中華民國第56屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

最佳團隊合作獎

030413

多方塊組成之深入探討與研究

學校名稱：桃園市私立新興高級中學(附設國中)

作者：	指導老師：
國二 葉祐呈 國二 呂睿超	陳怡君

關鍵詞：組合、多方塊、費布納契數列

摘要

在本研究中，我們探討 n 個小方塊可組成多少種一排至三排的多方塊。多方塊是一些將數個單位正方形以邊相連接而成的幾何形狀。而其中一項至今還未有人提出通式之性質、同時也為最重要的多方塊之數目，卻少人深入研究，或是以錯誤的方法求之。基於此原因，我們想探討和前人方法不同的多方塊組成求法:先由單排多方塊開始探討組合,再由組合公式、歸納法、賦值法、填補法、費氏數列等基本數學概念推導 2、3 排的多方塊組合。研究結果顯示多方塊組成確實可用組合及費氏數列表示，並由此方法探尋出每一排方塊的通式。我們希望不單只是探尋出通式、一般化多方塊組合數目，並由此更深入探討離散數學之概念。另外透過探討過程中，深入了解一些組合恆等式。

壹、 研究動機

在一本關於數學的書中有著一問題：「五個小方塊可組成幾種多方塊？(翻轉、顛倒等情況視為同一種)」。這題的求解過程引發我們的興趣，詳細推論及演算後，發現有 12 種(如前頁圖 1.1)，但參考解答為錯誤的 11 種。因此，我們想進一步利用數學的基本技巧及方法探討：「n 個小方塊可組成幾種一排至三排幾何積木？」。除此之外，在歸納與思考的過程中，除可理解許多知識並更期待有所突破。

在仔細推導多方塊組合時，我們在一次推導河內塔最少步數的通式時，發現其移動狀況和此研究中方塊挪移之方法相似，讓我們發現多方塊組成和組合公式之關聯性。這使我們發展出一套全新的演算法。而在使用組合公式時，我們也進一步推導出其與費氏數列的關聯性，並加以證明，同時，我們也期待能將多方塊組成表示為代數之通式。

貳、 研究目的

一、 探討 n 個小方塊可組成幾種一排的多方塊？

二、 探討 n 個小方塊可組成幾種二排的多方塊？

三、 探討 n 個小方塊可組成幾種三排的多方塊？

四、 承 一～三，思考其與組合公式及費氏數列之關聯。

參、 研究設備與器材

一、 筆記本、筆

二、 Microsoft Office(word,excel,onenote,powerpoint)2013，Microsoft Mathematics 4.0

三、 電腦

肆、 研究過程與方法

一、 文獻探討

(一) 剖析前人研究之優缺點後，我們製成下表：

類別	名稱	作者	相同或優點	相異或缺點
中華民國 第 50 屆中小學科學展覽會 作品說明書 國小組 數學科	五方連塊之乾坤大挪移武功秘笈	南投縣草屯鎮平林國民小學 賴韻如等 5 人 (民 99)	利用代號命名各方塊以及探討頂點與連接下個方塊之關聯。	僅能單就小數目推導，且須扣除不特定之重複添加數目。
中華民國 第 41 屆中小學科學展覽會 作品說明書 高中組 數學科	Amazing Fairy Chess --- 探討多元方形鏈的數量	台南市第一高級中學 林逸侖等 3 人 (民 90)	利用電腦方程式來進行演算，並將各數值以代數表示。	仍尚未以基本情況推導成通式，且須考慮 n 的數值做變更。
中華民國 第 52 屆中小學科學展覽會 作品說明書 國小組 數學科	天羅地網尋芳蹤 只為盡訪六連塊	高雄市楠梓區楠梓國民小學 林翊欽等 5 人 (民 101)	系統性的整理各情況可添加的情形。	與第一項雷同，須扣除重複添加之方塊。
國立交通大學理學院網路學習學程 碩士論文	多方塊虛擬教具的開發與教學研究 擷取第 2 節 多方塊的探討	國立交通大學 王智弘 (民 95)	探討各式多方塊組合如多接塊及其他多個多方塊的連接。	探討多方塊時，亦採取環繞基本型添加方塊之窮舉法。

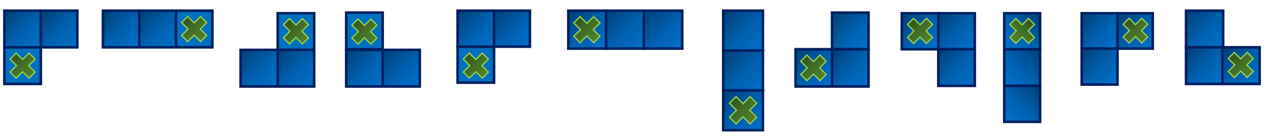
統整後發現：

(一) 以上作品大致分為以多方塊填成矩形或大型幾何圖形，或是與本研究主題相同為探討多方塊本身的組合可能性，但內容及探討方法並不相同。

(二) 而探討多方塊的組合可能性的研究中，大多利用

1. 窮舉法，如此無法將多方塊組合之值進行一般化。
2. 將(n-1)-方塊外圍添加 1 個方塊，形成 n-方塊，但這時會須扣除不特定之重複添加可能性，如圖。

(三) 而參考前人的研究後，我們認為以上方法皆無法有系統性的推導出通式，故本研究採取組合公式、費氏數列進行演算。也可將通式以代數表示並一般化。



得：6×2(可放置位置數)-7(L 方塊重複)-3(I 方塊重複)=2 種多方塊→{3}=2

※圖說明在 n=2 時形成的兩種方塊外添加第 3 個方塊之所有狀況，有✖標示之方塊為新添加之方塊。

二、 名詞定義與解釋(第 4 到 6 點會以圖片輔助說明)

(二) 多方塊(polyominoes)：是一些將數個單位正方形以邊相連接而成的幾何形狀。

(三) 突出(多用於兩排之多方塊)：我們以數對的概念說明，將方塊位於的排定義為(x,y)中的 x，再將多方塊中最高的方塊定義為(x,1)，第二高的方塊為(x,2)，以此類推。當存在(x-1,a)、(x,b)[(x,a)、(x+1,b)]兩方塊時，且同時滿足(x-1,a)(x,a)為此排最高(低)的方塊、a<b(a>b)兩情況時，則稱有「突出」情形。 (將紅色式子代換入定義也成立)

(四) 遮住：在突出或更複雜情形中，將部分固定方塊隱去不計算，以便製造較簡略(歸回β,γ(最末項)⋯為 1 時)之情形。

(五) 分開：即指同排的方塊有「分開」成兩組以上的多方塊之情況。

(六) ${}^{\beta 0*}(n)_a\cdots(\alpha,\beta,\gamma,\cdots)$：指共有 n 個小多方塊成的所有幾何積木，以 a 排的方式排成，並且第一排有 α 個小方塊，第二排有 β 個小方塊，以此類推。有時在此算式的前方會出現${}^{\alpha 0*}$、${}^{\beta 1*}$或${}^{\gamma 2*}$等文字，這表示此多方塊的某一排有突出情形，在此說明：^{0*}為未突出、^{1*}為單邊突出、^{2*}為雙邊突出、將*改為' 代表分開，數字前的字母為排數。

(七) {n}：即為所有由 n 個小方塊組成之多方塊數量。

(八) F_n：即為費波納契數列，定義 $F_1=F_2=1$ 且 $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$(n≥2 時)。如 $F_3=2$。

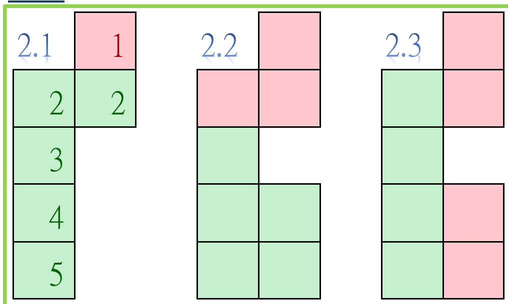
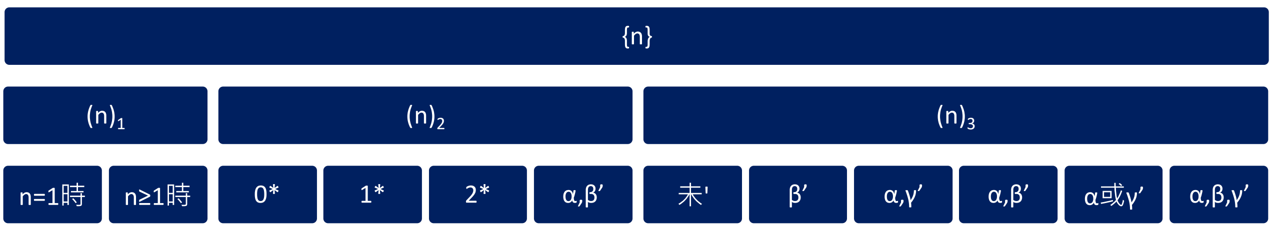


圖 2.1~2.3 (紅色方塊是突出、需遮住或分開的方塊，圖 2.1 中的數字係指數對(x,y)中的 y。圖 2.2 中因為此圖定義為單邊突出情形，故紅色部分需固定以成立此定義，故可將(4,4)轉換成(3,2)以方便計算)

三、 研究架構(小字為研究編號)：



四、 研究問題一： 探討 n 個小方塊可組成幾種幾何積木？

研究 1 當$(n)_a$的 a=1 時，有幾種組合情形：

研究 1.1 當 n=1 時，有 4 種情形，即為一方塊旋轉 1 周所形成之 4 種結果。

研究 1.2 當 n≥1 時，有 2 種情形，即為一方塊旋轉 1 周所形成之 2 種結果。

研究 2 當$(n)_a$的 a=2 時，有幾種組合情形：

研究 2.1 ${}^{\beta 0*}(n)_2$之通式

研究 2.1.1 推導公式

(一) 經推論後，我們認為在此可運用組合(combination)公式$\binom{m}{n}$，而此組合公式的上標(m)即 α 或(n-β)，下標(n)則為 β。

(二) 我們將以上公式的 β 一般化，表 1 為 β 之所有可能值與情況。∀β∈ℕ,0<β<n。

β	1	2	3	⋯	n-3	n-2	n-1
α	n-1	n-2	n-3	⋯	3	2	1

表 1 β 所有可能值與情況

(三) 但表 1 中，有些情況可能 m<n，不符組合公式定義 m≥n。我們扣除以上情況後，得

定理 2.1

$$ {}^{\beta 0*}(n)_2=\sum_{\beta=1}^{\left\lfloor \frac{1}{2}n\right\rfloor}\binom{n-\beta}{\beta} $$

(四) 我們採賦值法探尋規律(表 2)。

n	2	3	4	⋯	n
${}^{\beta 0*}(n)_2$	1	2	4	⋯	設為 f(n)
規律	0+0+1	0+1+1	1+2+1	⋯	f(n-2)+f(n-1)+1

表 2 以賦值法探尋 ${}^{\beta 0*}(n)_2$ 規律

研究 2.1.2 化簡公式

<證明>

(一) 我們先證明此規律成立。以下是表 2 規律的證明。

${}^{\beta 0*}(n-1)_2+{}^{\beta 0*}(n-2)_2+1$

$$ =\sum_{\beta=1}^{\frac{1}{2}n-1}\binom{n-\beta-1}{\beta}+\sum_{\beta=1}^{\frac{1}{2}n-1}\binom{n-\beta-2}{\beta}+1 $$

$$ =\binom{n-2}{1}+\binom{n-3}{2}+\binom{n-3}{1}+\cdots+\binom{\frac{1}{2}n}{\frac{1}{2}n-1}+\binom{\frac{1}{2}n}{\frac{1}{2}n-2}+\binom{\frac{1}{2}n-1}{\frac{1}{2}n-1}+1\cdots① $$

