中華民國第 56 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

第三名

030414

九點圓與尤拉球

學校名稱：新竹縣立仁愛國民中學

作者：	指導老師：
國二 曹若榆	李德生
國二 羅佳貽	
國二 黃于瑄	

關鍵詞：九點圓、球、多面體

摘要

我們使用 GGB 製作動態圖形觀察「九點圓」，並利用３Ｄ立體圖視功能將九點圓進而推廣至三維空間。首先，我們會先介紹何謂九點圓，並證明這些由三角形建構出的這特殊九點確實共圓。其次，我們將平面推廣至空間，同樣利用 GGB 的操作觀察在三維空間中九點圓形成的尤拉球，並且延伸至不同圖形尤拉球的探討；在研究過程中我們發現了【第七屆旺宏科學獎：空間中的九點圓與尤拉線】也有探討類似主題，但是我們採取不同觀點卻發現不同的結果，最後我們也用數學式證明了我們的發現，過程中我們證明四面體、八面體、十面體、十二面體中的尤拉球，並藉由觀察進一步推導出多面體與尤拉球的邊與點的關係式。

壹、研究動機：

在找尋科展題目時搜尋到關於九點圓的相關資訊，這個由三角形的垂足、邊中點、頂點到垂心中點所形成的圓，激起了我們的好奇心，在[三角形的三心]這單元老師利用 GGB 輔助教學更是讓我們覺得有趣，便開始查詢有關九點圓的文獻。搜尋中找到【第七屆旺宏科學獎：空間中的九點圓與尤拉線】(同篇文章於第 47 屆全國科展高中數學組:24 點球面)中提及：**任一對直四面體皆有 24 點球面**。但是，我們先粗略透過軟體繪圖發現這論點跟我們畫出來的圖形有點出入，眉頭一皺覺得案情不單純，覺得空間中的九點圓或許會有更多的延伸以及特性還沒被發現，也因此我們決定以這個方向為主題研究。

貳、研究目的：

一、利用動態圖形探討不同種類的三角形形成的九點圓及其退化圖形。

二、正四面體中的尤拉球點數探討及證明。

三、垂直四面體中的尤拉球點數探討及證明。

四、正八面體中的尤拉球點數探討及證明。

五、十面體中的尤拉球點數探討及證明。

六、十二面體中的尤拉球點數探討及證明

七、2n 面體(n≥5)尤拉球點數推斷。

八、2n 面體(n→∞)尤拉球存在性探討。

參、研究設備及器材：

A4 白紙、電腦、Geogebra 數學繪圖軟體、小畫家繪圖程式、筆、立可白、圓規、尺。

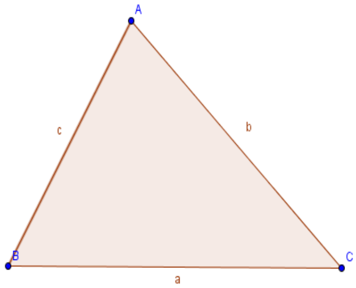
肆、研究過程及方法：

4.1 九點圓的歷史：

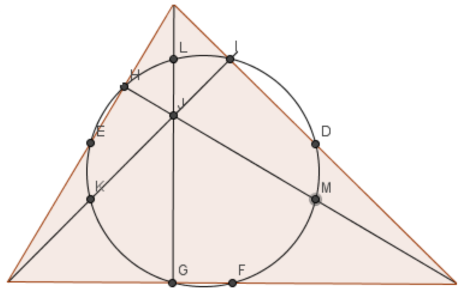
瑞士數學家 Euler (1707-1783) 於 1765 年發現了尤拉線，並證明了「垂心三角形和垂足三角形有共同的外接圓(六點圓)」。而最早提出九點圓的則是英國的 Benjamin Beven，他將此發表在 1804 年的一本英國雜誌當中。法國數學家 Poncelet 彭賽列則是於 1821 年完全証明九點圓，因此他成為了第一個最早完整證明出這個定理的數

學家。隨後，於 1822 年，德國數學家 Feuerbach 費爾巴哈也發現了九點圓，並得出「九點圓和三角形的內切圓和旁切圓相切」，並稱這四個切點為費爾巴哈點。到了 20 世紀，庫利奇與大上分別於 1910 年與 1916 年發表了一個定理，稱為庫利奇－大上定理：「圓周上四點任取三點做三角形，形成四個三角形，四個三角形的九點圓圓心共圓。」這個圓還被稱為四邊形的九點圓，此結果還可推廣到 n 邊形。

4.2 名詞定義：



圖(一) 三角形



圖(二) 九點圓

(一) 三角形：由三條線段相連組成的一個閉合的圖形，如圖(一)。

(二) 三角形的頂點：每個封閉的三角形會有三個頂點，分別位於兩邊相交處。

(三) 三角形邊中點：任兩個頂點的中心點稱為邊中點，如圖(二)的 D、E、F 點。

(四) 三角形的垂線：指過三角形的頂點並垂直於對邊的直線，由圖(二)可見。

(五) 三角形的垂足：三角形的垂線與對邊相交的點，如圖(二)中的 G、H、I 點。

(六) 三角形的垂心：三角形的三條垂線交於一點，稱為該三角形的垂心，如圖(二)中的 J 點。

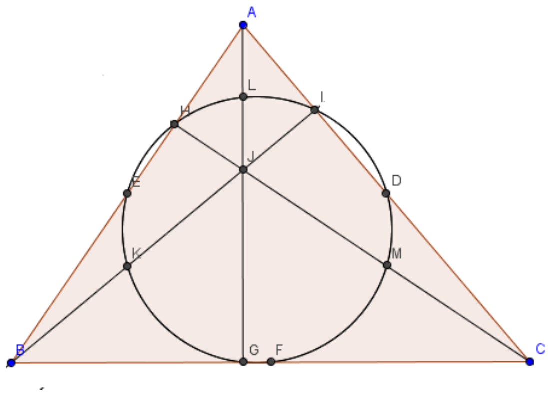
(七) 頂垂中點：為方便我們描述九點圓，這裡定義一個新的名詞－頂垂中點，指的是三角形的頂點與垂心的中點，如圖(二)中的 K、L、M 三點。

(八) 尤拉線：是指過三角形的垂心、外心、重心、和九點圓的圓心的一條直線，尤拉證明了在任意三角形中，以上四點共線。

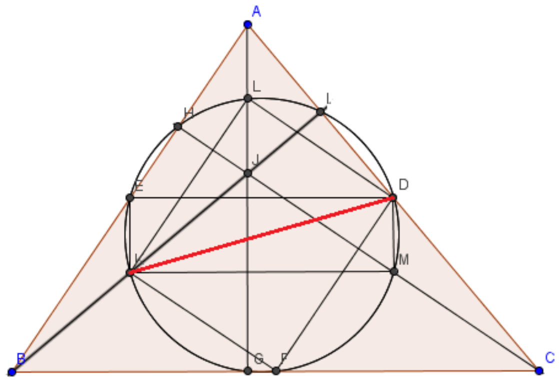
(九) 垂直四面體：同一頂點的三個邊兩兩互相垂直的四面體，稱為垂直四面體。

(十) 尤拉球：此名詞是我們建立，方便描述在本篇研究報告中我們稱在三維空間中藉由不同平面建構出的九點圓會共球，形成尤拉球。

4.3 九點圓的定理、證明、性質及動態圖形探討：



圖(三) 九點圓



圖(四) 九點圓證明

（一）九點圓定理：對任意三角形，三角形三邊的中點、三高的垂足，和三個頂垂中點。九點圓定理指出，對任何三角形，這九個點必定會共圓，如圖(三)。

（二）九點圓定理證明：

【已知】如圖(三)，A、B、C 為三角形三頂點，D、E、F 分別為三邊的中點，G、H、I 分別為 A、C、B 的垂足，K、L、M 為頂垂中點，J 為垂心。

【求證】D、E、F、G、H、I、K、L、M 九點共圓，此為形成九點圓的九個點。

【證明】由圖(四)

1. △ABC 中，∵E、D 為$\overline{AB}$、$\overline{AC}$中點，∴$\overline{ED}$為△ABC 中線

   ∴$\overline{ED}=\frac{1}{2}\overline{BC}$，$\overline{ED}//\overline{BC}$⋯①

2. 同理△JBC 中，∵K、M 為$\overline{JB}$、$\overline{JC}$中點，∴$\overline{KM}$為△JBC 中線

   ∴$\overline{KM}=\frac{1}{2}\overline{BC}$，$\overline{KM}//\overline{BC}$⋯②

   由①、②式得知$\overline{ED}=\overline{KM}$且$\overline{EK}//\overline{DM}$

3. 在△ABJ 中，∵E、K 為$\overline{AB}$、$\overline{BJ}$中點，∴$\overline{EK}$為△ABJ 中線

   ∴$\overline{EK}=\frac{1}{2}\overline{AJ}$，$\overline{EK}//\overline{AJ}//\overline{AG}$，又$\overline{AG}\perp\overline{BC}$　∴$\angle EKM=\angle KED=90^\circ$

4. 同理△AJC 中，D、M 為$\overline{AC}$、$\overline{JC}$中點，∴$\overline{DM}$為△AJC 中線

   ∴$\overline{DM}=\frac{1}{2}\overline{AJ}$，$\overline{DM}//\overline{AJ}//\overline{AG}$ 又$\overline{AG}\perp\overline{BC}$∴$\angle EDM=\angle DMK=90^\circ$

   ∴EKMD 為矩形，同理四邊形 LKFD 也為矩形。

5. ∴ 將$\overline{KD}$連線，可發現 E、K、F、M、D、L 都在以$\overline{KD}$為直徑的圓

上，又∠LGF 為 90 度，因此 G 也在圓上，同理 D、H 也在圓上，而此九個點共圓，形成九點圓。

（三）九點圓的性質：

1. 九點圓的半徑為三角形外接圓的一半。
2. 九點圓的圓心在尤拉線上，且剛好在垂心與外心的中點。
3. 九點圓和三角形的內切圓和旁切圓相切(費爾巴哈定理)。
4. 圓周上四點任取三點做三角形，四個三角形的九點圓圓心共圓(庫利奇－大上定理)。

