

中華民國第 56 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組 數學科

佳作

030415

亂中有序，始終如一

~正六邊形光線循環反射規律研究

學校名稱：高雄市立明華國民中學

作者： 國二 李知易 國二 黃暉倫 國二 顏均維	指導老師： 陳晏閔 廖思涵
---	-----------------------------

關鍵詞：循環反射展開、反射邊跨距規律、
分段反射次數

摘要

本研究主要探討光線由正六邊形一邊中點出發，經反射回到出發點形成循環反射的規律。其中發展了展開圖，藉由圖形不斷向外翻轉鏡射，以光射線出發後打到的邊為對稱軸，將多邊形及反射線段作線對稱操作，使入射路徑和反射路徑成一直線，所有線對稱後所得之多邊形會接續著將此一直線路徑覆蓋。運用標定座標的方式以記錄展開圖中光線射向，並探索展開圖中完成循環反射時的終點座標。運用將反射邊依序編號，方便記錄並計算反射的規律，以首段末位邊編號及累進段數的推算出完成循環反射所需的分段反射次數之通式，並藉以研究分段跨邊數、總反射次數及總跨邊數。並紀錄分段跨距串列，跨距規律及了解完成循環反射的通過點座標之規律。

壹、研究動機

我們在一個數學營隊的課程中學會了如何使用繪圖軟體 GSP 及 GGB。當搜尋相關的資料時，無意間發現一個介紹動態幾何繪圖軟體作品的網站。站上有許多關於動態軌跡的影片，其中一個吸引了我們的注意力。它是雷射光線在某個固定邊界內的反射軌跡，有著漂亮的規律圖像，我們立刻想到電腦螢幕保護程式會有一顆球再螢幕框內彈來彈去，有些時候似乎會有重複的情形。腦海裡浮現了一絲靈感，若把螢幕的框換成其他的多邊形框，把球的反彈換成光線的反射路徑，那麼在不同的多邊形內會不會有規律呢？經過一番討論，發現日常生活中還有很多反射的例子，像是撞球、彈珠檯.....等諸如此類的東西，引起了我們好奇心。我們便想「光線是否能在各種多邊形中進行規律地反射？」「能否找出在何種情況下可讓反射路徑回到原點？」於是我們開始了研究之路。

貳、研究目的

研究光線由正六邊形一邊中點出發，經反射回到原出發點形成循環反射的規律：

- 一、探討形成循環反射時，其光線通過點座標 $P(m, n)$ 之規律。
- 二、探討形成循環反射時，反射次數之規律及分段反射次數之通式。

參、研究器材與設備

紙、筆、方格紙、三角格紙、電腦（使用文書處理、試算表、幾何繪圖軟體）

肆、研究方法及過程

一、名詞解釋

- (一) 循環反射：在多邊形中以周界作鏡像反射時，從一點開始朝某一方向發出光射線，經過多次的反射後會回到起始點，並且朝原先同一發射的方向反射出去，重複相同的路徑循環之狀態。
- (二) 展開圖：藉由圖形不斷向外翻轉鏡射，使得在多邊形中光反射的路徑被展開成一直線。以光射線出發後打到的邊為對稱軸，將多邊形及反射線段作線對稱操作，使入射路徑和反射路徑成一直線，並可視為所有線對稱操作所得之多邊形會將此一直線接續覆蓋。
- (三) 循環圖：光線在多邊形中形成循環反射的實際軌跡圖形。
- (四) 首段末位邊編號：在展開圖中，光線由起始邊打到第 1 個水平反射邊中點，稱為第 1 個分段，分段最後一個反射邊的編號，稱為首段末位邊編號。
- (五) 累進段數：首段末位邊編號可視為前進 1 個分段會推進的邊數，據此可推算需累計的段數，即完成 1 次循環反射。稱為累進段數。

二、研究方法

(一) 鏡射展開：

為了方便尋找可反射回原點的規律，我們藉由圖形不斷向外翻轉鏡射，使得在正 n 邊形中反射的路徑被展開成一直線，**展開圖**如圖 1。

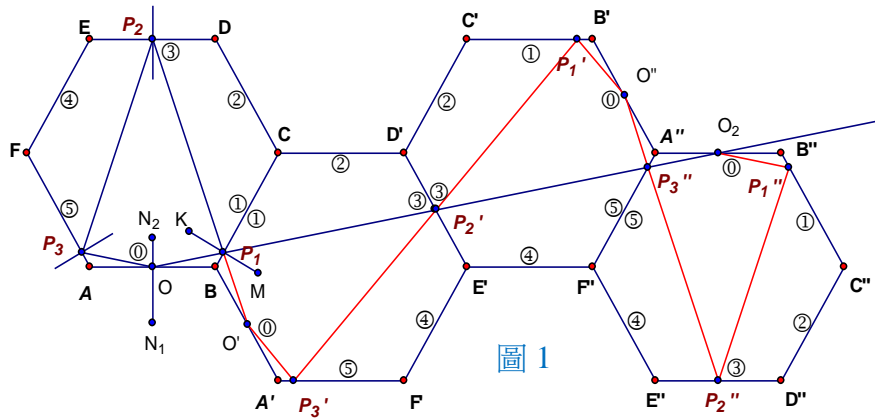


圖 1

若以光射線出發後打到的邊為對稱軸，將正 n 邊形及反射線段作線對稱，將使得入射路徑和反射路徑成一直線。我們以一個正六邊形為例證明：

正六邊形 $BCDEFA$ 中(如圖 4)， O 點為其光源，光線射向 \overline{BC} 並交於 P_1 ，

$\overline{KP_1}$ 為反射線通過 P_1 時的法線，即 $\overline{KP_1}$ 垂直 \overline{BC} ，設入射角 $\angle OP_1K$ 為 θ ，

\therefore 入射角 = 反射角 $\therefore \angle OP_1K = \angle KP_1P_2 = \theta$ ，

若以 \overline{BC} 為軸，將正六邊形 $BCDEFA$ 作鏡射得正六邊形 $BCD'E'F'A'$ ，再將入射線段 $\overline{OP_1}$ 的反射線段 $\overline{P_1P_2}$ 作鏡射得 $\overline{P_1P_2'}$ ， \therefore 正六邊形 $BCDEFA \cong$ 正六邊形 $BCD'E'F'A'$ ，並且

$\angle P_2P_1C = \angle CP_1P_2' = 90^\circ - \theta$ ，因此 $\angle OP_1P_2' = \angle OP_1K + \angle KP_1P_2 + \angle P_2P_1C + \angle CP_1P_2' = 2\theta + 2(90 - \theta) = 180^\circ$ ，可得 $O - P_1 - P_2'$ 共線，同理，

(1) 以 $\overline{D'E'}$ 為軸，將正六邊形 $D'E'F'A'BC$ 作鏡射得正六邊形 $D'E'F''A''B'C'$ ，

再將入射線段的反射線段 $\overline{P_2'P_3'}$ 鏡射得 $\overline{P_2'P_3''}$ ，可得 $P_1 - P_2' - P_3''$ 共線。

(2) 以 $\overline{A''F''}$ 為軸，將正六邊形 $F''A''B'C'D'E'$ 作鏡射得正六邊形 $F''A''B''C''D''E''$ ，

再將入射線段的反射線段 $\overline{P_3''O''}$ 鏡射得 $\overline{P_3''O_2}$ ，可得 $P_2' - P_3'' - O_2$ 共線。

綜合上述，可得 $O - P_1 - P_2' - P_3'' - O_2$ 共線，即原入射線段 $\overline{OP_1}$ 與各反射線段經反射點所在的邊為軸連續鏡射後可成一直線 $\overline{OO_2}$ 。

根據上述方法可知：將初始正六邊形 $ABCDEF$ 的各邊為對稱軸，向各個方向鏡射展開所得的所有正六邊形可以平鋪平面。因此，如圖 4 的展開圖可知

$\overline{AB} \parallel \overline{C'B''} \parallel \overline{A''B''} \parallel \overline{A''B''}$ ， $\therefore \angle P_1OB = \angle P_3'O_2A''$ (內錯角)，

又 $\triangle P_3AO$ 三次鏡射後得 $\triangle P_3''A''O_2$ ， $\therefore \triangle P_3AO \cong \triangle P_3''A''O_2$ ，

$\triangle P_3AO$ 鏡射後使 $\triangle P_3AO \cong \triangle P_3'O_2A''$ ，入射角=反射角

$\therefore \angle P_3ON_2 = \angle N_2OP_1$ ，形成一次循環反射，其循環圖如圖 2。

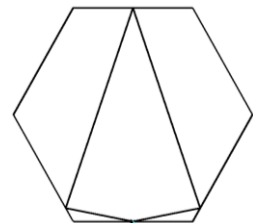


圖 2

(二) **反射邊編號推算：**

如圖 3 所示，我們將原正六邊形各邊依逆時針順序編號由 $k = 0$ 到 $k = 5$ ，為了方便辨識以打圈標記： \textcircled{k} ，即 \overline{AB} 為 $\textcircled{0}$ ， \overline{BC} 為 $\textcircled{1}$ ， \overline{CD} 為 $\textcircled{2}$ ， \overline{DE} 為 $\textcircled{3}$ ， \overline{EF} 為 $\textcircled{4}$ ， \overline{FA} 為 $\textcircled{5}$ ，並將正六邊形 $ABCDEF$ ，經由

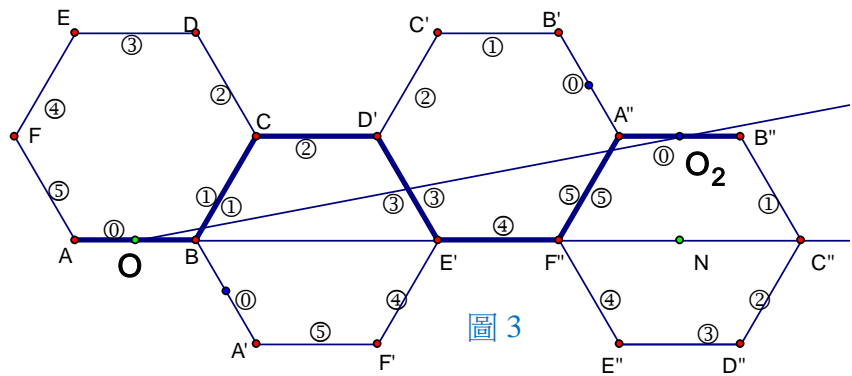


圖 3

連續鏡射依序得正六邊形 $A'BCD'E'F'$ 、正六邊形 $A''B''C''D''E''F''$ 及正六邊形 $A''B''C''D''E''F''$ 。

並將相對應的對稱邊做相同的編號。若僅將反射路徑通過沿線周圍的正六邊形各邊（粗的折線）的對應邊編號標示出來，且

去掉其他的邊（細的線段）之編號，則可觀察得出編號會由 $\textcircled{0}$ ， $\textcircled{1}$ ， $\textcircled{2}$ ， $\textcircled{3}$ ， $\textcircled{4}$ ， $\textcircled{5}$ 遞增且循環發展並在最後回到 $\textcircled{0}$ 。若編號最後回到 $\textcircled{0}$ 時剛好回到水平線段的中點，即完成一個循環的反射。並可得

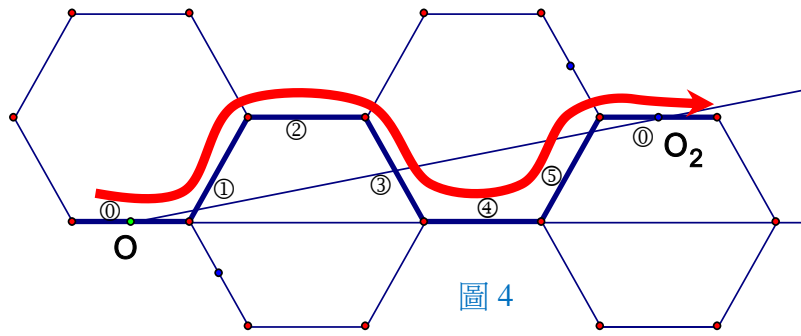


圖 4

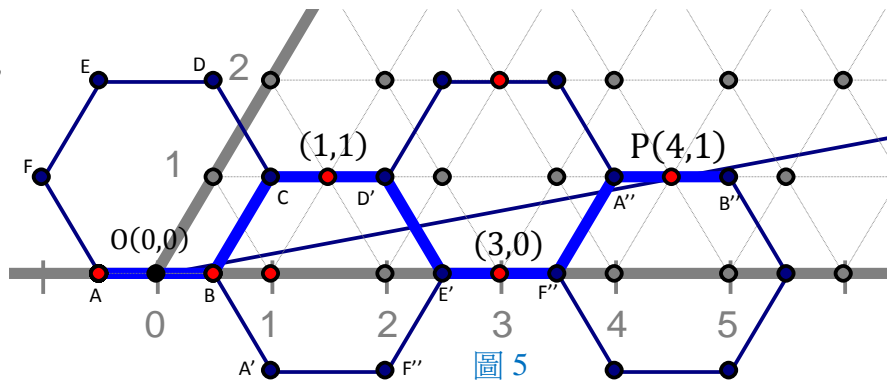
反射邊編號依序為 $\textcircled{1}\textcircled{3}\textcircled{5}\textcircled{0}$ ，共有 4 次反射。