(二) 我們引用巴斯卡定理化簡。

引理 1 巴斯卡定理

$$ \binom{n+1}{k}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1} $$

$$ \therefore ①=\binom{n-2}{1}+\binom{n-2}{2}+\binom{n-3}{2}+\cdots+\binom{\frac{1}{2}n+1}{\frac{1}{2}n-1}+\binom{\frac{1}{2}n-1}{\frac{1}{2}n-1}+\binom{\frac{1}{2}n}{\frac{1}{2}n} $$

$$ =\mathrm{n}-2+\binom{n-2}{2}+\binom{n-3}{2}+\cdots+\binom{\frac{1}{2}n+1}{\frac{1}{2}n-1}+1+\binom{\frac{1}{2}n}{\frac{1}{2}n} $$

$$ =\sum_{k=1}^{\frac{1}{2}n}\binom{n-k}{k}, \blacksquare $$

(三) 我們以歸納法證明另一規律：${}^{\beta 0*}(n)_2=F_{n+1}-1$。

<證明>${}^{\beta 0*}(n)_2=F_{n+1}-1$

(一) 當 n=2，得 ${}^{\beta 0*}(2)_2=1=F_3-1$，成立。

(二) 當 n=3，得 ${}^{\beta 0*}(3)_2=2=F_4-1$，成立。

(三) 當 n=k，得 ${}^{\beta 0*}(k)_2={}^{\beta 0*}(k-1)_2+{}^{\beta 0*}(k-2)_2+1$

$=F_k-1+F_{k-1}-1+1$

$= F_{k+1}-1$，符合規律，■。

(四) $\therefore \forall n \in \mathbb{N}$，${}^{\beta 0*}(n)_2 = F_{n+1}-1$。

研究 2.1.3 求出通式

(一) 由前可得

定理 2.2

$${}^{\beta 0*}(n)_2 = F_{n+1}-1$$

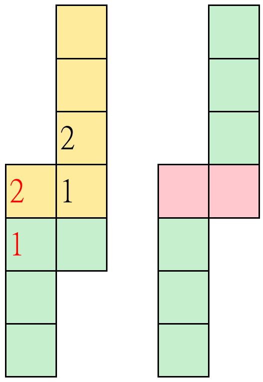


圖 3.1~3.2 黃色方塊為須遮住之方塊，而紅色方塊指唯一相連之方塊，換言之，圖 3.2 為最突出情形。圖 3.1 之黑色數字說明 β 最小值需為 2，紅色說明 n-β 最小值為 2。

研究 2.2 ${}^{\beta 1*}(n)_2$ 之通式

研究 2.2.1 推導公式

(一) 我們將突出部分及未突出部分的最上方塊遮住(因為這些方塊需固定，如圖 3.1 黃色方塊)。

(二) 將剩餘方塊以 ${}^{\beta 0*}(n)_2$ 的方式做計算，即組合公式的運用。

(三) 承(一)、(二)，我們是由 β 排之突出部分和 α 只具有一格方塊相連時，如圖 3.2 開始計算，故將方塊一階一階往下推，直到僅突出一塊即可求出組合，經相加並乘 2(因突出部分可位於方塊上方和下方)可導出

定理 2.3

$${}^{\beta 1*}(n)_2 \ldots (n-\beta,\beta) = 2\sum_{k=0}^{\beta-2}\binom{n-\beta-1}{k}$$

研究 2.2.2 化簡、一般化公式

(一) 根據定理 2.3，可發現兩個變數—n-β(或 α)及 β。因為公式須包含所有 β 的可能值，故我們探究 β 之所有可能值與情況。

(二) 我們發現 β 最小值為 2，因滿足突出情形至少需固定兩方塊，如圖 3.1 所示。

(三) 再者，我們同時發現 n-β 最小值為 1，故 β 最大為 n-1。

(四) 如表 3，我們將上列算式一一代入，便於一般化。

β	2	3	…	n-4	n-3	n-2	n-1
n-β or α	n-2	n-3	…	4	3	2	1

表 3 α(n-β)與 β 關係

(五) 經整理及化簡可得

定理 2.4

$$^{\beta 1*}(n)_2 = 2\sum_{\beta=2}^{n-1}\sum_{k=0}^{\beta-2}\binom{n-\beta-1}{k}$$

(六) 同研究 2.1，我們觀察此定理與費氏數列之關聯(表 4)。

n	3	4	5	6	7	8
$^{\beta 1*}(n)_2$	2	4	8	14	24	40

表 4 以賦值法探尋 $^{\beta 1*}(n)_2$ 規律

(七) 因已在無突出情況證明過類似規律，在此得到

定理 2.5

$$^{\beta 1*}(n)_2=2(F_n-1)$$

研究 2.3 $^{\beta 2*}(n)_2$ 之通式

研究 2.3.1 推導公式

(一) 我們將此情形之組合劃分為兩類：

1. 突出部分之組合(圖 4.1 藍色方塊)
2. 未突出中可活動之部分(即 β 排未突出部分扣除最上及最下緣的方塊，如圖 4.1 黃色方塊，我們定義有 b 塊)與 α 排的組合。

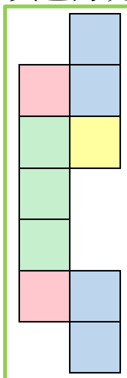


圖 4.1 $^{\beta 2*}(10)_2$ 之範例

(二) 我們先求出突出部分之組合：

1. 最少必須有 4 塊小方塊(圖 4.1 藍色方塊)不得移動。若移動它們，即無法符合雙邊突出情形。
2. 突出部分之方塊數為(β-b)，然後經由 1 得知最少須從上方突出 1 塊開始計算(兩塊被固定)，可得下方即有(β-b-2)塊。接著將方塊由下方突出部分一塊塊往上方突出部分搬動。
3. 經計算得到共有 β-b-2 -2 +1= β-b-3 種組合。

(三) 可活動部分與 α 排的組合：

1. 我們遮住 α 排最上及最下緣之方塊(圖 4.1 紅色方塊)，剩下可供 b 移動的方塊有 n-β-2 塊。
2. 接著透過組合運算得到$\binom{n-\beta-2}{b}$一式。

(四) 因為在進行可活動部分與 α 排的組合時，同時會進行突出部分之組合，故須將兩種情形相乘，即可導出下式：

$$(\beta - b - 3)\binom{n-\beta-2}{b}$$

研究 2.3.2 化簡公式

(一) 在此情形中，b 的定義域為 0 至 β-4，我們將上式的 b 一般化，得

$$\sum_{b=0}^{\beta-4}(\beta - b - 3)\binom{n-\beta-2}{b}$$

(二) 而 β 的定義域為 4 至 n-2，再將 β 一般化，得

$$\beta^{2*}(n)_2 = \sum_{\beta=4}^{n-2}\left[\sum_{b=0}^{\beta-4}(\beta - b - 3)\binom{n-\beta-2}{b}\right]$$

(三) 由於此式過於複雜，我們使用數值代入，並觀察其規律，經整理成表 5

n	6	7	8	9	10	11	12	13
$^{\beta 2*}(n)_2$	1	3	7	14	26	46	79	133

表 5 以賦值法探尋 $^{\beta 2*}(n)_2$ 規律

(四) 我們發現此數列有 $^{\beta 2*}(n)_2=F_{n-1}-n+2$ 之關係。以下證明此式成立。

<證明>

(一) 若此式成立，則當 n=k 時，$^{\beta 2*}(k)_2=F_{k-1}-k+2$。

(二) 當 n=k+1 時，$^{\beta 2*}(k+1)_2=F_k-k+1$。

(三) ∴$^{\beta 2*}(k+1)_2-{}^{\beta 2*}(k)_2$

$= F_k-k+1-F_{k-1}+k-2$

$= F_k- F_{k-1}-1$

$= F_{k-2}-1$

$\Rightarrow {}^{\beta 2*}(k)_2={}^{\beta 2*}(k)_2-{}^{\beta 2*}(k-1)_2+{}^{\beta 2*}(k-1)_2-{}^{\beta 2*}(k-2)_2+{}^{\beta 2*}(k-2)_2-\cdots-{}^{\beta 2*}(2)_2+{}^{\beta 2*}(2)_2$

$=F_{k-3}-1+F_{k-4}-1+\cdots+F_2-1+F_1-1$

$$= \left(\sum_{i=1}^{k-3} F_i\right) - (k-3) \ldots ②$$

引理 2 費氏數列總和：

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} + 1$$

(一) 以 n=k-3 代入引理，得② $=F_{k-1}-1-k+3=F_{k-1}-k+2$=所證，■。∴∀n∈ℕ，公式皆成立。

(二) 故得

定理 2.6

$$^{\beta 2*}(n)_2=F_{n-1}-n+2$$

研究 2.3.3 例外之情形

(一) 此公式無法求出 α=1 時，$^{\beta 2*}(n)_2$的情況，因為會導致 n-β-2<0，須另行計算。

(二) 我們求出 α 共有 n-1-2=n-3 種情形。

(三) 加上定理 2.6 後得

> 定理 2.7
>
> $$^{\beta 2*}(n)_2=F_{n-1}-1$$

研究 2.4：$^{\alpha、\beta'}$ $(n)_2$之通式

研究 2.4.1 推導公式

(一) 經過詳細推論後，我們發現此研究皆可簡化為只由 c 空隙所組成之「基本型」(i)。而 c 空隙指有三面與方塊連接的空隙。(圖 5.1)

(二) 由上定義可知，c 空隙沒有和方塊連接的部分(開口)可能位於其左或右方。

(三) 而我們發現，方塊可在基本型之外側(高於或低於基本型)及內側增加方塊(圖 5.1)。我們分別將其定義為l和m情況。只需將兩情況求出再整理即可求出結果。

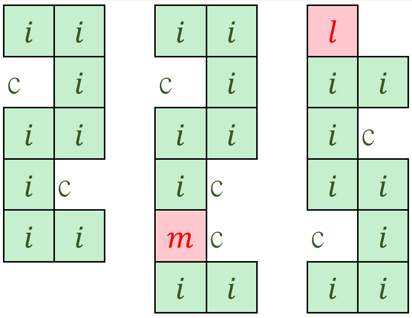


圖 5.1 綠色方塊即為基本型。紅色方塊分別是外圍和內側的方塊。

(四) l情況：

1. 因為可於基本型之上、下增加方塊，故我們分別令在上、下方塊有l_1、l_2個。我們亦發現在增加方塊時，不得形成 c 空隙(若如此，此方塊之基本型會改變)。
2. l_1情況：
   (1) 我們從所有方塊皆位於 α 排開始推導(1 種)，再將方塊一一往 β 排移動，最後得(l_1+1)種情況。
3. l_2情況：
   (1) 和上相同，故有(l_2+1)種情況。
   (2) 而因$l_1+l_2=l$，故$l_2=l-l_1$。代入後得$(l-l_1+1)$種情況。
4. 相乘後得$(l_1+1)(l-l_1+1)$種情況。再將l_1一般化後(定義域：0≤ $l_1 \le l$)，得

$$\sum_{l_1=0}^{l}(l_1+1)(l-l_1+1)\text{ 種情況。}$$

5. 化簡後，我們得到

> 定理 2.8
>
> 研究 2.4 中的l情況有$\left(\frac{l^3}{6}+l^2+\frac{11l}{6}+1\right)$種。

(五) m情況：

1. 經過思考及推論，我們發現只能在 c 空隙的部分增加方塊。我們令增加m個方塊，

並且有 c 個 c 空隙。

2. 此情況之組合數可簡化為「在 c 個袋子中，投入 m 個球所可能產生的情況」。這表示可使用重複組合。故可得其組合數= $H_m^c = \binom{c+m-1}{m}$種。

