中華民國第 56 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030416

原來她四處流竄

學校名稱：花蓮縣立自強國民中學

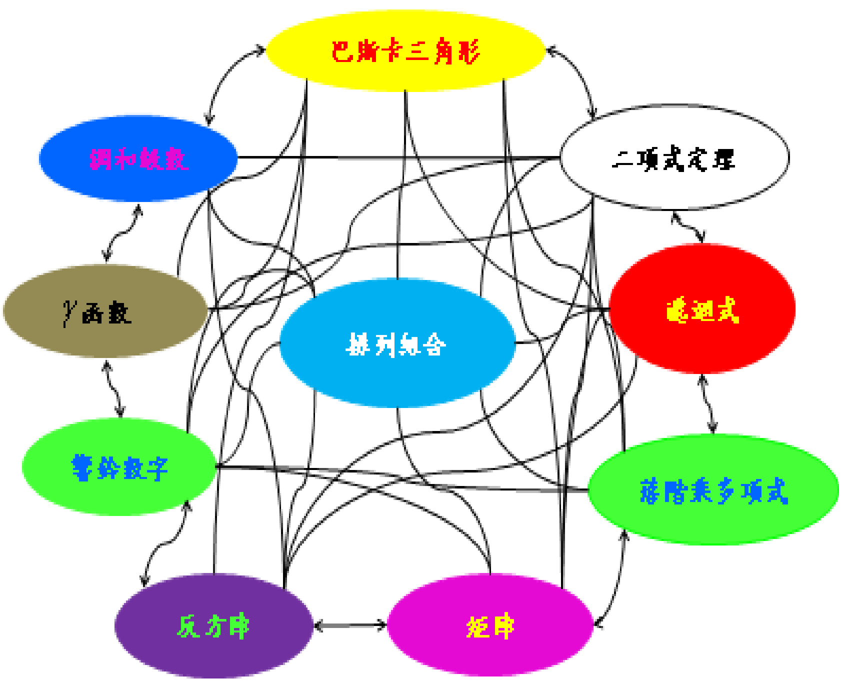
作者：	指導老師：
國一 徐敬倫 國一 楊凱諺	陳禹翔

關鍵詞：反矩陣、落階乘多項式、巴斯卡三角形

摘要

我們利用遞迴式求 n 個不同球放入 k 個相同箱子的方法數，得到形如巴斯卡三角的數值表，並發現在遞迴關係裡求得的數與落階乘多項式的係數恰好相同。接著我們將形如巴斯卡三角的數值表轉換成矩陣表示，求出其反方陣，此反方陣竟然是 Stirling numbers of the first kind；再將反方陣中的元素取絕對值得 Stirling numbers of the second kind；Stirling numbers of the second kind 表中的第 n 列第 x 行的元素，竟是將 n 個人分成 x 圈的方法數。

接著我們找出: Stirling numbers of the first kind 與調和級數的關係式、Stirling numbers of the second kind 與 P_m^n 的關係式、Stirling numbers of the second kind 與 C_m^n 的關係式及 Stirling numbers of the second kind 與 H_m^n 的關係式，並利用數學歸納法與 gamma 函數證明上述關係式；並尋找到響鈴數字與 n 個不同球放入 k 個相同箱子的方法數的連結。



壹、動機

國中課程中，有數學專題研究，指導老師提前教授我們高中排列組合的課程。課程內容仿若一個有趣且奧妙的數學遊戲，不同的類型，有不同的思維，有些可以公式解題，有些卻甚為複雜，沒有可以直接帶入求解。對於這些複雜的題型，引起我們深刻的好奇心，進而去探討有沒有較易的解法。

排列組合題目當中我們可以歸結於下述的例題，並加以整理了解其不同的解題思考方式和公式。

Ex:將 6 顆球丟入 4 個箱子的方法數:

題型 1:6 顆不同的球丟入 4 個不同的箱子,有幾種不同的放法？

解法:相當於每顆球都有 4 種不同的選擇，所以 6 顆球則有 4^6=4096 種排法。

題型 2:6 顆相同的球丟入 4 個不同的箱子,有幾種不同的放法?

解法:此題即是四個不同的箱子去選取六顆相同球的重複組合，

可由公式: $H^a_b = C^{a+b-1}_b$ 得 $H^4_6 = C^{4+6-1}_6 = C^9_6 = C^9_3 = 84$ 種排法。

題型 3:6 顆相同的球丟入 4 個相同的箱子,有幾種不同的放法?

解法:

可以依下列個數分堆:

(0,0,0,6)

(0,0,1,5)

(0,0,2,4)

(0,0,3,3)

(0,1,1,4)

(0,1,2,3)

(0,2,2,2)

(1,1,2,2)

所以共八種排法

題型 4:六顆不同的球丟入四個相同的箱子,有幾種不同的放法?

解法:我們可以先分堆,再選擇球丟入:

(0,0,0,6):不同的球丟入箱子,則還是只有 $C_6^6=1$ 種放法。

(0,0,1,5):不同的球丟入箱子,則有 $C_1^6\cdot C_5^5=6$ 種放法。

(0,0,2,4):不同的球丟入箱子,則有 $C_2^6\cdot C_4^4=15$ 種放法

(0,0,3,3):不同的球丟入箱子,則有 $C_3^6\cdot C_3^3\cdot\frac{1}{2!}=10$ 種放法。

(0,1,1,4):不同的球丟入箱子,則有 $C_1^6\cdot C_1^5\cdot C_4^4\cdot\frac{1}{2!}=15$ 種放法。

(0,1,2,3):不同的球丟入箱子,則有 $C_1^6\cdot C_2^5\cdot C_3^3=60$ 種放法。

(0,2,2,2):不同的球丟入箱子,則有 $C_2^6\cdot C_2^4\cdot C_2^2\cdot\frac{1}{3!}=15$ 種放法。

(1,1,2,2):不同的球丟入箱子,則有 $C_1^6\cdot C_1^5\cdot C_2^4\cdot C_2^2\cdot\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2!}=45$ 種放法。

所以共有 167 種放法。

由上述的例題,可知題型 3 與題型 4,即箱子相同時,沒有特定的公式可以很快的解題,所以我們進一步想去探討此種題目,是否能有特殊的方式或規律可以得到答案。

貳、研究目的

解排列組合的問題,n 人排成一列有 n!種排法、n 人中選 m 人排成一列有 P_m^n 種排法、n 人中選 m 人出來有 C_m^n 種方法、m 個相同物分給 n 人有 H_m^n 種分法……,對於較一般的題目,很多都可以符號概念,代入公式即可求解,但對於一些較複雜或特定的題目,有時要分很多種情況去討論,無法利用上述的符號概念一次到位,於是我們去搜尋與推導是否有其他的方法或公式,也可以應用在排列組合中。