所觀察到的循環發展之各邊編號，可快速地依照圖 4 紅色線所示順序推算，步驟如下：

- 步驟 1. 從起點 $O(0,0)$ 所在的起始邊開始，設編號 $k=0$ ，標示為反射邊 $\textcircled{0}$ ，沿著邊逆時針前進。
 - 步驟 2. 前進 1 邊，編號 k 加 1，若 $k=6$ 則令 $k=0$ ，標示為反射邊 \textcircled{k} 。
 - 步驟 3. 檢驗“經過的邊是否與光射線相交”，若是“相交”，便以此反射邊作為對稱軸，將正六邊形做 1 次鏡射，經過鏡射後，改變繞行方向，方向原為逆時針就改成順時針，方向原為為順時針就改成逆時針。
 - 步驟 4. 檢驗是否“ $k=0$ ”，若是“ $k=0$ ”，則檢驗是否“光射線有通過邊的中點”，若是“通過中點”則為 1 次反射循環完成，結束編號。若非“ $k=0$ ”或非“通過中點”，則繼續回到步驟 2。
- 依此規則便可推出反射邊編號如下： $\textcircled{0}\textcircled{1}\textcircled{2}\textcircled{3}\textcircled{4}\textcircled{5}\textcircled{0}\textcircled{1}\dots$ ， k 為 0 到 5 遞增然後循環。光線由起始邊打到第 1 個水平反射邊中點，稱為第 1 個分段，分段最後一個反射邊的編號，稱為首段末位邊編號。

(三) **座標標定**：

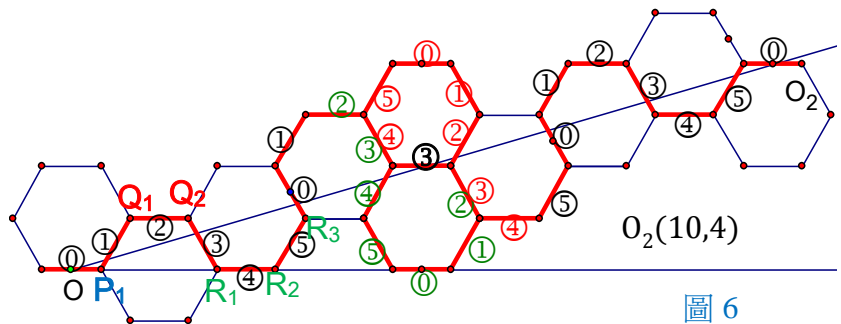
如圖 5 的展開圖，根據夾角 60 度的斜角座標平面，我們設正六邊形 $ABCDEF$ 的 \overline{AB} 為 x 軸，且以起始邊 \overline{AB} 的中點為原點 $O(0,0)$ 作為光射線的起點，正六邊形邊長為 1 個單位長，則 y 軸



會通過 \overline{CD} 之中點座標為 $(0,1.5)$ 。並可將鏡射展開圖各邊中點定出座標。例如： $\overline{CD'}$ 的中點座標為 $(1,1)$ ， $\overline{E'F''}$ 的中點座標為 $(3,0)$ ， $\overline{A''B''}$ 的中點座標為 $(4,1)$ 。我們可以將光射線的射向以通過點座標來描述，以圖 7 為例，可知射向 $P(4,1)$ 可完成一個循環的反射。

(四) **反射邊跨距記錄**：

如圖 6，光射線由反射邊 ① 打向反射邊 ①，可用所跨過的 1 個頂點 P_1 來計數，跨距=1。接著由反射邊 ① 打向反射邊 ③，可用所跨過的 2 個頂點 Q_1, Q_2 來計數，跨距=2。再由反射邊 ③



打向反射邊 ①，可用所跨過的 3 個頂點 R_1, R_2, R_3 來計數，跨距=3。以此類推，要記錄相鄰兩個被光射線打到的反射邊編號的跨距，只要按照紅色折線發展的順序數跨過轉折的頂點數便可得。如圖為終點座標 $O_2(10,4)$ 的展開圖，其記錄下的數列為：1,2,3,4,5,5,4,3,2,1。經觀察展開圖可以發現記錄下的數列必為由頭至尾折半對稱的，所以便以波浪號“~”將後半的數列略去而化簡。再者，圖中每一個鏡射展開所得的正六邊形均被光射線劃分成兩半，每半最少跨 1 個頂點、最多跨 5 個頂點，均為一位的數字，於是我們將數列的逗號略去不致混淆，而將分段跨距串列簡記為 12345~。其表示光射線由起始反射邊 ① 打到第 1 個水平反射邊 ③，1 個分段的跨距紀錄。但是，隨著終點的 O_2 座標越大，反射次數變多，分段跨距串列的長度將變得太長。於是，我們改以表示式記錄：以 a 代表 1，以 b 代表 2，以 c 代表 3，以 d 代表 4，以 e 代表 5；若連續 4 個 b ，便記 $b4$ ；連續 2 個 d ，便記 $d2$ 。

例如：終點座標 $O_2(26,8)$ ，**跨距規律** 記為： $\underline{a}b\underline{1}\underline{c}d\underline{2}\underline{c}b\underline{2}\underline{c}d\underline{1}\underline{e}\sim$ 。

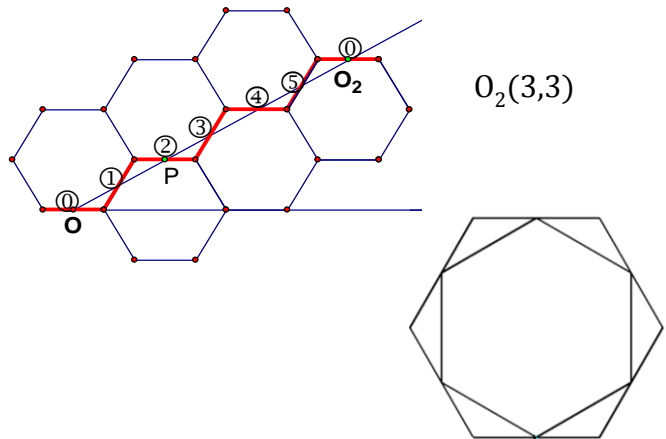
三、研究過程

(一) 循環反射終點座標探索：

1. 六邊形，通過點座標為 $P(m, 1)$ ， $m \in \mathbb{N}$

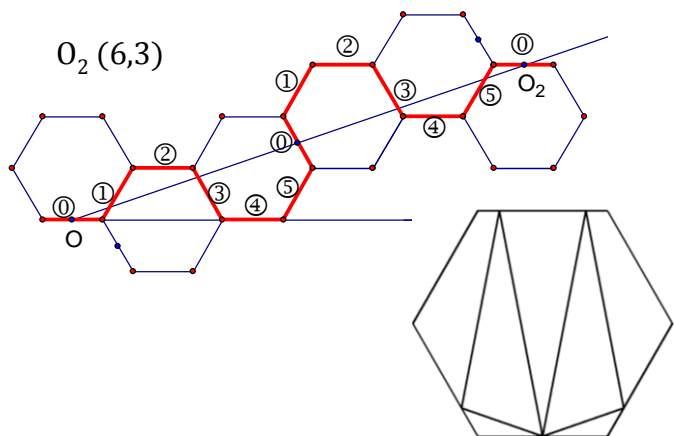
$m = 1$ ，通過點座標為 $P(1,1)$ ：

如圖為展開圖及循環圖， $P(1,1)$ 為光射線所通過第1個水平反射邊的中點，經反射邊編號推算，得出其為反射邊②，並未回到①。從起點 $O(0,0)$ 所在的反射邊①，到 $P(1,1)$ 僅前進2邊，因為要完成1個循環回到反射邊①，可推得終點座標應為 $(1,1)$ 的3倍，即於 $O_2(3,3)$ 完成1次循環反射。此倍數3即為累進段數。



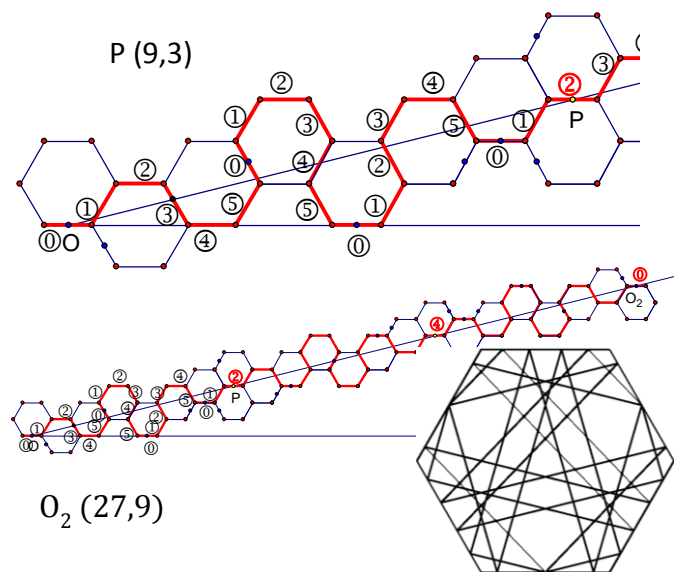
$m = 2$ ，通過點座標為 $P(2,1)$ ：

如圖，光射線沒有在 $P(2,1)$ 回到水平反射邊的中點，其光射線需經過延長後，可得 $(6,3)$ 為光射線所通過第1個水平反射邊的中點，經反射邊編號推算法，得出其為反射邊①，從起點 $O(0,0)$ ，又回到 $(6,3)$ 所在的反射邊①，終點座標即在 $O_2(6,3)$ 可以完成1次循環反射。



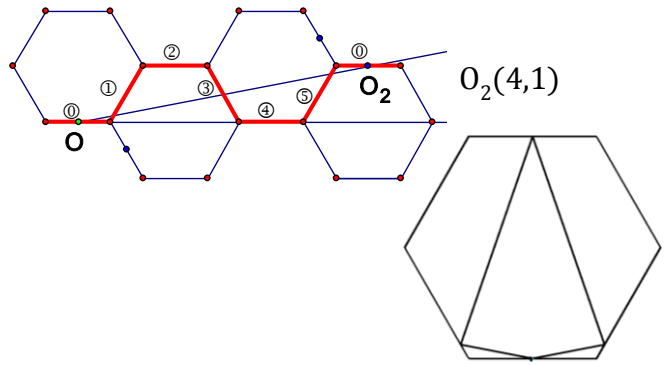
$m = 3$ ，通過點座標為 $P(3,1)$ ：

如圖，光射線沒有在 $P(3,1)$ 回到水平反射邊的中點，其光射線需經過延長後，可得 $P(9,3)$ 為光射線所通過第1個水平反射邊的中點，經反射邊編號推算法，得出其為反射邊②，從起點 $O(0,0)$ ，到 $P(9,3)$ 僅前進2邊，因為要完成1個循環回到反射邊①，所以可推得終點座標應為 $(9,3)$ 的3倍，即於 $O_2(27,9)$ 才可以完成1次循環反射。



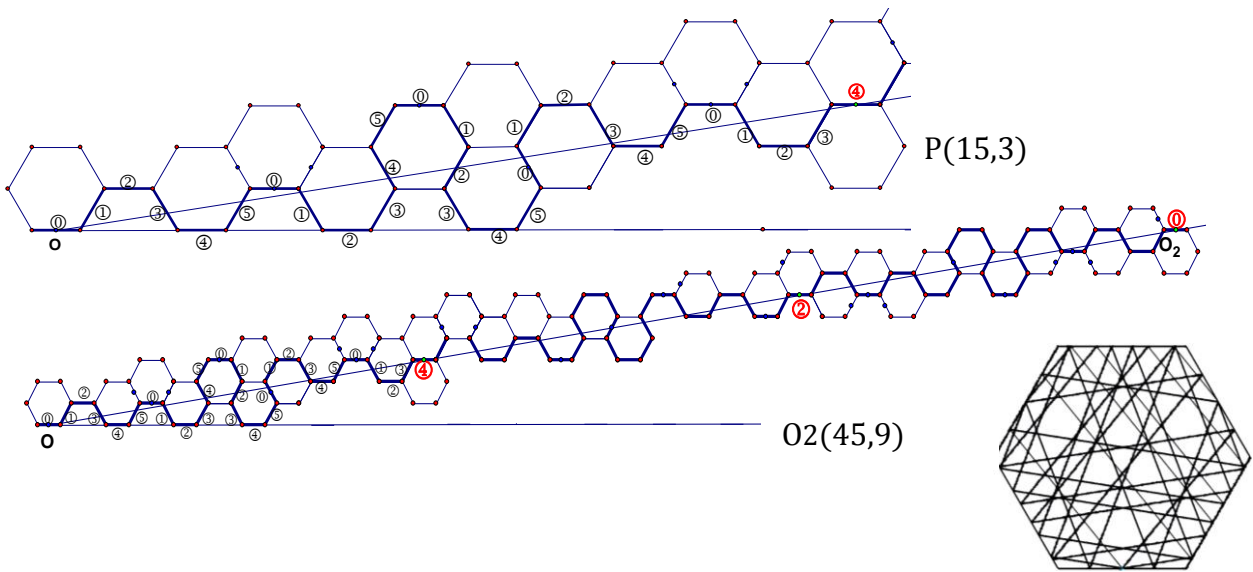
$m = 4$ ，通過點座標為 $P(4,1)$ ：

如圖， $P(4,1)$ 為光射線所通過第 1 個水平反射邊的中點，經反射邊編號推算，得出其為反射邊①，從起點 $O(0,0)$ 所在的反射邊①，又回到 $P(4,1)$ 所在的反射邊①，可推出終點座標即在 $O_2(4,1)$ 可以完成 1 次循環反射。



