次移動變成下表：

	2^{k+1}	2^k	2^{k-1}	…	2^r	…	2^0
x	0	0	1	0	0	0	0
y	0	0	1	0	0	0	0
z	1	0	0	0	0	0	0
$x+y+z$	1	1	0	0	0	0	0

再經過 2 次移動$(2^{k-1},2^{k-1},2^{k+1})\to(2^{k-1},2^k,2^k+2^{k-1})\to(2^k,2^k,2^k)$得到穩定狀態。

因此，形如$(x,y,2^{k+1}),\ \gcd(x,y)=2^r$的數對合計經過$k-r+1$次移動即為穩定狀態。

歸納如定理 3-2(c)。

定理 3-2：移動次數型態 2

$x+y+z=3\times2^k$，$\gcd(x,y)=2^r,\ \gcd(x,2y)=2^t,$

(a) 若$(x, y, z) = (x, y, 2^k)$，則形成穩定狀態的移動次數為$k-r$；

(b) 若$(x, y, z) = (x, y, 2^k+y)$, y 為奇數，則移動次數為$k-t+1$；

(c) 若$(x, y, z) = (x, y, 2^{k+1})$，則移動次數為$k-r+1$。

我們利用二進位表法歸納了上述 6 個型態的移動次數，進一步嘗試得到共通性（不須判斷數量的型態）、快速、具體的移動方法，根據定理 2，我們得到以下兩個操作方法：

- 操作方法 1：(即定理 2 之中，二進位表法 $a_0+b_0+c_0=2$, $m=0$ 的情況)
  三數為 2 個奇數、1 個偶數時，必先做兩堆奇數間的移動。

  例如：將(21,2,1) 移動為 (20,2,2)，二進位表法為 $\begin{cases}10101\\00010\\00001\end{cases} \rightarrow \begin{cases}10100\\00010\\00010\end{cases}$。

- 操作方法 2：(即定理 2 之中，二進位表法之 $m > 0$ 的情況)
  三數皆為偶數時，則利用性質 2，將三數除以最大公因數，得 2 個奇數、1 個偶數，再根據操作方法 1，做兩堆奇數間的移動。

  例如：將 (18,4,2)除以最大公因數 2，得到(9,2,1)，再移動為(8,2,2) ，

  二進位表法為 $\begin{cases}10010\\00100\\00010\end{cases} \xrightarrow{\div 2} \begin{cases}1001\\0010\\0001\end{cases} \rightarrow \begin{cases}1000\\0010\\0010\end{cases}$。

根據以上兩種操作方法，(9, 11, 28)需要四次移動才能形成穩定狀態，過程如下：

和	3×2^4		3×2^3		3×2^2		3×2^1	
數對	(9,11,28)	(18,2,28)	(9,1,14)	(8,2,14)	(4,1,7)	(4,2,6)	(2,1,3)	(2,2,2)

上述過程紀錄為：

$$\begin{array}{ccccccccc}
(9,11,28) & \rightarrow & (18,2,28) & & (4,1,7) & \rightarrow & (4,2,6) & & \\
& & \| & & \| & & \| & & \\
& & (9,1,14) & \rightarrow & (8,2,14) & & (2,1,3) & \rightarrow & (2,2,2)
\end{array}$$

更多的例子如下：

(3, 15, 54)經過 4 次移動形成穩定狀態：

$$\begin{array}{ccccccccc}
(3,15,54) & & (1,2,9) & \rightarrow & (2,2,8) & & & & \\
\| & & \| & & \| & & & & \\
(1,5,18) & \rightarrow & (2,4,18) & & (1,1,4) & \rightarrow & (2,1,3) & \rightarrow & (2,2,2)
\end{array}$$

(25, 100, 115)經過 5 次移動形成穩定狀態：

$$\begin{array}{ccccccccc}
(25,100,115) & & (5,10,9) & \rightarrow & (10,10,4) & & & & (1,3,2) \rightarrow (2,2,2) \\
\| & & \| & & \| & & & & \| \\
(5,20,23) & \rightarrow & (10,20,18) & & (5,5,2) & \rightarrow & (5,3,4) & \rightarrow & (2,6,4)
\end{array}$$