（四）動態圖形探討、各種三角形形成的九點圓：

接著我們探討在不同的三角形中，九點圓的九個點會怎麼樣的改變形成不同點數的點，並給出證明，而我們先整理了一些基本的性質與定理如下：

1.1. Theorem. 鈍角三角形為四點圓。

1.2. Theorem. 直角三角形為五點圓。

1.3. Theorem. 等腰直角三角形為四點圓。

1.4. Theorem. 正三角形中的九點圓為六點圓。

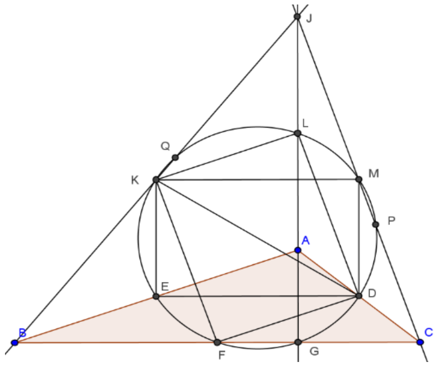
1.5. Theorem. 等腰銳角三角形為八點圓。

1.6. Theorem. 等腰鈍角三角形為三點圓。

1.7. Theorem. 30-30-120 等腰鈍角三角形為三點圓。

1.8. Theorem. 銳角三角形為九點圓。

4.3.1 鈍角三角形中的九點圓



圖(五) 鈍角三角形中的九點圓

說明：

在鈍角三角形中，由於垂心在三角形之外，也因此三個頂垂中點、 兩個垂足將形成在三角形之外，所以九點圓剩四點在三角形上，如圖(五)。

【證明九點共圓】:

（1） 如上圖(五)，$\overline{ED}//\overline{KM}//\overline{BC}$，且$\overline{ED}=\overline{KM}=\frac{1}{2}\overline{BC}$ 又，

$\overline{EK}//\overline{DM}//\overline{AJ}$ 且$\overline{EK}=\overline{DM}=\frac{1}{2}\overline{AJ}$，且$\overline{AG}\perp\overline{BC}$，因此四邊形

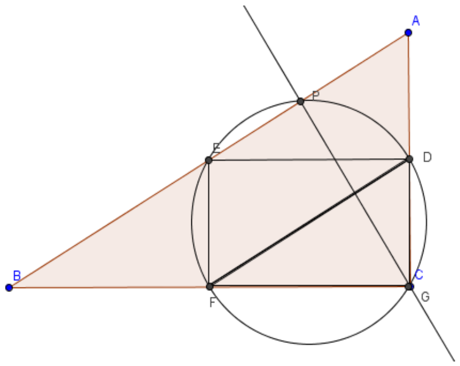
EKMD 為矩形；同理四邊形 LKFD 也為矩形。

（2） 將$\overline{KD}$連線，可發現 E、K、F、M、D、L 都在以$\overline{KD}$為直徑的圓上，

又∠LGF 為 90 度，因此 G 也在圓上，同理 P、Q 也在圓上，而此九

個點共圓，形成九點圓。

4.3.2 直角三角形中的九點圓



圖(六) 直角三角形中的九點圓

說明：

在直角三角形中，由於垂心在直角上，因此 A 與 B 的垂足皆在直角 C 上，且三個頂垂中點分別在 C 點及兩邊上的中點，重合的情況下，九點圓剩下五點圓，如圖(六)。

【證明五點共圓】:

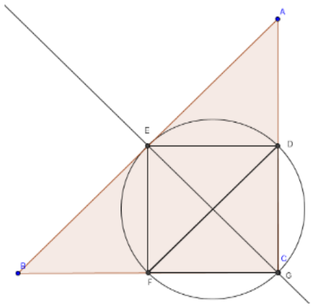
（1） 如上圖(六)，$\overline{ED}//\overline{FG}//\overline{BC}$，且$\overline{ED}=\overline{FG}=\frac{1}{2}\overline{BC}$，又$\overline{EF}//\overline{DG}//\overline{AC}$

，且$\overline{EF}=\overline{DG}=\frac{1}{2}\overline{AC}$，且$\overline{AG}\perp\overline{BC}$，因此四邊形 EDGF 為矩形。

（2）將$\overline{DF}$連線，可發現 D、E、F、G 都在以$\overline{DF}$為直徑的圓上，又∠CPE

為 90 度，因此 P 也在圓上，而此五個點共圓，形成五點圓。

4.3.3 等腰直角三角形中的九點圓：



圖(七) 等腰直角三角形中的九點圓

說明：

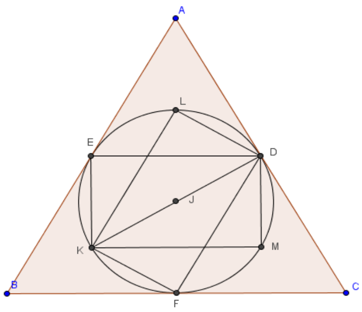
說明：在等腰直角三角形中，與直角三角形的情況相似，此時$\overline{AB}$邊上的垂足與中點也重合了，因此九點圓在圖形上剩下四點圓，如圖(七)。

【證明四點共圓】:

（1）如上圖(七)，$\overline{ED}//\overline{FG}//\overline{BC}$，且$\overline{ED}=\overline{FG}=\frac{1}{2}\overline{BC}$又$\overline{EF}//\overline{DG}//\overline{AC}$，且$\overline{EF}=\overline{DG}=\frac{1}{2}\overline{AC}$，且$\overline{AG}\perp\overline{BC}$，因此四邊形 EDGF 為矩形。

（2）將$\overline{DF}$連線，可發現 D、E、F、G 都在以$\overline{DF}$為直徑的圓上，而此四個點共圓，形成四點圓。

4.3.4 正三角形中的九點圓：



圖(八) 正三角形中的九點圓

說明：

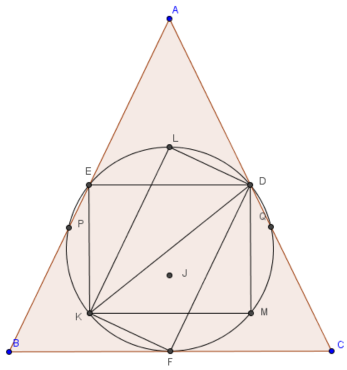
在正三角形中，垂足與中點重合，因此圖形上來看，九點圓剩下六點圓，如圖(八)。

【證明六點共圓】:

（1）如上圖(八)，$\overline{ED}//\overline{KM}//\overline{BC}$，且$\overline{ED}=\overline{KM}=\frac{1}{2}\overline{BC}$又$\overline{EK}//\overline{DM}//\overline{AJ}$，且$\overline{EK}=\overline{DM}=\frac{1}{2}\overline{AJ}$，且$\overline{AF}\perp\overline{BC}$，因此四邊形 EKMD 為矩形；同理四邊形 LKFD 也為矩形。

（2）將$\overline{KD}$連線，可發現 E、K、F、M、D、L 都在以$\overline{KD}$為直徑的圓上，而此六個點共圓，形成六點圓。

4.3.5 等腰銳角三角形中的九點圓：



說明：

在等腰銳角三角形中只有 A 的垂足與$\overline{BC}$邊中點重合，形成一個八點圓，如圖(九)。

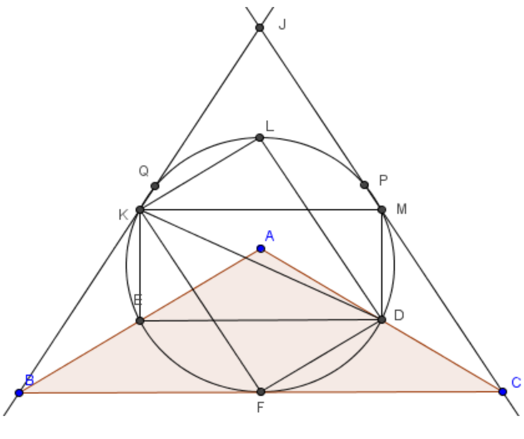
圖(九) 等腰銳角三角形中的九點圓

【證明八點共圓】：

（1）如上圖(九)，$\overline{ED}//\overline{KM}//\overline{BC}$，且$\overline{ED}=\overline{KM}=\frac{1}{2}\overline{BC}$又，$\overline{EK}//\overline{DM}//\overline{AJ}$ 且$\overline{EK}=\overline{DM}=\frac{1}{2}\overline{AJ}$，且$\overline{CP}\perp\overline{AB}$，因此四邊形 EKMD 為矩形；同理四邊形 LKFD 也為矩形。

（2）將$\overline{KD}$連線，可發現 E、K、F、M、D、L 都在以$\overline{KD}$為直徑的圓上，又 ∠MPE 為 90 度，因此 P 也在圓上，同理 Q 也在圓上，而此八個點共圓，形成八點圓。

4.3.6 等腰鈍角三角形中的九點圓：



說明：

在等腰鈍角三角形中，情況與等腰銳角三角形類似，但只有 A 點的垂足與$\overline{BC}$中點重合，而有部分的點位於三角形外，三點在三角形上，如圖(十)。

圖(十) 等腰鈍角三角形中的九點圓

【證明八點共圓】:

（1）如上圖(十)，$\overline{ED}//\overline{KM}//\overline{BC}$，且$\overline{ED}=\overline{KM}=\frac{1}{2}\overline{BC}$又

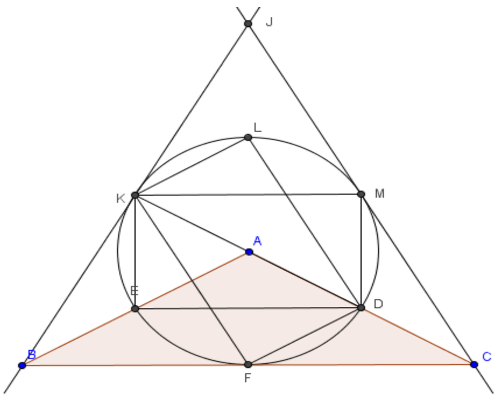
$\overline{EK}//\overline{DM}//\overline{AJ}$，且$\overline{EK}=\overline{DM}=\frac{1}{2}\overline{AJ}$，且$\overline{CQ}\perp\overline{AB}$，因此四邊形