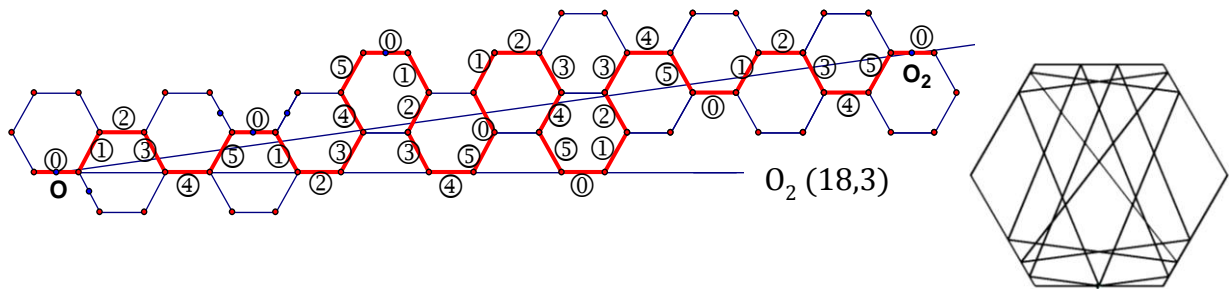
$m = 5$ ，通過點座標為 $P(5,1)$ ：

如圖，光射線沒有在 $P(5,1)$ 回到水平反射邊的中點，其光射線需經過延長後，可得 $(15,3)$ 為光射線所通過第 1 個水平反射邊的中點，經反射邊編號推算，得出其為反射邊④，從起點 $O(0,0)$ ，到 $P(15,3)$ 僅逆時針前進 4 邊，可視為以順時針前進 2 邊，因為要完成 1 個循環回到反射邊①，需前進 6 邊，所以可推得終點座標應為 $P(15,3)$ 的 3 倍，即於 $O_2(45,9)$ 才可以完成 1 次循環反射。



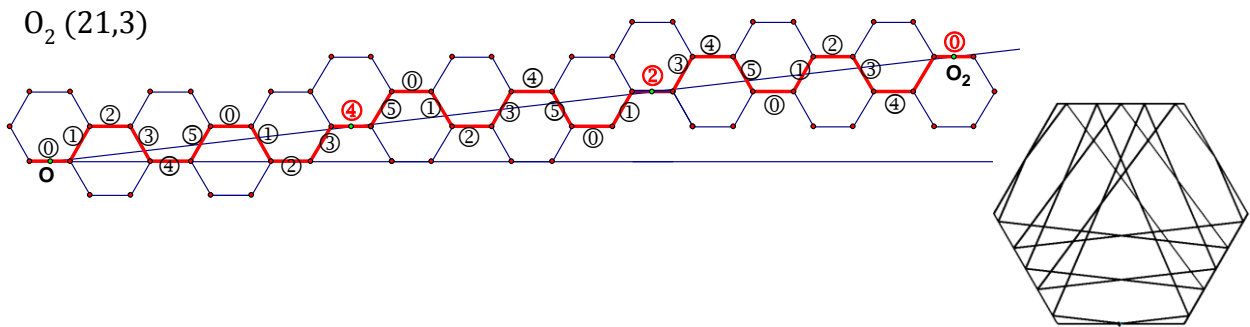
$m = 6$ ，通過點座標為 $P(6,1)$ ：

如圖，光射線沒有在 $P(6,1)$ 回到水平反射邊的中點，其光射線需經過延長後，可得 $(18,3)$ 為光射線所通過第 1 個水平反射邊的中點，經反射邊編號推算法，得出其為反射邊①，從起點 $O(0,0)$ 所在的反射邊①，又回到 $P(18,3)$ 所在的反射邊①，可推出終點座標即在 $O_2(18,3)$ 可以完成 1 次循環反射。



$m = 7$ ，通過點座標為 $P(7,1)$ ：

如圖， $P(7,1)$ 為光射線所通過第 1 個水平反射邊的中點，經反射邊編號推算法，得出其為反射邊④，從起點 $O(0,0)$ 所在的反射邊①，到 $P(7,1)$ 僅前進 4 邊，可視為順時針前進 2 邊，因為要完成 1 個循環回到反射邊①，需前進 6 邊，所以可推得終點座標應為 $(7,1)$ 的 3 倍，即於 $O_2(21,3)$ 才可以完成 1 次循環反射。



以此類推，我們在探索過程發現以下規律(如表 1)：通過點為 $P(m,1)$ ， $(m = 3k + 1, k \in \mathbb{N})$ 時，為光射線所通過第 1 個水平反射邊的中點，從出發到此稱為第 1 個分段，可用反射邊編號推算法得出首段末位邊編號，推算累進段數，並求出完成 1 次循環的終點座標，若以 k 除以 3 的餘數分類，有相同規律的首段末位邊編號及累進段數。

表 1 正 6 邊形 通過點 $P(3k+n, n), k \in \mathbb{N}, n=1$ 反射邊跨距規律資料

k	$P(m, n)$	$*r / \gcd$	$= O_2(x, y)$	$B(x_1, y_1)$	跨距規律	累進段數 r	分段跨距串列	分段反射次數	總反射次數	分段跨邊數	總跨邊數	首段末位邊編號	總中位邊編號
0	$P(1, 1)$	$3 / 1 =$	$O_2(3, 3)$	$B(1, 1)$	ab0a~	3	11~	2	6	2	6	2	3
1	$P(4, 1)$	$1 / 1 =$	$O_2(4, 1)$	$B(4, 1)$	ab2a~	1	1221~	4	4	6	6	0	3
2	$P(7, 1)$	$3 / 1 =$	$O_2(21, 3)$	$B(7, 1)$	ab4a~	3	122221~	6	18	10	30	4	3
3	$P(10, 1)$	$3 / 1 =$	$O_2(30, 3)$	$B(10, 1)$	ab6a~	3	12222221~	8	24	14	42	2	3
4	$P(13, 1)$	$1 / 1 =$	$O_2(13, 1)$	$B(13, 1)$	ab8a~	1	1222222221~	10	10	18	18	0	3
5	$P(16, 1)$	$3 / 1 =$	$O_2(48, 3)$	$B(16, 1)$	ab10a~	3	122222222221~	12	36	22	66	4	3

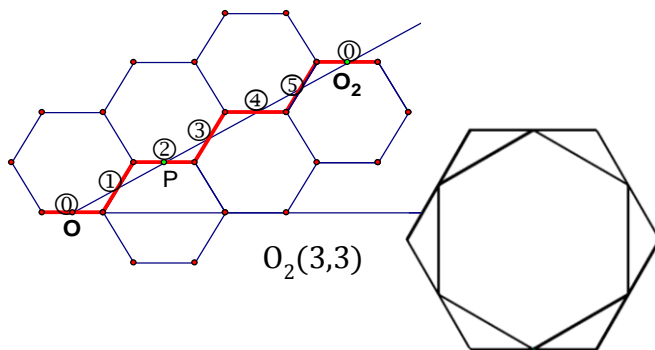
表 1

通過點為 $P(m, 1)$, $m = 2, 5, 8, \dots$ ($m = 3k + 2, k \in \mathbb{Z}, k \geq 0, m \in \mathbb{N}$) 及通過點為 $P(m, 1)$, $m = 3, 6, 9, \dots$ ($m = 3k + 3, k \in \mathbb{Z}, k \geq 0, m \in \mathbb{N}$)時, 需累進3段, 才會打到第一個水平反射邊的中點。因此將於後歸併為 $P(m, 3)$ 的類別比較。而通過點 $P(m, 2)$ 之探索, 僅先挑出 $m = 3k + n, k \in \mathbb{Z}, k \geq 0, n = 2$ 的部分比較, 其餘部分第一個水平反射邊的中點之 y 座標大於 2, 將歸於其他整數之類別比較討論。

2. 六邊形, 通過點座標為 $P(m, n)$, $m = 3k + n, k \in \mathbb{Z}, k \geq 0, n = 2$

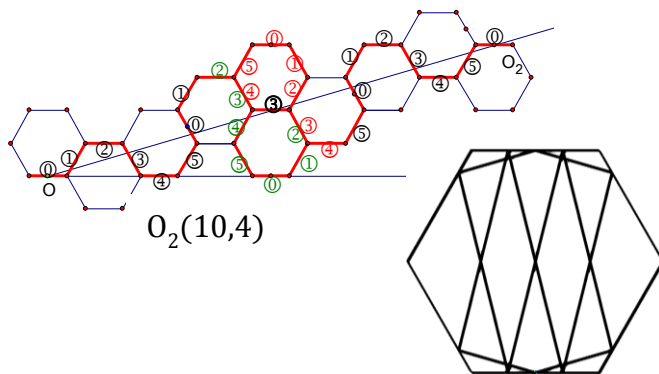
$m = 2$, 通過點座標為 $P(2, 2)$:

如圖, $P(2, 2)$ 為所通過第二個水平反射邊中點, 提公因數 2, 得 $P(1, 1)$, 為光射線所通過第一個水平反射邊的中點, 推得終點座標應為 $(1, 1)$ 的 3 倍, 即於 $O_2(3, 3)$ 才可以完成 1 次循環反射。



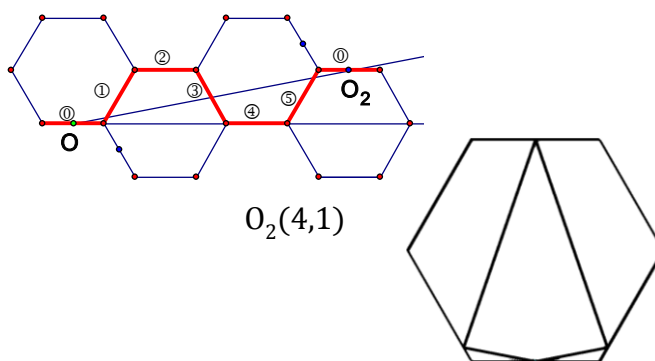
$m = 5$, 通過點座標為 $P(5, 2)$:

如圖, $P(5, 2)$ 為光射線所通過第一個水平反射邊的中點, 經反射邊編號推算法, 得出其為反射邊③, 所以推得終點座標應為 $(5, 2)$ 的 2 倍, 即於 $O_2(10, 4)$



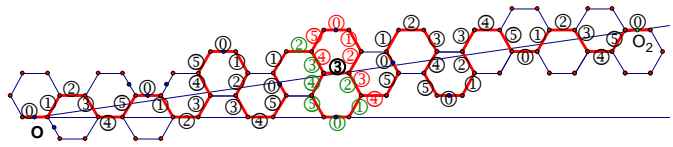
$m = 8$, 通過點座標為 $P(8, 2)$:

如圖所示, $P(8, 2)$ 為所通過第二個水平反射邊中點, 提公因數 2, 得 $P(4, 1)$, 為光射線所通過第一個水平反射邊的中點, 推得終點座標即在 $O_2(4, 1)$ 。



$m = 11$ ，通過點座標為 $P(11,2)$ ：

如圖， $P(11,2)$ 為光射線所通過第一個水平反射邊的中點，經反射邊編號推算法，得出其為反射邊③，所以推得終點座標應為 $(11,2)$ 的 2 倍，於 $O_2(22,4)$ 。

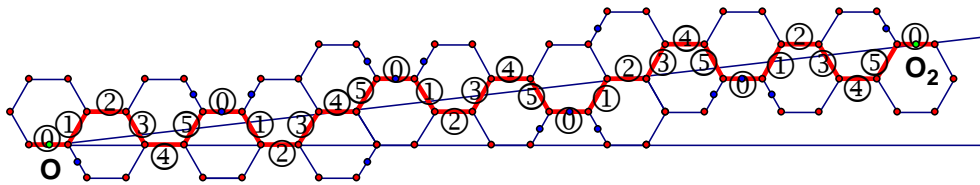


$O_2(22,4)$

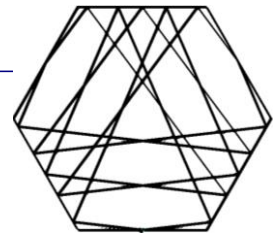


$m = 14$ ，通過點座標為 $P(14,2)$ ：

如圖， $P(14,2)$ 為光射線所通過第二個水平反射邊的中點，提公因數 2，可得 $(7,1)$ ，為光射線所通過第一個水平反射邊的中點，經反射邊編號推算法，得出其為反射邊④，所以推得終點座標應為 $(7,1)$ 的 3 倍，即於 $O_2(21,3)$ 。

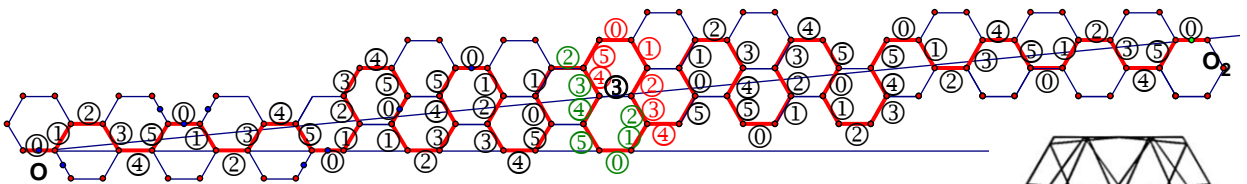


$O_2(21,3)$

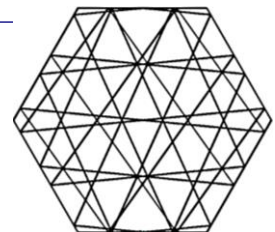


$m=17$ ，通過點座標為 $P(17,2)$ ：

如圖， $P(17,2)$ 為光射線所通過第一個水平反射邊的中點，經反射邊編號推算法，得出其為反射邊③，從起點 $O(0,0)$ 所在的反射邊①，到 $P(17,2)$ 僅前進 3 邊，因為要完成 1 個循環回到反射邊①，需前進 6 邊，所以可推得終點座標應為 $(17,2)$ 的 2 倍，即於 $O_2(34,4)$ 。



$O_2(34,4)$



以此類推，我們發現通過點為 $P(m,2)$ ， $(m = 3k + 2, k \in \mathbb{Z}, k \geq 0, m \in \mathbb{N})$ ，發現以下規律(如表 2)， $m \neq 2r (r \in \mathbb{N})$ 時，為光射線所通過第 1 個水平反射邊的中點，到此稱為 1 段，再分別以反射邊編號推算法得出其末位邊編號，推算所需的累進段數，並求出完成一次循環

的終點座標。其中末位邊編號皆為③，累進段數皆為 2 段。

$m = 2r(r \in \mathbb{N})$ 時，為光射線所通過第 2 個水平反射邊的中點，故可分為 2 段，若將 x 座標和 y 座標的公因數 2 提出便是 $P(m, 1)$ 的情形。還發現若以 k 除以 6 的餘數分類，有相同規律的首段末位邊編號及累進段數。