參、研究設備與器材

紙、筆、電腦。

肆、研究方法與過程

一、遞迴規律

我們把 n 個球放入 x 個箱子依四種題型列表，表中運算符號定義如下：

S(n,x)=n 個不同球恰放入 x 個相同箱子的方法數(此 x 個箱子每個箱子至少放入 1 個)。

$P_x(n)$=把 n 分成 x 項的方法數(partition 數)，即把 n 個相同球恰放入 x 個相同箱子的方法數。

表(一)：將 n 個球放入 x 個箱子各種題型列表如下:

球(n 個)	箱子(x 個)	任意(無限制)	每個箱子最多裝一個球	不可有空箱
不同	不同	x^n	x(x-1)⋯(x-n+1) (C^x_nn!)	S(n,x) x!
相同	不同	H^x_n	C^x_n,x≥n	H^x_{n-x}
不同	相同	S(n,1)+S(n,2)+⋯+S(n,x)	1　x≥n 0　n>x	S(n,x) 沒有公式，但有遞迴關係式。
相同	相同	$P_1(n)+P_2(n)+\cdots P_x(n)$	1　x≥n 0　n>x	$P_x(n)$ 沒有公式。

其中有關 S(n,x)的求值法，我們討論如下：

S(0,0)=1

S(n,1)=1

S(n,n)=1

$$S(n,2)=\frac{C^n_1+C^n_2+C^n_3+\cdots+C^n_{n-1}}{2}$$

$$=\frac{(1+1)^n-2}{2}$$

$$=\frac{2^n-2}{2}$$

$$=2^{n-1}-1$$

S(n,n-1)=C^n_2

S(n,n-2)=C^n_3+3C^n_4

在求 S(n,3)、S(n,4)、S(n,5)……時會更繁複，無公式，所以我們嘗試利用遞迴觀念來尋找其規律性:

n 個不同球恰丟入 k 個箱子，我們可以用**第 n 個球**分成兩類來討論:

1.前 n-1 個球丟入前 k-1 個箱子且每箱至少一球，而第 n 個球恰丟入第 k 個箱子。

2.前 n-1 個球丟入 k 個箱子且每箱至少一球，而第 n 個球再選擇其中一個箱子丟入。由上述 1、2 可得如下遞迴式:

$$\boxed{S(n,k)=S(n-1,k-1)+k\cdot S(n-1,k)}$$

利用上述遞迴式,算出:

$S(1,1)=1$

$S(2,1)=S(1,0)+1\cdot S(1,1)$
$=0+1$
$=1$

$S(2,2)=S(1,1)+2\cdot S(1,2)$
$=1+2\cdot 0$
$=1+0$
$=1$

$S(3,1)=S(2,0)+1\cdot S(2,1)$
$=0+1\cdot 1$
$=0+1$
$=1$

$S(3,2)=S(2,1)+2\cdot S(2,2)$
$=1+2\cdot 1$
$=1+2$
$=3$

$S(3,3)=S(2,2)+3\cdot S(2,3)$
$=1+3\cdot 0$
$=1+0$
$=1$

$S(4,1)=S(3,0)+1 \cdot S(3,1)$

$=0+1 \cdot 1$

$=0+1$

$=1$

$S(4,2)=S(3,1)+2 \cdot S(3,2)$

$=1+2 \cdot 3$

$=1+6$

$=7$

$S(4,3)=S(3,2)+3 \cdot S(3,3)$

$=3+3 \cdot 1$

$=3+3$

$=6$

$S(4,4)=S(3,3)+4 \cdot S(3,4)$

$=1+4 \cdot 0$

$=1+0$

$=1$

$S(5,1)=S(4,0)+1 \cdot S(4,1)$

$=0+1 \cdot 1$

$=0+1$

$=1$

$S(5,2)=S(4,1)+2 \cdot S(4,2)$

$=1+2 \cdot 7$

$=1+14$

$=15$

$S(5,3)=S(4,2)+3 \cdot S(4,3)$

$=7+3 \cdot 6$

$=7+18$

$=25$

$S(5,4)=S(4,3)+4 \cdot S(4,4)$

$=6+4 \cdot 1$

$=6+4$

$=10$

$S(5,5)=S(4,4)+5 \cdot S(4,5)$

$=1+5 \cdot 0$

$=1+0$

$=1$

$S(6,1)=S(5,0)+1 \cdot S(5,1)$

$=0+1 \cdot 1$

$=0+1$

$=1$

$S(6,2)=S(5,1)+2 \cdot S(5,2)$
$=1+2 \cdot 15$
$=1+30$
$=31$
$S(6,3)=S(5,2)+3 \cdot S(5,3)$
$=15+3 \cdot 25$
$=15+75$
$=90$
$S(6,4)=S(5,3)+4 \cdot S(5,4)$
$=25+4 \cdot 10$
$=25+40$
$=65$
$S(6,5)=S(5,4)+5 \cdot S(5,5)$
$=10+5 \cdot 1$
$=10+5$
$=15$
$S(6,6)=S(5,5)+6 \cdot S(5,6)$
$=1+6 \cdot 0$
$=1+0$
$=1$
$S(7,1)=S(6,0)+1 \cdot S(6,1)$
$=0+1 \cdot 1$
$=0+1$
$=1$
$S(7,2)=S(6,1)+2 \cdot S(6,2)$
$=1+2 \cdot 31$
$=1+62$
$=63$
$S(7,3)=S(6,2)+3 \cdot S(6,3)$
$=31+3 \cdot 90$
$=31+270$
$=301$
$S(7,4)=S(6,3)+4 \cdot S(6,4)$
$=90+4 \cdot 65$
$=90+260$
$=350$
$S(7,5)=S(6,4)+5 \cdot S(6,5)$
$=65+5 \cdot 15$
$=65+75$
$=140$

S(7,6)=S(6,5)+6・S(6,6)

=15+6・1

=15+6

=21

S(7,7)=S(6,6)+7・S(6,7)

=1+7・0

=1+0

=1

S(8,1)=S(7,0)+1・(7,1)

=0+1

=1

S(8,2)=S(7,1)+2・(7,2)

=1+2・63

=1+126

=127

S(8,3)=S(7,2)+3・(7,3)

=63+3・301

=63+903

=966

S(8,4)=S(7,3)+4・(7,4)

301+4・350

=301+1400

=1701

S(8,5)=S(7,4)+5・(7,5)

=350+5・140

=350+700

=1050

S(8,6)=S(7,5)+6・(7,6)

=140+6・21

=140+126

=266

S(8,7)=S(7,6)+7・(7,7)

=21+7・1

=21+7

=28

S(8,8)=S(7,7)+8・(7,8)