(六) 基本型(i)：

1. 當有 c 個 c 空隙時，除最前和最後的兩組 c 空隙外(有 4 個方塊)，其餘皆只有 3 個方塊。故可得$i = 3c + 2$。
2. 將上式整理後，可得$c = \frac{i-2}{3}$。又因開口可朝兩方，故每個 c 空隙皆有兩種可能。相乘後，得2^c種情況。例外是當所有 c 空隙開口皆朝同一方時，會造成無法分開的情況。經計算後，我們發現有 2 種情況，相減後得$2^c - 2$種。

(七) 整合：

1. 只需將l、m、i三個變數結合並一般化後，即可求出通式。將三種情況相乘後得

$$\left(\frac{l^3}{6} + l^2 + \frac{11l}{6} + 1\right)\binom{c+m-1}{m}(2^c - 2)$$

2. 為方便化簡，並且因$m = n - i - l = n - 3c - 2 - l$，故導出

$$\left(\frac{l^3}{6} + l^2 + \frac{11l}{6} + 1\right)\binom{n-2c-l-3}{n-3c-2-l}(2^c - 2)$$

研究 2.4.2 一般化公式

(一) 我們先一般化l。因外側可不放置方塊，故得$l \geq 0$。再來，l最大時，即為扣除基本型方塊後所剩的方塊數，故可得$l \leq n - i = n - 3c - 2$。一般化後得

$$\sum_{l=0}^{n-3c-2}\left(\frac{l^3}{6} + l^2 + \frac{11l}{6} + 1\right)\binom{n-2c-l-3}{n-3c-2-l}(2^c - 2)$$

(二) 上式是 c 空隙數量固定時，此情況的組合，故只需將 c 之可能值求出即可導出最後結果。c 空隙最少有 2 個(即為 $^{\alpha,\beta}(8)_2$之組合)。c 空隙最大時即為$i = n$時，此時$c = \left\lfloor\frac{n-2}{3}\right\rfloor$。

一般化後，我們得到

定理 2.9

$$^{\alpha,\beta'}(n)_2 = \sum_{c=2}^{\left\lfloor\frac{n-2}{3}\right\rfloor}\sum_{l=0}^{n-3c-2}\left(\frac{l^3}{6} + l^2 + \frac{11l}{6} + 1\right)\binom{n-2c-l-3}{n-3c-2-l}(2^c - 2)$$

(三) 根據定理 2.9，我們已代入了一些值，以方便計算，陳列於下表。

n	8	9	10	11	12	13	14
$^{\alpha,\beta'}(n)_2$	2	12	42	118	294	672	1442

表 6 $^{\alpha,\beta'}(n)_2$時，n=8~14 的值。

研究 3 當$(n)_a$的 a=3 時，有幾種組合情形：

研究 3.1 $^{無'}(n)_3$之通式

研究 3.1.1 推導公式

(一) 我們以 α 未分開且和 β 僅有最底層方塊(一個)相連時，α 的最高方塊為基準，計算 α、β 排的可能組合數。α 最高可能已如前所示，而最低則為 α 的最高方塊僅

與 β 的最底方塊相連。在此兩種情況中，兩基準相差$(\alpha+\beta-1)$個方塊，故我們推得滑動數為$(\alpha+\beta-1)$種。

(二) 在此為推導$(n)_3$，故須考慮 α 與 β 及 β 與 γ 兩種組合情形，後者之組合數推得為$(\beta+\gamma-1)$種(與(一)同方法)。

(三) 將兩結果相乘後，可推導出

定理 3.1

末' $(n)_3\cdots(\alpha,\beta,\gamma)=(\alpha+\beta-1)(\beta+\gamma-1)$

研究 3.1.2 化簡公式

(一) 一般化 β：

1. 經計算後，我們發現 $1\le\beta\le n-2$。將 β 一一代入定理 3.1 後，得

$$\alpha\gamma+(\alpha+1)(\gamma+1)+(\alpha+2)(\gamma+2)+\cdots+(\alpha+n-3)(\gamma+n-3)\cdots①$$

2. 再一般化 α，並可由化簡 α 之結果化簡 γ。①中的每一項 α 皆有不同定義域。我們發現當項中的 $\beta=k$ 時，α 定義域為 $1\le\alpha\le n-k-1$(因 γ 最少須有一方塊)。將其一一代入後，得

$$\gamma(1+2+\cdots+n-2)+(\gamma+1)(1+2+\cdots+n-3)+\cdots+(\gamma+n-3)\times1$$

3. 當 $\alpha=a,\beta=b$ 時，$\gamma=n-a-b$。一一代入後，得

$$[(n-2)+2(n-3)+\cdots+(n-2)\times1]+[2(n-2)+3(n-3)+\cdots+(n-2)\times2]+\cdots+[(n-2)(n-2)]$$

$$=(n-2)(1+2+\cdots+n-2)+(n-3)(2+3+\cdots+n-2)+(n-4)(3+4+\cdots+n-2)+\cdots+2(n-3+n-2)+1(n-2)$$

$$=\sum_{k=1}^{n-2}\frac{k^2(2n-k-3)}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left[(2n-3)\sum_{k=1}^{n-2}k^2-\sum_{k=1}^{n-2}k^3\right]$$

引理 3、4

1. 平方和公式：$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2. 立方和公式：$\sum_{k=1}^{n}k^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

將 1.式之 n 以 n-2 代入，得

$$\sum_{k=1}^{n-2}k^2=\frac{(n-2)(n-1)(2n-3)}{6}$$

將 2.式之 n 以 n-2 代入，得

$$\sum_{k=1}^{n-2}k^3=\left[\frac{(n-2)(n-1)}{2}\right]^2$$

代回原式，得

$$\frac{1}{2}\left[\frac{(n-2)(n-1)(2n-3)^2}{6}-\frac{(n-2)^2\cdot(n-1)^2}{4}\right]$$

$$=\frac{1}{24}(n^2-3n+2)(5n^2-15n+12)$$

定理 3.2

上式$=5\binom{n}{4}+\binom{n-1}{2}$

而因此情況翻轉後也須加入，故需乘 2，得

定理 3.3

$^{無'}$ $(n)_3 = 10\binom{n}{4}+2\binom{n-1}{2}$

研究 3.2$^{\beta'}$ $(n)_3$之通式

研究 3.2.1 推導公式

(一) 我們以填補法推導此情形。填補法指的是將方塊填補成易計算之矩形，再將多餘方塊之組合扣除。(圖 7.1)

(二) 圖 7.1 為此情形之範例圖，在此定義在多方塊左上角的空隙有 a 塊，右上角有 b 塊，左下角有 c 塊，右下角有 d 塊，而中間(位於 β 排)的空隙有 e 個。

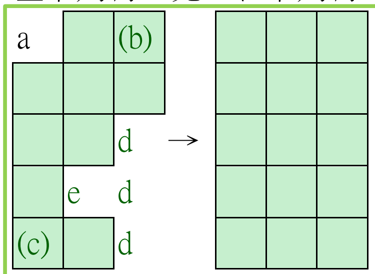


圖 7.1 填補法範例及空隙說明。在此情形，a=1,b=0,c=0,d=3,e=1。

(三) 由於 α 、 γ 排不得分開，故 a、b、c、d 只能位於方塊的上及下方。

(四) 因多方塊不得分離，故 e 空隙有擺放的限制：e 不得與 a、b 和 c、d 同時連接。

(五) 承(四)，我們詳細探討其限制之組合：

1. 我們發現 e 不得擺放的位置與 min{a,b}、min{c,d}有關聯：min{a,b}、min{c,d}的右(左)邊，以及上述方塊的上下兩塊不得放置空格，故可得此處組合為

$$\binom{\delta-\min\{a,b\}-\min\{c,d\}-2}{e}$$

2. 若 a、b、c、d 中間的方塊皆被 e 放置，則也屬不成立情形。但我們扣除後剩下的位置仍可放置空格。

(1) 可放置的位置與 max{a,b}、max{c,d}有關，可得共有 max{a,b}-min{a,b}-1 個位置。

(2) 而可放置的方塊數(以 a、b 為例，c、d 之情形僅需將其代數更換即可)則為 e-(δ - max{a,b}-max{c,d})=e+max{a,b}+max{c,d}- δ 。

(3) 故得其組合為

$$\binom{\max\{a,b\}-\min\{a,b\}-1}{e+\max\{a,b\}+\max\{c,d\}-\delta}$$

(4) 如上述，因為有$\{a,b\}$、$\{c,d\}$兩種位置，則可先將所有可活動方塊放置於$\{a,b\}$處，再將方塊往下挪，並可推得下式

$$\sum_{k=0}^{e+\max\{a,b\}+\max\{c,d\}-\delta}\binom{\max\{a,b\}-\min\{a,b\}-1}{k}\cdot\binom{\max\{c,d\}-\min\{c,d\}-1}{e+\ \max\{a,b\}+\max\{c,d\}-\delta-k}$$

3. 接著將 1.及 2.相減，即可得

$$\binom{\delta-\min\{a,b\}-\min\{c,d\}-2}{e}-\sum_{k=0}^{e+\ \max\{a,b\}+\max\{c,d\}-\delta}\binom{\max\{a,b\}-\min\{a,b\}-1}{k}\cdot\binom{\max\{c,d\}-\min\{c,d\}-1}{e+\ \max\{a,b\}+\max\{c,d\}-\delta-k}$$

研究 3.2.2 一般化公式

(一) 先令 a+b=p，c+d=q。並且此四數相互有 4 種大小可能。在 a>b，c>d 時，$\frac{1}{2}p\le a\le p,\frac{1}{2}q\le c\le q$，同時，可以得到 min{a,b}=p-a、min{c,d}=q-c。我們利用四種大小可能。我們發現四種情形之值相等，故需乘 4，將上式一般化後得

$$4\sum_{c=\frac{q}{2}}^{q}\sum_{a=\frac{p}{2}}^{p}\left[\binom{\delta-p+a-q+c-2}{e}-\sum_{k=0}^{e+a+c-\delta}\binom{2a-p-1}{k}\cdot\binom{2c-p-1}{e+\ a+c-\delta-k}\right]$$

(二) 我們發現 e 可轉換為(3δ-n-p-q)(填補後矩形-原所有方塊-其餘空隙)。故上式變為

$$4\sum_{c=\frac{q}{2}}^{q}\sum_{a=\frac{p}{2}}^{p}\left[\binom{\delta-p+a-q+c-2}{3\delta-n-p-q}-\sum_{k=0}^{2\delta-n-p-q+a+c}\binom{2a-p-1}{k}\cdot\binom{2c-p-1}{2\delta-n-p-q+a+c-k}\right]$$

(三) 接著一般化 p、q，我們發現其定義域為 0≤p,q≤δ-1，而在 p 為定值時，q 則為 2δ-p-4，這是因為 p,q 最大時，仍須留四方塊單位的部分給 e 做連接。故上式變為

$$4\sum_{p=0}^{\delta-1}\sum_{q=0}^{2\delta-p-4}\sum_{c=\frac{q}{2}}^{q}\sum_{a=\frac{p}{2}}^{p}\left[\binom{\delta-p+a-q+c-2}{3\delta-n-p-q}-\sum_{k=0}^{2\delta-n-p-q+a+c}\binom{2a-p-1}{k}\cdot\binom{2c-p-1}{2\delta-n-p-q+\ a+c-k}\right]$$