第三部分：超過三堆的推廣

當石頭的堆數超過三堆時，我們探討數對$(x_1,\ldots, x_n)$形成穩定狀態的充要條件。

首先，若可以形成穩定狀態，則數量總和$\sum_{i=1}^{n} x_i$ 為 n 的倍數，另外，除非一開始即為穩定狀態，只要經過一次有意義的移動，至少有兩堆的數量變為偶數，亦即穩定狀態時每堆的數量為偶數，我們得到數量總和$\sum_{i=1}^{n} x_i$ 為偶數，因此，初步得到$\sum_{i=1}^{n} x_i = np\times 2^k$, p 為奇數。

根據性質 1, $gcd(x_1,\ldots, x_n)$為$\sum_{i=1}^{n} x_i = np\times 2^k$的因數，根據前節相似的探討過程，得到：

> **定理 4：多堆均分問題動態穩定的充要條件**
>
> 當$\sum_{i=1}^{n} x_i = np\times 2^k$, p 為奇數，
>
> 則$(x_1,\ldots, x_n)$可形成穩定狀態的充要條件為 $gcd(x_1,\ldots, x_n)= p\times 2^r$, $r\leqq k$。

例 1：給定四堆石頭，數對(3,6,12,75)能否形成穩定狀態？

解：因 gcd(3,6,12,75)=3 且 $3+6+12+75=96=4\times3\times2^3$，
由定理 4，得可形成穩定狀態。

例 2：給定五堆石頭，數對(1,3,11,20,85)能否形成穩定狀態？

解：因 gcd(1,3,11,20,85)=1 且 $1+3+11+20+85=120=5\times3\times2^3$，
由定理 4 得無法形成穩定狀態。

例 3：給定五堆石頭，數對(1,7,12,18,42)能否形成穩定狀態？

解：因 gcd(1,7,12,18,42)=1 且 $1+7+12+18+42=80=5\times1\times2^4$，
由定理 4 得可形成穩定狀態。

根據性質 2 及定理 4, 僅需討論$\sum_{i=1}^{n} x_i = n\times 2^k$ 且 $gcd(x_1,\ldots, x_n)=1$ 時的數對移動次數。

> **定理 5：多堆均分問題的移動規則**
>
> 當$\sum_{i=1}^{n} x_i = n\times 2^k$ 且 $gcd(x_1,\ldots, x_n)=1$，以二進位制表示 $x_i = \sum_{j=1}^{k+1} a_{i,j}\times 2^j$
>
> 若(1) $a_{i,j}=0$, $i=1,\ldots, n$, $j < m$ (2) $a_{1,m}=a_{2,m}=1$, $a_{i,m}=0$, $3\leqq i\leqq k+1$ (3) $x_1 > x_2$，
>
> 則將$(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ 移動為 $(x_1-x_2, 2x_2, x_3, \ldots, x_n)$.

伍、研究結果：

本文探究是否能將三堆石頭經過若干次移動形成數量皆相等的狀態，稱之為「穩定狀態」。用數對(x, y, z)來表示三堆石頭分別有 x, y, z 顆的情況，而因為遊戲進行中，石頭的總數不變，故以數量總合進行分類觀察。

首先，我們發現總合需為 2、3 的倍數，即為 6 的倍數才能形成穩定狀態，在探究數量總合為 6、12、24 的情況後，藉由兩個性質：

性質 1：若 $x+y+z=p$，x, y, z 的最大公因數為 q，則 q 為 p 的因數。

性質 2：數對(qa, qb, qc)的移動過程與(a, b, c) 的移動過程相對應。

進而得到：

定理 1：當 $x+y+z=3p\times 2^k, p$ 為奇數，

$(x, y\ z)$形成穩定狀態的充要條件為 $gcd(x,y,z)=p\times 2^r, r\leqq k$。

以二進位表示 x, y, z，得到移動規則為：

定理 2：三堆均分問題的移動規則

若 $x=\sum_{i=1}^{n} a_i\times 2^i$, $y=\sum_{i=1}^{n} b_i\times 2^i$, $z=\sum_{i=1}^{n} c_i\times 2^i$,

且滿足(1) $a_i=b_i=c_i=0, i<m$ (2) $c_m=0, a_m=b_m=1$ (3) $x>y$，

則將(x, y, z) 移動為 $(x-y, 2y, z)$.