=1+8・0

=1+0

=1

$S(9,1)=S(8,0)+1 \cdot (8,1)$
$=0+1 \cdot 1$
$=0+1$
$=1$
$S(9,2)=S(8,1)+2 \cdot (8,2)$
$=1+2 \cdot 127$
$=1+254$
$=255$
$S(9,3)=S(8,2)+3 \cdot S(8,3)$
$=127+3 \cdot 966$
$=127+2898$
$=3025$
$S(9,4)=S(8,3)+4 \cdot (8,4)$
$=966+4 \cdot 1701$
$=966+6804$
$=7770$
$S(9,5)=S(8,4)+5 \cdot S(8,5)$
$=1701+5 \cdot 1050$
$=1701+5250$
$=6951$
$S(9,6)=S(8,5)+6 \cdot (8,6)$
$=1050+6 \cdot 266$
$=1050+1596$
$=2646$
$S(9,7)=S(8,6)+7 \cdot (8,7)$
$=266+7 \cdot 28$
$=266+196$
$=462$
$S(9,8)=S(8,7)+8 \cdot (8,8)$
$=28+8 \cdot 1$
$=28+8$
$=36$
$S(9,9)=S(8,8)+9 \cdot (8,9)$
$=1+9 \cdot 0$
$=1+0$
$=1$
$S(10,1)=S(9,0)+1 \cdot S(9,1)$
$=0+1 \cdot 1$
$=0+1$
$=1$

$S(10,2)=S(9,1)+2 \cdot S(9,2)$

$=1+2 \cdot 255$

$=1+510$

$=511$

$S(10,3)=S(9,2)+3 \cdot S(9,3)$

$=255+3 \cdot 3025$

$=255+9075$

$=9330$

$S(10,4)=S(9,3)+4 \cdot S(9,4)$

$=3025+4 \cdot 7770$

$=3025+31080$

$=34105$

$S(10,5)=S(9,4)+5 \cdot S(9,5)$

$=7770+5 \cdot 6951$

$=7770+34755$

$=42525$

$S(10,6)=S(9,5)+6 \cdot S(9,6)$

$=6951+6 \cdot 2646$

$=6951+15876$

$=22827$

$S(10,7)=S(9,6)+7 \cdot S(9,7)$

$=2646+7 \cdot 462$

$=2646+3234$

$=5880$

$S(10,8)=S(9,7)+8 \cdot S(9,8)$

$=462+8 \cdot 36$

$=462+288$

$=750$

$S(10,9)=S(9,8)+9 \cdot S(9,9)$

$=36+9 \cdot 1$

$=36+9$

$=45$

$S(10,10)=S(9,9)+10 \cdot S(9,10)$

$=1+10 \cdot 0$

$=1+0$

$=1$

接著我們將其方法數列表如下:

表(二)

N \ K	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	……
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	……
2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	……
3	1	3	1	0	0	0	0	0	0	0	……
4	1	7	6	1	0	0	0	0	0	0	……
5	1	15	25	10	1	0	0	0	0	0	……
6	1	31	90	65	15	1	0	0	0	0	……
7	1	63	301	350	140	21	1	0	0	0	……
8	1	127	966	1701	1050	266	28	1	0	0	……
9	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1	0	……
10	1	511	9330	34105	42525	22827	5880	750	45	1	……
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

二、落階乘多項式

$f(x)=x^3=ax(x-1)(x-2)+bx(x-1)+cx+d$ ，求整數 a,b,c,d 之值。

上述多項式即為落階乘多項式,我們將各落階乘計算出其係數,如下:

$$x=1\cdot x+0$$

$$x^2=1\cdot x(x-1)+1\cdot x+0$$

$$x^3=1\cdot x(x-1)(x-2)+3\cdot x(x-1)+1\cdot x+0$$

$$x^4=1\cdot x(x-1)(x-2)(x-3)+6\cdot x(x-1)(x-2)+7\cdot x(x-1)+1\cdot x+0$$

$$x^5=1\cdot x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+10\cdot x(x-1)(x-2)(x-3)+25\cdot x(x-1)(x-2)$$
$$+15\cdot x(x-1)+1\cdot x+0$$

$$x^6=1\cdot x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)+15\cdot x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$
$$+65\cdot x(x-1)(x-2)(x-3)+90\cdot x(x-1)(x-2)+31\cdot x(x-1)+1\cdot x+0$$

觀察落階乘多項式,發現竟然與表(二)的數值完全一致(由右向左看)。

當發現落階乘的係數與 S(n,k)的方法數相同時，讓我們很驚訝，尋找文獻與網路搜尋，有類似關係式卻無討論兩者的關係原因，於是我們開始著手討論研究，最後得到其關聯性：

以 $x^4=1\cdot x(x-1)(x-2)(x-3)+6\cdot x(x-1)(x-2)+7\cdot x(x-1)+1\cdot x+0$ 為例：
可視為：

4 個不同球丟入 x 個不同箱子的方法數

$=\sum_{k=0}^{4}$ (4 個不同球恰丟入 4-k 個相同箱)(x 個箱子中選 4-k 個排列)

即

$$x^4=\sum_{k=0}^{4}S(4,4-k)\cdot P_{4\text{-}k}^{x}$$

依此觀點可知：n 個不同球丟入 x 個不同箱子的方法數

$=\sum_{k=0}^{n}$(n個不同球恰丟入 n - k個相同箱)(x個箱子中選 n - k個排列)

即

$$x^n=\sum_{k=0}^{n}S(n,n-k)\cdot P_{n\text{-}k}^{x}$$

因為我們發現這種關係，所以我們欲求 6 個不同球恰丟入 4 個相同箱，我們便有 2 種方法可以採用

方法一：利用遞迴式

$S(n,k)=S(n-1,k-1)+k\cdot S(n-1,k)$

依序最後得

$S(6,4)=S(5,3)+4\cdot S(5,4)=25+4\cdot 10$

$=25+40=65$

或方法二：利用落階乘

$$x^6=1\cdot x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)+15\cdot x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$
$$+65\cdot x(x-1)(x-2)(x-3)+90\cdot x(x-1)(x-2)+31\cdot x(x-1)+1\cdot x+0$$

得 $S(6,4)=65$

三、與矩陣的連結

我們定義:第一套基底 $\beta=\{x,x^2,x^3,\cdots,x^k,\cdots\}$

第二套基底 $\gamma=\{x,x(x-1),x(x-1)(x-2),\cdots\}$

則$[S(n,k)]_{\infty\times\infty}$即為自$\gamma$變換到$\beta$的變換矩陣，

即 $\beta=[S(n,k)]\gamma$ 。

於是，我們求出β變換到γ的變換矩陣，即求出$[S(n,k)^{-1}{}_{\infty\times\infty}]$，得如下表:

(表三)