(四) 最後一般化 δ，我們發現 δ 的定義域為$\left\lfloor\frac{n+3}{3}\right\rfloor\le\delta\le n-3$，上式導為

定理 3.4

$$4\sum_{\delta=\left\lfloor\frac{n+3}{3}\right\rfloor}^{n-3}\sum_{p=0}^{\delta-1}\sum_{q=0}^{2\delta-p-4}\sum_{c=\frac{q}{2}}^{q}\sum_{a=\frac{p}{2}}^{p}\left[\binom{\delta-p+a-q+c-2}{3\delta-n-p-q}-\sum_{k=0}^{2\delta-n-p-q+a+c}\binom{2a-p-1}{k}\cdot\binom{2c-p-1}{2\delta-n-p-q+a+c-k}\right]$$

研究 3.3$^{\alpha,\gamma'}$ $(n)_3$之通式

研究 3.3.1 推導公式

(一) 我們在這裡將此情形分成兩部分，α 和 β 部分及 β 和 γ 部分。

(二) 我們先算出 α 和 β 的組合，分為五種狀況，我們將所有組合數算出後再扣除 α 未分開之情形。下方列出各狀況需扣除的所有組合可能性。

1. $\alpha<2$：無此情況(無法分開)
2. $\alpha=2$：0*
3. $2<\alpha\leq\beta$ ：0*+1*
4. $\alpha=\beta+1$：1*
5. $\beta+2\leq\alpha\leq n-5$：1*+2*

(三) 下方列出各狀況需扣除的所有組合數：

1. 0*：$\beta-\alpha+1$，α 已占掉 α 塊，但此已為一種情形，故此處可滑行之可能性為 $\beta-\alpha+1$ 種。
2. 1*：$2\beta-2$：因滿足 1*至少須留一塊(突出)，故有 $\beta-1$ 種，但因為是 1*，故須乘 2，為 $2\beta-2$ 種。
3. 2*：因滿足 2*至少須留兩塊(突出)，且 β 排已占掉 β 塊，故有 $\alpha-\beta-1$ 種。
4. 再利用$(n)_2$所求之公式計算出所有可能之組合數及扣除(二)提之組合數推得

(1) $\alpha<2$：0 種。

(2) $\alpha=2$：$\binom{\beta}{\alpha}-\beta+1$種。

(3) $2<\alpha\leq\beta$ ：

$$\sum_{\alpha=3}^{\beta}\left[\binom{\beta}{\alpha}+2\sum_{k=0}^{\alpha-2}\binom{\beta-1}{k}+\sum_{b=0}^{\alpha-4}(\alpha-b-3)\binom{\beta-2}{b}-3\beta+\alpha+1\right]\text{種。}$$

(4) $\alpha=\beta+1$：

$$2\sum_{k=0}^{\beta-1}\binom{\beta-1}{k}-2\beta-2\text{ 種。}$$

(5) $\beta+2\leq\alpha\leq n-5$：

$$\sum_{\alpha=\beta+2}^{n-5}\left[2\sum_{k=0}^{\alpha-2}\binom{\beta-1}{k}+\sum_{b=0}^{\alpha-4}(\alpha-b-3)\binom{\beta-2}{b}-\beta-\alpha+3\right]\text{種。}$$

將(1)~(5)合併後得

定理 3.5

$$\left\{\binom{\beta}{\alpha}-\beta+1+\sum_{\alpha=3}^{\beta}\left[\binom{\beta}{\alpha}+2\sum_{k=0}^{\alpha-2}\binom{\beta-1}{k}+\sum_{b=0}^{\alpha-4}(\alpha-b-3)\binom{\beta-2}{b}-3\beta+\alpha+1\right]+2\sum_{k=0}^{\beta-1}\binom{\beta-1}{k}-2\beta-2\right.$$
$$\left.+\sum_{\alpha=\beta+2}^{n-5}\left[2\sum_{k=0}^{\alpha-2}\binom{\beta-1}{k}+\sum_{b=0}^{\alpha-4}(\alpha-b-3)\binom{\beta-2}{b}-\beta-\alpha+3\right]\right\}$$
$$\cdot\left\{\binom{\beta}{\gamma}-\beta+1+\sum_{\gamma=3}^{\beta}\left[\binom{\beta}{\gamma}+2\sum_{k=0}^{\gamma-2}\binom{\beta-1}{k}+\sum_{b=0}^{\gamma-4}(\gamma-b-3)\binom{\beta-2}{b}-3\beta+\gamma+1\right]+2\sum_{k=0}^{\beta-1}\binom{\beta-1}{k}-2\beta-2\right.$$
$$\left.+\sum_{\gamma=\beta+2}^{n-5}\left[2\sum_{k=0}^{\gamma-2}\binom{\beta-1}{k}+\sum_{b=0}^{\gamma-4}(\gamma-b-3)\binom{\beta-2}{b}-\beta-\gamma+3\right]\right\}$$

研究 3.3.2 一般化公式

(一) 上式有三個變數，故我們先將其全部轉換成同一變數(以下以 α 、β 之部分說明，變數為 γ)。

(二) 我們發現 α 的定義域為 $2\le\alpha\le n-\gamma-3$，而當 α 為定值時，β 則為 $n-\alpha-\gamma$。
(三) 最後因 $\alpha\ge2$，$\beta\ge3$，故可得 γ 之定義域為 $2\le\gamma\le n-5$。
(四) β、γ 的部分則可以類似方法進行一般化，但變數變成 α。
(五) 以 α、β 部分為例，則一般化後結果如下：

定理 3.6

研究 3.3 中 α,β 組合=

$$\sum_{\gamma=2}^{n-5}\sum_{\alpha=2}^{n-\gamma-3}\left\{\binom{n-\alpha-\gamma}{\alpha}-n+\alpha+\gamma+1+\sum_{\alpha=3}^{n-\alpha-\gamma}\left[\binom{n-\alpha-\gamma}{\alpha}+2\sum_{k=0}^{\alpha-2}\binom{n-\alpha-\gamma-1}{k}+\sum_{b=0}^{\alpha-4}(\alpha-b-3)\binom{n-\alpha-\gamma-2}{b}-3n+4\alpha+3\gamma+1\right]\right.$$
$$+2\sum_{k=0}^{n-\alpha-\gamma-1}\binom{n-\alpha-\gamma-1}{k}-2n+2\alpha+2\gamma-2$$
$$\left.+\sum_{\alpha=n-\alpha-\gamma+2}^{n-5}\left[2\sum_{k=0}^{\alpha-2}\binom{n-\alpha-\gamma-1}{k}+\sum_{b=0}^{\alpha-4}(\alpha-b-3)\binom{n-\alpha-\gamma-2}{b}-n+\gamma+3\right]\right\}$$

研究 3.4 $^{\alpha,\beta'}(n)_3$ 之通式

研究 3.4.1 推導 β、γ 的組合

(一) 在 α 和 β 皆分開時，因為最少須有三個方塊連接，故最高可形成($\alpha+\beta$-3)個方塊單位高的多方塊。

(二) 因 γ 無分開，故由研究 3.1 知其和其中一段未分開的 β 排(稱為 β')有 $\beta'+\gamma-1$ 種情形。

(三) 因 β 有分開，故我們將其分為 β_1、β_2、…、β_k等 k 段。再套用(二)之式，得到其有$(\beta_1+\gamma-1)+(\beta_2+\gamma-1)+\cdots+(\beta_k+\gamma-1)=(\beta+k\gamma-k)$種組合。

(四) 故我們只需將 k 之可能值求出，即可導出結果。

1. 首先，我們求出 β=4 時，只有(3,1)…①，1 種。再來，β=5 時，有(4,1)、(3,2)兩種，就(4,1)的 4 而言，根據①可得知可再分 1 種(3,1,1)，故得 β=5 時有 2+1=3 種…②。而藉由①、②又可推得 β=6 時有 3+1+3=7 種，β=7 時有 4+1+3+7=15 種，以此類推。故我們以賦值法及表格呈現規律。

β	4	5	6	7	…
可能	(3,1)	(4,1),(3,2),(3,1,1)	(3,3),(4,2),(5,1),(3,2,1),(4,1,1),(3,1,2),(3,1,1,1)	(6,1),(5,2),(4,3),(3,4),(3,3,1),(4,2,1),(5,1,1),(4,1,2),(3,2,2),(3,1,3),(3,2,1,1),(4,1,1,1),(3,1,1,2),(3,1,2,1),(3,1,1,1,1)	…
總數	1	3	7	15	…
規律	當 β=x 時，有 $2^{x-3}-1$ 種情形。				

表 7 以賦值法探討 β 可能。

(五) 根據規律，我們推得通式：

$$\gamma\text{ 組合}=\{\beta+[(\gamma-1)]\cdot[2^{\beta-3}-1]\}$$

研究 3.4.2 推導 α、β 的組合

(一) 我們將研究 2.4 的方法加以推導，將其改為當 β 值固定時，α 和 β 的組合數。

(二) 在此定義基本型中 β 排方塊之數量= i_β，β 排的 c 空隙數量= c_β。

(三) 我們算出 β 排可被放置方塊的位置即為可活動方塊之數量，使用重複組合計算，得下式

$$H_{\beta-i_\beta}^{C_\beta+2}=\binom{C_\beta+\beta-i_\beta+1}{\beta-i_\beta}$$

(四) 根據基本型的方塊數，我們將其劃分為三種：$\beta\equiv1,2(\mathrm{mod}\ 3)$與 $3|\beta$ 時的三種情形。

(五) 我們先探討 α 、β 數量關係式：

1. 當 $\beta\equiv1(\mathrm{mod}\ 3)$時：$\alpha=\beta$
2. 當 $\beta\equiv2(\mathrm{mod}\ 3)$時：$\alpha=\beta+1$
3. 當$3|\beta$時：$\alpha=\beta-1$

(六) 我們再探討基本型中 β 排方塊之數量：

1. 當 $\beta\equiv1(\mathrm{mod}\ 3)$時：因 $\alpha=\beta$ ，故 $i_\beta=\frac{\alpha+\beta}{2}$
2. 當 $\beta\equiv2(\mathrm{mod}\ 3)$時：因 $\alpha=\beta+1$，故 $i_\beta=\frac{\alpha+\beta-1}{2}$
3. 當 $3|\beta$ 時：因 $\alpha=\beta-1$，故 $i_\beta=\frac{\alpha+\beta+1}{2}$

(七) 接著我們探討 β 排的 c 空隙數量：

1. 因 $i=3c+2$(定義參照研究 2.4)，且 $i_\beta+i_\alpha=i$，及(六)中探討之三個關係式，推導出 i 的三個關係式：

   (1) 當 $\beta\equiv1(\mathrm{mod}\ 3)$時：$i=\frac{\alpha+\beta-2}{6}$

   (2) 當 $\beta\equiv2(\mathrm{mod}\ 3)$時：$i=\frac{\alpha+\beta+1}{6}$

   (3) 當 $3|\beta$ 時：$i=\frac{\alpha+\beta-5}{6}$

(八) 將(三)、(五)、(六)、(七)合併後，可得 α 及 β 組合數的三個關係式

1. 當 $\beta\equiv1(\mathrm{mod}\ 3)$時：$\binom{\frac{-\alpha+2\beta+2}{3}}{\frac{\beta-\alpha}{2}}^2$
2. 當 $\beta\equiv2(\mathrm{mod}\ 3)$時：$\binom{\frac{2\alpha-\beta-1}{3}}{\frac{\alpha-\beta-1}{2}}\cdot\binom{\frac{-\alpha+2\beta+4}{3}}{\frac{-\alpha+\beta-1}{2}}$
3. 當 $3|\beta$ 時：$\binom{\frac{2\alpha-\beta+4}{3}}{\frac{\alpha-\beta-1}{2}}\cdot\binom{\frac{-\alpha+2\beta+2}{3}}{\frac{-\alpha+\beta+1}{2}}$