表 2 正 6 邊形 通過點 $P(3k+n, n), k \in \mathbb{N}, n=2$ 反射邊跨距規律資料

k	$P(m, n)$	$*r / \gcd =$	$O2(x, y)$	$B(x1, y1)$	跨距規律	累進段數 r	分段跨距串列	分段反射次數	總反射次數	分段跨邊數	總跨邊數	首段末位邊編號	總中位邊編號
0	$P(2, 2)$	$3 / 2 =$	$O2(3, 3)$	$B(1, 1)$	ab0a~	3	11~	2	6	2	6	2	3
1	$P(5, 2)$	$2 / 1 =$	$O2(10, 4)$	$B(5, 2)$	ab1cd1e~	2	12345~	5	10	15	30	3	3
2	$P(8, 2)$	$1 / 2 =$	$O2(4, 1)$	$B(4, 1)$	ab2a~	1	1221~	4	4	6	6	0	3
3	$P(11, 2)$	$2 / 1 =$	$O2(22, 4)$	$B(11, 2)$	ab3cd3e~	2	122234445~	9	18	27	54	3	3
4	$P(14, 2)$	$3 / 2 =$	$O2(21, 3)$	$B(7, 1)$	ab4a~	3	122221~	6	18	10	30	4	3
5	$P(17, 2)$	$2 / 1 =$	$O2(34, 4)$	$B(17, 2)$	ab5cd5e~	2	1222223444445~	13	26	39	78	3	3
6	$P(20, 2)$	$3 / 2 =$	$O2(30, 3)$	$B(10, 1)$	ab6a~	3	12222221~	8	24	14	42	2	3
7	$P(23, 2)$	$2 / 1 =$	$O2(46, 4)$	$B(23, 2)$	ab7cd7e~	2	12222222344444445~	17	34	51	102	3	3
8	$P(26, 2)$	$1 / 2 =$	$O2(13, 1)$	$B(13, 1)$	ab8a~	1	122222221~	10	10	18	18	0	3
9	$P(29, 2)$	$2 / 1 =$	$O2(58, 4)$	$B(29, 2)$	ab9cd9e~	2	122222222234444444445~	21	42	63	126	3	3
10	$P(32, 2)$	$3 / 2 =$	$O2(48, 3)$	$B(16, 1)$	ab10a~	3	12222222221~	12	36	22	66	4	3
11	$P(35, 2)$	$2 / 1 =$	$O2(70, 4)$	$B(35, 2)$	ab11cd11e~	2	12222222222344444444445~	25	50	75	150	3	3

表 2

綜合前面我們發現有以下關係式：

- 分段跨邊數 = 分段跨距串列各數字的加總
- 分段反射次數 = 分段跨距串列數字的位數
- 首段末位邊編號 = 分段跨邊數 mod 6
- 累進段數：由首段末位邊編號決定
- 總跨邊數 = 分段跨邊數 × 累進段數
- 總反射次數 = 分段反射次數 × 累進段數

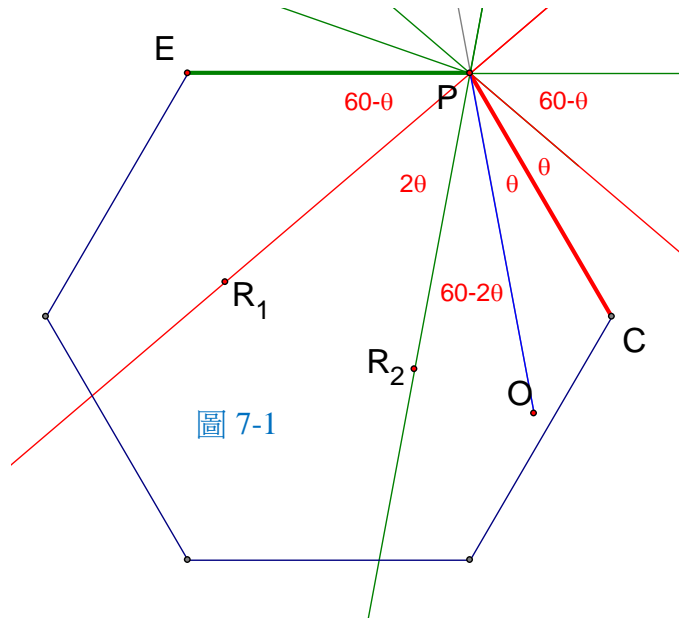
接著便以此方法，實驗並記錄通過點為 $P(m, n)$ ， $(m = 3k + n, k \in \mathbb{Z}, k \geq 0, m, n \in \mathbb{N})$ 的反射邊跨距規律。所得結果如附件一、正 6 邊形反射邊跨距規律資料。

伍、研究討論及結果

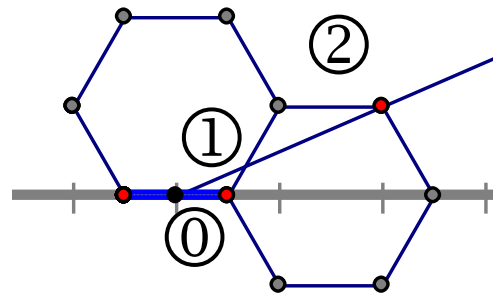
一、研究討論

(一) 光射線通過正 6 邊形頂點時無法循環反射：

如圖 7-1，若 \vec{OP} 射向正六邊形的頂點 P， \vec{OP} 若先經由 \vec{CP} 作反射，在經由 \vec{PE} 作第二次反射，可得 \vec{PR}_1 為其反射線，如圖可知 $\angle OPR_1 = 60^\circ$ ， \vec{OP} 若先經由 \vec{PE} 作反射，則所得反射線為 \vec{PR}_2 ， $\angle OPR_2 = (60 - 2\theta)^\circ$ ，兩個反射線射向不同方向。因此無法判定光線射向頂點時反射的結果為何。



如右圖 7-2，光線射向為 $P(7,2)$ ，光線打到終點座標為 $O_2(\frac{1}{2}, 1)$ ，為正六邊形的頂點，無法判定反射方向，因而沒有形成循環反射。當通過點 $P(m, n)$ ， $(m = 3k + n, k \in \mathbb{Z}, k \geq 0, m, n \in \mathbb{N})$



$n = 6r, r \in \mathbb{N}, \gcd(k, n) = 1$ 時，光射線會通過正六邊形的頂點。

(二) 光射線回到原出發點再反射，和第 1 次的出發角度不同時，須回到原出發點第 2 次才完成循環

如右圖 8-1，終點座標為

$O_2(6,3)$ ，首段末位邊編號為①

總中位編號亦為①。此情形光射線打到 P_1 時雖是反射邊①之中點，經再反射時，在三角形 OP_1Q 中， $\angle O = \theta$ ，

$\angle Q$ 的外角 = 120° ，由三角形外角定理可知，出發的角度

$$\angle RP_1O_2 = \angle OP_1Q = 120^\circ - \theta，$$

而不是原出發角 θ 。因此並未完

成 1 循環反射，直到光射線打到 $O_2(6,3)$ ，這種情況於出發點可視為有兩種出發的角度： θ 和 $120^\circ - \theta$ 。

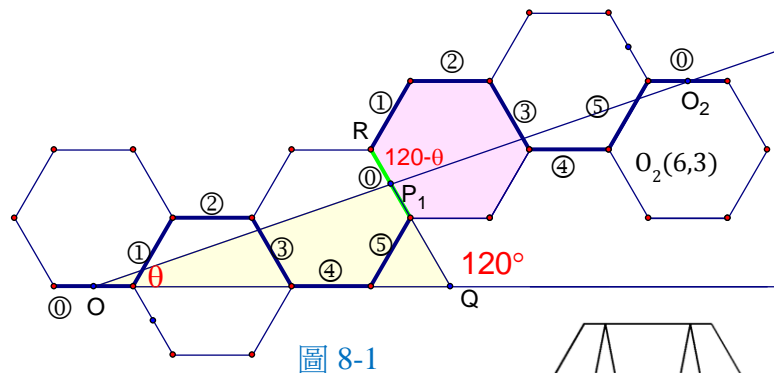


圖 8-1

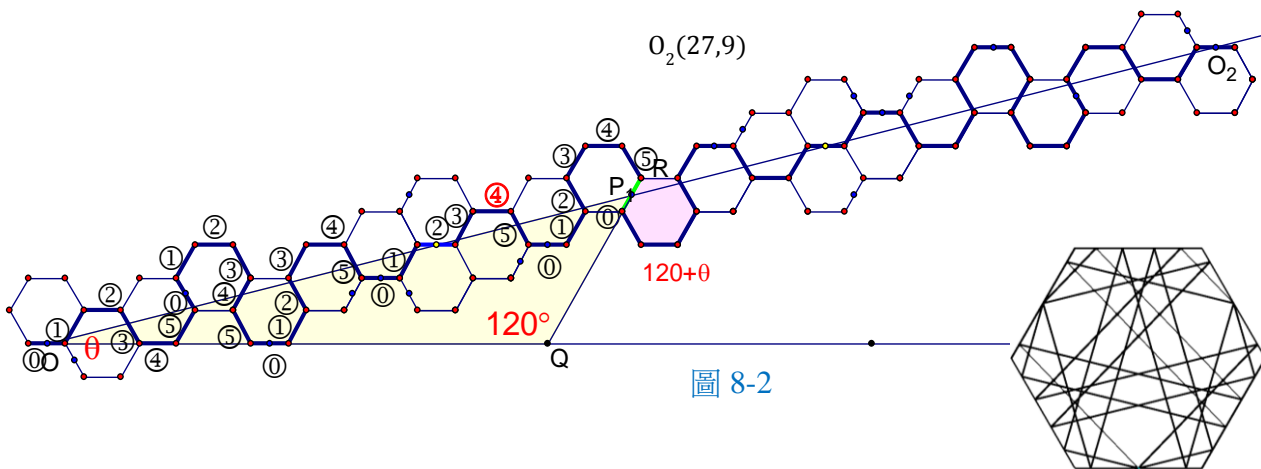


圖 8-2

另一種情況為圖 8-2，終點座標為 $O_2(6,3)$ ，首段末位邊編號為①，總中位編號亦為①。

此情形光射線打到 P_1 時雖是反射邊①之中點，經再反射時，在三角形 OP_1Q 中， $\angle O = \theta$ ， $\angle Q = 120^\circ$ ，由三角形外角定理可知，出發的角度 $\angle QPO_2 = 120^\circ + \theta$ ，而不是原出發角 θ 。因此並未完成 1 循環反射，直到光射線打到 $O_2(27,9)$ 才完成 1 循環反射，這種情況於出發點可視為有兩種出發的角度： θ 和 $120^\circ + \theta$ 。

根據正 6 邊形的實驗資料，當通過 $P(m, n)$ ， $(m = 3k + n, k \in \mathbb{Z}, k \geq 0, m, n \in \mathbb{N})$ 於 $n = 3$ 時，若 $k \neq 3r, r \in \mathbb{N}$ ，時會發生上述情況。當通過點 $P(m, n)$ ， $(m = 3k + n, k \in \mathbb{Z}, k \geq 0, m, n \in \mathbb{N})$ $n = 9$ 時，若 $k \neq 9r, r \in \mathbb{N}$ ，時也會發生上述情況。

(三) 通過點 $P(m, n)$ 在第一象限時，分段反射次數的規律及一般解

當通過點 $P(m, n)$ ， $(m = 3k + n, k \in \mathbb{Z}, k \geq 0, m, n \in \mathbb{N})$ 時，

$n = 1$ 時，分段反射次數的數列為：2,4,6,8,10...，成等差數列，公差 = 2，

$$\text{第}k\text{項} = 2k + 2 = \frac{2}{3}(m - n) + 2 = (2/3)(m - n)/n + 2$$

$n = 2$ 時，

$k = 2r, r \in \mathbb{N}$ ，分段反射次數的數列為：2,4,6,8,10,12...，成等差數列，公差 = 2，

$$\text{第}k\text{項} = k + 2 = \frac{1}{3}(m - n) + 2 = (2/3)(m - n)/n + 2$$

$k = 2r + 1, r \in \mathbb{N}$ ，分段反射次數的數列為：5,9,13,21,27,25...，成等差數列，公差 = 4，

$$\text{第}k\text{項} = 2k + 3 = \frac{2}{3}(m - n) + 3 = (4/3)(m - n)/n + 3$$

$n = 3$ 時，

$k = 3r, r \in \mathbb{N}$ ，分段反射次數的數列為：2,4,6,8,10,12...，成等差數列，公差 = 2，

$$\text{第}k\text{項} = \frac{2}{3}k + 2 = \frac{2}{3}(m - n) + 2 = (2/3)(m - n)/n + 2$$

$k = 3r + 1, r \in \mathbb{N}$ ，分段反射次數的數列為：6,12,18,24,30,...，成等差數列，公差 = 6，

$$\text{第}k\text{項} = 2k + 4 = \frac{2}{3}(m - n) + 4 = (6/3)(m - n)/n + 4$$

$k = 3r + 2, r \in \mathbb{N}$ ，分段反射次數的數列為：8,14,20,26,32,38...，成等差數列，公差 = 6，

$$\text{第}k\text{項} = 2k + 4 = \frac{2}{3}(m - n) + 4 = (6/3)(m - n)/n + 4$$

$n = 4$ 時，

$k = 4r, r \in \mathbb{N}$ ，分段反射次數的數列為：2,4,6,8,10,12...，成等差數列，公差 = 2，

$$\text{第}k\text{項} = \frac{1}{2}k + 2 = \frac{1}{2}(m - n) + 2 = (2/3)(m - n)/n + 2$$