K \ N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	……
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	……
2	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	……
3	2	-3	1	0	0	0	0	0	0	0	……
4	-6	11	-6	1	0	0	0	0	0	0	……
5	24	-50	35	-10	1	0	0	0	0	0	……
6	-120	274	-225	85	-15	1	0	0	0	0	……
7	720	-1764	1624	-735	175	-21	1	0	0	0	……
8	-5040	13068	-13132	6769	-1960	322	-28	1	0	0	……
9	40320	-109584	118124	-67284	22449	-4536	546	-36	1	0	……
10	-362880	1026576	-1172700	723680	-269325	63273	-9450	870	-45	1	……
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

計算過程如下:

$$\left[\begin{array}{cccccccccc|cccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 7 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 15 & 25 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 31 & 90 & 65 & 15 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 63 & 301 & 350 & 140 & 21 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
1 & 127 & 966 & 1701 & 1050 & 266 & 28 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
1 & 255 & 3025 & 7770 & 6951 & 2646 & 462 & 36 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
1 & 511 & 9330 & 34105 & 42525 & 22827 & 5880 & 750 & 45 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]$$

$$
\left[\begin{array}{cccccccccc|cccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 7 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 15 & 25 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 31 & 90 & 65 & 15 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 63 & 301 & 350 & 140 & 21 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 127 & 966 & 1701 & 1050 & 266 & 28 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 255 & 3025 & 7770 & 6951 & 2646 & 462 & 36 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 511 & 9330 & 34105 & 42525 & 22827 & 5880 & 750 & 45 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{cccccccccc|cccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 7 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -7 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 15 & 25 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14 & -15 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 31 & 90 & 65 & 15 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 30 & -31 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 63 & 301 & 350 & 140 & 21 & 1 & 0 & 0 & 0 & 62 & -63 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 127 & 966 & 1701 & 1050 & 266 & 28 & 1 & 0 & 0 & 126 & -127 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 255 & 3025 & 7770 & 6951 & 2646 & 462 & 36 & 1 & 0 & 254 & -255 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 511 & 9330 & 34105 & 42525 & 22827 & 5880 & 750 & 45 & 1 & 510 & -511 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{cccccccccc|cccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 11 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -36 & 60 & -25 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 65 & 15 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -150 & 239 & -90 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 350 & 140 & 21 & 1 & 0 & 0 & 0 & -540 & 840 & -301 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1701 & 1050 & 266 & 28 & 1 & 0 & 0 & -1806 & 2771 & -966 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 7770 & 6951 & 2646 & 462 & 36 & 1 & 0 & -5796 & 8820 & -3025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 34105 & 42525 & 22827 & 5880 & 750 & 45 & 1 & -18150 & 27479 & -9330 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
$$

$$\left[\begin{array}{cccccccccc|cccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 11 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & -50 & 35 & -10 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 15 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 240 & -476 & 300 & -65 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 140 & 21 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1560 & -3010 & 1799 & -350 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1050 & 266 & 28 & 1 & 0 & 0 & 8400 & -15940 & 9240 & -1701 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 6951 & 2646 & 462 & 36 & 1 & 0 & 40824 & -76650 & 43595 & -7770 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 42525 & 22827 & 5880 & 750 & 45 & 1 & 186480 & -347676 & 195300 & -34105 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccccccccc|cccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 11 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & -50 & 35 & -10 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -120 & 274 & -225 & 85 & -15 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 21 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1800 & 3990 & -3101 & 1050 & -140 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 266 & 28 & 1 & 0 & 0 & -16800 & 36560 & -27510 & 8799 & -1050 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2646 & 462 & 36 & 1 & 0 & -12600 & 270900 & -199690 & 61740 & -6951 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22827 & 5880 & 750 & 45 & 1 & -834120 & 1778574 & -1293075 & 391145 & -42525 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccccccccc|cccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 11 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & -50 & 35 & -10 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -120 & 274 & -225 & 85 & -15 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 720 & -1764 & 1624 & -735 & 175 & -21 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 28 & 1 & 0 & 0 & 15120 & -36324 & 32340 & -13811 & 2940 & -266 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 462 & 36 & 1 & 0 & 191520 & -454104 & 395660 & -163710 & 32739 & -2646 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5880 & 750 & 45 & 1 & 1905120 & -4476024 & 3843000 & -1549150 & 299880 & -22827 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccccccccc|cccccccccc}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&2&-3&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&-6&11&-6&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&24&-50&35&-10&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&-120&274&-225&85&-15&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&720&-1764&1624&-735&175&-21&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&-5040&13068&-13132&6769&-1960&322&-28&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&36&1&0&-141120&360864&-354628&175860&-48111&7056&-462&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&750&45&1&-2328480&5896296&-5706120&2772650&-729120&100653&-5880&0&0&1
\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccccccccc|cccccccccc}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&2&-3&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&-6&11&-6&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&24&-50&35&-10&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&-120&274&-225&85&-15&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&720&-1764&1624&-735&175&-21&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&-5040&13068&-13132&6769&-1960&322&-28&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&40320&-109584&118124&-67824&22449&-4536&546&-36&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&45&1&1451520&-3904704&4142880&-2304100&740880&-140847&15120&-750&0&1
\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccccccccc|cccccccccc}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&2&-3&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&-6&11&-6&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&24&-50&35&-10&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&-120&274&-225&85&-15&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&720&-1764&1624&-735&175&-21&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&-5040&13068&-13132&6769&-1960&322&-28&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&40320&-109584&118124&-67824&22449&-4536&546&-36&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&-362880&1026576&-1172700&747980&-269325&63273&-9450&870&-45&1
\end{array}\right]$$

觀察表(三)得下列關係式：($S_1(n,k)$ 為表(三)中第 n 列第 k 行之數值)

1. $1 = 0! = S_1(1,1)$

   $-1 = -1! = S_1(2,1)$

   $2 = 2! = S_1(3,1)$

   $-6 = -3! = S_1(4,1)$

   $24 = 4! = S_1(5,1)$

   $-120 = -5! = S_1(6,1)$

   …………………

所以可以得到關係式:(我們於五、Stirling numbers 一節中證明之)

$$\boxed{n! = (-1)^n S_1(n+1,1)}$$

2. $-\dfrac{S_1(2,2)}{S_1(2,1)} = -\dfrac{1}{-1} = 1 = \dfrac{1}{1}$

$-\dfrac{S_1(3,2)}{S_1(3,1)} = -\dfrac{-3}{2} = \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2}$

$-\dfrac{S_1(4,2)}{S_1(4,1)} = -\dfrac{11}{-6} = \dfrac{11}{6} = \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}$

$-\dfrac{S_1(5,2)}{S_1(5,1)} = -\dfrac{-50}{24} = \dfrac{25}{12} = \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4}$