(九) 將研究 3.4.1 及研究 3.4.2 相乘後，並將 α 改為 $n-\beta-\gamma$ ，得三定理

1. 當 $\beta\equiv1(\mathrm{mod}\ 3)$時：定理 3.7

$$\{\beta+[(\gamma-1)]\cdot(2^{\beta-3}-1)\}\cdot\binom{\frac{-n+\gamma+3\beta+2}{3}}{\frac{-n+2\beta+\gamma}{2}}^2$$

2. 當 $\beta\equiv2(\mathrm{mod}\ 3)$時：定理 3.8

$$\{\beta+[(\gamma-1)]\cdot(2^{\beta-3}-1)\}\cdot\binom{\frac{2n-3\beta-\gamma-1}{3}}{\frac{n-\gamma-2\beta-1}{2}}\cdot\binom{\frac{-n+3\beta+\gamma+4}{3}}{\frac{-n+2\beta+\gamma-1}{2}}$$

3. 當 3|β 時：定理 3.9

$$\{\beta+[(\gamma-1)]\cdot(2^{\beta-3}-1)\}\cdot\binom{\frac{2n-3\beta-2\gamma+4}{3}}{\frac{n+\gamma-1}{2}}\cdot\binom{\frac{-n+3\beta+\gamma+2}{3}}{\frac{-n+2\beta+\gamma+1}{2}}$$

研究 3.4.3 一般化公式

(一) 我們以此表格說明一般化上式的方法。只需將表格所有值代入以上三個公式並相加即可得出最後結果。

n	β	γ
	4	1
		2
		…
		n-8
	5	1
		2
		…
		n-9
	6	1
		2
		…
		n-10
	…	…
	n-6	1
		2
	n-5	1

表 8 研究 3.4 中各變數之關係。

研究 3.4.4 例外情形

(一) 在此研究中，我們發現另一無法以上方法計算的情形：當 α 和 β 排沒有連接時(圖 9.1)，即無法計算。我們發展出另一套算法，但不提供推導出的公式。這是因為此情況十分複雜，以表格推算的正確性和簡易性皆較高。

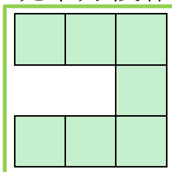


圖 9.1 例外情況

(二) 推導例外情況的方法：

1. 參考表 9，將 β 連結 γ 排，並保持分開。可排成任意之組合，只需將所有結果代入即可。
2. 將 α 排由最上層開始平移。我們令 β 分為 k 段(和研究 3.4.1 相同定義)，將 α 也分段，並將其放置在 β 排上。
3. 將所有結果求出後，再扣除**※衝突情形**，即可得到最後結果。

※衝突情形：指的是在放置 α 排方塊時，因將 α 排分段放置，故可能產生兩段重複的情形。在利用公式時，此情況較難排除。這也是我們不利用公式的原因之一。

(三) 再加上非例外情形，最後即為結果。

n	α	β	γ	※
7	2	2	3	--
8	2	2	4	--
	2	3	3	--
	3	2	3	--
9	2	2	5	--
	2	3	4	--
	3	2	4	--
	2	4	3	--
	3	3	3	--
	4	2	3	--
n	2	2	n-4	--
	2	3	n-5	--
	3	2	n-5	--
	2	n-k-2	n-k	α 從 2 遞增，β 從 n-k-2 遞減。
	3	n-k-3	n-k	
	…	…	…	
	n-k-2	2	n-k	
…				--
n	2	n-5	3	--
	3	n-6	3	--
	4	n-7	3	--
	…	…	3	--
	n-5	3	3	--

表 9 例外情形之各變數關聯性。

研究 3.5 $\gamma'(n)_3$ 之通式

研究 3.5.1 推導公式

(一) 經由研究 3.1 可知，α 和 β 的組合可能性有($\alpha+\beta$-1)種。而 γ 的情形，我們以研究 2 做為基礎，探討所有可能性後，再扣除未分開時的情形即可。

(二) 未分開時，各情況之組合數：

1. 當未突出時，γ 有(β-γ+1)種未分開情形。
2. 當單邊突出時，γ 至少須留一塊突出，且須乘 2，故有 2(γ-1)種未分開情形。
3. 當雙邊突出時，γ 至少須留兩塊突出，且 β 排已占掉 β 塊，故有(γ-β-1)種。
4. 以上三種情況，在 γ 有不同值時，採用的情況也不同。當 $\gamma\leq\beta$ 時，採用 1 和 2；當 $\gamma=\beta+1$ 時，只會有 2 之情形；再更大，則只有 2、3 兩情形。

(三) 我們將(一)、(二)與研究 2 的 0*、1*、2*合併後，可得下式：

定理 3.10

$$(\alpha+\beta-1)\left[\binom{\beta}{\gamma}+2\sum_{i=1}^{\gamma-2}\binom{\beta-1}{i}+\sum_{i=0}^{\beta-2}(\gamma-i-3)\binom{\beta-2}{i}-(\beta-\gamma+1)-2(\gamma-1)-(\gamma-\beta-1)\right]$$

研究 3.5.2 化簡公式

(一) 本研究變數之定義域：n-4≥γ≥2，n-3≥β≥3，n-5≥α≥1。且在此令 $\beta+\gamma$=k，則 k 之定義域為 n-1≥k≥5。

(二) 根據研究 2 可得知當 n=k 時，則$(n)_2$扣除 α、β' 後有 F_{n+1}-1+2(F_n-1)+ F_{n-1}-1 種。

(三) 但此時會發生一些例外情形被算入，如 β≤2 或 γ=1 時之情況，故須扣除。

1. 0*時，須扣除 0 種，當 γ=1 時下方會說明，得 F_{n+1}-1。
2. 1*時，須扣除 6 種，得 2F_n-8。
3. 2*時，須扣除 γ-2-1+(γ+1)-1-1=2γ-4 種，得 F_{n-1}-2γ+3 種。
4. γ=1 時，須扣除 β 種。

(四) 在此承(二)、(三)，可得 F_{n+1}-1+2F_n-8+ F_{n-1}-2γ+3-β
= (F_{n-1}+F_n)+(F_n+F_{n+1})-6-2γ-β = F_{n+3}-6-2γ-β 種。

(五) 承(四)，在此時 γ 為當 β=2 時，故 2γ 等於 2k-4，而 β 為當 γ=1 時，得 k-1，故可得 F_{n+3}-7-(2k-4)-(k-1)= F_{k+3}-3k-1。