進而得到：

定理 3-1：三堆移動次數型態 1

$x+y+z=3\times 2^k$，$s<r<k,$

(a) 若$(x, y, z) = (x, 2^r, 2^s)$，則移動次數為 $2k-r-s$；

(b) 若$(x, y, z) = (x, 2^r+2^s, 2^s)$，則移動次數為 $2k-r-s$；

(c) 若$(x, y, z) = (x, 2^r+x, 2^s)$，$x$ 為奇數，則移動次數為 $2k-r-s+1$。

定理 3-2：三堆移動次數型態 2

$x+y+z=3\times 2^k$， $\gcd(x, y)=2^r,\ \gcd(x, 2y)=2^t,$

(a) 若$(x, y, z) = (x, y, 2^k)$，則形成穩定狀態的移動次數為 $k-r$；

(b) 若$(x, y, z) = (x, y, 2^k+y)$, y 為奇數，則移動次數為 $k-t+1$；

(c) 若$(x, y, z) = (x, y, 2^{k+1})$，則移動次數為 $k-r+1$。

當石頭堆數更多時，我們探討形成穩定狀態的充要條件與移動方法，得到以下結果：

定理 4：多堆均分問題動態穩定的充要條件

當 $\sum_{i=1}^{n} x_i = np \times 2^k$, p 為奇數，

則$(x_1,\ldots, x_n)$可形成穩定狀態的充要條件為 $gcd(x_1,\ldots, x_n)= p\times 2^r$, $r \leqq k$。

定理 5：多堆均分問題的移動規則

當 $\sum_{i=1}^{n} x_i = n \times 2^k$ 且 $gcd(x_1,\ldots, x_n)=1$，以二進位制表示 $x_i = \sum_{j=1}^{t} a_{i,j} \times 2^j$,

若(1) $a_{i,j}=0$, $i=1,\ldots, n$, $j < m$ (2) $a_{1,m}=a_{2,m}=1$, $a_{i,m}=0$, $3 \leqq i \leqq k+1$ (3) $x_1 > x_2$，

則將$(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ 移動為$(x_1 - x_2, 2x_2, x_3, \ldots, x_n)$.

陸、未來展望：

藉由本實驗所得到的結果，未來可以討論更多堆石頭時，能形成穩定狀態之數對的次數關係式。

附錄：$x+y+z=24$ 時，數對(x,y,z)形成穩定狀態的二進位過程

$(x,y,z)=(20,3,1)$時，$(20)_{10}=(10100)_2$，$(3)_{10}=(00011)_2$，$(1)_{10}=(00001)_2$

$$\begin{cases}10100\\00011\\00001\end{cases}\to\begin{cases}10100\\00010\\00010\end{cases}\to\begin{cases}10010\\00100\\00010\end{cases}\to\begin{cases}10000\\00100\\00100\end{cases}\to\begin{cases}01100\\01000\\00100\end{cases}\to\begin{cases}01000\\01000\\01000\end{cases}$$

$(x,y,z)=(14,5,5)$時，$(14)_{10}=(1110)_2$，$(5)_{10}=(0101)_2$，$(5)_{10}=(0101)_2$

$$\begin{cases}01110\\00101\\00101\end{cases}\to\begin{cases}01001\\01010\\00101\end{cases}\to\begin{cases}00100\\01010\\01010\end{cases}\to\begin{cases}01000\\00110\\01010\end{cases}\to\begin{cases}01000\\01100\\00100\end{cases}\to\begin{cases}01000\\01000\\01000\end{cases}$$

$(x,y,z)=(11,11,2)$時，$(11)_{10}=(1011)_2$，$(11)_{10}=(1011)_2$，$(2)_{10}=(0010)_2$

$$\begin{cases}01011\\01011\\00010\end{cases}\to\begin{cases}01011\\01001\\00100\end{cases}\to\begin{cases}00010\\10010\\00100\end{cases}\to\begin{cases}00100\\10000\\00100\end{cases}\to\begin{cases}01000\\01100\\00100\end{cases}\to\begin{cases}01000\\01000\\01000\end{cases}$$

$(x,y,z)=(18,5,1)$時，$(18)_{10}=(10010)_2$，$(5)_{10}=(00101)_2$，$(1)_{10}=(00001)_2$

$$\begin{cases}10010\\00101\\00001\end{cases}\to\begin{cases}10010\\00100\\00010\end{cases}\to\begin{cases}10000\\00100\\00100\end{cases}\to\begin{cases}01100\\01000\\00100\end{cases}\to\begin{cases}01000\\01000\\01000\end{cases}$$