…………………

所以可以得到關係式：(我們於五、Stirling numbers 一節中證明之)

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = -\frac{S_1(n+1,2)}{S_1(n+1,1)}}$$

3. 由上述 1.與 2.可以得到關係式:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{(-1)^{n+1} S_1(n+1,2)}{n!}}$$

4. $S_1(2,1) = -1 = -C_2^2$

$S_1(3,2) = -3 = -C_2^3$

$S_1(4,3) = -6 = -C_2^4$

$S_1(5,4) = -10 = -C_2^5$

…………………

所以可以得到關係式：(我們於五、Stirling numbers 一節中證明之)

$$\boxed{C_2^n = -S_1(n, n-1),\ n \geq 2}$$

5. 將表(三)之表格內數值取絕對值可得下表：

表(四)

K \ N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	……
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	……
2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	……
3	2	3	1	0	0	0	0	0	0	0	……
4	6	11	6	1	0	0	0	0	0	0	……
5	24	50	35	10	1	0	0	0	0	0	……
6	120	274	225	85	15	1	0	0	0	0	……
7	720	1764	1624	735	175	21	1	0	0	0	……
8	5040	13068	13132	6769	1960	322	28	1	0	0	……
9	40320	109584	118124	67284	22449	4536	546	36	1	0	……
10	362880	1026576	1172700	723680	269325	63273	9450	870	45	1	……
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

接著,我們討論把 n 個人圍成 k 圈的方法數(1 個人可以自己圍一圈):

(1)將 4 個人圍成 1 圈的方法數= $\frac{4!}{4}=6$

(2)將 4 個人圍成 2 圈的方法數= $C_1^4\cdot C_3^3\cdot\frac{3!}{3}+C_2^4\cdot\frac{2!}{2}\cdot C_2^2\cdot\frac{2!}{2}\cdot\frac{1}{2!}=11$

(3)將 4 個人圍成 3 圈的方法數= $C_1^4\cdot C_1^3\cdot C_2^2\cdot\frac{2!}{2}\cdot\frac{1}{2!}=6$

(4)將 4 個人圍成 4 圈的方法數=1

發現,表（四）之第 n 列第 k 行之數值即為把 n 個人圍成 k 圈的方法數。

此第 n 列第 k 行之數值以 $S_2(n,k)$ 表之，即

$S_2(n,k)$ =把 n 個人圍成 k 圈的方法數(1 個人可以自己圍一圈)

Ex. $S_2(5,2)=C_4^5\cdot\frac{4!}{4}\cdot C_1^1\cdot 1+C_3^5\cdot\frac{3!}{3}\cdot C_2^2\cdot\frac{2!}{2}=30+20=50$

四、 $P_m^n, C_m^n, H_m^n, S_2(n,k)$ 的關係式

接著，我們解下列排列計算之問題時，又發現其關係式：

1. 解$4\times3=a\times3^2+b\times3^1+c\times3^0$,a,b,c 為非負整數，

得 a=1,b=1,c=0

$\Rightarrow P_2^4=4\times3=S_2(2,2)\times3^2+S_2(2,1)\times3^1+S_2(2,0)\times3^0$

2. 解$6\times5\times4=a\times4^3+b\times4^2+c\times4^1+d\times4^0$,a,b,c,d 為非負整數，

得 a=1,b=3,c=2,d=0

$\Rightarrow P_3^6=6\times5\times4=S_2(3,3)\times4^3+S_2(3,2)\times4^2+S_2(3,1)\times4^1+S_2(3,0)\times4^0$

3. 解$7\times6\times5=a\times5^3+b\times5^2+c\times5^1+d\times5^0$,a,b,c,d 為非負整數，

得 a=1,b=3,c=2,d=0

$\Rightarrow P_3^7=7\times6\times5=S_2(3,3)\times5^3+S_2(3,2)\times5^2+S_2(3,1)\times5^1+S_2(3,0)\times5^0$

4. 解$9\times8\times7\times6=a\times6^4+b\times6^3+c\times6^2+d\times6^1+e\times6^0$,a,b,c,d,e 為非負整數，

得 a=1,b=6,c=11,d=6,e=0

$\Rightarrow P_4^9=9\times8\times7\times6=S_2(4,4)\times6^4+S_2(4,3)\times6^3+S_2(4,2)\times6^2+S_2(4,1)\times6^1+S_2(4,0)\times6^0$

………………

依此規律我們發現：

$$\boxed{P_m^n=\sum_{k=0}^{m}S_2(m,k)\cdot(n-m+1)^k}$$

欲證明此一發現，我們需要藉由 gamma 函數證明之：

(定義) $\Gamma(n)=(n-1)!$,n 為正整數，$\Gamma(n)$ 稱為 gamma 函數。

(引理) $\dfrac{\Gamma(j+h)}{j^h\Gamma(j)}=\sum_{k=0}^{h}\dfrac{S_2(h,h-k)}{j^k}$

(公式) $P_m^n=\sum_{k=0}^{m}S_2(m,k)\cdot(n-m+1)^k$

證明：$$\frac{\Gamma(n+1)}{(n-m+1)^m\Gamma(n-m+1)}=\sum_{k=0}^{m}\frac{S_2(m,m-k)}{(n-m+1)^k}$$

$$\Rightarrow \frac{n!}{(n-m+1)^m(n-m)!}=\sum_{k=0}^{m}\frac{S_2(m,m-k)}{(n-m+1)^k}$$

$$\Rightarrow \frac{n!}{(n-m)!}=(n-m+1)^m\cdot\sum_{k=0}^{m}\frac{S_2(m,m-k)}{(n-m+1)^k}$$

$$\Rightarrow \frac{n!}{(n-m)!}=\sum_{k=0}^{m}S_2(m,m-k)\cdot(n-m+1)^{m-k}$$

$$\Rightarrow \frac{n!}{(n-m)!}=\sum_{k=0}^{m}S_2(m,k)\cdot(n-m+1)^{k}$$

$$\Rightarrow P_m^n=\sum_{k=0}^{m}S_2(m,k)\cdot(n-m+1)^{k}$$

又由 $P_m^n=C_m^n\cdot m!$，我們得到：

$$\boxed{C_m^n=\frac{1}{m!}\cdot\sum_{k=0}^{m}S_2(m,k)\cdot(n-m+1)^{k}}$$

又由 $H_m^n=C_m^{n+m-1}$，我們得到：

$$\boxed{H_m^n=\frac{1}{m!}\cdot\sum_{k=0}^{m}S_2(m,k)\cdot n^{k}}$$

五、Stirling numbers

1. Stirling numbers of the first kind

Stirling numbers of the first kind 符合下列公式：

$$S_1(m,n)=S_1(m-1,n-1)-(m-1)S_1(m-1,n)$$

依此公式可得下表：

n \ k	1	2	3	4	5
1	1	0	0	0	0
2	-1	1	0	0	0
3	2	-3	1	0	0
4	-6	11	-6	1	0
5	24	-50	35	-10	1