$k = 4r + 1, r \in \mathbb{N}$ ，分段反射次數的數列為：7,15,23,31,39...，成等差數列，公差 = 8，

$$\text{第}k\text{項} = 2k + 5 = \frac{2}{3}(m - n) + 5 = (8/3)(m - n)/n + 5$$

$k = 4r + 2, r \in \mathbb{N}$ ，分段反射次數的數列為：5,9,13,17,21,25...，成等差數列，公差 = 4，

$$\text{第}k\text{項} = k + 3 = \frac{1}{3}(m - n) + 3 = (4/3)(m - n)/n + 3$$

$k = 4r + 3, r \in \mathbb{N}$ ，分段反射次數的數列為：11,19,27,35,43,51...，成等差數列，公差 = 8，

$$\text{第}k\text{項} = 2k + 5 = \frac{2}{3}(m - n) + 5 = (8/3)(m - n)/n + 5$$

$n = 5$ 時，

$k = 5r, r \in \mathbb{N}$ ，分段反射次數的數列為：2,4,6,8,10,12...，成等差數列，公差 = 2，

$$\text{第}k\text{項} = \frac{1}{2}k + 2 = \frac{1}{2}(m - n) + 2 = (2/3)(m - n)/n + 2$$

$k = 5r + 1, r \in \mathbb{N}$ ，分段反射次數的數列為：8,18,28,38,48,58,...，成等差數列，公差 = 10，

$$\text{第}k\text{項} = 2k + 6 = \frac{2}{3}(m - n) + 6 = (10/3)(m - n)/n + 6$$

$k = 5r + 2, r \in \mathbb{N}$ ，分段反射次數的數列為：10,20,30,40,50,60...，成等差數列，公差=10，

$$\text{第}k\text{項} = 2k + 6 = \frac{2}{3}(m - n) + 6 = (10/3)(m - n)/n + 6$$

$k = 5r + 3, r \in \mathbb{N}$ ，分段反射次數的數列為：12,22,32,42,52,62,...，成等差數列，公差=10，

$$\text{第}k\text{項} = 2k + 6 = \frac{2}{3}(m - n) + 6 = (10/3)(m - n)/n + 6$$

$k = 5r + 4, r \in \mathbb{N}$ ，分段反射次數的數列為：14,24,34,44,54,64,74,...，成等差數列，公差=10，

$$\text{第}k\text{項} = 2k + 6 = \frac{2}{3}(m - n) + 6 = (10/3)(m - n)/n + 6$$

基於上述之觀察，同時檢驗 $n = 1$ 到 $n = 10$ 之資料，發現分段反射次數與通過點座標 $P(m, n)$ ， y 座標 n 之所有因數有關，可根據最大公因數 $\gcd(k, n)$ 計算表示，

$$\text{分段反射次數} = \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{n}{\gcd(k, n)}\right) \times \left(\frac{m-n}{n}\right)}_{\text{分段跨邊數}} + \underbrace{\left(\frac{n}{\gcd(k, n)}\right)}_{\text{分段反射次數}} + 1 + 2 \left[\frac{1}{6} \times \left(\frac{n}{\gcd(k, n)}\right) \right]$$

註：於此括號為高斯記號

例如： $P(19,4)$ ， $\gcd(k, n) = \gcd\left(\frac{19-4}{3}, 4\right) = 1$

$$\begin{aligned} \text{分段反射次數} &= \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{4}{1}\right) \left(\frac{19-4}{4}\right)}_{= 10 + 5 + 0} + \underbrace{\left(\frac{4}{1}\right)}_{= 15} + 1 + 2 \left[\frac{1}{6} \left(\frac{4}{1}\right) \right] \\ &= 10 + 5 + 0 \\ &= 15 \end{aligned}$$

可得

{	分段跨邊數 = 分段跨距串列各數字的加總 = 45
	分段反射次數 = 分段跨距串列數字的位數 = 15
	首段末位邊編號 = 分段跨邊數 mod 6 = 45 mod 6 = 3
	累進段數：由首段末位邊編號決定 = 6/3 = 2
	總跨邊數 = 分段跨邊數 × 累進段數 = 45 * 2 = 90
總反射次數 = 分段反射次數 × 累進段數 = 15 * 2 = 30	

二、研究結果：

(一)根據夾角 60 度的斜角座標平面，設正六邊形 $ABCDEF$ 的 \overrightarrow{AB} 為 x 軸，且以起始邊 \overline{AB} 的中點為原點 $O(0,0)$ 作為光射線的起點，正六邊形邊長為 1 個單位長，則可將鏡射展開圖各水平反射邊中點定出座標。當通過點 $P(m, n)$ ， $(m = 3k + n, k \in \mathbb{Z}, k \geq 0, m, n \in \mathbb{N})$ $n = 6r, r \in \mathbb{N}, \gcd(k, n) = 1$ 時，光射線會通過正六邊形的頂點，無法產生循環反射。

(二)通過點為 $P(m, n)$ ， $(m = 3k + n, k \in \mathbb{Z}, k \geq 0, m, n \in \mathbb{N})$ 的情形，除了第(一)點之類別以外均可完成循環反射。

(三)當通過 $P(m, n)$ ， $(m = 3k + n, k \in \mathbb{Z}, k \geq 0, m, n \in \mathbb{N})$ ，於 $n = 3$ 時，若 $k \neq 3r, r \in \mathbb{N}$ ，時會發生光射線回到原出發點 2 次才完成循環。
 當通過點 $P(m, n)$ ， $(m = 3k + n, k \in \mathbb{Z}, k \geq 0, m, n \in \mathbb{N})$ $n = 9$ 時，若 $k \neq 9r, r \in \mathbb{N}$ ，時也會發生光射線回到原出發點 2 次才完成循環。
 光射線回到原出發點 2 次才完成循環的兩個角度組合：第一類為兩個角度和 120° ，第二類為兩個角度差 120° 。

(四)通過點 $P(m, n)$ ， $(m = 3k + n, k \in \mathbb{Z}, k \geq 0, m, n \in \mathbb{N})$ ，之分段反射次數

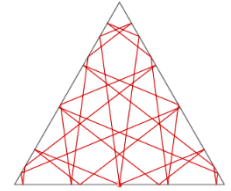
$$= \left(\frac{2}{3} \right) \times \left(\frac{n}{\gcd(k, n)} \right) \times \left(\frac{m-n}{n} \right) + \left(\frac{n}{\gcd(k, n)} \right) + 1 + 2 \left[\frac{1}{6} \times \left(\frac{n}{\gcd(k, n)} \right) \right]$$

註：於此括號為高斯記號

(五) $\left\{ \begin{array}{l} \text{分段跨邊數} = \text{分段跨距串列各數字的加總} \\ \text{分段反射次數} = \text{分段跨距串列數字的位數} \\ \text{首段末位邊編號} = \text{分段跨邊數 mod } 6 \\ \text{累進段數} : \text{由首段末位邊編號決定} \\ \text{總跨邊數} = \text{分段跨邊數} \times \text{累進段數} \\ \text{總反射次數} = \text{分段反射次數} \times \text{累進段數} \end{array} \right.$

陸、未來展望

- 1.本研究目前討論通過點座標位於第一象限之規律，通過點座標位於第二象限，射向 60° 至 90° 之間尚未實驗討論，將列為下一個研究目標。
- 2.若由邊上其他位置的點出發，循環的情形會如何變化，反射的規律又如何，展開圖和循環圖又會如何變化呢。
- 3.此次發展的方法可以繼續研究其他正多邊形，例如：最基本的正三角形也有回到起始邊的中點 2 次才完成 1 循環之情形，如右圖。
還有正方形，正 5 邊形...，無論可否平鋪鑲嵌於平面的圖形，大膽猜想會有新規律的發現。還有非正多邊形但可以經鏡射平鋪平面的鑲嵌圖形，亦是潛在可研究之對象。希望我們有更多的時間可以投入更多的研究。



柒、參考資料

- 1.洪宇陽、林耀廷、洪泊羲(2012)。萬花筒—正三角鏡。中華民國第 52 屆中小學科學展覽會高中組數學科佳作作品說明書。
- 2.吳聲賢、張愷文、賴 禎(2015)。「返」本還原—光在正三角形中反射路徑之規律性。中華民國第 55 屆中小學科學展覽會國中組數學科佳作作品說明書。

附件一、正 6 邊形反射邊跨距規律資料

圖 1 正 6 邊形 通過點 $P(3k+n, n)$, $k \in \mathbb{N}$, $n=1$ 反射邊跨距規律資料

k	$P(m, n)$	$/ \gcd$	=	$O2(x, y)$	$B(x1, y1)$	跨距規律	累進 段數	分段跨距串列	分段 反射 次數	總 反射 次數	分段 跨邊 數	總 跨邊 數	首段 末位邊 編號	總 中位邊 編號		
0	$P(1, 1)$	3	/	1	=	$O2(3, 3)$	$B(1, 1)$	ab0a~	3	11~	2	6	2	6	2	3
1	$P(4, 1)$	1	/	1	=	$O2(4, 1)$	$B(4, 1)$	ab2a~	1	1221~	4	4	6	6	0	3
2	$P(7, 1)$	3	/	1	=	$O2(21, 3)$	$B(7, 1)$	ab4a~	3	122221~	6	18	10	30	4	3
3	$P(10, 1)$	3	/	1	=	$O2(30, 3)$	$B(10, 1)$	ab6a~	3	12222221~	8	24	14	42	2	3
4	$P(13, 1)$	1	/	1	=	$O2(13, 1)$	$B(13, 1)$	ab8a~	1	122222221~	10	10	18	18	0	3
5	$P(16, 1)$	3	/	1	=	$O2(48, 3)$	$B(16, 1)$	ab10a~	3	12222222221~	12	36	22	66	4	3

圖 2 正 6 邊形 通過點 $P(3k+n, n)$, $k \in \mathbb{N}$, $n=2$ 反射邊跨距規律資料

k	$P(m, n)$	$/ \gcd$	=	$O2(x, y)$	$B(x1, y1)$	跨距規律	累進 段數	分段跨距串列	分段 反射 次數	總 反射 次數	分段 跨邊 數	總 跨邊 數	首段 末位邊 編號	總 中位邊 編號		
0	$P(2, 2)$	3	/	2	=	$O2(3, 3)$	$B(1, 1)$	ab0a~	3	11~	2	6	2	6	2	3
1	$P(5, 2)$	2	/	1	=	$O2(10, 4)$	$B(5, 2)$	ab1cd1e~	2	12345~	5	10	15	30	3	3
2	$P(8, 2)$	1	/	2	=	$O2(4, 1)$	$B(4, 1)$	ab2a~	1	1221~	4	4	6	6	0	3
3	$P(11, 2)$	2	/	1	=	$O2(22, 4)$	$B(11, 2)$	ab3cd3e~	2	122234445~	9	18	27	54	3	3
4	$P(14, 2)$	3	/	2	=	$O2(21, 3)$	$B(7, 1)$	ab4a~	3	122221~	6	18	10	30	4	3
5	$P(17, 2)$	2	/	1	=	$O2(34, 4)$	$B(17, 2)$	ab5cd5e~	2	1222223444445~	13	26	39	78	3	3
6	$P(20, 2)$	3	/	2	=	$O2(30, 3)$	$B(10, 1)$	ab6a~	3	12222221~	8	24	14	42	2	3
7	$P(23, 2)$	2	/	1	=	$O2(46, 4)$	$B(23, 2)$	ab7cd7e~	2	12222222344444445~	17	34	51	102	3	3
8	$P(26, 2)$	1	/	2	=	$O2(13, 1)$	$B(13, 1)$	ab8a~	1	122222221~	10	10	18	18	0	3
9	$P(29, 2)$	2	/	1	=	$O2(58, 4)$	$B(29, 2)$	ab9cd9e~	2	122222222234444444445~	21	42	63	126	3	3
10	$P(32, 2)$	3	/	2	=	$O2(48, 3)$	$B(16, 1)$	ab10a~	3	12222222221~	12	36	22	66	4	3
11	$P(35, 2)$	2	/	1	=	$O2(70, 4)$	$B(35, 2)$	ab11cd11e~	2	1222222222223444444444445~	25	50	75	150	3	3