(六) 由於(一)~(五)皆為計算所有情形，故仍須扣除未分開之情形。

(七) 因各項公式之定義域複雜，故採用賦值法探尋規律。下表列出各項變數之聯性。

賦 n=t		再賦 $\beta+\gamma$=k	
α	k	β	γ
1	t-1	3	k-3
2	t-2	4	k-4
…	…	…	…
t-5	5	k-2	2

表 10 各項變數之關係。

(八) 接著以大於或等於 6 之整數代入，如下：

1. 當 n=6 時：

(1) 各項變數之可能(下方亦同)，以表格呈現：

α	k	β	γ
1	5	3	2

表 11 當 n=6 時，各項變數之可能

(2) 代入公式，得 F_8-15-(5-1)-1=1

(3) 乘上($\alpha+\beta$-1)，得 1×3=3

(4) 以窮舉法證明(繪圖)，如圖 10.3-10.5

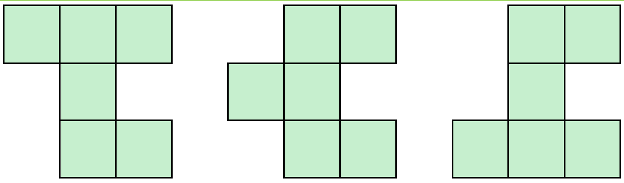


圖 10.3-10.5 當 n=6 時，$^{\alpha\text{或}\gamma'}(n)_3$的所有情形

2. 當 n=7 時：

(1) 各項變數之可能，以表格呈現：

α	k	β	γ
1	6	4	2
1	6	3	3
2	5	3	2

表 12 當 n=7 時，各項變數之可能

(2) 發現問題：因使用費波納契數計算時，會將各種β計入，故會產生$\alpha+\beta$-1 有不同定義域，須扣除。

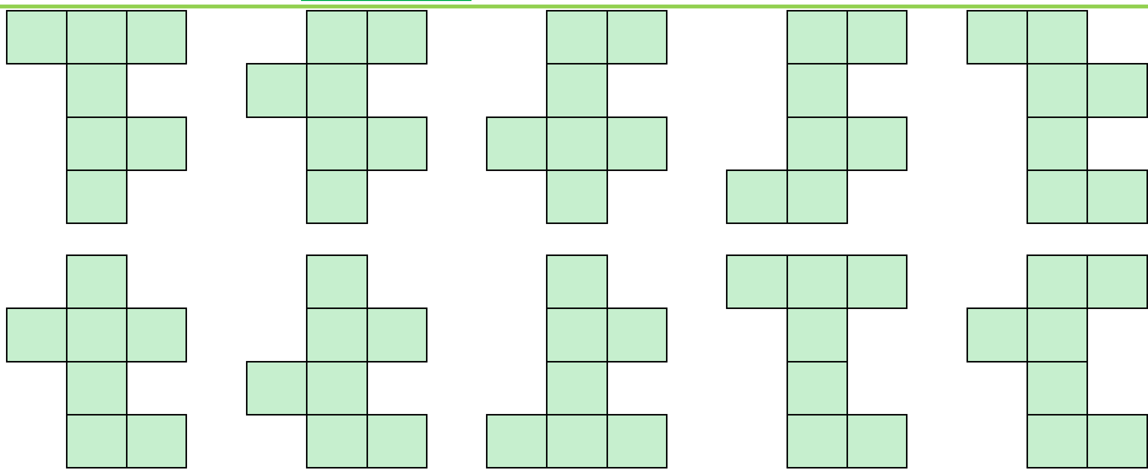
(3) 帶入公式得 F_9-18-1-3-1-2×1-2×2=5

、F_8-15-1-2-2=1

(4) 乘上($\alpha+\beta$-1)=5×4+1×4=24

(5) 扣除(7)例外情形：24-1×2=22

(6) 用窮舉法證明：如圖 10.6-10.27



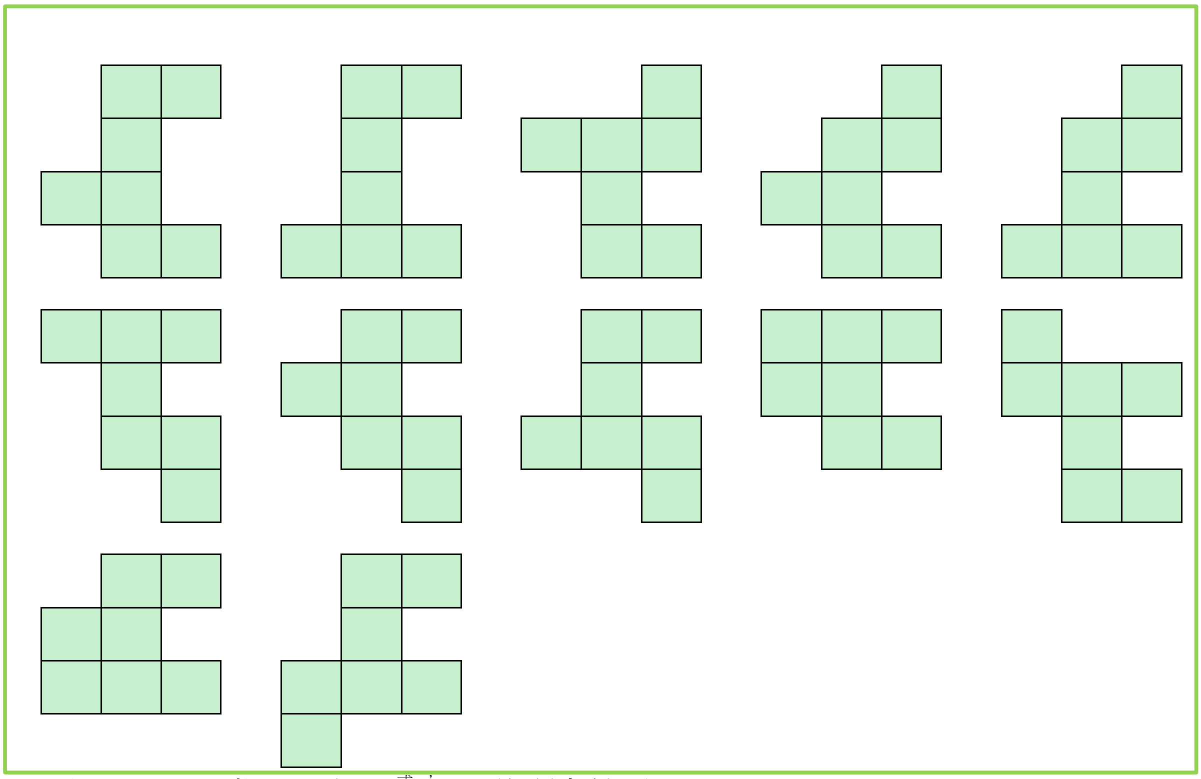


圖 10.6-10.27 當 n=7 時，$^{\alpha或\gamma'}(n)_3$的所有情形

(7) **※例外情形**：此處因我們用相同的$\alpha+\beta$-1 的值，但此時因γ的值不同，故會產生多計算的情形，須扣除，以下有兩方法供參考。

a. [法一]：探討γ的值，因為以上例子都以$\alpha+\beta$=n-2 為基準，故可推出γ-2 之值，再算出該情形時β、γ的組合，相乘並扣除即可。

b. [法二]：不以$\alpha+\beta$=n-2 為基準，將各個情形分別代入定理 3.3，但此時α、β、γ皆需限定。

3. 當 n=8 時：

(1) 各項變數之可能，以表格呈現：

α	k	β	γ
1	7	5	2
1	7	4	3
1	7	3	4
2	6	4	2
2	6	3	3
3	5	3	2

表 13 當 n=8 時，各項變數之可能

(2) 代入公式，得 F_{10}-21-1-4-2-2x1-2x2-2x3=15

、F_9-18-1-3-1-2x1-2x2=5

、F_8-15-1-2-2=1

(3) 乘上($\alpha+\beta$-1)，得 15x5+5x5+1x5=105

(4) 扣除例外情形：105-1x6-2x3-1x2=91

(九) 以表格整理

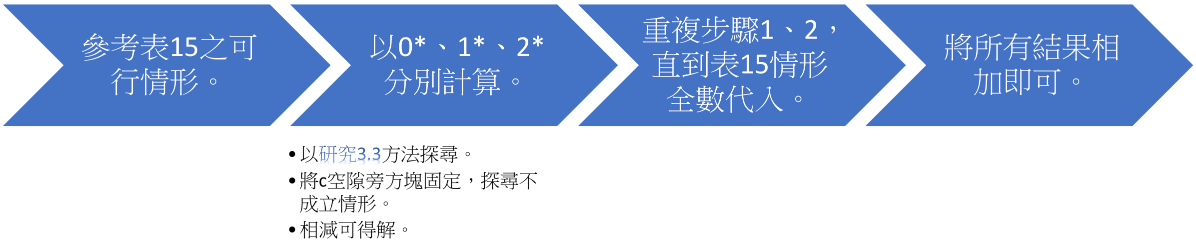
n	6	7	8
f(n)	3	22	91

表 14 以賦值法探尋${}^{\alpha或\gamma'}(n)_3$，n=6~8 之情形

研究 3.6${}^{\alpha,\beta,\gamma'}(n)_3$之通式

研究 3.6.1 推導公式

(一) 本研究較複雜，故提供流程圖參考。



(二) 我們已在研究 2.4 中歸納出一種基本型的格式，在此處，我們取其 n=8 時的唯二情形，並在其多方塊的右方添加方塊，但須注意添加時 γ 排需分開。

(三) 且因為我們僅取 n=8 時的基本型，故仍可在 α 、β 排上方及下方添加方塊。

(四) 我們為了探尋其通式之規律，在遵循其定義域之限制下，我們將各變數之限制與關聯以表格呈現。

n	α	β	γ	n	α	β	γ
10	4	4	2	s	4	4	s-8
11	4	4	3		5	4	s-9
	5	4	2		4	5	s-9
	4	5	2		…	…	…
12	4	4	4		s-6	4	2
	5	4	3		s-7	5	2
	4	5	3		…	…	…
	6	4	2		$\frac{s}{2}-1$	$\frac{s}{2}-1$	2
	5	5	2		5	s-7	2
	4	6	2		4	s-6	2

表 15n、α、β、γ 之四變數間之關聯

1. 由表 15 可知 $4 \le \alpha, \beta \le (n-6)$、$2 \le \gamma \le (n-8)$。
2. 可藉由此表幫助探尋可能性。

(五) 接著，我們開始賦值，從 n=10 時開始，我們先將 n 以數值代入以便簡化及探討：

1. 當 n=10 時：

(1) 根據表 15 所示，僅有一情況(4,4,2)。(本研究中(a,b,c)指 α 排有 a 個方塊，β 排有 b 個，γ 排有 c 個。)

(2) 我們將所有的組合算出後，扣除其未分開情形。在此處，因 γ 排僅有 2 塊，故只需討論未分開之情況。又因 β 排有分開，故在此我們將 c 空隙(本研究中的 c 空隙特指 β 排的空隙，l空隙亦同)填補，爾後再扣除不成立之情形。如同在此處將 β 排填補成 5 塊，再利用扣除未分開情況的方法(如研究 3.3)來演算，可推得算式如下：

$$\binom{5}{2}-(5-2+1)-\binom{5-3}{2-1}=4$$

※1 指 c 空隙數量，在研究 3.6.2 中會詳細定義，在研究 3.6.1 中以紅色表示。 在此以窮舉法證明：

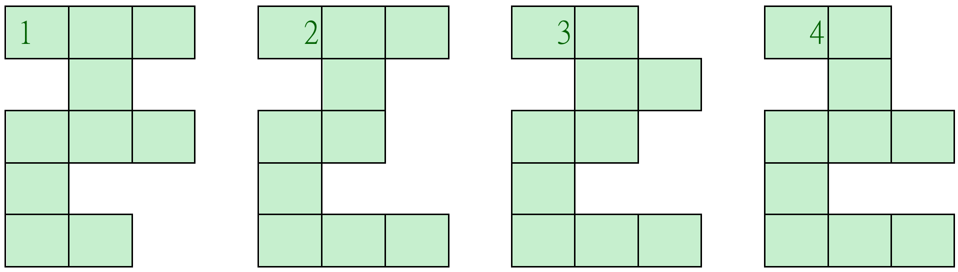


圖 11.1-11.4

2. 當 n=11 時：

(1) 根據表 15 所示，可能有(4,4,3)、(4,5,2)、(5,4,2)三種情形。我們先就 γ=2 時計算，因 γ=2 時只需考慮 0*的情形。

(2) 當 α=5時等同(4,4,2)，但須乘2(因為 α 排的第5個方塊可置於 α 排上或下方)，得 4×2=8 種。但還須加上當 α 排的方塊添加在內部時，得 c 空隙有 2 個。可藉由類似方法推得：

$$\binom{4+2}{2}-(6-2+1)-\binom{2}{1}\binom{6-4}{2-1}-\binom{6-4}{2-2}=5$$

(3) 當 α=4 時，β=5，因為只有 0*情形，故可藉由類似方法(與 n=10 時)推導出：

$$2\left[\binom{6}{2}-(6-2+1)-\binom{6-3}{2-1}\right]=14$$

(4) 當 γ=3 時，較為複雜，會有 0*、1*情形，須分別探討。而 0*時可利用類似方法推導出：

$$\binom{5}{3}-(5-3+1)-\binom{5-3}{3-1}=6$$

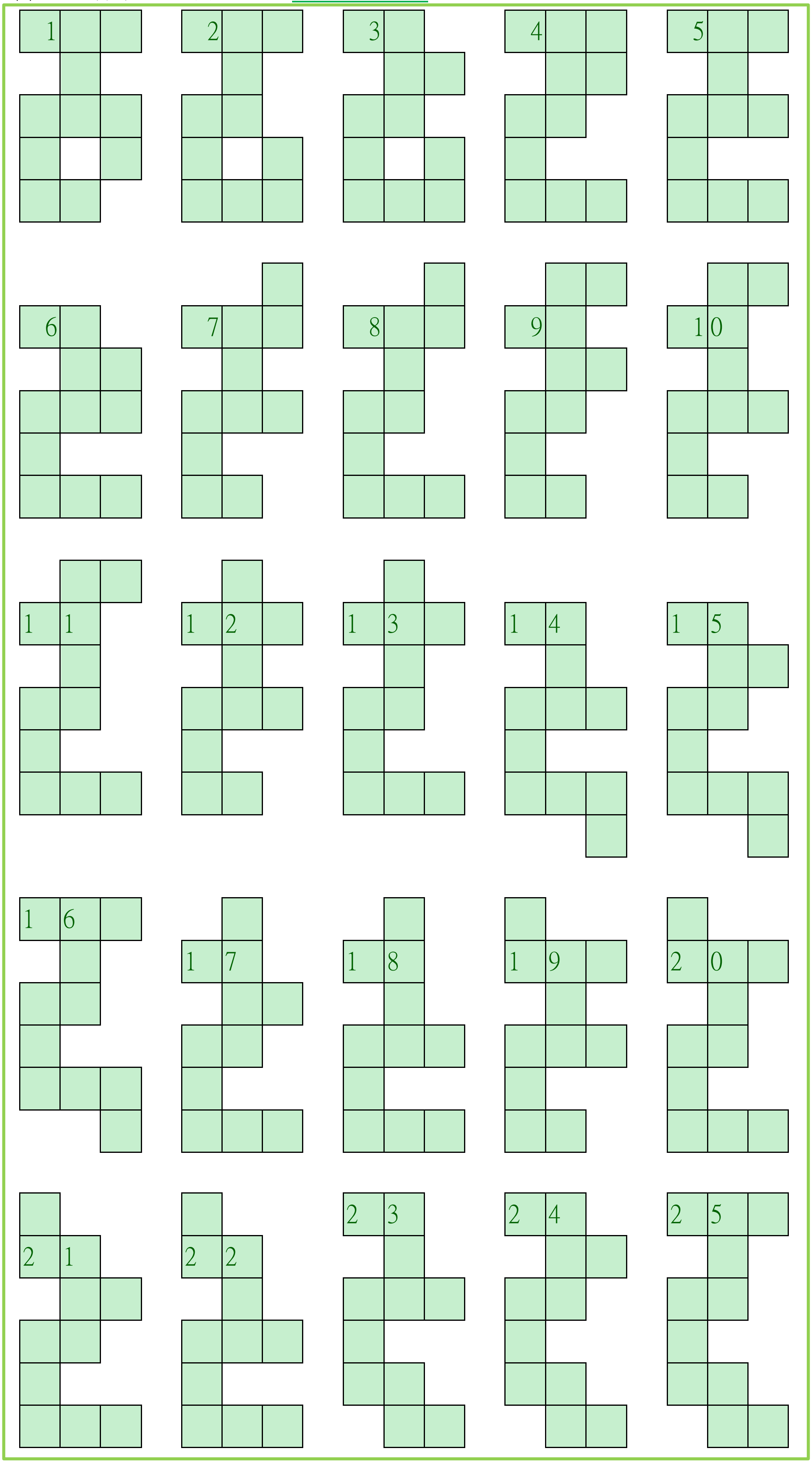
(5) 1*時，同以研究 3.3 中的 1*方法先推導出有分開的，再扣除 c 空隙造成的例外，可推導出