與表(三)完全相同，所以表(三)之數值即為 Stirling numbers of the first kind。所以我們可以 Stirling numbers of the first kind 的公式證明之前歸納出的公式：

(公式) $n! = (-1)^{n} S_1(n+1,1)$

證明：(1)當 n=1 時: $1! = 1, (-1)^{1} S_1(2,1) = (-1)(-1) = 1$,公式成立。

(2)設 n=k 時成立，即 $k! = (-1)^{k} S_1(k+1,1)$

則 n=k+1 時：

$$(k+1)! = (k+1)\,k$$

$$= (k+1)(-1)^{k} S_1(k+1\,,\,1$$

$$= (-1)^{k}(-1)[0 - (k+1)S_1(k+1\,,\,1$$

$$= (-1)^{k+1}[S_1(k+1,0) - (k+1)S_1(k+1\,,\,1$$

$$= (-1)^{k+1} S_1(k+2\,,\,1$$

由數學歸納法原理，故得證。

(公式) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = -\frac{S_1(n+1,2)}{S_1(n+1,1)}$

證明：(1)當 n=1 時， $\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{k}=1,-\frac{S_1(2,2)}{S_1(2,1)}=-\frac{1}{-1}=1$,公式成立。

(2)設 n=m 時成立,即 $\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}=-\frac{S_1(m+1,2)}{S_1(m+1,1)}$

則 n=m+1 時:

$$\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{k}=\frac{1}{m+1}+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}$$

$$=\frac{1}{m+1}-\frac{S_1(m+1,2)}{S_1(m+1\ ,\ 1}$$

$$=\frac{S_1(m+1,1)-(m+1)S_1(m+1,2)}{(m+1)S_1(m+1\ ,\ 1\ )}$$

$$=-\frac{S_1(m+1,1)-(m+1)S_1(m+1,2)}{S_1(m+1,0)-(m+1)S_1(m+1\ ,\ 1}$$

$$=-\frac{S_1(m+2,2)}{S_1(m+2\ ,\ 1}$$

由數學歸納法原理，故得證。

(公式) $C_2^n=-S_1(n,n-1),n\geq 2$

證明：(1)當 n=2 時: $C_2^2=1,-S_1(2,1)=-(-1)=1$,公式成立。

(2)設 n=k 時成立,即 $C_2^k=-S_1(k,k-1)$

則 n=k+1 時:

$$C_2^{k+1}=\frac{(k+1)\cdot k}{2\cdot 1}$$

$$=\frac{k\cdot(k-1)+2k}{2\cdot 1}$$

$$= \frac{k\cdot(k-1)}{2\cdot 1} + k\cdot 1$$

$$= -S_1(k,k-1) + k\cdot S_1(k,k)$$

$$= -(S_1(k,k-1) - k\cdot S_1(k,k))$$

$$= -S_1(k+1,k)$$

由數學歸納法原理，故得證。

2. Stirling numbers of the second kind

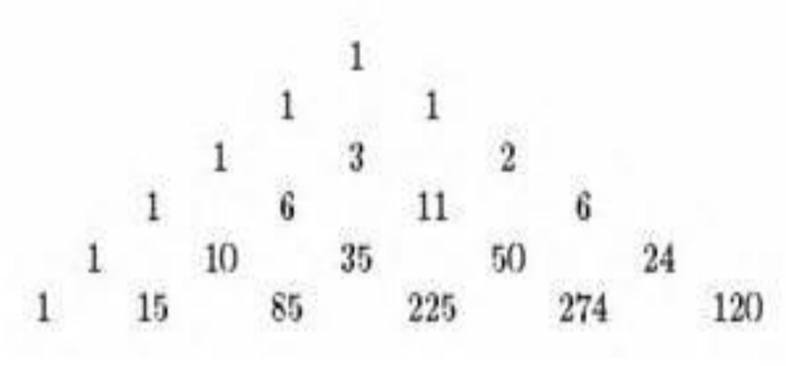
Stirling numbers of the second kind 符合下列公式：

$$S_2(m,n) = \left| S_1(m,n) \right| = \left| S_1(m-1,n-1) - (m-1)S_1(m-1,n) \right|$$

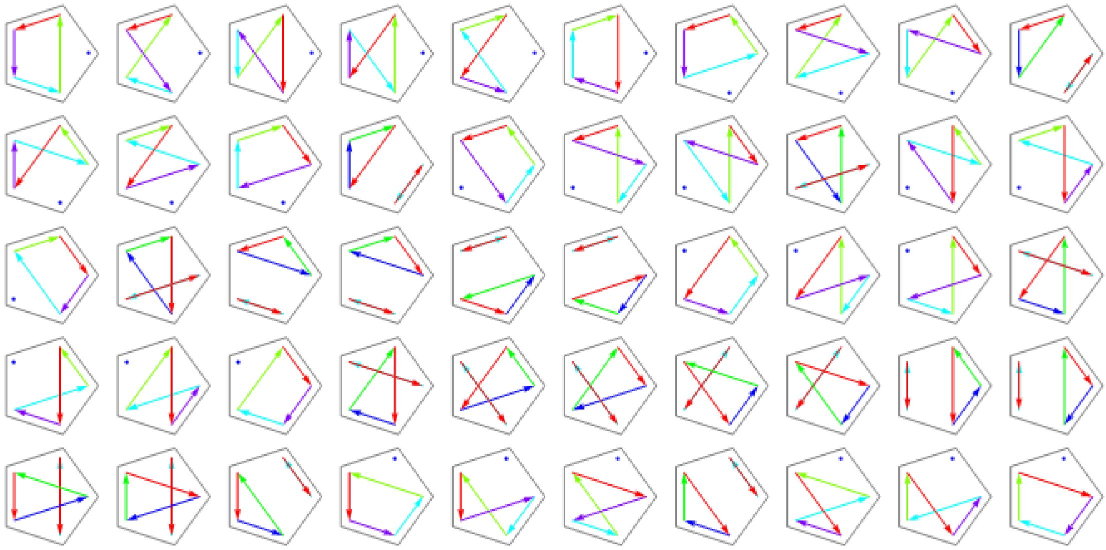
依此公式可得下表：

n \ k	1	2	3	4	5
1	1	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0
3	2	3	1	0	0
4	6	11	6	1	0
5	24	50	35	10	1