$(x,y,z)=(19,3,2)$時，$(19)_{10}=(10011)_2$，$(3)_{10}=(00011)_2$，$(2)_{10}=(00010)_2$

$$\begin{cases}10011\\00011\\00010\end{cases}\to\begin{cases}10000\\00110\\00010\end{cases}\to\begin{cases}10000\\00100\\00100\end{cases}\to\begin{cases}01100\\01000\\00100\end{cases}\to\begin{cases}01000\\01000\\01000\end{cases}$$

$(x,y,z)=(17,6,1)$時，$(17)_{10}=(10001)_2$，$(6)_{10}=(00110)_2$，$(1)_{10}=(00001)_2$

$$\begin{cases}10001\\00110\\00001\end{cases}\to\begin{cases}10000\\00110\\00010\end{cases}\to\begin{cases}10000\\00100\\00100\end{cases}\to\begin{cases}01100\\01000\\00100\end{cases}\to\begin{cases}01000\\01000\\01000\end{cases}$$

$(x,y,z)=(16,5,3)$時，$(16)_{10}=(10000)_2$，$(5)_{10}=(00101)_2$，$(3)_{10}=(00011)_2$

$$\begin{cases}10000\\00101\\00011\end{cases}\to\begin{cases}10000\\00010\\00110\end{cases}\to\begin{cases}10000\\00100\\00100\end{cases}\to\begin{cases}01100\\01000\\00100\end{cases}\to\begin{cases}01000\\01000\\01000\end{cases}$$

$(x,y,z)=(15,5,4)$時，$(15)_{10}=(1111)_2$，$(5)_{10}=(0101)_2$，$(4)_{10}=(0100)_2$

$$\begin{cases}1111\\0101\\0100\end{cases}\to\begin{cases}1010\\1010\\0100\end{cases}\to\begin{cases}1010\\0110\\1000\end{cases}\to\begin{cases}0100\\1100\\1000\end{cases}\to\begin{cases}1000\\1000\\1000\end{cases}$$

$(x,y,z)=(13,9,2)$時，$(13)_{10}=(1101)_2$，$(9)_{10}=(1001)_2$，$(2)_{10}=(0010)_2$

$$\begin{cases}1101\\1001\\0010\end{cases}\to\begin{cases}00100\\10010\\00010\end{cases}\to\begin{cases}00100\\10000\\00100\end{cases}\to\begin{cases}01000\\01100\\00100\end{cases}\to\begin{cases}01000\\01000\\01000\end{cases}$$

$(x,y,z)=(11,9,4)$時，$(11)_{10}=(1011)_2$，$(9)_{10}=(1001)_2$，$(4)_{10}=(0100)_2$

$$\begin{cases}1011\\1001\\0100\end{cases}\rightarrow\begin{cases}00010\\10010\\00100\end{cases}\rightarrow\begin{cases}00100\\10000\\00100\end{cases}\rightarrow\begin{cases}01000\\01100\\00100\end{cases}\rightarrow\begin{cases}01000\\01000\\01000\end{cases}$$

$(x,y,z)=(10,9,5)$時，$(10)_{10}=(1010)_2$，$(9)_{10}=(1001)_2$，$(5)_{10}=(0101)_2$

$$\begin{cases}1010\\1001\\0101\end{cases}\rightarrow\begin{cases}1010\\0100\\1010\end{cases}\rightarrow\begin{cases}1010\\1000\\0110\end{cases}\rightarrow\begin{cases}0100\\1000\\1100\end{cases}\rightarrow\begin{cases}1000\\1000\\1000\end{cases}$$

$(x,y,z)=(10,7,7)$時，$(10)_{10}=(1010)_2$，$(7)_{10}=(0111)_2$，$(7)_{10}=(0111)_2$

$$\begin{cases}1010\\0111\\0111\end{cases}\rightarrow\begin{cases}0011\\1110\\0111\end{cases}\rightarrow\begin{cases}0110\\1110\\0100\end{cases}\rightarrow\begin{cases}1100\\1000\\0100\end{cases}\rightarrow\begin{cases}1000\\1000\\1000\end{cases}$$

$(x,y,z)=(16,6,2)$時，$(16)_{10}=(10000)_2$，$(6)_{10}=(00110)_2$，$(2)_{10}=(00010)_2$

$$\begin{cases}10000\\00110\\00010\end{cases}\rightarrow\begin{cases}10000\\00100\\00100\end{cases}\rightarrow\begin{cases}01100\\01000\\00100\end{cases}\rightarrow\begin{cases}01000\\01000\\01000\end{cases}$$