EKMD 為矩形；同理四邊形 LKFD 也為矩形。

（2）將$\overline{KD}$連線，可發現 E、K、F、M、D、L 都在以$\overline{KD}$為直徑的圓上，

又∠DQK 為 90 度，因此 Q 也在圓上，同理 P 也在圓上，因此八個點共圓，而在三角形上的有三點。

4.3.7 30-30-120 等腰鈍角三角形中的九點圓：



圖(十一) 30-30-120 等腰鈍角三角形九點圓

說明：

三角形中，A 的垂足與 BC 中點重合，C 的垂足與 C 的頂垂中點重合交於圓外，B 的垂足與 B 的頂垂中點重合也交於圓外，因此形成一個六點圓，其中三點於三角形上，如圖(十一)。

【證明六點共圓】:

（1）如上圖(十一)，$\overline{ED}//\overline{KM}//\overline{BC}$，且$\overline{ED}=\overline{KM}=\frac{1}{2}\overline{BC}$

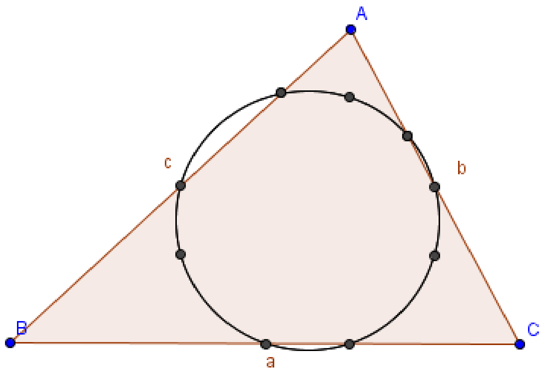
又$\overline{EK}//\overline{DM}//\overline{AJ}$，且$\overline{EK}=\overline{DM}=\frac{1}{2}\overline{AJ}$，因此四邊形 EKMD 為矩形；

同理四邊形 LKFD 也為矩形。

（2）將$\overline{KD}$連線，可發現 E、K、F、M、D、L 都在以$\overline{KD}$為直徑的圓上，

而此六個點共圓，而在三角形上的有三點。

4.3.8 銳角三角形中的九點圓：



圖(十二) 銳角三角形中的九點圓

說明：

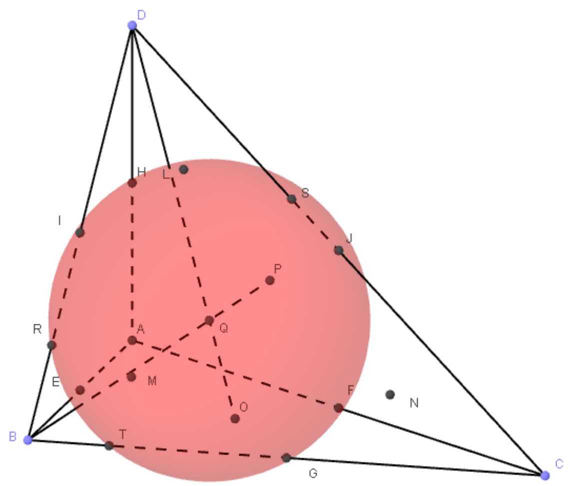
在銳角三角形中，由於沒有*前述的特殊性質*，也因此為一般所描述的九點圓，如圖(十二)，而此證明於前述的九點圓證明中已證畢。

4.4 三維空間中的尤拉球：

Geogebra 數學繪圖軟體於 2014 年推出了三維繪圖的功能，也因此我們能夠運用其強大的三維繪圖能力，深入探討在空間中的尤拉球問題，以下將分成四面體、八面體、十面體、十二面體以及 2n 面體(n≥5)做討論，首先先給出引理以及證明，而定理將在下面討論證明：

1.1.引理. 以下討論多面體之尤拉球的球心，皆在多面體的重心。

Proof：



圖(十三) 三維空間中的九點圓

由(圖十三)若多面體為垂直四面體，假設 A＝(0 , 0 , 0)、B＝(a , 0 , 0)、

C＝(0 , b , 0)、D＝(0 , 0 , c)

令 Q(x , y , z)為圓心，而 A、C 中點 F，A、B 中點 E，A、D 中點 H 在球上，因此

$\overline{QH}=\overline{QF}=\overline{QE}$ ＝半徑 R 可列出三條方程式：

$$\begin{cases} \left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2+z^2=R^2 \\ x^2+\left(y-\frac{b}{2}\right)^2+z^2=R^2 \\ x^2+y^2+\left(z-\frac{c}{2}\right)^2=R^2 \end{cases}$$

解得 Q＝$(\frac{1}{4}a,\frac{1}{4}b,\frac{1}{4}c)$為重心座標，而以下討論的多面體圖形皆可以此方式證明得到此結論。

2.1. Theorem. 在 a＝b＝c 的垂直四面體中，形成 10 點尤拉球。

2.2. Theorem. 在 a＝b≠c 的垂直四面體中，形成 12 點尤拉球。

2.3. Theorem. 在 a≠b≠c 的垂直四面體中，形成 13 點尤拉球。

2.4. Theorem. 在正四面體中，形成 18 點尤拉球。

2.5. Theorem. 在正八面體中，形成 36 點尤拉球。

2.6. Theorem. 在十面體中，形成 55 點尤拉球。

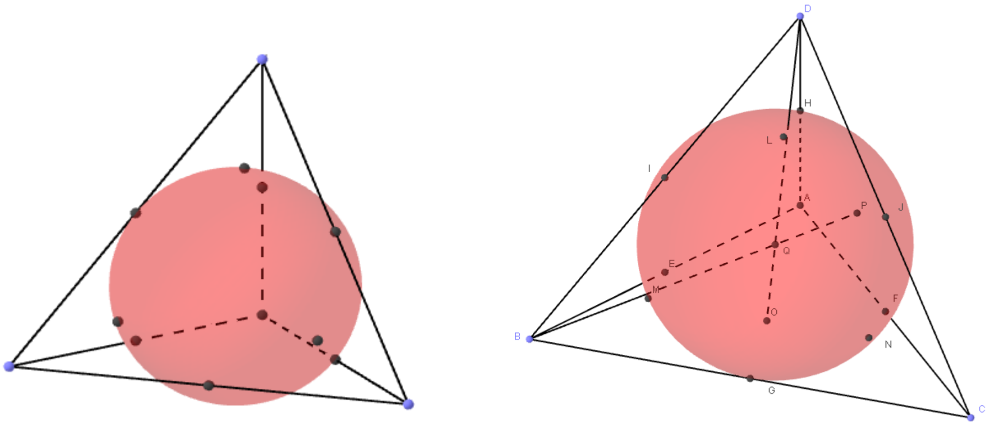
2.7. Theorem. 在十二面體中，形成 66 點尤拉球。

2.8. Theorem. 在 2n 面體((n≥5)中，形成 11n 點球。

2.9. Theorem. 在 2n 面體((n→∞)尤拉球存在性探討。

4.5 垂直四面體與尤拉球：

如圖(十四)，以原點為垂直四面體的其中一頂點，假設三點分別為(a,0,0)、(0,b,0)、(0,0,c)。在【第七屆旺宏科學獎：空間中的九點圓與尤拉線】中引理三（第三頁、第四頁），(註:同篇文章於第 47 屆全國科展高中數學組:24 點球面)提及：「任一對直四面體皆有 24 點球面」，但我們的利用實際繪圖發現有許多對直四面體都沒有 24 點球面，以下進行證明及討論。



圖(十四)當 a＝b＝c 垂直四面體與尤拉球

4.5.1　a＝b＝c 垂直四面體與尤拉球：

說明：當 a＝b＝c 時，由於四面體為一個正三角形及三個等腰直角三角形組成，而在上一個討論主題-動態圖形探討、各種三角形形成的九點圓中，知道正三角形形成六點圓，等腰直角三角形形成四點圓，因此照理來說會組成一個 6＋4＋4＋4＝18 點尤拉球，但由於每邊的中點會重合，因此最終形成只有 10 點尤拉球，而圓心會在四面體的重心，如圖(十四)

Proof：

(1)　由上圖(十四)，由於 a＝b＝c，所以假設 A＝(0 , 0 , 0)、B＝(a , 0 , 0)、C＝(0 , a , 0)、D＝(0 , 0 , a)

(2)　O、P 分別為ΔABC 及ΔACD 的重心，由於在三維空間中，因此利用 $\overline{AG}$、$\overline{CE}$兩條中線的參數式：

$$\begin{cases} x = 0 + \frac{a}{2}t \\ y = 0 + \frac{a}{2}t \\ z = 0 \end{cases} 、 \begin{cases} x = \frac{a}{2} - \frac{1}{2}k \\ y = 0 + k \\ z = 0 \end{cases}$$

解得 O＝$(\frac{a}{3},\frac{a}{3},0)$，同理可解得 P＝$(0,\frac{a}{3},\frac{a}{3})$

(3)　將$\overline{DO}$、$\overline{BP}$連線並參數化後得：

$$\overline{DO} = \begin{cases} x = 0 + \frac{1}{3}t \\ y = 0 + \frac{1}{3}t \\ z = a - t \end{cases} 、 \overline{BP} = \begin{cases} x = a - k \\ y = 0 + \frac{1}{3}k \\ z = 0 + \frac{1}{3}k \end{cases}$$

解其交點即為重心 Q＝$(\frac{1}{4}a,\frac{1}{4}a,\frac{1}{4}a)$

(4) 以 Q 為球心，$\overline{QE}$長為半徑，得到球方程式為：

$$\left(x-\frac{1}{4}a\right)^2+\left(y-\frac{1}{4}a\right)^2+\left(z-\frac{1}{4}a\right)^2=\frac{3a^2}{16}$$