圖 3 正 6 邊形 通過點 $P(3k+n, n)$, $k \in \mathbb{N}$, $n=3$ 反射邊跨距規律資料

k	$P(m, n)$	$/\gcd$	=	$O2(x, y)$	$B(x_1, y_1)$	跨距規律	累進 段數	分段跨距串列	分段 反射 次數	總 反射 次數	分段 跨邊 數	總 跨邊 數	首段 末位邊 編號	總 中位邊 編號		
0	$P(3, 3)$	3	/	3	=	$O2(3, 3)$	$B(1, 1)$	ab0a~	3	11~	2	6	2	6	2	3
1	$P(6, 3)$	3	/	3	=	$O2(6, 3)$	$B(2, 1)$	ab1 <u>cd</u> 0 <u>cb</u> 1a~	1	123321~	6	6	12	12	0	0
2	$P(9, 3)$	9	/	3	=	$O2(27, 9)$	$B(3, 1)$	ab1 <u>cd</u> 2 <u>cb</u> 1a~	3	12344321~	8	24	20	60	2	0
3	$P(12, 3)$	1	/	3	=	$O2(4, 1)$	$B(4, 1)$	ab2a~	1	1221~	4	4	6	6	0	3
4	$P(15, 3)$	9	/	3	=	$O2(45, 9)$	$B(5, 1)$	ab3 <u>cd</u> 2 <u>cb</u> 3a~	3	122234432221~	12	36	28	84	4	0
5	$P(18, 3)$	3	/	3	=	$O2(18, 3)$	$B(6, 1)$	ab3 <u>cd</u> 4 <u>cb</u> 3a~	1	12223444432221~	14	14	36	36	0	0
6	$P(21, 3)$	3	/	3	=	$O2(21, 3)$	$B(7, 1)$	ab4a~	3	122221~	6	18	10	30	4	3
7	$P(24, 3)$	9	/	3	=	$O2(72, 9)$	$B(8, 1)$	ab5 <u>cd</u> 4 <u>cb</u> 5a~	3	122222344443222221~	18	54	44	132	2	0
8	$P(27, 3)$	9	/	3	=	$O2(81, 9)$	$B(9, 1)$	ab5 <u>cd</u> 6 <u>cb</u> 5a~	3	12222234444443222221~	20	60	52	156	4	0
9	$P(30, 3)$	3	/	3	=	$O2(30, 3)$	$B(10, 1)$	ab6a~	3	12222221~	8	24	14	42	2	3
10	$P(33, 3)$	3	/	3	=	$O2(33, 3)$	$B(11, 1)$	ab7 <u>cd</u> 6 <u>cb</u> 7a~	1	1222222344444432222221~	24	24	60	60	0	0
11	$P(36, 3)$	9	/	3	=	$O2(108, 9)$	$B(12, 1)$	ab7 <u>cd</u> 8 <u>cb</u> 7a~	3	122222234444444432222221~	26	78	68	204	2	0
12	$P(39, 3)$	1	/	3	=	$O2(13, 1)$	$B(13, 1)$	ab8a~	1	122222221~	10	10	18	18	0	3
13	$P(42, 3)$	9	/	3	=	$O2(126, 9)$	$B(14, 1)$	ab9 <u>cd</u> 8 <u>cb</u> 9a~	3	1222222223444444443222222221~	30	90	76	228	4	0
14	$P(45, 3)$	3	/	3	=	$O2(45, 3)$	$B(15, 1)$	ab9 <u>cd</u> 10 <u>cb</u> 9a~	1	122222222344444444443222222221~	32	32	84	84	0	0
15	$P(48, 3)$	3	/	3	=	$O2(48, 3)$	$B(16, 1)$	ab10a~	3	12222222221~	12	36	22	66	4	3
16	$P(51, 3)$	9	/	3	=	$O2(153, 9)$	$B(17, 1)$	ab11 <u>cd</u> 10 <u>cb</u> 11a~	3	1222222222234444444444322222222221~	36	108	92	276	2	0
17	$P(54, 3)$	9	/	3	=	$O2(162, 9)$	$B(18, 1)$	ab11 <u>cd</u> 12 <u>cb</u> 11a~	3	12222222222344444444444322222222221~	38	114	100	300	4	0

圖 4 正 6 邊形 通過點 P(3k+n, n) , k ∈ N, n=4 反射邊跨距規律資料

k	P (m , n)	/ gcd	=	O2 (x , y)	B (x1 , y1)	跨距規律	累進 段數	分段跨距串列	分段 反射 次數	總 反射 次數	分段 跨邊 數	總 跨邊 數	首段 末位邊 編號	總 中位邊 編號	
0	P (4 , 4)	3	/	4 =	O2 (3 , 3)	B (1 , 1)	ab0a~	3	11~	2	6	2	6	2	3
1	P (7 , 4)	2	/	1 =	O2 (14 , 8)	B (7 , 4)	ab1gd0gb0gd1e~	2	1233345~	7	14	21	42	3	3
2	P (10 , 4)	2	/	2 =	O2 (10 , 4)	B (5 , 2)	ab1gd1e~	2	12345~	5	10	15	30	3	3
3	P (13 , 4)	2	/	1 =	O2 (26 , 8)	B (13 , 4)	ab1gd2gb2gd1e~	2	12344322345~	11	22	33	66	3	3
4	P (16 , 4)	1	/	4 =	O2 (4 , 1)	B (4 , 1)	ab2a~	1	1221~	4	4	6	6	0	3
5	P (19 , 4)	2	/	1 =	O2 (38 , 8)	B (19 , 4)	ab3gd2gb2gd3e~	2	122234432234445~	15	30	45	90	3	3
6	P (22 , 4)	2	/	2 =	O2 (22 , 4)	B (11 , 2)	ab3gd3e~	2	122234445~	9	18	27	54	3	3
7	P (25 , 4)	2	/	1 =	O2 (50 , 8)	B (25 , 4)	ab3gd4gb4gd3e~	2	122234444322234445~	19	38	57	114	3	3
8	P (28 , 4)	3	/	4 =	O2 (21 , 3)	B (7 , 1)	ab4a~	3	122~221	6	18	10	30	4	3
9	P (31 , 4)	2	/	1 =	O2 (62 , 8)	B (31 , 4)	ab5gd4gb4gd5e~	2	122223444432222344445~	23	46	69	138	3	3
10	P (34 , 4)	2	/	2 =	O2 (34 , 4)	B (17 , 2)	ab5gd5e~	2	122223444445~	13	26	39	78	3	3
11	P (37 , 4)	2	/	1 =	O2 (74 , 8)	B (37 , 4)	ab5gd6gb6gd5e~	2	12222344444322222344445~	27	54	81	162	3	3
12	P (40 , 4)	3	/	4 =	O2 (30 , 3)	B (10 , 1)	ab6a~	3	1222221~	8	24	14	42	2	3
13	P (43 , 4)	2	/	1 =	O2 (86 , 8)	B (43 , 4)	ab7gd6gb6gd7e~	2	122222234444432222234444445~	31	62	93	186	3	3
14	P (46 , 4)	2	/	2 =	O2 (46 , 4)	B (23 , 2)	ab7gd7e~	2	122222234444445~	17	34	51	102	3	3
15	P (49 , 4)	2	/	1 =	O2 (98 , 8)	B (49 , 4)	ab7gd8gb8gd7e~	2	1222222344444443222222344444445~	35	70	105	210	3	3
16	P (52 , 4)	1	/	4 =	O2 (13 , 1)	B (13 , 1)	ab8a~	1	12222221~	10	10	18	18	0	3
17	P (55 , 4)	2	/	1 =	O2 (110 , 8)	B (55 , 4)	ab9gd8gb8gd9e~	2	122222223444444432222223444444445~	39	78	117	234	3	3
18	P (58 , 4)	2	/	2 =	O2 (58 , 4)	B (29 , 2)	ab9gd9e~	2	122222223444444445~	21	42	63	126	3	3
19	P (61 , 4)	2	/	1 =	O2 (122 , 8)	B (61 , 4)	ab9gd10gb10gd9e~	2	12222222344444444322222223444444445~	43	86	129	258	3	3
20	P (64 , 4)	3	/	4 =	O2 (48 , 3)	B (16 , 1)	ab10a~	3	1222222221~	12	36	22	66	4	3
21	P (67 , 4)	2	/	1 =	O2 (134 , 8)	B (67 , 4)	ab11gd10gb10gd11e~	2	1222222223444444443222222234444444445~	47	94	141	282	3	3
22	P (70 , 4)	2	/	2 =	O2 (70 , 4)	B (35 , 2)	ab11gd11e~	2	12222222234444444445~	25	50	75	150	3	3
23	P (73 , 4)	2	/	1 =	O2 (146 , 8)	B (73 , 4)	ab11gd12gb12gd11e~	2	122222222344444444432222222234444444445~	51	102	153	306	3	3

圖5 正6邊形 通過點P(3k+n,n), k∈N, n=5 反射邊跨距規律資料

k	P (m , n)	/gcd	=	O2 (x , y)	B (x1 , y1)	跨距規律	累進 段數	分段跨距串列	分段 反射 次數	總 反射 次數	分段 跨邊 數	總 跨邊 數	首段 末位邊 編號	總 中位邊 編號
0	P (5 , 5)	3	/	5 = O2 (3 , 3)	B (1 , 1)	ab0a~	3	11~	2	6	2	6	2	3
1	P (8 , 5)	1	/	1 = O2 (8 , 5)	B (8 , 5)	ab1cd0cb0cd0cb1a~	1	12333321~	8	8	18	18	0	3
2	P (11 , 5)	3	/	1 = O2 (33 , 15)	B (11 , 5)	ab1cd0cb2cd0cb1a~	3	1233223321~	10	30	22	66	4	3
3	P (14 , 5)	3	/	1 = O2 (42 , 15)	B (14 , 5)	ab1cd2cb0cd2cb1a~	3	123443344321~	12	36	34	102	4	3
4	P (17 , 5)	3	/	1 = O2 (51 , 15)	B (17 , 5)	ab1cd2cb2cd2cb1a~	3	12344322344321~	14	42	38	114	2	3
5	P (20 , 5)	1	/	5 = O2 (4 , 1)	B (4 , 1)	ab2a~	1	1221~	4	4	6	6	0	3
6	P (23 , 5)	3	/	1 = O2 (69 , 15)	B (23 , 5)	ab3cd2cb2cd2cb3a~	3	122234432234432221~	18	54	46	138	4	3
7	P (26 , 5)	3	/	1 = O2 (78 , 15)	B (26 , 5)	ab3cd2cb4cd2cb3a~	3	1222344322234432221~	20	60	50	150	2	3
8	P (29 , 5)	3	/	1 = O2 (87 , 15)	B (29 , 5)	ab3cd4cb2cd4cb3a~	3	1222344443223444432221~	22	66	62	186	2	3
9	P (32 , 5)	1	/	1 = O2 (32 , 5)	B (32 , 5)	ab3cd4cb4cd4cb3a~	1	12223444432223444432221~	24	24	66	66	0	3
10	P (35 , 5)	3	/	5 = O2 (21 , 3)	B (7 , 1)	ab4a~	3	122221~	6	18	10	30	4	3
11	P (38 , 5)	3	/	1 = O2 (114 , 15)	B (38 , 5)	ab5cd4cb4cd4cb5a~	3	1222234444322234444322221~	28	84	74	222	2	3
12	P (41 , 5)	1	/	1 = O2 (41 , 5)	B (41 , 5)	ab5cd4cb6cd4cb5a~	1	12222344443222234444322221~	30	30	78	78	0	3
13	P (44 , 5)	1	/	1 = O2 (44 , 5)	B (44 , 5)	ab5cd6cb4cd6cb5a~	1	122223444443222344444322221~	32	32	90	90	0	3
14	P (47 , 5)	3	/	1 = O2 (141 , 15)	B (47 , 5)	ab5cd6cb6cd6cb5a~	3	1222234444432222344444322221~	34	102	94	282	4	3
15	P (50 , 5)	3	/	5 = O2 (30 , 3)	B (10 , 1)	ab6a~	3	1222221~	8	24	14	42	2	3
16	P (53 , 5)	1	/	1 = O2 (53 , 5)	B (53 , 5)	ab7cd6cb6cd6cb7a~	1	1222222344444322223444443222221~	38	38	102	102	0	3
17	P (56 , 5)	3	/	1 = O2 (168 , 15)	B (56 , 5)	ab7cd6cb8cd6cb7a~	3	12222223444443222223444443222221~	40	120	106	318	4	3
18	P (59 , 5)	3	/	1 = O2 (177 , 15)	B (59 , 5)	ab7cd8cb6cd8cb7a~	3	12222223444444322223444443222221~	42	126	118	354	4	3
19	P (62 , 5)	3	/	1 = O2 (186 , 15)	B (62 , 5)	ab7cd8cb8cd8cb7a~	3	1222222344444432222234444443222221~	44	132	122	366	2	3
20	P (65 , 5)	1	/	5 = O2 (13 , 1)	B (13 , 1)	ab8a~	1	12222221~	10	10	18	18	0	3
21	P (68 , 5)	3	/	1 = O2 (204 , 15)	B (68 , 5)	ab9cd8cb8cd8cb9a~	3	1222222344444432222234444443222221~	48	144	130	390	4	3
22	P (71 , 5)	3	/	1 = O2 (213 , 15)	B (71 , 5)	ab9cd8cb10cd8cb9a~	3	12222223444444322222234444443222221~	50	150	134	402	2	3
23	P (74 , 5)	3	/	1 = O2 (222 , 15)	B (74 , 5)	ab9cd10cb8cd10cb9a~	3	122222234444444322222344444443222221~	52	156	146	438	2	3
24	P (77 , 5)	1	/	1 = O2 (77 , 5)	B (77 , 5)	ab9cd10cb10cd10cb9a~	1	122222234444444322222344444443222221~	54	54	150	150	0	3
25	P (80 , 5)	3	/	5 = O2 (48 , 3)	B (16 , 1)	ab10a~	3	122222221~	12	36	22	66	4	3
26	P (83 , 5)	3	/	1 = O2 (249 , 15)	B (83 , 5)	ab11cd10cb10cd10cb11a~	3	122222234444444322222344444443222221~	58	174	158	474	2	3
27	P (86 , 5)	1	/	1 = O2 (86 , 5)	B (86 , 5)	ab11cd10cb12cd10cb11a~	1	122222234444444322222344444443222221~	60	60	162	162	0	3
28	P (89 , 5)	1	/	1 = O2 (89 , 5)	B (89 , 5)	ab11cd12cb10cd12cb11a~	1	122222234444444322222344444443222221~	62	62	174	174	0	3
29	P (92 , 5)	3	/	1 = O2 (276 , 15)	B (92 , 5)	ab11cd12cb12cd12cb11a~	3	122222234444444322222344444443222221~	64	192	178	534	4	3