$(x,y,z)=(10,10,4)$時，$(10)_{10}=(1010)_2$，$(10)_{10}=(1010)_2$，$(4)_{10}=(0100)_2$

$$\begin{cases}1010\\1010\\0100\end{cases}\rightarrow\begin{cases}1010\\0110\\1000\end{cases}\rightarrow\begin{cases}0100\\1100\\1000\end{cases}\rightarrow\begin{cases}1000\\1000\\1000\end{cases}$$

$(x,y,z)=(15,7,2)$時，$(15)_{10}=(1111)_2$，$(7)_{10}=(0111)_2$，$(2)_{10}=(0010)_2$

$$\begin{cases}1111\\0111\\0010\end{cases}\rightarrow\begin{cases}1000\\1110\\0010\end{cases}\rightarrow\begin{cases}1000\\1100\\0100\end{cases}\rightarrow\begin{cases}1000\\1000\\1000\end{cases}$$

$(x,y,z)=(17,5,2)$時，$(17)_{10}=(10001)_2$，$(5)_{10}=(00101)_2$，$(2)_{10}=(00010)_2$

$$\begin{cases}10001\\00101\\00010\end{cases}\rightarrow\begin{cases}01100\\01010\\00010\end{cases}\rightarrow\begin{cases}01100\\01000\\00100\end{cases}\rightarrow\begin{cases}01000\\01000\\01000\end{cases}$$

$(x,y,z)=(17,4,3)$時，$(17)_{10}=(10001)_2$，$(4)_{10}=(00100)_2$，$(3)_{10}=(00011)_2$

$$\begin{cases}10001\\00100\\00011\end{cases}\rightarrow\begin{cases}01110\\00100\\00110\end{cases}\rightarrow\begin{cases}01000\\00100\\01100\end{cases}\rightarrow\begin{cases}01000\\01000\\01000\end{cases}$$

$(x,y,z)=(14,9,1)$時，$(14)_{10}=(1110)_2$，$(9)_{10}=(1001)_2$，$(1)_{10}=(0001)_2$

$$\begin{cases}1110\\1001\\0001\end{cases}\rightarrow\begin{cases}1110\\1000\\0010\end{cases}\rightarrow\begin{cases}1100\\1000\\0100\end{cases}\rightarrow\begin{cases}1000\\1000\\1000\end{cases}$$

$(x,y,z)=(14,7,3)$時，$(14)_{10}=(1110)_2$，$(7)_{10}=(0111)_2$，$(3)_{10}=(0011)_2$

$$\begin{cases}1110\\0111\\0011\end{cases}\to\begin{cases}1110\\0100\\0110\end{cases}\to\begin{cases}1000\\0100\\1100\end{cases}\to\begin{cases}1000\\1000\\1000\end{cases}$$

$(x,y,z)=(13,10,1)$時，$(13)_{10}=(1101)_2$，$(10)_{10}=(1010)_2$，$(1)_{10}=(0001)_2$

$$\begin{cases}1101\\1010\\0001\end{cases}\to\begin{cases}1100\\1010\\0010\end{cases}\to\begin{cases}1100\\1000\\0100\end{cases}\to\begin{cases}1000\\1000\\1000\end{cases}$$

$(x,y,z)=(13,8,3)$時，$(13)_{10}=(1101)_2$，$(8)_{10}=(1000)_2$，$(3)_{10}=(0011)_2$

$$\begin{cases}1101\\1000\\0011\end{cases}\to\begin{cases}1010\\1000\\0110\end{cases}\to\begin{cases}0100\\1000\\1100\end{cases}\to\begin{cases}1000\\1000\\1000\end{cases}$$

$(x,y,z)=(13,7,4)$時，$(13)_{10}=(1101)_2$，$(7)_{10}=(0111)_2$，$(4)_{10}=(0100)_2$

$$\begin{cases}1101\\0111\\0100\end{cases}\to\begin{cases}0110\\1110\\0100\end{cases}\to\begin{cases}1100\\1000\\0100\end{cases}\to\begin{cases}1000\\1000\\1000\end{cases}$$

$(x,y,z)=(13,6,5)$時，$(13)_{10}=(1101)_2$，$(6)_{10}=(0110)_2$，$(5)_{10}=(0101)_2$

$$\begin{cases}1101\\0110\\0101\end{cases}\to\begin{cases}1000\\0110\\1010\end{cases}\to\begin{cases}1000\\1100\\0100\end{cases}\to\begin{cases}1000\\1000\\1000\end{cases}$$