(5) 下一步，將十點尤拉球的各點座標求出來之後代入球方程式：

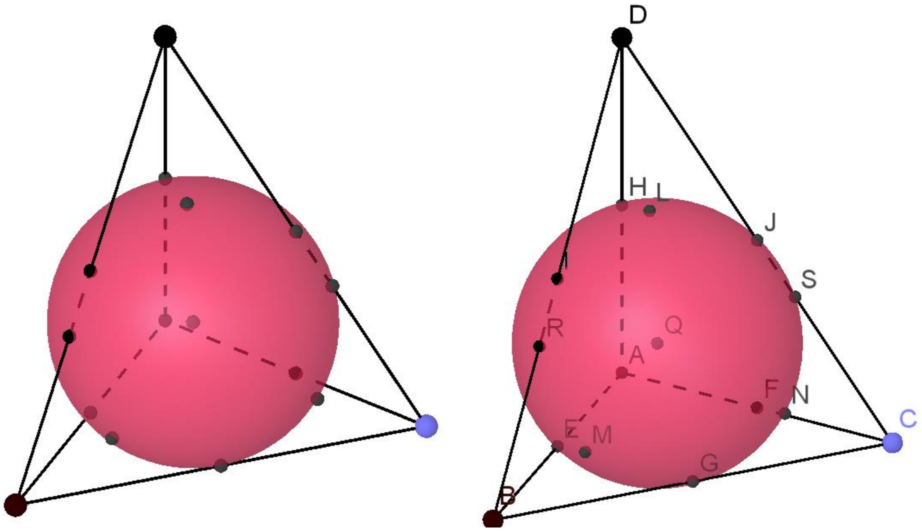
$E=\left(\frac{a}{2},0,0\right)$、$F=\left(0,\frac{a}{2},0\right)$、$G=\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},0\right)$、

$H=\left(0,0,\frac{a}{2}\right)$、$I=\left(\frac{a}{2},0,\frac{a}{2}\right)$、$J=\left(0,\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$、

$A=(0,0,0)$、$L=\left(\frac{1}{6}a,\frac{1}{6}a,\frac{2}{3}a\right)$、$M=\left(\frac{2}{3}a,\frac{1}{6}a,\frac{1}{6}a\right)$、

$N=(\frac{1}{6}a,\frac{2}{3}a,\frac{1}{6}a)$

(6) 上述十點帶入球的方程式後發現都成立，因此，形成 10 點尤拉球。



圖(十五) a＝b≠c 垂直四面體與尤拉球

4.5.2 a＝b≠c 垂直四面體與尤拉球

說明：當 a＝b≠c，為一個等腰直角三角形、兩個直角三角形和一等腰三角形組成，而在上一個討論主題-動態圖形探討、各種三角形形成的九點圓中，知道等腰直角三角形形成四點圓，直角三角形形成五點圓，因此照理來說會組成一個 22 點尤拉球，但由於有十個點重合，因此最終形成只有 12 點尤拉球，而圓心會在四面體的重心，如圖(十五)。

Proof：

(1) 由上圖(十五)，由於 a＝b≠c，所以假設 A＝(0 , 0 , 0)、B＝(a , 0 , 0)、C＝(0 , a , 0)、D＝(0 , 0 , c)

(2) O、P 分別為ΔABC及ΔACD的重心，由於在三維空間中，因此利用兩條中線的參數式：

$$\begin{cases} x = 0 + t \\ y = 0 + t \\ z = 0 \end{cases} \text{、} \begin{cases} x = \frac{a}{2} - \frac{1}{2}k \\ y = 0 + k \\ z = 0 \end{cases}$$

解得 O＝$(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, 0)$，同理可解得 P＝$(0, \frac{a}{3}, \frac{c}{3})$

(3) 將$\overline{DO}$、$\overline{BP}$連線並參數化後得：

$$\overline{DO} = \begin{cases} x = 0 + \frac{a}{3}t \\ y = 0 + \frac{a}{3}t \\ z = c - ct \end{cases} \text{、} \overline{BP} = \begin{cases} x = a - ak \\ y = 0 + \frac{a}{3}k \\ z = 0 + \frac{c}{3}k \end{cases}$$

解其交點即為重心 Q＝$(\frac{1}{4}a, \frac{1}{4}a, \frac{1}{4}c)$

(4) 以 Q 為球心，$\overline{QE}$長為半徑，得到球方程式為：

$$\left(x - \frac{1}{4}a\right)^2 + \left(y - \frac{1}{4}a\right)^2 + \left(z - \frac{1}{4}c\right)^2 = \frac{2a^2 + c^2}{16}$$

(5) 等腰三角形 DBC 垂心為$\overline{BS}$*與*$\overline{DC}$*交點座標*：$\overrightarrow{DC} = \begin{cases} x = 0 + 0t \\ y = 0 + at \\ z = c - ct \end{cases}$，

設 $S = (0, at, c - ct)$，$B(a, 0, 0)$ $\therefore \overrightarrow{BS} = (a, -at, ct - c)$

$\because \overline{BS} \perp \overline{DG}$，*內積等於* 0，∴(-a,at,c-ct)・(0,a,-c)＝0

∴$0+a^2t-c^2+c^2t=0$ ∴$t=\frac{C^2}{a^2+C^2}$代回得 S 點座標$(0, \frac{aC^2}{a^2+C^2}, c-\frac{C^3}{a^2+C^2})$

$$\therefore \overline{BS} = \begin{cases} x = a - ak \\ y = 0 + \frac{ac^2}{a^2+c^2}k \\ z = 0 + \frac{a^2c}{a^2+c^2}k \end{cases} \text{、} \overline{DG} = \begin{cases} x = 0 + \frac{a}{2}t \\ y = 0 + \frac{a}{2}t \\ z = c - ct \end{cases}$$

解$\overline{BS}$、$\overline{DG}$*參數式求其交點* ∴ 垂心座標為$\left(\frac{ac^2}{a^2+2c^2}, \frac{ac^2}{a^2+2c^2}, \frac{a^2c}{a^2+2c^2}\right)$。

(6) 下一步，將十點尤拉球的各點座標求出來之後代入球方程式：

$\mathrm{E}=\left(\frac{a}{2},0,0\right)$ 、$\mathrm{F}=\left(0,\frac{a}{2},0\right)$ 、$\mathrm{G}=\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},0\right)$ 、

$\mathrm{H}=\left(0,0,\frac{c}{2}\right)$ 、$\mathrm{I}=\left(\frac{a}{2},0,\frac{c}{2}\right)$ 、$\mathrm{J}=\left(0,\frac{a}{2},\frac{c}{2}\right)$ 、$\mathrm{A}=(0,0,0)$、

$\mathrm{L}=(\frac{\mathrm{ac}^2}{2\mathrm{a}^2+4\mathrm{c}^2},\frac{\mathrm{ac}^2}{2\mathrm{a}^2+4\mathrm{c}^2},\frac{\mathrm{a}^2c}{2a^2+4c^2}+\frac{\mathrm{c}}{2})$、

$\mathrm{M}=(\frac{\mathrm{ac}^2}{2\mathrm{a}^2+4\mathrm{c}^2}+\frac{\mathrm{a}}{2},\frac{\mathrm{ac}^2}{2\mathrm{a}^2+4\mathrm{c}^2},\frac{\mathrm{a}^2c}{2a^2+4c^2})$、

$\mathrm{N}=(\frac{\mathrm{ac}^2}{2\mathrm{a}^2+4\mathrm{c}^2},\frac{\mathrm{ac}^2}{2\mathrm{a}^2+4\mathrm{c}^2}+\frac{\mathrm{a}}{2},\frac{\mathrm{a}^2c}{2a^2+4c^2})$、

$\mathrm{R}=\left(\frac{ac^2}{a^2+c^2},0,\frac{a^2c}{a^2+c^2}\right)$ 、$\mathrm{S}=\left(0,\frac{ac^2}{a^2+c^2},\frac{a^2c}{a^2+c^2}\right)$ ，

$\overline{CR}\perp\overline{DB}$ 、$\overline{BS}\perp\overline{DC}$。

(7) E、F、G、H、I、J、A、L、M、N 點帶入球方程式成立，所以位於球上。

而比較特別的 R、S 點分別帶入球方程式後也使等號成立：

$$R：\left(\frac{ac^2}{a^2+c^2}-\frac{1}{4}\mathrm{a}\right)^2+\left(0-\frac{1}{4}\mathrm{a}\right)^2+\left(\frac{a^2c}{a^2+c^2}-\frac{1}{4}\mathrm{c}\right)^2$$

$$=\frac{1}{16(a^2+c^2)^2}(a^6+3a^4c^2+3a^2c^4+c^6)+\frac{a^2}{16}$$

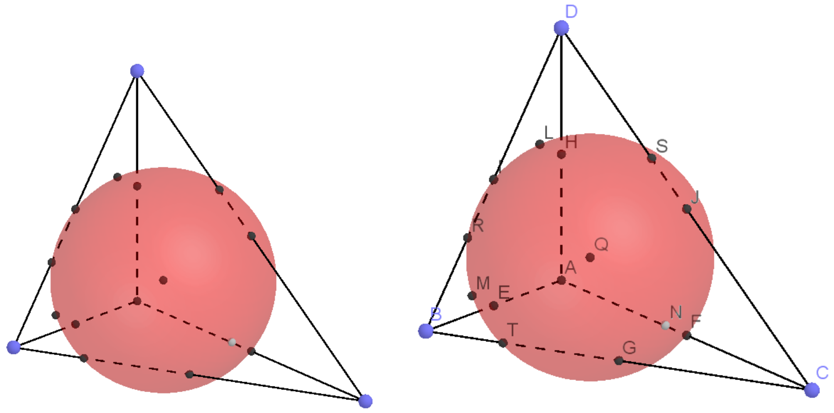
$$=\frac{(a^2+c^2)^3}{16(a^2+c^2)^2}+\frac{a^2}{16}=\frac{2a^2+c^2}{16}$$

$$S：\left(0-\frac{1}{4}\mathrm{a}\right)^2+\left(\frac{ac^2}{a^2+c^2}-\frac{1}{4}\mathrm{a}\right)^2+\left(\frac{a^2c}{a^2+c^2}-\frac{1}{4}\mathrm{c}\right)^2$$

$$=\frac{1}{16(a^2+c^2)^2}(a^6+3a^4c^2+3a^2c^4+c^6)+\frac{a^2}{16}$$

$$=\frac{(a^2+c^2)^3}{16(a^2+c^2)^2}+\frac{a^2}{16}=\frac{2a^2+c^2}{16}$$

發現皆位於球上因此形成 12 點尤拉球。



圖(十六) a≠b≠c 垂直四面體與尤拉球

4.5.3 a≠b≠c 垂直四面體與尤拉球

說明：當 a≠b≠c 時，由於四面體為三個直角三角形及一個三角形組成，而在上一個討論主題-動態圖形探討、各種三角形形成的九點圓中，知道直角三角形形成五點圓，三角形形成九點圓，因此照理來說會組成一個24 點尤拉球，但由於有 11 個點重合，因此最終形成只有 13 點尤拉球，而圓心會在四面體的重心，如圖(十六)可見。