圖 6 正 6 邊形 通過點 P(3k+n,n), k∈N, n=6 反射邊跨距規律資料

k	P (m, n)	/ gcd	=	O2 (x, y)	B (x1, y1)	跨距規律	累進 段數	分段跨距串列	分段 反射 次數	總 反射 次數	分段 跨邊 數	總 跨邊 數	首段 末位邊 編號	總 中位邊 編號
0	P (6, 6)	3	/	6 = O2 (3, 3)	B (1, 1)	ab0a~	3	11~	2	6	2	6	2	3
1	P (9, 6)	0	/	3 = O2 (0, 0)	B (3, 2)	ab0ax	0	11x	2	2	2	2	2	1
2	P (12, 6)	3	/	6 = O2 (6, 3)	B (2, 1)	ab1cd0cb1a~	1	123321~	6	6	12	12	0	0
3	P (15, 6)	2	/	3 = O2 (10, 4)	B (5, 2)	ab1cd1e~	2	12345~	5	10	15	30	3	3
4	P (18, 6)	9	/	6 = O2 (27, 9)	B (3, 1)	ab1cd2cb1a~	3	12344321~	8	24	20	60	2	0
5	P (21, 6)	0	/	3 = O2 (0, 0)	B (7, 2)	ab2x	0	122x	3	3	5	5	5	2.5
6	P (24, 6)	1	/	6 = O2 (4, 1)	B (4, 1)	ab2a~	1	1221	4	4	6	6	0	3
7	P (27, 6)	0	/	3 = O2 (0, 0)	B (9, 2)	ab2ax	0	1221x	4	4	6	6	0	3
8	P (30, 6)	9	/	6 = O2 (45, 9)	B (5, 1)	ab3cd2cb3a~	3	122234432221~	12	36	28	84	4	0
9	P (33, 6)	2	/	3 = O2 (22, 4)	B (11, 2)	ab3cd3e~	2	122234445~	9	18	27	54	3	3
10	P (36, 6)	3	/	6 = O2 (18, 3)	B (6, 1)	ab3cd4cb3a~	1	12223444432221~	14	14	36	36	0	0
11	P (39, 6)	0	/	3 = O2 (0, 0)	B (13, 2)	ab4x	0	12222x	5	5	9	9	3	4.5
12	P (42, 6)	3	/	6 = O2 (21, 3)	B (7, 1)	ab4a~	3	122221	6	18	10	30	4	3
13	P (45, 6)	0	/	3 = O2 (0, 0)	B (15, 2)	ab4ax	0	122221x	6	6	10	10	4	5
14	P (48, 6)	9	/	6 = O2 (72, 9)	B (8, 1)	ab5cd4cb5a~	3	12222234444322221~	18	54	44	132	2	0
15	P (51, 6)	2	/	3 = O2 (34, 4)	B (17, 2)	ab5cd5e~	2	1222223444445~	13	26	39	78	3	3
16	P (54, 6)	9	/	6 = O2 (81, 9)	B (9, 1)	ab5cd6cb5a~	3	1222223444~444322221~	20	60	52	156	4	0
17	P (57, 6)	0	/	3 = O2 (0, 0)	B (19, 2)	ab6x	0	1222222x	7	7	13	13	1	0.5
18	P (60, 6)	3	/	6 = O2 (30, 3)	B (10, 1)	ab6a~	3	12222221	8	24	14	42	2	3
19	P (63, 6)	0	/	3 = O2 (0, 0)	B (21, 2)	ab6ax	0	12222221x	8	8	14	14	2	1
20	P (66, 6)	3	/	6 = O2 (33, 3)	B (11, 1)	ab7cd6cb7a~	1	12222222344444432222221~	24	24	60	60	0	0
21	P (69, 6)	2	/	3 = O2 (46, 4)	B (23, 2)	ab7cd7e~	2	12222222344444445~	17	34	51	102	3	3
22	P (72, 6)	9	/	6 = O2 (108, 9)	B (12, 1)	ab7cd8cb7a~	3	1222222234444444432222221~	26	78	68	204	2	0
23	P (75, 6)	0	/	3 = O2 (0, 0)	B (25, 2)	ab8x	0	122222222x	9	54	17	102	5	3
24	P (78, 6)	1	/	6 = O2 (13, 1)	B (13, 1)	ab8a~	1	1222222221	10	10	18	18	0	3
25	P (81, 6)	0	/	3 = O2 (0, 0)	B (27, 2)	ab8ax	0	1222222221x	10	10	18	18	0	3
26	P (84, 6)	9	/	6 = O2 (126, 9)	B (14, 1)	ab9cd8cb9a~	3	1222222222344444444322222221~	30	90	76	228	4	0
27	P (87, 6)	2	/	3 = O2 (58, 4)	B (29, 2)	ab9cd9e~	2	122222222234444444445~	21	42	63	126	3	3
28	P (90, 6)	3	/	6 = O2 (45, 3)	B (15, 1)	ab9cd10cb9a~	1	122222222234444444444322222221~	32	32	84	84	0	0
29	P (93, 6)	0	/	3 = O2 (0, 0)	B (31, 2)	ab10x	0	12222222222x	11	11	21	21	3	4.5
30	P (96, 6)	3	/	6 = O2 (48, 3)	B (16, 1)	ab10a~	3	12222222221	12	36	22	66	4	3
31	P (99, 6)	0	/	3 = O2 (0, 0)	B (33, 2)	ab10ax	0	122222222221x	12	12	22	22	4	5
32	P (102, 6)	9	/	6 = O2 (153, 9)	B (17, 1)	ab11cd10cb11a~	3	122222222223444444444443222222221~	36	108	92	276	2	0
33	P (105, 6)	2	/	3 = O2 (70, 4)	B (35, 2)	ab11cd11e~	2	12222222222234444444444445~	25	50	75	150	3	3
34	P (108, 6)	9	/	6 = O2 (162, 9)	B (18, 1)	ab11cd12cb11a~	3	12222222222234444444444443222222221~	38	114	100	300	4	0
35	P (111, 6)	0	/	3 = O2 (0, 0)	B (37, 2)	ab12x	0	1222222222222x	13	13	25	25	1	0.5

圖 7 正 6 邊形 通過點 P(3k+n,n), k∈N, n=7 反射邊跨距規律資料

k	P (m , n)	/ gcd	=	O2 (x , y)	B (x1 , y1)	跨距規律	累進 段數	分段 反射 次數	總 反射 次數	分段 跨邊 數	總 跨邊 數	分段 末位邊 編號	總 中位邊 編號	
0	P (7 , 7)	3	/	7 =	O2 (3 , 3)	B (1 , 1)	ab0a~	3	2	6	2	6	2	3
1	P (10 , 7)	3	/	1 =	O2 (30 , 21)	B (10 , 7)	ab0aab1cd0cb0cd0cb1aab0a~	3	12	36	22	66	4	3
2	P (13 , 7)	3	/	1 =	O2 (39 , 21)	B (13 , 7)	ab1cd0cb1aab0aab1cd0cb1a~	3	14	42	26	78	2	3
3	P (16 , 7)	1	/	1 =	O2 (16 , 7)	B (16 , 7)	ab1cd1eed1cb0cd1eed1cb1a~	1	16	16	54	54	0	3
4	P (19 , 7)	3	/	1 =	O2 (57 , 21)	B (19 , 7)	ab1cd1eed1cb2cd1eed1cb1a~	3	18	54	58	174	4	3
5	P (22 , 7)	3	/	1 =	O2 (66 , 21)	B (22 , 7)	ab1cd2cb1aab2aab1cd2cb1a~	3	20	60	46	138	4	3
6	P (25 , 7)	3	/	1 =	O2 (75 , 21)	B (25 , 7)	ab2aab1cd2cb2cd2cb1aab2a~	3	22	66	50	150	2	3
7	P (28 , 7)	1	/	7 =	O2 (4 , 1)	B (4 , 1)	ab2a~	1	4	4	6	6	0	3
8	P (31 , 7)	3	/	1 =	O2 (93 , 21)	B (31 , 7)	ab2aab3cd2cb2cd2cb3aab2a~	3	26	78	58	174	4	3
9	P (34 , 7)	3	/	1 =	O2 (102 , 21)	B (34 , 7)	ab3cd2cb3aab2aab3cd2cb3a~	3	28	84	62	186	2	3
10	P (37 , 7)	3	/	1 =	O2 (111 , 21)	B (37 , 7)	ab3cd3eed3cb2cd3eed3cb3a~	3	30	90	98	294	2	3
11	P (40 , 7)	1	/	1 =	O2 (40 , 7)	B (40 , 7)	ab3cd3eed3cb4cd3eed3cb3a~	1	32	32	102	102	0	3
12	P (43 , 7)	3	/	1 =	O2 (129 , 21)	B (43 , 7)	ab3cd4cb3aab4aab3cd4cb3a~	3	34	102	82	246	4	3
13	P (46 , 7)	3	/	1 =	O2 (138 , 21)	B (46 , 7)	ab4aab3cd4cb4cd4cb3aab4a~	3	36	108	86	258	2	3
14	P (49 , 7)	3	/	7 =	O2 (21 , 3)	B (7 , 1)	ab4a~	3	6	18	10	30	4	3
15	P (52 , 7)	3	/	1 =	O2 (156 , 21)	B (52 , 7)	ab4aab5cd4cb4cd4cb5aab4a~	3	40	120	94	282	4	3
16	P (55 , 7)	3	/	1 =	O2 (165 , 21)	B (55 , 7)	ab5cd4cb5aab4aab5cd4cb5a~	3	42	126	98	294	2	3
17	P (58 , 7)	3	/	1 =	O2 (174 , 21)	B (58 , 7)	ab5cd5eed5cb4cd5eed5cb5a~	3	44	132	142	426	4	3
18	P (61 , 7)	3	/	1 =	O2 (183 , 21)	B (61 , 7)	ab5cd5eed5cb6cd5eed5cb5a~	3	46	138	146	438	2	3
19	P (64 , 7)	3	/	1 =	O2 (192 , 21)	B (64 , 7)	ab5cd6cb5aab6aab5cd6cb5a~	3	48	144	118	354	4	3
20	P (67 , 7)	3	/	1 =	O2 (201 , 21)	B (67 , 7)	ab6aab5cd6cb6cd6cb5aab6a~	3	50	150	122	366	2	3

圖 8 正 6 邊形 通過點 P(3k+n,n), k∈N, n=8 反射邊跨距規律資料

k	P (m , n)	/ gcd	=	O2 (x , y)	B (x1 , y1)	跨距規律	累進 段數	分段 反射 次數	總 反射 次數	分段 跨邊 數	總 跨邊 數	首段 末位邊 編號	總 中位邊 編號	
0	P (8 , 8)	3	/	8 =	O2 (3 , 3)	B (1 , 1)	ab0a~	3	2	6	2	6	2	3
1	P (11 , 8)	2	/	1 =	O2 (22 , 16)	B (11 , 8)	ab0aab1cd0cb0cd0cb0cd1eed0e~	2	13	26	39	78	3	3
2	P (14 , 8)	2	/	2 =	O2 (14 , 8)	B (7 , 4)	ab1cd0cb0cd1e~	2	7	14	21	42	3	3
3	P (17 , 8)	2	/	1 =	O2 (34 , 16)	B (17 , 8)	ab1cd0cb1aab1cd1eed1cb0cd1e~	2	17	34	51	102	3	3
4	P (20 , 8)	2	/	4 =	O2 (10 , 4)	B (5 , 2)	ab1cd1e~	2	5	10	15	30	3	3
5	P (23 , 8)	2	/	1 =	O2 (46 , 16)	B (23 , 8)	ab1cd2cb1aab1cd1eed1cb2cd1e~	2	21	42	63	126	3	3
6	P (26 , 8)	2	/	2 =	O2 (26 , 8)	B (13 , 4)	ab1cd2cb2cd1e~	2	11	22	33	66	3	3
7	P (29 , 8)	2	/	1 =	O2 (58 , 16)	B (29 , 8)	ab2aab1cd2cb2cd2cb2cd1eed2e~	2	25	50	75	150	3	3
8	P (32 , 8)	1	/	8 =	O2 (4 , 1)	B (4 , 1)	ab2a~	1	4	4	6	6	0	3
9	P (35 , 8)	2	/	1 =	O2 (70 , 16)	B (35 , 8)	ab2a2b3cd2cb2cd2cb2cd3e2d2e~	2	29	58	87	174	3	3
10	P (38 , 8)	2	/	2 =	O2 (38 , 8)	B (19 , 4)	ab3cd2cb2cd3e~	2	15	30	45	90	3	3
11	P (41 , 8)	2	/	1 =	O2 (82 , 16)	B (41 , 8)	ab3cd2cb3a2b3cd3e2d3cb2cd3e~	2	33	66	99	198	3	3
12	P (44 , 8)	2	/	4 =	O2 (22 , 4)	B (11 , 2)	ab3cd3e~	2	9	18	27	54	3	3
13	P (47 , 8)	2	/	1 =	O2 (94 , 16)	B (47 , 8)	ab3cd4cb3a2b3cd3e2d3cb4cd3e~	2	37	74	111	222	3	3
14	P (50 , 8)	2	/	2 =	O2 (50 , 8)	B (25 , 4)	ab3cd4cb4cd3e~	2	19	38	57	114	3	3
15	P (53 , 8)	2	/	1 =	O2 (106 , 16)	B (53 , 8)	ab4a2b3cd4cb4cd4cb4cd3e2d4e~	2	41	82	123	246	3	3
16	P (56 , 8)	3	/	8 =	O2 (21 , 3)	B (7 , 1)	ab4a~	3	6	18	10	30	4	3
17	P (59 , 8)	2	/	1 =	O2 (118 , 16)	B (59 , 8)	ab4a2b5cd4cb4cd4cb4cd5e2d4e~	2	45	90	135	270	3	3
18	P (62 , 8)	2	/	2 =	O2 (62 , 8)	B (31 , 4)	ab5cd4cb4cd5e~	2	23	46	69	138	3	3
19	P (65 , 8)	2	/	1 =	O2 (130 , 16)	B (65 , 8)	ab5cd4cb5a2b5cd5e2d5cb4cd5e~	2	49	98	147	294	3	3
20	P (68 , 8)	2	/	4 =	O2 (34 , 4)	B (17 , 2)	ab5cd5e~	2	13	26	39	78	3	3
21	P (71 , 8)	2	/	1 =	O2 (142 , 16)	B (71 , 8)	ab5cd6cb5a2b5cd5e2d5cb6cd5e~	2	53	106	159	318	3	3
22	P (74 , 8)	2	/	2 =	O2 (74 , 8)	B (37 , 4)	ab5cd6cb6cd5e~	2	27	54	81	162	3	3
23	P (77 , 8)	2	/	1 =	O2 (154 , 16)	B (77 , 8)	ab6a2b5cd6cb6cd6cb6cd5e2d6e~	2	57	114	171	342	3	3