$(x,y,z)=(12,11,1)$時，$(12)_{10}=(1100)_2$，$(11)_{10}=(1011)_2$，$(1)_{10}=(0001)_2$

$$\begin{cases}1100\\1011\\0001\end{cases}\to\begin{cases}1100\\1010\\0010\end{cases}\to\begin{cases}1100\\1000\\0100\end{cases}\to\begin{cases}1000\\1000\\1000\end{cases}$$

$(x,y,z)=(12,7,5)$時，$(12)_{10}=(1100)_2$，$(7)_{10}=(0111)_2$，$(5)_{10}=(0101)_2$

$$\begin{cases}1100\\0111\\0101\end{cases}\to\begin{cases}1100\\0010\\1010\end{cases}\to\begin{cases}1100\\0100\\1000\end{cases}\to\begin{cases}1000\\1000\\1000\end{cases}$$

$(x,y,z)=(11,10,3)$時，$(11)_{10}=(1011)_2$，$(10)_{10}=(1010)_2$，$(3)_{10}=(0011)_2$

$$\begin{cases}1011\\1010\\0011\end{cases}\to\begin{cases}1000\\1010\\0110\end{cases}\to\begin{cases}1000\\0100\\1100\end{cases}\to\begin{cases}1000\\1000\\1000\end{cases}$$

$(x,y,z)=(11,8,5)$時，$(11)_{10}=(1011)_2$，$(8)_{10}=(1000)_2$，$(5)_{10}=(0101)_2$

$$\begin{cases}1011\\1000\\0101\end{cases}\to\begin{cases}0110\\1000\\1010\end{cases}\to\begin{cases}1100\\1000\\0100\end{cases}\to\begin{cases}1000\\1000\\1000\end{cases}$$

$(x,y,z)=(11,7,6)$時，$(11)_{10}=(1011)_2$，$(7)_{10}=(0111)_2$，$(6)_{10}=(0110)_2$

$$\begin{cases}1011\\0111\\0110\end{cases}\rightarrow\begin{cases}0100\\1110\\0110\end{cases}\rightarrow\begin{cases}0100\\1000\\1100\end{cases}\rightarrow\begin{cases}1000\\1000\\1000\end{cases}$$

$(x,y,z)=(9,8,7)$時，$(9)_{10}=(1001)_2$，$(8)_{10}=(1000)_2$，$(7)_{10}=(0111)_2$

$$\begin{cases}1001\\1000\\0111\end{cases}\rightarrow\begin{cases}0010\\1000\\1110\end{cases}\rightarrow\begin{cases}0100\\1000\\1100\end{cases}\rightarrow\begin{cases}1000\\1000\\1000\end{cases}$$

$(x,y,z)=(14,6,4)$時，$(14)_{10}=(1110)_2$，$(6)_{10}=(0110)_2$，$(4)_{10}=(0100)_2$

$$\begin{cases}1110\\0110\\0100\end{cases}\rightarrow\begin{cases}1000\\1100\\0100\end{cases}\rightarrow\begin{cases}1000\\1000\\1000\end{cases}$$

$(x,y,z)=(12,10,2)$時，$(12)_{10}=(1100)_2$，$(10)_{10}=(1010)_2$，$(2)_{10}=(0010)_2$

$$\begin{cases}1100\\1010\\0010\end{cases}\rightarrow\begin{cases}1100\\1000\\0100\end{cases}\rightarrow\begin{cases}1000\\1000\\1000\end{cases}$$

$(x,y,z)=(10,8,6)$時，$(10)_{10}=(1010)_2$，$(8)_{10}=(1000)_2$，$(6)_{10}=(0110)_2$

$$\begin{cases}1010\\1000\\0110\end{cases}\rightarrow\begin{cases}0100\\1000\\1100\end{cases}\rightarrow\begin{cases}1000\\1000\\1000\end{cases}$$

【評語】030417

一個有趣的問題。作者們藉由小數字的分析、觀察規則，給出了一個簡化問題的方式。並由此得出了一般化的結論。分析問題的方式精簡而巧妙，十分難得。作者給出達到穩定狀態的一種移動方式，但對於這樣的方式是最佳結果說明的不夠清楚，是美中不足之處。此作品是第 55 屆全國科展國中組佳作作品『從平分問題到動態穩定』內容的延伸。應把先前作品明確的列在參考資料中。