Proof：

(1) 由上圖(十六)，由於 a≠b≠c，所以假設 A＝(0 , 0 , 0)、B＝(a , 0 , 0)、C＝(0 , b , 0)、D＝(0 , 0 , c)

O、P 分別為ΔABC 及ΔACD 的重心，由於在三維空間中，因此利用兩條中線的參數式：

$$\begin{cases} x = 0 + at \\ y = 0 + bt \\ z = 0 \end{cases} 、 \begin{cases} x = a - ak \\ y = 0 - \frac{b}{2}k \\ z = 0 \end{cases}$$

解得 O＝$(\frac{a}{3},\frac{b}{3},0)$，同理可解得 P＝$(0,\frac{b}{3},\frac{c}{3})$

(2) 將$\overline{DO}$ 、$\overline{BP}$連線並參數化後得：

$$\overline{DO} = \begin{cases} x = 0 + \frac{a}{3}t \\ y = 0 + \frac{b}{3}t \\ z = c - ct \end{cases} 、 \overline{BP} = \begin{cases} x = a - ak \\ y = 0 + \frac{b}{3}k \\ z = 0 + \frac{c}{3}k \end{cases}$$

解其交點即為重心 Q＝$(\frac{1}{4}a,\frac{1}{4}b,\frac{1}{4}c)$

(3) 以 Q 為球心，$\overline{QE}$長為半徑，得到球方程式為：

$$\left(x-\frac{1}{4}a\right)^2+\left(y-\frac{1}{4}b\right)^2+\left(z-\frac{1}{4}c\right)^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{16}$$

(4) 三角形 DBC 垂心為$\overline{BS}$與$\overline{DT}$交點座標，$\overrightarrow{DC}=\begin{cases}x=0+0t\\y=0+bt\\z=c-ct\end{cases}$，

設 $S=(0,bt,c-ct)$，所以$\overrightarrow{BS}=(a,-bt,ct-c)$，

再利用$\overline{BS}\perp\overline{DC}$，因此內積等於 0，求出$S$點$\left(0,\frac{bc^2}{b^2+c^2},\frac{b^2c}{b^2+c^2}\right)$，

同理$\overline{DT}\perp\overline{BC}$，內積等於 0，求出$T$點$\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2},\frac{a^2b}{a^2+b^2},0\right)$，

將$\overline{BS}$、$\overline{DT}$參數式後解其交點即為垂心座標。

$$\overline{BS}=\begin{cases}x=a-ak\\y=0+\frac{bc^2}{b^2+c^2}k\\z=0+\frac{b^2c}{b^2+c^2}k\end{cases}、\overline{DT}=\begin{cases}x=0+\frac{ab^2}{a^2+b^2}t\\y=0+\frac{a^2b}{a^2+b^2}t\\z=c-ct\end{cases}$$

所以垂心座標為$(\frac{ab^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2},\frac{a^2bc^2}{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2},\frac{a^2b^2c}{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2})$，

L、M、N 三點即可求出如第六點。

(5) 下一步，將十點尤拉球的各點座標求出來之後代入球方程式：

$E=\left(\frac{a}{2},0,0\right)$、$F=\left(0,\frac{b}{2},0\right)$、$G=\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},0\right)$、

$H=\left(0,0,\frac{c}{2}\right)$、$I=\left(\frac{a}{2},0,\frac{c}{2}\right)$、$J=\left(0,\frac{b}{2},\frac{c}{2}\right)$、$A=(0,0,0)$、

$$L=\left(\frac{1}{2}\left(\frac{ab^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}\right),\frac{1}{2}\left(\frac{a^2bc^2}{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}\right),\frac{1}{2}\left(\frac{a^2b^2c}{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}+c\right)\right)$$

$$、M=\left(\frac{1}{2}\left(\frac{ab^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}+a\right),\frac{1}{2}\left(\frac{a^2bc^2}{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}\right),\frac{1}{2}\left(\frac{a^2b^2c}{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}\right)\right)$$

$$、N=\left(\frac{1}{2}(\frac{ab^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}),\frac{1}{2}(\frac{a^2bc^2}{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}+b),\frac{1}{2}(\frac{a^2b^2c}{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2})\right)$$

$$、R=\left(\frac{ac^2}{a^2+c^2},0,\frac{a^2c}{a^2+c^2}\right)、S=\left(0,\frac{bc^2}{b^2+c^2},\frac{b^2c}{b^2+c^2}\right)，T=\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2},\frac{a^2b}{a^2+b^2},0\right)$$

且 $\overline{CR}\perp\overline{DB}$、$\overline{BS}\perp\overline{DC}$，$\overline{AT}\perp\overline{BC}$。

(6) E、F、G、H、I、J、A、L、M、N 代入球方程式成立，所以位於球上。

而比較特別的 R、S、T 點分別帶入球方程式後：

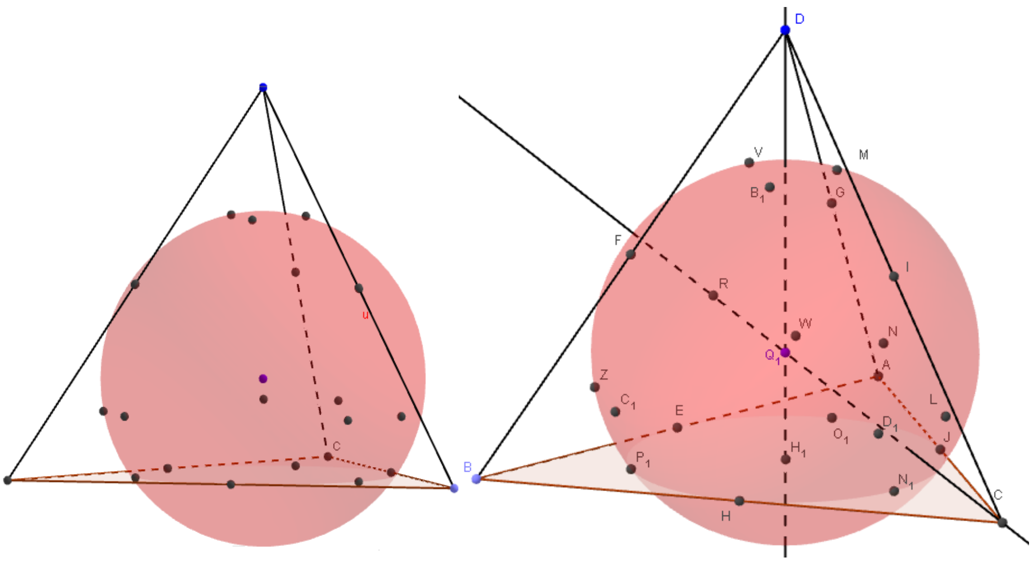
$$R:\left(\frac{ac^2}{a^2+c^2}-\frac{1}{4}\mathrm{a}\right)^2+\left(0-\frac{1}{4}\mathrm{b}\right)^2+\left(\frac{a^2c}{a^2+c^2}-\frac{1}{4}\mathrm{c}\right)^2$$
$$=\frac{1}{16(a^2+c^2)^2}(a^6+3a^4c^2+3a^2c^4+c^6)+\frac{b^2}{16}$$
$$=\frac{(a^2+c^2)^3}{16(a^2+c^2)^2}+\frac{b^2}{16}=\frac{a^2+b^2+c^2}{16}$$

$$S:\left(0-\frac{1}{4}\mathrm{a}\right)^2+\left(\frac{bc^2}{b^2+c^2}-\frac{1}{4}\mathrm{b}\right)^2+\left(\frac{b^2c}{b^2+c^2}-\frac{1}{4}\mathrm{c}\right)^2$$
$$=\frac{1}{16(b^2+c^2)^2}(b^6+3b^4c^2+3b^2c^4+c^6)+\frac{a^2}{16}$$
$$=\frac{(b^2+c^2)^3}{16(b^2+c^2)^2}+\frac{a^2}{16}=\frac{a^2+b^2+c^2}{16}$$

$$T:\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2}-\frac{1}{4}\mathrm{a}\right)^2+\left(\frac{a^2b}{a^2+b^2}-\frac{1}{4}\mathrm{b}\right)^2+\left(0-\frac{1}{4}\mathrm{c}\right)^2$$
$$=\frac{1}{16(a^2+b^2)^2}(a^6+3a^4b^2+3a^2b^4+b^6)+\frac{c^2}{16}$$
$$=\frac{(a^2+b^2)^3}{16(a^2+b^2)^2}+\frac{c^2}{16}=\frac{a^2+b^2+c^2}{16}$$

發現皆位於球上因此形成 13 點尤拉球。

4.6 正四面體與尤拉球：



圖(十七) 正四面體與尤拉球

說明：正四面體由四個正三角形組成，而從前述討論已知，每個正三角形會形成六點圓所以總計應是 24 點球，但由於在空間中每個邊上會有一個點重複，因此扣除重複的六個點，形成 18 點尤拉球，如圖(十七)，其中紫色的點為重心，恰好為 18 點尤拉球的圓心。

Proof：

1. 上圖(十七)為正四面體，因此假設 A＝(0 , 0 , 0)、B＝(a , 0 , 0)、$C = \left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}a, 0\right)$、$D = \left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}a, \frac{\sqrt{6}}{3}a\right)$

2. Q_1為四面體的重心，重心座標為$\left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}a, \frac{\sqrt{6}}{12}a\right)$

3. 以Q_1為球心，$\overline{Q_1H}$長為半徑，得到球方程式為：

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2+\left(z-\frac{\sqrt{6}}{12}a\right)^2=\frac{a^2}{8}$$