$$2\left[\binom{5-1}{3-3}+\binom{5-1}{3-2}-(3-1)-\binom{5-3}{3-3}\right]=4$$

註：綠色 3 指 c 空隙數量及其餘需固定之方塊，在研究 3.6.2 中會詳細定義，在研究 3.6.1 中皆以綠色表示。

(6) 將(1)~(6)點整合後，得當 n=11 時，總情形為 8+5+14+6+4=37 種。

(7)　以窮舉法證明之，如圖 11.5-11.41



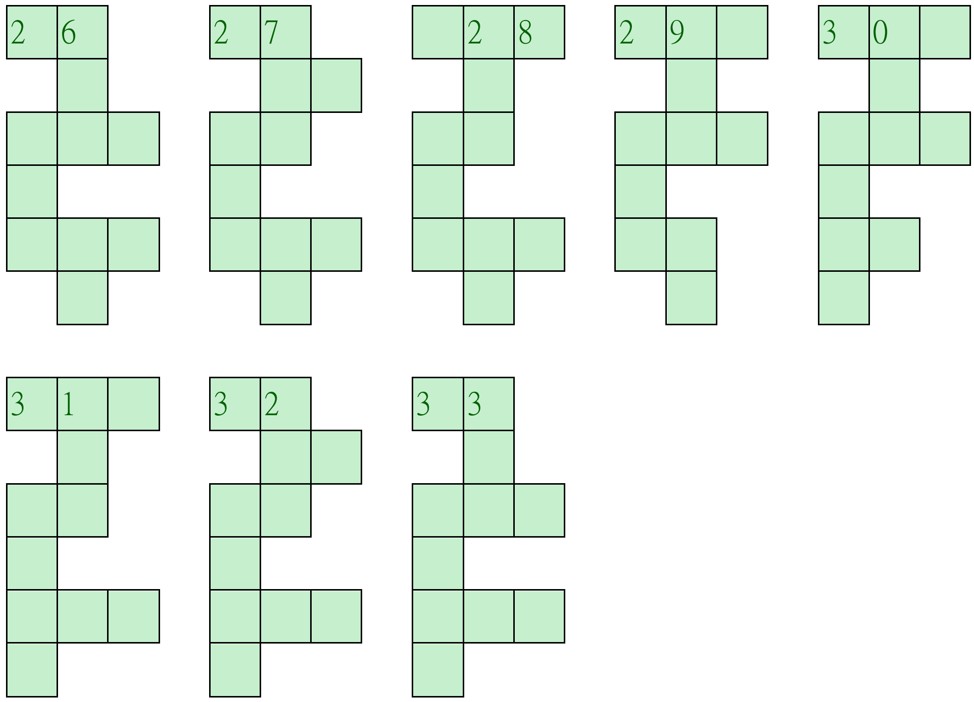


圖 11.5-41

(8) 我們以類似方法推導 n=12 時的情形後，得下表：

n	10	11	12
結果	4	37	189

表 16 研究 3.5 的結果

研究 3.6.2 化簡公式

(一) 根據研究 3.6.1 的推導，我們發現可利用填補 β 排之 c 空隙，算出全部組合後扣除未分開情形之方法，再根據其 γ 的值，決定要利用 0*、1*、2*中的哪些情形進行探討。

(二) 探討 α 與 c 空隙之關係：因為在研究 2.4 中介紹過基本型，而在基本型中僅利用 8 塊的「最基本型」有 1 個 c 空隙(在 β 排)，此時 α=4。而添加 1 方塊後，此多方塊最多有 2 塊 c 空隙。故可推得 max{c}=α-3。當 c≠max{c}時，則是因 β 排方塊的添加。且我們發現 min{c}=1，故通式中的 c 須從 min{c}考慮至 max{c}。

(三) 經過推導我們發現 0*的情況可表示成

$$\binom{t+c}{k}-(t+c-k+1)-\sum_{i=0}^{c}\binom{c}{i}\binom{t-c-2}{k-i}$$

(四) 1*的情況則須多固定 1 塊(為滿足單邊突出)來扣除 c 空隙所產生的例外，得

$$2\left[\sum_{\mathrm{i}=0}^{\mathrm{k}-2}\binom{t+c-1}{\mathrm{i}}-(t+c-1)-\sum_{i=0}^{c}\binom{c}{i}\binom{t-c-3}{k-i}\right]$$

(五) 2*的情況則須根據 c 的值來劃分成兩類：

1. 當 c=max{c}：

$$\sum_{b=0}^{k-4}(\mathrm{k}-\mathrm{b}-3)\binom{\mathrm{t}+\mathrm{c}-2}{b}-[k-(t+c)-1]-\sum_{i=0}^{c}\binom{c}{i}\binom{t-c-4}{k-i}$$

2. 當 c≠max{c}：

$$\sum_{b=0}^{k-4}(\mathrm{k}-\mathrm{b}-3)\binom{\mathrm{t}+\mathrm{c}-2}{b}-[k-(t+c)-1]-\sum_{i=0}^{c}\binom{c}{i}\binom{t-c-5}{k-i}$$

(六) 接著考量 α 的情況後，發現上述的 c 須包含所有 c 及 l 空隙，而且代入通式後須乘上 α 本身的組合。而已知基本型有 4 塊，故可活動之方塊有 α-4 塊，且可放置於 α 排上與下，得組合為 α-4-1=α-5。

(七) 接著因基本型有 2 種$(^{\alpha,\beta'}(8)_2)$，且不一定位於 α、β 排，故需將結果乘 4。

(八) 配合表 15 之定義域及 0*、1*、2*的限制，代入(二)~(五)的四個通式，再將 n=s(舉例皆列於表 15)的所有可能相加即可得研究 3.6 結果。

伍、 研究結果

一、由此說明書可知在推導$(n)_a$ 中的某情況時，可以利用以下的流程圖推導：

推導公式	•以組合公式、遮住方塊、基本型外添加方塊、方塊挪移、填補法、推導規律等方法推導。 •此步驟最重要。
探討定義域	•探尋所有組合中變數的限制，進而導出定義域。
一般化公式	•由上一步驟所得到的定義域將變數一般化。 •雖然得出的公式會十分複雜，但卻是將所有結果相加的唯一辦法。
化簡公式	•運用公式或其餘方法化簡公式，使其變得較清楚明瞭。 •化簡後的公式較易和其餘公式產生關連。
導出通式	•通式即為化簡後的公式。

二、在本研究中，我們證實多方塊之數量可用費氏數列和組合公式表示。而在以往，此領域的研究者大多是先將(n-1)多方塊求出後，在外圍扣除不特定的重複方塊，進而求出{n}，由此一步一步往下推。故我們認為，此發現是一大突破。

三、在推導多方塊組合數時，我們發現可用多方塊之性質推導或證明組合恆等式。例如：由研究 2.1 和研究 2.3 中所得之通式，只需轉換一下變數之值，即可得到新恆等式

$$\sum_{\beta=4}^{n}\left[\sum_{b=0}^{\beta-4}(\beta-b-3)\binom{n-\beta}{b}\right]=\sum_{\beta=1}^{\left\lfloor\frac{1}{2}n\right\rfloor}\binom{n-\beta}{\beta}$$

在之後推導排數更多的方塊時，我們也希望可證明及發現更多的公式。

四、下表列出當 n=2~10 時，$(n)_2$的可能性：

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0*	1	2	4	7	12	20	33	54	88
1*		2	4	8	14	24	40	66	108
2*			1	4	7	12	20	33	54
α 和 β'							1	12	42
$(n)_2$	1	4	9	19	33	56	94	165	292

五、下表列出當 n=3~10 時，$(n)_3$的可能性：

n	3	4	5	6	7	8	9	10
無'	2	16	62	170	380	742	1316	2172
α,γ'					2	24	138	484
β'				4	32	76	164	312
α,β'					1	9	34	381
β,γ' (等價於 α,β')					1	9	34	381
α 或 γ'				6	44	182	504	1320
α β γ'								4
$(n)_3$	2	16	62	180	460	972	2041	4760

(一) 我們發現如依照以上方法求出$(n)_4$、$(n)_5$至$(n)_k$時，則可以式$\{n\}\approx\frac{1}{4}[(n)_1+(n)_2+\cdots+(n)_k]$來推得近似值。(在討論中有另一說明)

(二) 例如：由上表可知$(3)_1$=2、$(3)_2$=4、$(3)_3$=2，所以$\{n\}_3\approx\frac{1}{4}(2+4+2)=2$。經演算後，我們發現其真正值為 2。

陸、 討論與結論

一、在本研究中，我們探討多方塊中$(n)_2$、$(n)_3$的組合。我們原先設定是$(n)_2$、$(n)_3$通式間有關係，進而可推出$(n)_k$之通式，但在此因公式過於複雜而難以化簡而造成困難。然而，另一方面，在本研究中證實可用組合公式推導多方塊組合，也就是在本研究中推導$(n)_2$、$(n)_3$的過程，故也提供了推導$(n)_k$之方法。

