

中華民國第 56 屆中小學科學展覽會 作品說明書

國中組 數學科

030411

蝸牛殼的秘密-特奧多魯斯螺旋的應用

學校名稱：臺中市立大道國民中學

作者： 國二 李咏璇 國二 鄭亦苓 國二 鄭亦珊	指導老師： 林涖晨 李祥菁
---	-----------------------------

關鍵詞：特奧多魯斯螺旋、黃金比例、蝸牛殼紋

摘要

世界上最美的比例－黃金比例為 1.6180988...，像是希臘雅典的古廟、美術、雕塑、音樂……等等，生活上有許多實際的例子都應用了黃金比例，鸚鵡螺的殼形也是自然界黃金比例的實例之一。經由日常中實際觀察，發現每個蝸牛殼形大多都是螺旋狀－與鸚鵡螺形狀大致相符。然而日常生活中常見的蝸牛殼形是否就存在著黃金比例呢？經過運用畢氏定理、尺規作圖以及特奧多魯斯螺旋描繪出蝸牛殼的形狀、再用電腦製圖做更精細的確認之後，說明了蝸牛殼形中藏著黃金比例，證明「自然就是美」。

壹、研究動機

經常於下雨後看見許多不同品種的蝸牛，算是下雨天專屬的美景之一。一天，在觀察草本植物的同時，發現每個蝸牛的殼形幾乎都有一定的規律性－螺旋狀就如鸚鵡螺一般。在更加仔細的觀察後，豁然覺得蝸牛殼形讓人感到一種和諧的美感，就像是看到雅典古廟的協和感一般賞心悅目，令人讚嘆！後來，在數學課堂上教到尺規作圖、畢氏定理時，將直角三角形一一排序變為螺旋狀(也就是特奧多魯斯螺旋)時，發現與蝸牛殼形的形狀極為相似，而產生了莫大的好奇心，也想開始探究其中較深層的奧秘(找出螺旋的名稱)，因此決定以特奧多魯斯螺旋、黃金比例、蝸牛殼形、尺規作圖作為實驗的主題加以研究。

貳、研究目的

- 一、利用尺規作圖畫出特奧多魯斯螺旋
- 二、利用電腦繪圖軟體(GeoGebra)畫出特奧多魯斯螺旋，並以此模擬蝸牛殼形
- 三、改變螺旋的初始三角形及旋轉角度，以模擬蝸牛殼形
- 四、特奧多魯斯螺旋與黃金比例的關係
- 五、蝸牛殼形(頂視圖)與黃金比例的關係