4. 下一步，將十八點尤拉球的各點座標求出來之後代入球方程式：

由於在正四面體中每一面有六點，且同一面上的六點與Q_1的關係會跟其他三面上的六點與Q_1的關係相同，所以只需證明其中一面上的點在球方程式中會成立即可，因此計算ΔABC 中的六點 E、P_1、H、N_1、J、O_1的座標：

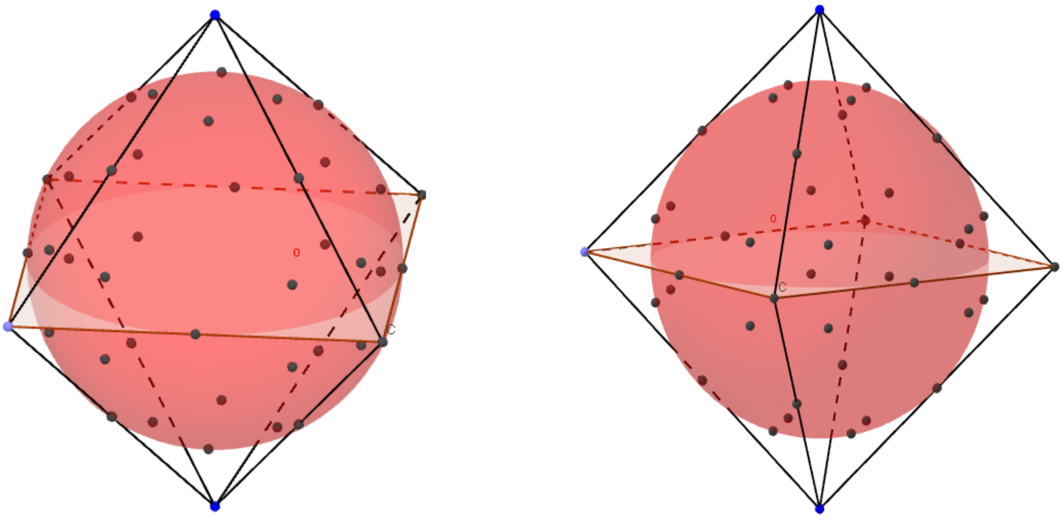
$E=\left(\frac{a}{2},0,0\right)$、$P_1=\left(\frac{3a}{4},\frac{\sqrt{3}}{12}a,0\right)$、$H=\left(\frac{3a}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}a,0\right)$、

$N_1=\left(\frac{a}{2},\frac{\sqrt{3}}{3}a,0\right)$、$J=\left(\frac{a}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}a,0\right)$、$O_1\left(\frac{a}{4},\frac{\sqrt{3}}{12}a,0\right)$

E、P_1、H、N_1、J、O_1六點帶入球方程式成立，因此ΔABC上的六點都在球上，同理其他三面的六點也在球上，而由於其中六個邊的中點重合，也因此形成 18 點尤拉球。

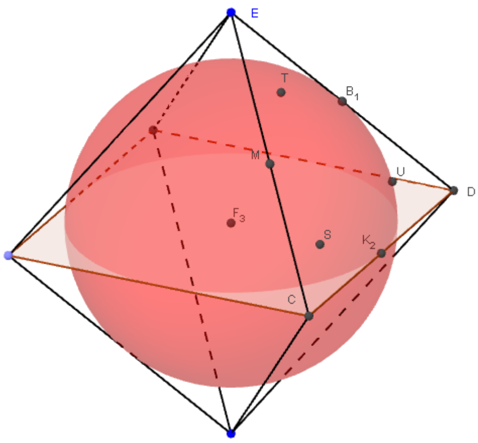
4.7 正八面體與尤拉球：

說明：由於正八面體的八個面由正三角形所組成，我們知道在平面中正三角形會形成六點圓，在空間中每個邊上會有一個點重合，共有 12 個邊，扣除重複的 12 個點後，由原先的「48 點球」變為「36 點球」，如圖(十八) 。



圖(十八) 正八面體與尤拉球

Proof：



圖(十九) 正八面體與尤拉球證明

1. 上圖(十九)為正八面體，假設 C＝(a, a , 0)、D＝(0 , a , 0)、E ＝ $(\frac{a}{2},\frac{a}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{a})$、$F_3=(\frac{a}{2},\frac{a}{2},0)$為球心。

2. 以F_3為球心，$\overline{F_3K_2}$長為半徑，得到球方程式為：

$$\left(\mathrm{x}-\frac{a}{2}\right)^2+\left(\mathrm{y}-\frac{a}{2}\right)^2+(\mathrm{z}-0)^2=\frac{a^2}{4}$$

3. 八個面皆由正三角形所組成，同一個面上的六點到球心F_3的關係會跟其他七個面上的六點與F_3的關係相同，也因此只須證明其中一個面上的六個點在球上即可。

4. 六點座標分別為：

$$M=\left(\frac{3a}{4},\frac{3a}{4},\frac{\sqrt{2}}{4}\mathrm{a}\right)、S=\left(\frac{3a}{4},\frac{11a}{12},\frac{\sqrt{2}}{12}\mathrm{a}\right)、K_2=\left(\frac{a}{2},\mathrm{a},0\right)$$

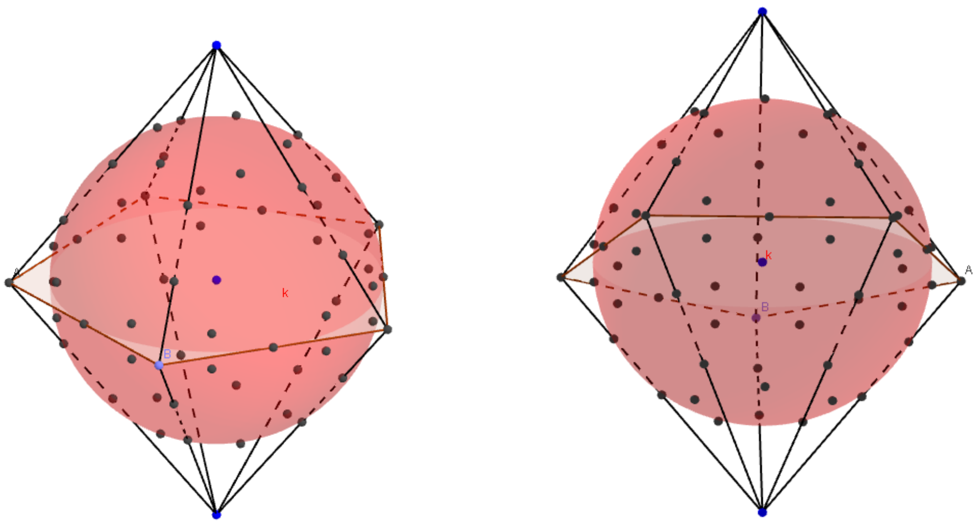
$$、U=\left(\frac{a}{4},\frac{11a}{12},\frac{\sqrt{2}}{12}\mathrm{a}\right)、B_1=\left(\frac{a}{4},\frac{3a}{4},\frac{\sqrt{2}}{4}\mathrm{a}\right)、T=\left(\frac{a}{2},\frac{2a}{3},\frac{\sqrt{2}}{3}\mathrm{a}\right)$$

5. 將其分別帶入球方程式成立，因此六點都在球上，同理其他七面的六點也在球上，而由於其中八個邊的中點重合，也因此形成 36 點尤拉球。

4.8 十面體與尤拉球：

說明：

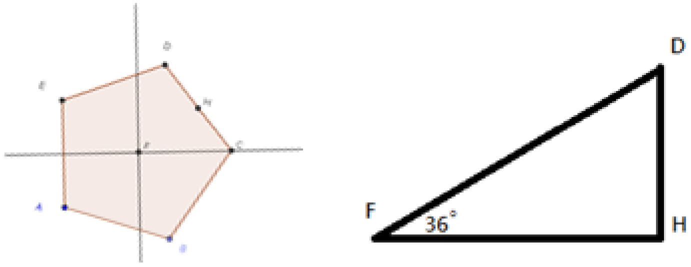
首先我們先建構一個正五邊形，在正五邊形的中心畫上兩點，將一點垂直向上、一點垂直向下，接著分別將這兩點與正五邊形的五個頂點連線，形成一個十面體，而在我們利用數學繪圖軟體多次的嘗試之後發現，每個面上的等腰三角形，當其兩腰的角度接近 70 度時，可以形成圓心為正五邊形中心，邊長為正五邊形中心到各邊中點的距離的圓，共有 55 個點在其上形成 55 點球，如圖 (二十)。



圖(二十) 十面體與尤拉球

十面體共由十組等腰三角形組成，前述結論已知，每組等腰三角形有八點圓應有 80 點球，但由於五邊形上五個中點與垂心重合，而在每個等腰三角形兩腰的邊上分別與鄰近的等腰三角形共用，因此重合了 20 個點，最後形成 55 點球。

Proof:



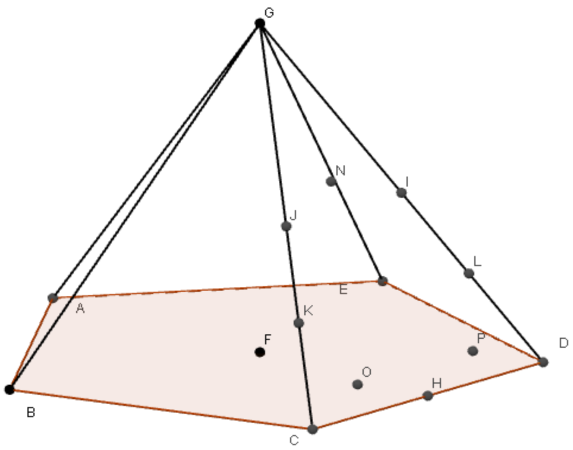
圖(二十一) 十面體的中心平面五邊形與邊角關係示意圖

1. 首先看到中間的正五邊形，如上圖(二十一)，將 F 點定為(0,0,0)，由於正五邊形每個角為 108 度，因此可利用三角變換表示每個頂點，假設中心 F 點到各頂點的距離為 R，可假設 C＝(R,0,0)、D＝$(\mathrm{Rcos}\,72^{0}\,,\mathrm{Rsin}\,72^{0}\,,0)$，其他頂點依此類推。