與表(四)完全相同，所以表(四)之數值即為 Stirling numbers of the second kind，且都形如巴斯卡三角：



在 Stirling numbers of the second kind 中，S(5,2)可視為下圖的方法數：



＜上圖截自網路＞

六、響鈴數字

(定義) $P(n,k)$ 即為響鈴數字中描述 n 個元素可以被分入 k 個弄亂方式，即非空的子集的數量。

(定義) $P(n)=\sum_{k=1}^{n} P(n,k)$ 即為響鈴數字。

例如：集合{1， 2， 3}可以被分入三個子集:

{{1}， {2}， {3}}，即 $P(3,3)=1$。

可以分入下列二個子集:

{{1， 2}， {3}}
{{1， 3}， {2}}
{{1}， {2， 3}}，即 $P(3,2)=3$

可以分入一個子集:

{{1， 2， 3}}，即 $P(3,1)=1$。

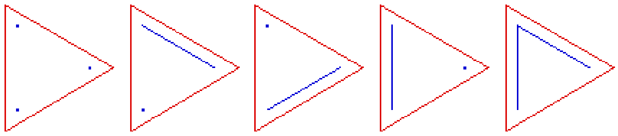
所以 $P(3)=1+3+1=5$ ，又其可以遞迴式計算:

$$\boxed{P(n,k) = P(n-1,k-1) + k \cdot P(n-1,k)}$$

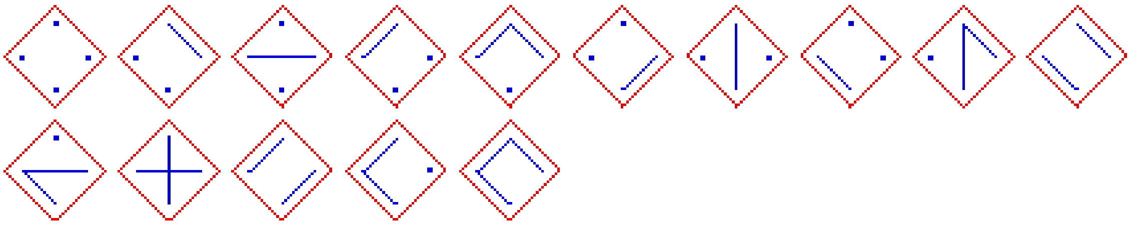
我們計算出響鈴數字為(1， 2， 5， 15， 52， 203， 877， 4140， 21147， 115975， 678570， 4213597，…) ，過程如下:

下列圖示代表集合可以不同的方式被分開：連線上的點表在同一個子集，並且不在連線上的點代表自成一個子集。

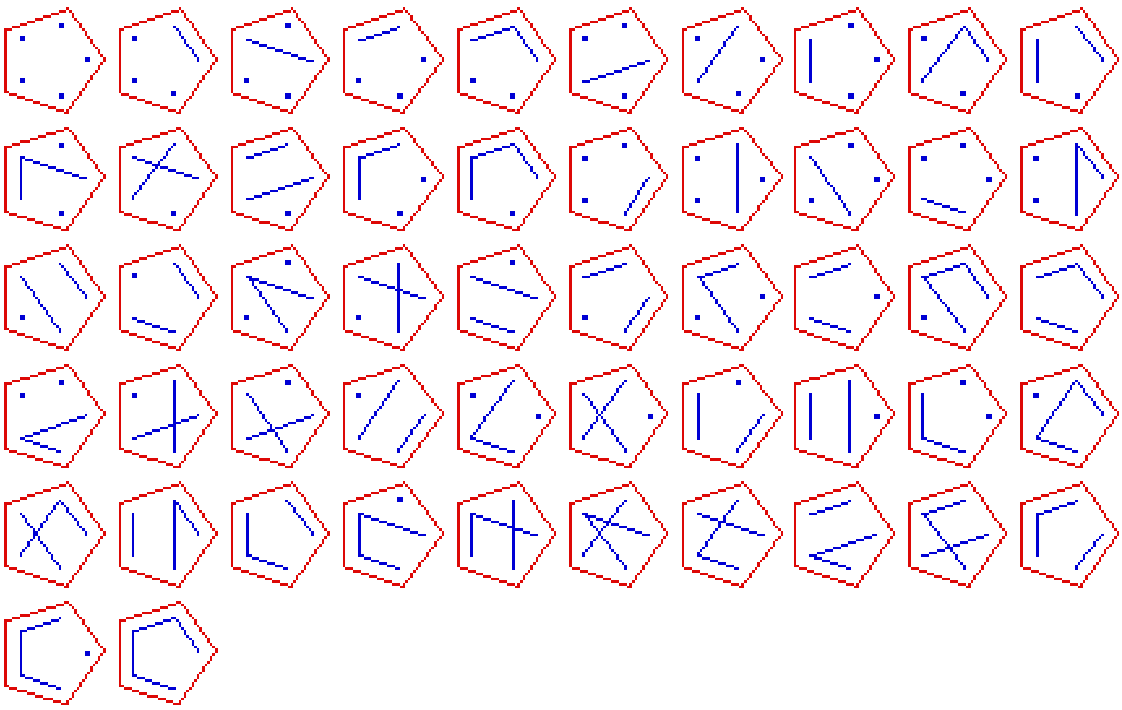
{1， 2， 3}， 5 分開：



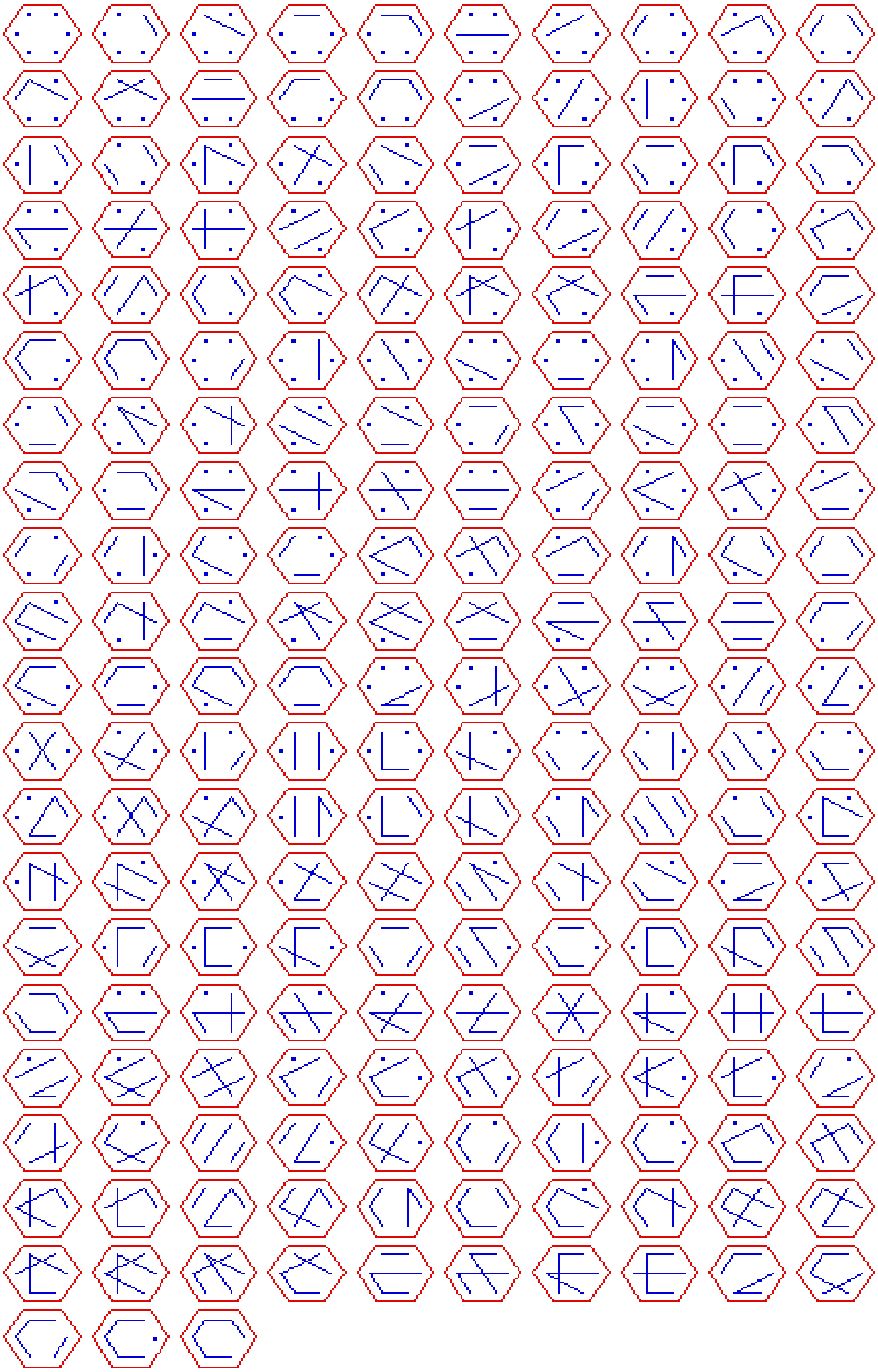
{1， 2， 3， 4}， 15 分開：



{1， 2， 3， 4， 5}， 52 分開：



{1， 2， 3， 4， 5， 6}， 203 分開：



<上圖截自網路 PlanetMath 貼文>

響鈴數字的遞迴式與表(二)之 S(n,k)的遞迴式相同，我們發現：

P(n,k)=S(n,k)

所以二者之間有下列關係式：

$$P(n) = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)$$

伍、研究結果

一、S(n,x)=n 個不同球恰放入 x 個相同箱子的方法數(此 x 個箱子至少 1 個)

$\Rightarrow$S(n,k)=S(n-1,k-1)+k・S(n-1,k)

二、$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n, n-k) \cdot P_{n-k}^{x}$

三、$n! = (-1)^n S_1(n+1,1)$，$S_1(n+1,1)$ 為 Stirling numbers of the first kind。

四、$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = -\frac{S_1(n+1,2)}{S_1(n+1,1)}$，$S_1(n+1,1)$、$S_1(n+1,2)$ 為 Stirling numbers of the first kind。

五、$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{(-1)^{n+1} S_1(n+1,2)}{n!}$，$S_1(n+1,2)$ 為 Stirling numbers of the first kind。

六、$C_2^n = -S_1(n, n-1)$，$S_1(n, n-1)$ 為 Stirling numbers of the first kind。

七、$S_2(n,k)$ 為 Stirling numbers of the second kind

$\Rightarrow S_2(n,k)$ ＝把 n 個人圍成 k 圈的方法數(1 個人可以自己圍一圈)。

八、$P_m^n = \sum_{k=0}^{m} S_2(m,k) \cdot (n-m+1)^k$，$S_2(m,k)$ 為 Stirling numbers of the second kind。

九、$C_m^n = \frac{1}{m!} \cdot \sum_{k=0}^{m} S_2(m,k) \cdot (n-m+1)^k$，$S_2(m,k)$ 為 Stirling numbers of the second kind。

十、$H_m^n = \frac{1}{m!} \cdot \sum_{k=0}^{m} S_2(m,k) \cdot n^k$，$S_2(m,k)$ 為 Stirling numbers of the second kind。

十一、$P(n) = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)$，P(n)為響鈴數字。

陸、討論與結論

我們求高中排列組合中「不同球投入相同箱」的方法數，我們利用遞迴式，求出如同巴斯卡三角的數值。又於落階乘多項式中，發現其係數與表內數值相同，再將型如巴斯卡三角的數值表，依矩陣方式，求出其反方陣，發現又與 Stirling numbers 相同，而 Stirling numbers 與 n 個物圍成 k 圈的方法數也相同，並且可以列出排列公式與Stirling numbers的關係式、組合公式與Stirling numbers的關係式、重複組合公式與 Stirling numbers 的關係式、調和級數與 Stirling numbers 的關係式等並加以證明。

一個排列組合無法直接代入公式解決的問題，在以不同的數學觀點來解釋時，卻可以牽扯到遞迴關係、多項式係數、矩陣、反方陣、Stirling numbers、……， 而輕易的從中解答，這深刻的讓我們體會到數學的奧妙，或許在這裡被困惑住了，但卻又可以在不同的角度解除疑惑，一個目前無法解出的謎，或許會在往後無意中不同處揭曉謎底，而這正是我們所想要表達的**原來數學四處流竄**。

柒、參考資料及其他

1. Combinatorial Analysis D. M.BressoudMacalester College, Saint Paul, Minnesota.
2. q-Stirling numbers: A new view Yue CAI and Margaret A. READDY May 6, 2015
3. M. Abramowitz， I. Stegun，編輯(1972)。 「§24.1.3。 第一種類的 Stirling 數字」。 數學函數手冊與慣例、圖表和數學表的。 紐約： 多弗。 p. 824。
4. 第一種類的 Stirling 數字， S(n,k)在 PlanetMath。
5. 高中數學第 1 冊第 2 章、第 2 冊第 2 章。
6. Wolfram Mathworld：Stirling Number of the First Kind.
7. Wolfram Mathworld：Stirling Number of the Second Kind.

【評語】030416

能找出遞迴規律、多項式係數、矩陣、反方陣、Stirling numbers 等關聯性實屬難得，但 Stirling number of the first kind 和 Stirling number of the second kind 的一些基本性質其實是廣為人知而且常被拿來使用的。作者們大概還沒有機會接觸到相關的內容，以致於誤以為所討論的是一些新的發現。投入大部分的心力在探討已有的結果上，頗為可惜。