圖9 正6邊形 通過點 P(3k+n,n), k∈N, n=9 反射邊跨距規律資料

k	P (m , n)	/ gcd	=	O2 (x , y)	B (x1 , y1)	跨距規律	累進 段數	分段 反射 次數	總 反射 次數	分段 跨邊 數	總 跨邊 數	首段 末位邊 編號	總 中位邊 編號
0	P (9 , 9)	3	/	9 = O2 (3 , 3)	B (1 , 1)	ab0a~	3	2	6	2	6	2	3
1	P (12 , 9)	9	/	3 = O2 (36 , 27)	B (4 , 3)	ab0aab1cd0cb0cd0cb0cd0cb1aab0a~	3	14	42	28	84	4	0
2	P (15 , 9)	9	/	3 = O2 (45 , 27)	B (5 , 3)	ab1cd0cb0cd1eed0eed1cb0cd0cb1a~	3	16	48	52	156	4	0
3	P (18 , 9)	3	/	9 = O2 (6 , 3)	B (2 , 1)	ab1cd0cb1a~	1	6	6	12	12	0	0
4	P (21 , 9)	9	/	3 = O2 (63 , 27)	B (7 , 3)	ab1cd1eed1cb0cd2cb0cd1eed1cb1a~	3	20	60	68	204	2	0
5	P (24 , 9)	9	/	3 = O2 (72 , 27)	B (8 , 3)	ab1cd1eed1cb2cd0cb2cd1eed1cb1a~	3	22	66	68	204	2	0
6	P (27 , 9)	9	/	9 = O2 (27 , 9)	B (3 , 1)	ab1cd2cb1a~	3	8	24	20	60	2	0
7	P (30 , 9)	3	/	3 = O2 (30 , 9)	B (10 , 3)	ab1cd2cb2cd1eed2eed1cb2cd2cb1a~	1	26	26	84	84	0	0
8	P (33 , 9)	9	/	3 = O2 (99 , 27)	B (11 , 3)	ab2aab1cd2cb2cd2cb2cd2cb1aab2a~	3	28	84	68	204	2	0
9	P (36 , 9)	2	/	9 = O2 (8 , 2)	B (4 , 1)	ab2a~	1	4	4	6	6	0	3
10	P (39 , 9)	9	/	3 = O2 (117 , 27)	B (13 , 3)	ab2aab3cd2cb2cd2cb2cd2cb3aab2a~	3	32	96	76	228	4	0
11	P (42 , 9)	3	/	3 = O2 (42 , 9)	B (14 , 3)	ab3cd2cb2cd3eed2eed3cb2cd2cb3a~	1	34	34	108	108	0	0
12	P (45 , 9)	9	/	9 = O2 (45 , 9)	B (5 , 1)	ab3cd2cb3a~	3	12	36	28	84	4	0
13	P (48 , 9)	9	/	3 = O2 (144 , 27)	B (16 , 3)	ab3cd3eed3cb2cd4cb2cd3eed3cb3a~	3	38	114	124	372	4	0
14	P (51 , 9)	9	/	3 = O2 (153 , 27)	B (17 , 3)	ab3cd3eed3cb4cd2cb4cd3eed3cb3a~	3	40	120	124	372	4	0
15	P (54 , 9)	3	/	9 = O2 (18 , 3)	B (6 , 1)	ab3cd4cb3a~	1	14	14	36	36	0	0
16	P (57 , 9)	9	/	3 = O2 (171 , 27)	B (19 , 3)	ab3cd4cb4cd3eed4eed3cb4cd4cb3a~	3	44	132	140	420	2	0
17	P (60 , 9)	9	/	3 = O2 (180 , 27)	B (20 , 3)	ab4aab3cd4cb4cd4cb4cd4cb3a2b4a~	3	46	138	116	348	2	0
18	P (63 , 9)	3	/	9 = O2 (21 , 3)	B (7 , 1)	ab4a~	3	6	18	10	30	4	3
19	P (66 , 9)	9	/	3 = O2 (198 , 27)	B (22 , 3)	ab4aab5cd4cb4cd4cb4cd4cb5aab4a~	3	50	150	124	372	4	0
20	P (69 , 9)	9	/	3 = O2 (207 , 27)	B (23 , 3)	ab5cd4cb4cd5eed4eed5cb4cd4cb5a~	3	52	156	164	492	2	0
21	P (72 , 9)	9	/	9 = O2 (72 , 9)	B (8 , 1)	ab5cd4cb5a~	3	18	54	44	132	2	0
22	P (75 , 9)	3	/	3 = O2 (75 , 9)	B (25 , 3)	ab5cd5eed5cb4cd6cb4cd5eed5cb5a~	1	56	56	180	180	0	0
23	P (78 , 9)	3	/	3 = O2 (78 , 9)	B (26 , 3)	ab5cd5eed5cb6cd4cb6cd5eed5cb5a~	1	58	58	180	180	0	0
24	P (81 , 9)	9	/	9 = O2 (81 , 9)	B (9 , 1)	ab5cd6cb5a~	3	20	60	52	156	4	0
25	P (84 , 9)	9	/	3 = O2 (252 , 27)	B (28 , 3)	ab5cd6cb6cd5eed6eed5cb6cd6cb5a~	3	62	186	196	588	4	0
26	P (87 , 9)	9	/	3 = O2 (261 , 27)	B (29 , 3)	ab6aab5cd6cb6cd6cb6cd6cb5aab6a~	3	64	192	164	492	2	0

圖 10 正 6 邊形 通過點 P(3k+n,n), k∈N, n=10 反射邊跨距規律資料

k	P (m , n)	/ gcd	=	O2 (x , y)	B (x1 , y1)	跨距規律	累進 段數	分段 反射 次數	總 反射 次數	分段 跨邊 數	總 跨邊 數	首段 末位邊 編號	總 中位邊 編號		
0	P (10 , 10)	3	/	10	=	O2 (3 , 3)	B (1 , 1)	ab0a~	3	2	6	2	6	2	3
1	P (13 , 10)	2	/	1	=	O2 (26 , 20)	B (13 , 10)	ab0 _{aa} b1 _{cd} 0 _{cb} 0 _{cd} 0 _{cb} 0 _{cd} 0 _{cb} 0 _{cd} 1 _{eed} 0e~	2	15	30	45	90	3	3
2	P (16 , 10)	1	/	2	=	O2 (8 , 5)	B (8 , 5)	ab1 _{cd} 0 _{cb} 0 _{cd} 0 _{cb} 1a~	1	8	8	18	18	0	3
3	P (19 , 10)	2	/	1	=	O2 (38 , 20)	B (19 , 10)	ab1 _{cd} 0 _{cb} 1 _{aa} b1 _{cd} 0 _{cb} 0 _{cd} 1 _{eed} 1 _{cb} 0 _{cd} 1 _{ee} ~	2	19	38	57	114	3	3
4	P (22 , 10)	3	/	2	=	O2 (33 , 15)	B (11 , 5)	ab1 _{cd} 0 _{cb} 2 _{cd} 0 _{cb} 1a~	3	10	30	22	66	4	3
5	P (25 , 10)	2	/	5	=	O2 (10 , 4)	B (5 , 2)	ab1 _{cd} 1e~	2	5	10	15	30	3	3
6	P (28 , 10)	3	/	2	=	O2 (42 , 15)	B (14 , 5)	ab1 _{cd} 2 _{cb} 0 _{cd} 2 _{cb} 1a~	3	12	36	34	102	4	3
7	P (31 , 10)	2	/	1	=	O2 (62 , 20)	B (31 , 10)	ab1 _{cd} 2 _{cb} 1 _{aa} b1 _{cd} 2 _{cb} 2 _{cd} 1 _{eed} 1 _{cb} 2 _{cd} 1 _{ee} ~	2	27	54	81	162	3	3
8	P (34 , 10)	3	/	2	=	O2 (51 , 15)	B (17 , 5)	ab1 _{cd} 2 _{cb} 2 _{cd} 2 _{cb} 1a~	3	14	42	38	114	2	3
9	P (37 , 10)	2	/	1	=	O2 (74 , 20)	B (37 , 10)	ab2 _{aa} b1 _{cd} 2 _{cb} 2 _{cd} 2 _{cb} 2 _{cd} 2 _{cb} 2 _{cd} 1 _{eed} 2e~	2	31	62	93	186	3	3
10	P (40 , 10)	1	/	10	=	O2 (4 , 1)	B (4 , 1)	ab2a~	1	4	4	6	6	0	3
11	P (43 , 10)	2	/	1	=	O2 (86 , 20)	B (43 , 10)	ab2 _{aa} b3 _{cd} 2 _{cb} 2 _{cd} 2 _{cb} 2 _{cd} 2 _{cb} 2 _{cd} 3 _{eed} 2e~	2	35	70	105	210	3	3
12	P (46 , 10)	3	/	2	=	O2 (69 , 15)	B (23 , 5)	ab3 _{cd} 2 _{cb} 2 _{cd} 2 _{cb} 3a~	3	18	54	46	138	4	3
13	P (49 , 10)	2	/	1	=	O2 (98 , 20)	B (49 , 10)	ab3 _{cd} 2 _{cb} 3 _{aa} b3 _{cd} 2 _{cb} 2 _{cd} 3 _{eed} 3 _{cb} 2 _{cd} 3 _{ee} ~	2	39	78	117	234	3	3
14	P (52 , 10)	3	/	2	=	O2 (78 , 15)	B (26 , 5)	ab3 _{cd} 2 _{cb} 4 _{cd} 2 _{cb} 3a~	3	20	60	50	150	2	3
15	P (55 , 10)	2	/	5	=	O2 (22 , 4)	B (11 , 2)	ab3 _{cd} 3e~	2	9	18	27	54	3	3
16	P (58 , 10)	3	/	2	=	O2 (87 , 15)	B (29 , 5)	ab3 _{cd} 4 _{cb} 2 _{cd} 4 _{cb} 3a~	3	22	66	62	186	2	3
17	P (61 , 10)	6	/	1	=	O2 (366 , 60)	B (61 , 10)	ab3 _{cd} 4 _{cb} 3 _{aa} b3 _{cd} 4 _{cb} 4 _{cd} 3 _{eed} 3 _{cb} 4 _{cd} 3 _{ee} ~	6	47	282	143	858	5	3
18	P (64 , 10)	1	/	2	=	O2 (32 , 5)	B (32 , 5)	ab3 _{cd} 4 _{cb} 4 _{cd} 4 _{cb} 3a~	1	24	24	66	66	0	3
19	P (67 , 10)	2	/	1	=	O2 (134 , 20)	B (67 , 10)	ab4 _{aa} b3 _{cd} 4 _{cb} 4 _{cd} 4 _{cb} 4 _{cd} 4 _{cb} 4 _{cd} 3 _{eed} 4e~	2	51	102	153	306	3	3
20	P (70 , 10)	3	/	10	=	O2 (21 , 3)	B (7 , 1)	ab4a~	3	6	18	10	30	4	3
21	P (73 , 10)	3	/	1	=	O2 (219 , 30)	B (73 , 10)	ab4 _{aa} b5 _{cd} 4 _{cb} 4 _{cd} 4 _{cb} 4 _{cd} 4 _{cb} 4 _{cd} 5 _{eed} 4e~	2	55	110	165	330	3	3
22	P (76 , 10)	2	/	2	=	O2 (76 , 10)	B (38 , 5)	ab5 _{cd} 4 _{cb} 4 _{cd} 4 _{cb} 5a~	3	28	84	74	222	2	3
23	P (79 , 10)	2	/	1	=	O2 (158 , 20)	B (79 , 10)	ab5 _{cd} 4 _{cb} 5 _{aa} b5 _{cd} 4 _{cb} 4 _{cd} 5 _{eed} 5 _{cb} 4 _{cd} 5 _{ee} ~	2	59	118	177	354	3	3
24	P (82 , 10)	2	/	2	=	O2 (82 , 10)	B (41 , 5)	ab5 _{cd} 4 _{cb} 6 _{cd} 4 _{cb} 5a~	1	30	30	78	78	0	3
25	P (85 , 10)	2	/	5	=	O2 (34 , 4)	B (17 , 2)	ab5 _{cd} 5e~	2	13	26	39	78	3	3
26	P (88 , 10)	1	/	2	=	O2 (44 , 5)	B (44 , 5)	ab5 _{cd} 6 _{cb} 4 _{cd} 6 _{cb} 5a~	1	32	32	90	90	0	3
27	P (91 , 10)	2	/	1	=	O2 (182 , 20)	B (91 , 10)	ab5 _{cd} 6 _{cb} 5 _{aa} b5 _{cd} 6 _{cb} 6 _{cd} 5 _{eed} 5 _{cb} 6 _{cd} 5 _{ee} ~	2	67	134	201	402	3	3
28	P (94 , 10)	3	/	2	=	O2 (141 , 15)	B (47 , 5)	ab5 _{cd} 6 _{cb} 6 _{cd} 6 _{cb} 5a~	3	34	102	94	282	4	3
29	P (97 , 10)	2	/	1	=	O2 (194 , 20)	B (97 , 10)	ab6 _{aa} b5 _{cd} 6 _{cb} 6 _{cd} 6 _{cb} 6 _{cd} 6 _{cb} 6 _{cd} 5 _{eed} 6e~	2	71	142	213	426	3	3

【評語】 030415

利用連續鏡射圖形來分析行進路徑是處理這個問題的一個典型技巧。藉由對不同數值個別觀察結果來得出結論當然是分析問題的一種方式。作者們所觀察到一些規則，如果能進一步用更精鍊的方式把規則闡述清楚，會是一個不錯的結果。