2. 由 Lemma. 1.1.可知球心為 F 點，而球半徑長由上圖(二十一)的關係：

   $\overline{FH} = \overline{FD}\cos 36^{0} = \mathrm{Rcos}\,36^{0}$

   因此球方程式為：　$\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2 = (\mathrm{Rcos}\,36^{0})^2 = 0.64R^2$



圖(二十二) 十面體計算各點關係示意圖

3. 如圖(二十二)，由於 G 點的 Z 軸座標無法直接求得，因此用反推的方式計算，假設 G＝$(0,0,\mathrm{Q})$，所以 J＝$(\frac{R}{2},0,\frac{Q}{2})$，而$\overline{FJ} = \mathrm{Rcos}\,36^{0}$ 約 $= 0.8\mathrm{R}$

   解得 Q＝$2\mathrm{R}\sqrt{0.64 - \frac{1}{4}} = 1.25\mathrm{R}$，因此 G＝$(0,0,1.25\mathrm{R})$

   以下為計算方便，皆將三角函數以查表表示。

4. 而十個面皆由三角形所組成，同一個面上的八點到球心 F 的關係會跟其他

九個面上的八點與 F 的關係相同，也因此只須證明其中一個面上的八個點在球上即可。

5. 八點座標分別為：$\mathrm{J}=(0.5\mathrm{R}, 0, 0.625\mathrm{R})$、

$\mathrm{I}=(0.1545\mathrm{R}, 0.4755\mathrm{R}, 0.625\mathrm{R})$、$\mathrm{H}=(0.65\mathrm{R}, 0.47\mathrm{R}, 0)$

將此三點帶入球方程式確實成立(忽略些許誤差)

6. L 點藉由$\overline{CL} \perp \overline{DG}$內積=0 解出，同理可解出 K 點：

$\mathrm{L}=(0.225\mathrm{R}, 0.694\mathrm{R}, 0.3375\mathrm{R})$、$\mathrm{K}=(0.7304\mathrm{R}, 0, 0.337\mathrm{R})$

將此兩點帶入球方程式確實成立(忽略些許誤差)

7. 而三個頂垂中點利用參數式直線$\overline{CL}$*與*$\overline{DK}$*交點求出垂心座標：*

(0.55236R, 0.4008544R, 0.19494R)

所以頂垂中點分別為：

$\mathrm{N}=(0.27618R, 0.200425R, 0.72247R), \mathrm{O}=(0.77618R, 0.20045R, 0.09R),$

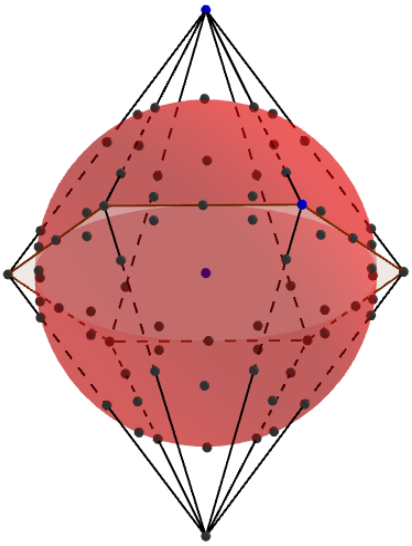
$\mathrm{P}=(0.43068R, 0.6759R, 0.09R)$三點帶入球方程式成立(忽略些許誤差)

8. 而將八點分別帶入球方程式成立，因此八點都在球上，同理其他九面的八點也在球上，而由於五邊形上五個中點與垂心重合，而在每個等腰三角形兩腰的邊上分別與鄰近的等腰三角形共用，因此重合了 20 個點，最後形成 55 點球。

9. 此時透過 geogebra 軟體觀察發現，在十面體中，可得知每個側邊的等腰三角形三邊長為 6.83、6.83、4.95 此種比例，其兩腰 cos 值為 0.3623，接著利用查表將角度求出。

10. 因此可知角度為 68 至 69 度之間。

4.9 十二面體與尤拉球：

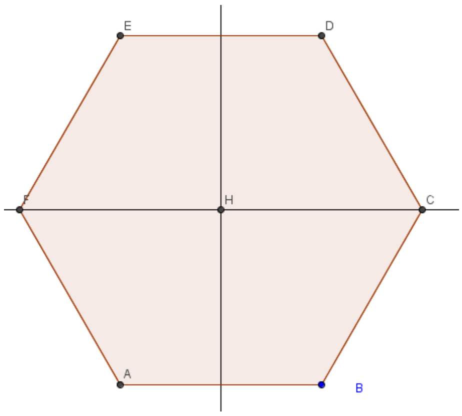


圖(二十三) 十二面體與尤拉球

說明：

如圖(二十三)，首先我們先建構一個正六邊形，在過正六邊形中心的法線上取兩點，將一點在上方、一點在下方，接著分別將這兩點與正六邊形的六個頂點連線，形成一個十二面體，而在我們利用數學繪圖軟體多次的嘗試之後發現，每個面上的等腰三角形，當其兩腰的角度接近 73 度時，可以形成圓心為正六邊形中心，邊長為正六邊形中心到各邊中點的距離的球，而共有 66 個點在其上，形成 66 點球。

Proof：



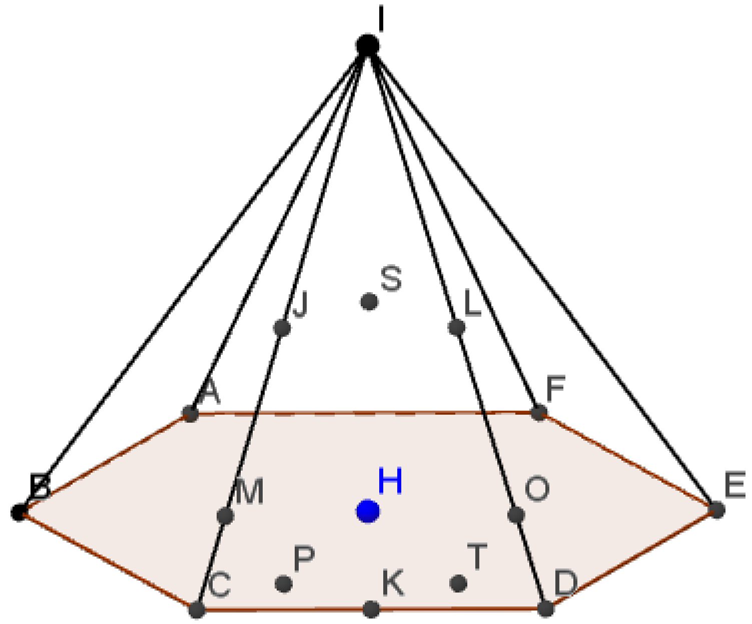
圖(二十四) 十二面體的中心平面六邊形示意圖

由圖(二十四)，首先看到中間的正六邊形，如上圖，將 H 點定為(0,0,0)，由於

正六邊形每個角為 120 度，因此可利用三角變換表示每個頂點，假設中心 H 點到各頂點的距離為 R，可假設 C＝(R,0,0)、D＝$(\frac{R}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}R,0)$，其他頂點依此類推。

1. 由**引理**. 1.1.可知球心為 H 點，而球半徑長= $\frac{\sqrt{3}}{2}R$：

   因此球方程式為： $x^2+y^2+z^2=\frac{3}{4}R^2$



圖(二十五) 十二面體計算各點關係示意圖

2. 如圖(二十五)，由於 I 點的 Z 軸座標無法直接求得，因此用反推的方式計算，假設 I＝(0,0, Q)，所以 J＝$(\frac{R}{2},0,\frac{Q}{2})$，而$\overline{HJ}=\frac{\sqrt{3}}{2}$R

   解得 Q＝$\sqrt{2}R$，因此 I＝(0,0, $\sqrt{2}$R)

3. 而十二個面皆由三角形所組成，同一個面上的八點到球心 H 的關係會跟其他 11 個面上的八點與 H 的關係相同，也因此只須證明其中一個面上的八個點在球上即可。

4. 八點座標分別為：J= $\frac{C+I}{2}=(\frac{1}{2}R,0,\frac{\sqrt{2}}{2}R)$、

   $L=\frac{D+I}{2}=(\frac{R}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}R,\frac{\sqrt{2}}{2}R)$、K= $\frac{C+D}{2}=(\frac{3}{4}R,\frac{\sqrt{3}}{4}R,0)$

   將此三點帶入球方程式確實成立

5. O 點藉由直線$\overline{DI}$*的參數式* $\begin{cases} x = 0 + \frac{1}{2}t \\ y = 0 + \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ z = \sqrt{2}R - \sqrt{2}t \end{cases}$ *假設，並利用*$\overline{CO} \perp \overline{DI}$內積=0

解出$O = (\frac{5}{12}R, \frac{5\sqrt{3}}{12}R, \frac{\sqrt{2}}{6}R)$，同理可解出$M = (\frac{5}{6}R, 0, \frac{\sqrt{2}}{6}R)$

將此兩點帶入球方程式確實成立

6. 而三個頂垂中點利用參數式直線$\overline{CO} = \begin{cases} x = R - \frac{7}{12}t \\ y = 0 + \frac{5\sqrt{3}}{12}t \\ z = 0 + \frac{\sqrt{2}}{6}t \end{cases}$

與$\overline{DM} = \begin{cases} x = \frac{R}{2} + \frac{1}{3}k \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}R - \frac{\sqrt{3}}{2}k \\ z = 0 + \frac{\sqrt{2}}{6}k \end{cases}$ *交點求出垂心* $= (\frac{15}{22}R, \frac{5\sqrt{3}}{22}R, \frac{\sqrt{2}}{11}R)$*後，再以垂心*

至三頂點的中點可求出頂垂中點：

$$P = \left(\frac{37}{44}R, \frac{5\sqrt{3}}{44}R, \frac{2\sqrt{2}}{44}R\right), T = \left(\frac{13}{22}R, \frac{8\sqrt{3}}{22}R, \frac{\sqrt{2}}{22}R\right),$$

$$S = \left(\frac{15}{44}, \frac{5\sqrt{3}}{44}R, \frac{6\sqrt{2}}{11}R\right)$$

將此三點帶入球方程式確實成立。

7. 而將八點分別帶入球方程式成立，因此八點都在球上，同理其他 11 面的八點也在球上，而由於六邊形上六個中點與垂心重合，而在每個等腰三角形兩腰的邊上分別與鄰近的等腰三角形共用，因此重合了 22 個點，最後形成 66 點球。