二、另外，針對前人研究中無法一般化多方塊組合之值的點，我們也證實了可以利用代數構成之通式一般化多方塊組合之值。

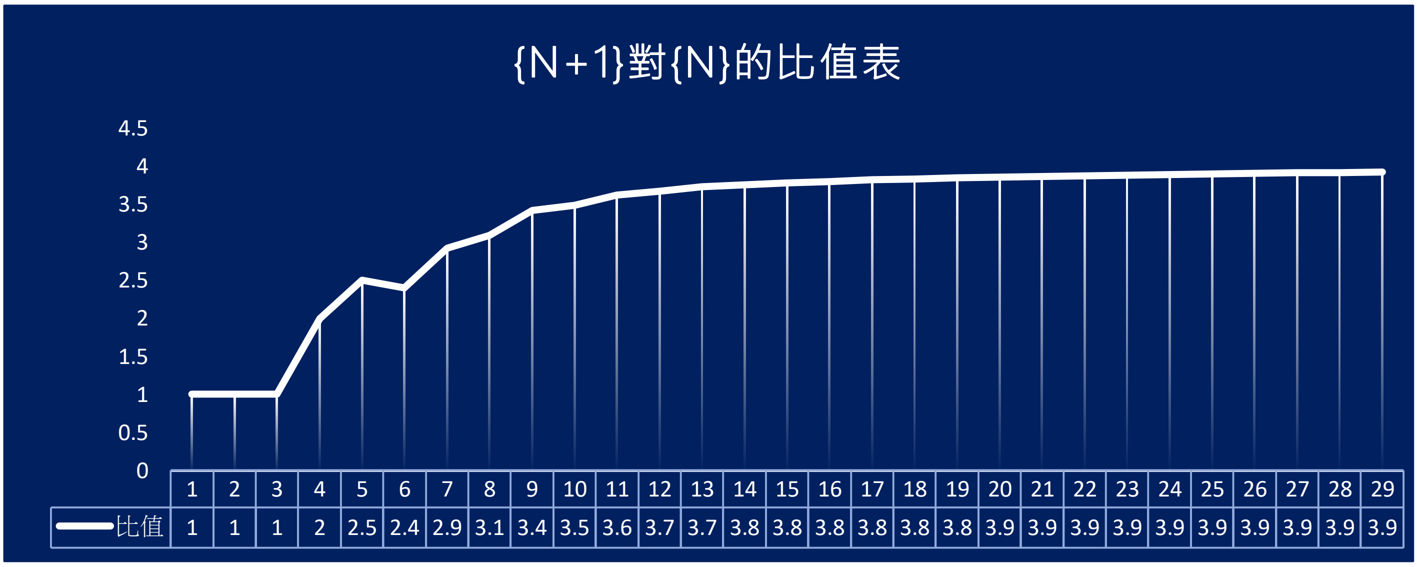
三、在本研究中提之對稱、翻轉產生的重複情形(研究 1)，我們已知與對稱軸與對稱圖形有關，且多數會重複四次。以及有可能 α 、β…等變數之值(視為多方塊的長)與$(n)_a$的 a 相等，換言之即是以填補法填補後呈現正方形等等之圖形不會被重複計入，故言結果中之{n}之值為粗略計算之值，也可成為未來探討方向。雖然仍有此部分須突破，但我們較前人已找出較有系統的重複情況。未來只需有計畫地尋找出不會重複或重複多次的方塊，即可解決前人所無法推導的重複情形。

四、基於我們的研究對象為多方塊組合，我們針對其組合之值進行探討。

(一) 如表所示，為 n=1~14 時，多方塊的組合數量{n}。

n	組合圖形	n	組合圖形
1	1	8	369
2	1	9	1285
3	2	10	4655
4	5	11	17073
5	12	12	63600
6	35	13	238591
7	108	14	901971

(二) 在觀察上述表中之值時，發現似乎有些性質。以下是我們統計{n+1}對{n}的比值



1. 由圖表可知除 n=4 時，$\frac{\{n+2\}}{\{n+1\}}-\frac{\{n+1\}}{\{n\}}$皆>0，這代表比值在 n 增大時也會同時增大，但增加幅度在 n→∞時會趨近於 0。
2. 根據上圖的資訊，我們推論：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\{n\}}{\{n-1\}}=4$$

，這個結果恰好是方塊的邊數，4。

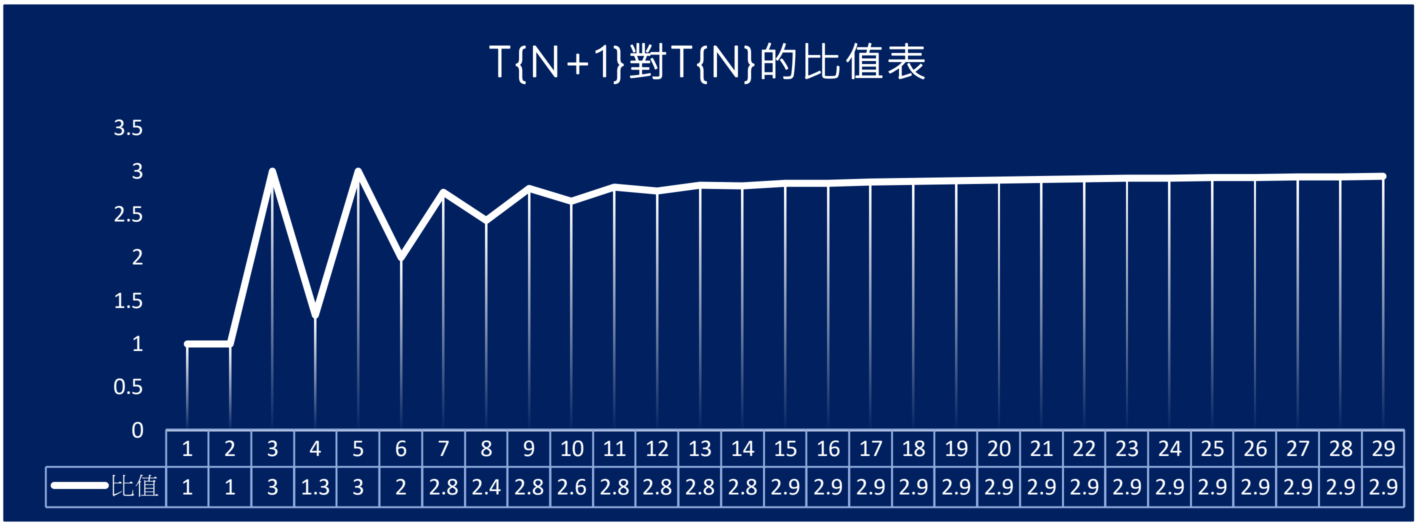
3. 而例外(圖表中唯一下降之趨勢)恰好也是 n=4 時，也就是正方形之邊數。

(三) 本研究探討多方塊，也就是多個方塊連接而成的組合，而若將其組成之元件—方塊，變成三角形或六邊形，即形成多接塊的組合，這也是未來本研究可推廣之方向。承(二)之性質，我們發現了一個類似的結論。

1. 如下表所示為 n=1~14 時，三角形多接塊的組合數量 T{n}。

n	組合圖形	n	組合圖形
1	1	8	66
2	1	9	160
3	1	10	448
4	3	11	1186
5	4	12	3334
6	12	13	9235
7	24	14	26166

2. 下圖所示，是我們統計三角形多接塊 T{n+1}對 T{n}的比值表：



(1) 由圖表可知除 n=4、6、8、10、12、14 時，$\frac{T\{n+2\}}{T\{n+1\}}-\frac{T\{n+1\}}{T\{n\}}$皆>0，這代表比值在 n 增大時也會同時增大，但增加幅度在 n→∞時會趨近於 0。

(2) 根據上圖的資訊，我們推論：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{T\{n\}}{T\{n-1\}}=3$$

，這個結果恰好是三角形的邊數，3。

(3) 雖然例外多了些，也非在 n=3 時，但此趨勢表仍與多方塊之結果呈類似情形。

(四) 我們歸納出一可能之原因：在增加方塊時，每一個方塊皆可以增加其邊數之方塊組合，故其增加幅度會趨近於其邊數。在剛開始時，有較多例外是因有些邊已被連接，故無法完全將其乘 4，但數字愈大，則此情況所占比例愈小。我們認為，此發現可預估多方塊和多接塊之近似值，故也是一突破。

五、我們在研究 2.1~2.3 中得到的關於費氏數列之規律為一特殊性質，我們可藉此推導並推廣費氏數列與組合之恆等式。以及可以利用研究 2 之基礎，嘗試推導$(n)_3$與費氏數列之關聯性。

六、若未來能詳盡推導$(n)_k$之通式，可將通式盡量簡化，因為當多方塊有 k 排時，其每一排都有可能產生分開，故未來希望能簡化。且在本研究中已證實多方塊種類可以突出及分開區別，此為一特殊且前所未見之性質，未來可嘗試推廣其他分類方式。

柒、 參考資料與附錄

一、 參考資料：

(一) OEIS(the on-line encyclopedia of integar sequences)整數數列線上大全・取自

http://oeis.org/

(二) 王智弘(2006)・*多方塊虛擬教具的開發與教學研究*(碩士論文)・新竹：國立交通大學・取自

https://ir.nctu.edu.tw/bitstream/11536/77904/1/352401.pdf

(三) 中華民國第 52 屆中小學科學展覽會・國小組・數學科

高雄市楠梓區楠梓國民小學・*天羅地網尋芳蹤，只為盡訪六連塊*・取自

http://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/52/pdf/080414.pdf

(四) 數學遊戲—多方塊(polyminoes)・高雄市：高雄應用科技大學、九章出版社・取自

http://www2.kuas.edu.tw/prof/cjh/2003puzzle/html/06.htm

(五) 南一版高中二年級數學課本—第二章 排列組合

(六) 翰林版國中二年級數學課本—第一章 等差數列與級數

(七) polyominoes—on Wolfram Mathworld(多方塊之介紹)

http://mathworld.wolfram.com/Polyomino.html

二、 附錄：

(一) 各項研究的定義域：

1. 由於方塊數皆為正整數，故以下 n 皆$\in\mathbb{N}$。
2. 研究 2.1：$n\geq2$，如圖 14.1。
3. 研究 2.2：$n\geq3$，如圖 14.2。
4. 研究 2.3：$n\geq4$，如圖 14.3。
5. 研究 2.4：$n\geq8$，如圖 14.4。
6. 研究 3.1：$n\geq3$，如圖 14.5。
7. 研究 3.2：$n\geq6$，如圖 14.6。
8. 研究 3.3：$n\geq7$，如圖 14.7。
9. 研究 3.4：$n\geq7$，如圖 14.8。
10. 研究 3.5：$n\geq6$，如圖 14.9。
11. 研究 3.6：$n\geq10$，如圖 14.10。

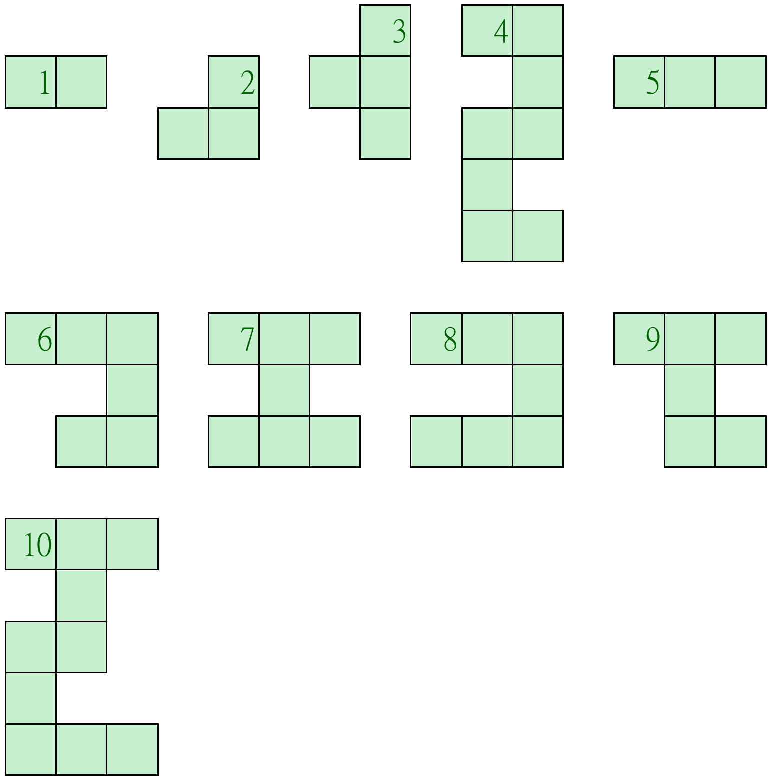


圖 14.1 至圖 14.10：各情形所需最少方塊之情形例圖。

【評語】030413

本件作品考慮多方塊在限制範圍下的計數問題，作者仔細分析了各種情形,得到一些精確結果。惜符號與公式可有再簡潔的空間。倘能有更簡潔及直觀的解釋，對問題會有更佳洞察與理解。