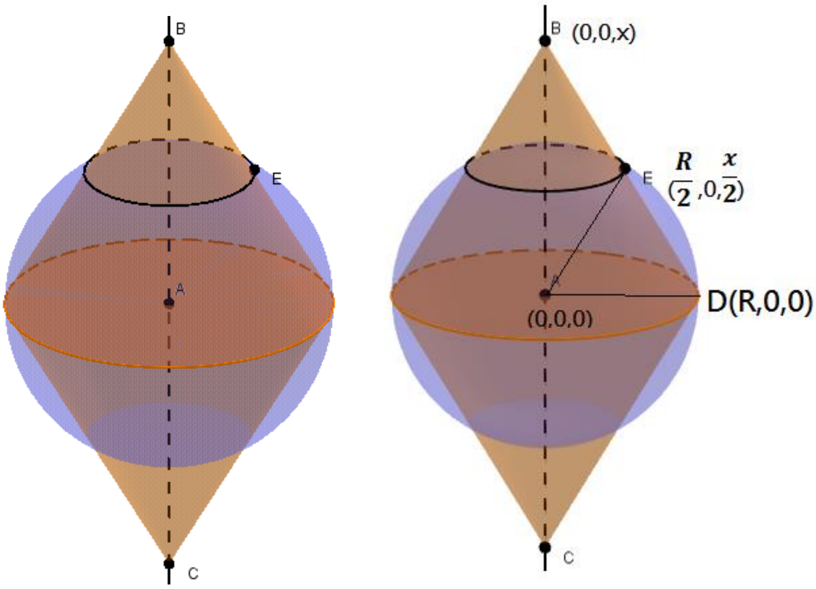
8. 此時透過 geogebra 軟體觀察發現，在十二面體中，可得知每個側邊的等腰三角形三邊長為 8、13.93、13.93 此種比例，其兩腰 cos 值為 0.2871，接著利用查表將角度求出，可知角度為 73 至 74 度之間。

4.10 2n 面體(n≥5)尤拉球推斷：

由以上十面體、十二面體得到的結果，我們推論若以上述十二面體的組成方式組成 2n 面體(n≥5)，則都會有尤拉球的情況發生，而 2n 面體為一個 11n 點球。

4.11　2n 面體(n→∞)尤拉球存在性探討

當 n→∞時，正 n 邊形形成一個圓，假設半徑為 R，A=(0,0,0)、B=(0,0, $\sqrt{3}R$)，c=(0,0,$-\sqrt{3}R$)且每個三角形此時趨近於一條條直線，原本的 2n 面體形成一個圓錐，而此時尤拉球與圓錐交出三個圓，如下圖：



圖(二十六)　2n 面體((n→∞)與尤拉球

B 點座標運算如下：

設 D(R,0,0)，頂點 B(0,0,x)，$\overline{BD}$中點 E($\frac{R}{2}$，0，$\frac{x}{2}$)，球方程式： $x^2+y^2+z^2=R^2$

又$\overline{AD}=\overline{AE}$ ∵D、E 皆在球上∴$\sqrt{R^2+0^2+0^2}=\sqrt{(\frac{R}{2})^2+(0)^2+(\frac{x}{2})^2}$

∴$R^2=(\frac{R}{2})^2+(\frac{x}{2})^2$　∴$x=\sqrt{3}R$，代回得 B、E 點座標。

而尤拉球與圓錐相交的三個圓軌跡方程式由上到下分別為

$\begin{cases} x=\frac{R}{2}\cos\theta \\ y=\frac{R}{2}\sin\theta \\ z=\frac{\sqrt{3}}{2}R \end{cases}$ 、 $\begin{cases} x=R\cos\theta \\ y=R\sin\theta \\ z=0 \end{cases}$ 、 $\begin{cases} x=\frac{R}{2}\cos\theta \\ y=\frac{R}{2}\sin\theta \\ z=-\frac{\sqrt{3}}{2}R \end{cases}$　球方程式$x^2+y^2+z^2=R^2$

而在 2n 面體尤拉球的推斷中，雖然我們能力不足以嚴謹的證明其真實性，但透過將 n→∞時觀察的圖形，由於尤拉球與圓錐交出三個圓可以看做是退化的頂垂中點、各邊中點以及垂足點形成的圓軌跡，因此我們更加確信 2n 面體的存在以及其真實性。

伍、研究結果：

一、在九點圓部分，發現在不同種類三角形中，會形成特殊的九點圓：

(一) 鈍角三角形：四點圓。

(二) 直角三角形：五點圓。

(三) 等腰直角三角形：四點圓。

(四) 正三角形：六點圓。

(五) 等腰銳角三角形：八點圓。

(六) 等腰鈍角三角形：三點圓。

(七) 30-30-120 等腰鈍角三角形：三點圓。

(八) 銳角三角形：九點圓。

二、 四面體及八面體尤拉球的探討部分，我們採取和前人不同的方向去探討空間中的尤拉球，發現可能是前人所沒發現的一些觀點，我們透過實際繪圖建立 3D 尤拉球，並把每個點代入確認每個點皆在球上，而我們得出以下結論：

(一) 正四面體：18 點球。

(二) 垂直四面體($a=b=c$)：10 點球。

(三) 垂直四面體($a=b\neq c$)：12 點球。

(四) 垂直四面體($a\neq b\neq c$)：13 點球。

(五) 正八面體：36 點球。

三、接著我們延伸前述的結果，探討在十面體、2n 面體($n\geq 5$)，這些新的球體是否也有尤拉球的現象產生，並有所斬獲：

(一) 十面體：55 點球。

(二) 十二面體：66 點球。

(三) 2n 面體($n\geq 5$)：11n 點球。

(四) 2n 面體($n\to\infty$)：尤拉球在 2n 面體的存在性。

陸、討論：

一、遇到問題與解決方法：

（一)求頂垂中點時向量的應用：

我們在求各點座標時運用了分點公式、相似三角形的母子定理；但是在求頂垂中點時，原本想要運用兩直線垂直的斜率觀念設方程式求其解，但我們發現這樣得面對更多的未知數更難以求解，後來在討論過程中發現老師在直線方程式這單元曾延伸〔向量〕的基本觀念應可運用，於是我們蒐集資料研讀知道〔向量內積＝0〕應可解決這個問題；後來我們閱讀了四本有關向量的教科書才大概會運用，雖然我們在這篇研究中的問題尚能解決，但我們自學向量觀念仍需再更扎實才能在空間立體圖形更深入探討。

(二) 極限 lim 概念的學習：

這部分是在縣賽進入全國賽這段期間我們再延伸研究 $n\to\infty$時所發現的問題。那時我們沒從來聽過「極限 lim」這個數學名詞，我們只是土法煉鋼的發現 n 越大時則 2n 面體側邊三角形越狹長、三角形底邊越小，此時兩腰上的高交點即垂心越趨近底邊中點，因此頂垂中點座標利用中點座標算法發現越趨近於兩腰中點座標，老師看了我們研究後說這可用數學上的 lim 表示，我們恍然大悟原來可以用數學式處理這類問題，但在這份研究中我們來不及學習，因此在 4.11 小節 $n\to\infty$的研究中，我們是用自己所理解的圖形幾何概念去建構極限的觀念，相信若能再習得數學相關知識必能處理更多問題。

二、展望：

(一) 尤拉球是否為「唯一性」證明

這是問題也是展望。當我們發現實際繪圖結果與前人研究報告結論有所出入時相當開心，但在我們研究後期不免擔心我們討論的尤拉球會是同一顆嗎? 會不會 2n 面體中各面滿足九點圓所建構出的球面不只一顆呢? 在準備全國賽這段期間我們找出 $n\to\infty$說明了尤拉球在 2n 面體的存在性與真實性。現階段，我們發現【第七屆旺宏科學獎：空間中的九點圓與尤拉線】第 4 頁第 20

行提及：「**因為圓α交圓β於 E、T 兩點一定可以找到一個球面 K，使得 K 同時包含圓α 、圓β。**」這兩交點一定會是會四面體稜邊上的垂足點與中點嗎?我們企圖利用實際繪圖、把三維體積分解成平面及解方程式去探討這尤拉球是否「唯一性」，礙於時間緊迫，希望能於後續報告證明完整。

(二) 2n 面體更嚴謹的證明

在 2n 面體(n≥5)部分，我們依照前述的經驗給出了一個推論的球數為 11n 點球，但由於所學還不夠處理證明的部分，未來能夠將證明完善是第一要務。在除了我們發現的這類多面體之外，是否還有其他種類多面體可以形成尤拉球是在未來可以研究的方向。

柒、結論：

一、 在九點圓部分，我們發現在不同種類三角形中，會形成特殊的九點圓，並且將所有情況及圓的點數進行討論。

二、在三維尤拉球的部分，我們發現了：

(一) 不同研究觀點卻有與過去前人研究有不一樣的結論。

(二) 新的四面體、八面體、十面體、十二面體尤拉球。

(三) 推廣到 2n 面體(n≥5)的情況。

(四) 利用 n→∞檢驗 2n 面體尤拉球的存在性。

捌、參考資料及其他：

一、李政豐，陳昭地。以中學生的觀點看尤拉線與九點圓。

二、鄭鉅翰：空間中的九點圓與尤拉線。第七屆旺宏科學獎：成果報告書，參賽編號：*SA*7－179。

三、維基百科。

四、幾何明珠 黃家禮編著 九章出版社。

五、高中數學第三冊 南一書局。

【評語】030414

一個有趣的問題。作者們在分析過程中，由特殊情形談到一般化的情況，對於所有可能的變化都作了詳細的說明。在寫結論時其實可以先給出一般化的結果，再考慮一些退化的情況，如此整個作品看起來會更為簡潔優美（例如在考慮四面體時，針對有三條邊相互垂直的情形，應該先討論任給三個邊長的狀況，再根據計算的結果來分析若有兩邊長相等，或三邊長皆相等的情況）。如果能在作品的呈現方式上稍做修正，看起來會更好。