參、研究設備及器材

空白紙、描圖紙、筆、尺、相機、圓規、蝸牛殼、測量工具及電腦設備

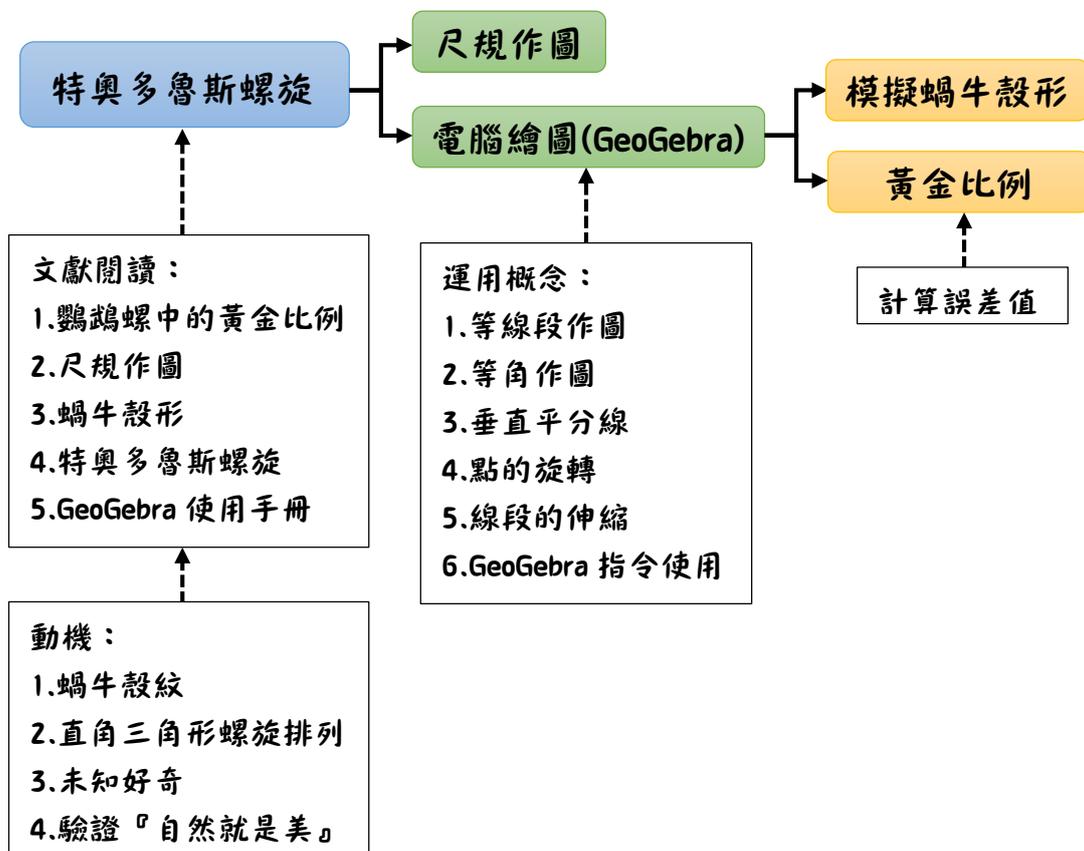
肆、研究過程或方法

研究過程

我們試著從尺規作圖以及電腦繪圖將特奧多魯斯螺旋繪製出來，以模擬蝸牛殼形，並從中找出黃金比例。一開始，我們利用尺規作圖(先學習垂直平分線、等角作圖、等線段作圖的方法)將直角三角形一一畫出來，但到後面發現作圖的過程會越來越困難，而且無法直接畫出一條螺旋線來模擬蝸牛殼形，我們開始轉向利用電腦繪圖(先詢問指導老師如何使用電腦程式畫出特奧多魯斯螺旋，老師推薦 GeoGebra 軟體，我們上網下載 GeoGebra 軟體)來完成這項任務。

在使用 GeoGebra 時，先上網學習一些相關的程式指令，以此將特奧多魯斯螺旋繪製出來，並且解決了剛剛尺規作圖無法做到的部分(單獨繪製螺旋線)。再者，我們計算特奧多魯斯螺旋的黃金比例存在於那些範圍之間，還有其誤差值，並以此模擬蝸牛殼形。最後，我們改變螺旋的初始三角形以及旋轉角度，將蝸牛殼形模擬的更臻完美，並且計算其與黃金比例的關係及誤差值。以下為實驗流程圖：

實驗流程圖



研究方法

一、實驗一 利用尺規作圖畫出特奧多魯斯螺旋

(一) 方法：

利用尺規作圖畫出直角三角形，第一個直角三角形兩股長均為1，斜邊長為 $\sqrt{2}$ ，第二個直角三角形一股長延續前一個直角三角形的斜邊 $\sqrt{2}$ ，另一股為1，斜邊長為 $\sqrt{3}$ ，第三個直角三角形一股長延續前一個直角三角形的斜邊 $\sqrt{3}$ ，另一股為1，斜邊長為 $\sqrt{4}=2$ ，以此類推，描繪出特奧多魯斯螺旋。

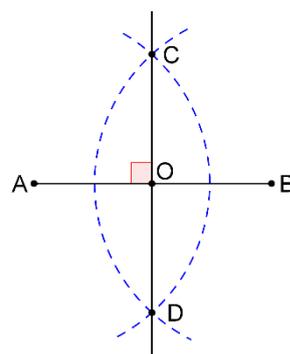
(二) 實驗過程：

1、繪製直角(垂直平分線作圖，如右圖所示)

(1)畫一線段 \overline{AB} 。

(2)分別以 A 、 B 為圓心，適當長為半徑畫弧。

(3)兩弧交於 C 、 D 兩點，連接 \overline{CD} ，則 $\angle AOC$ 即為所求。



2、尺規作圖描繪特奧多魯斯螺旋

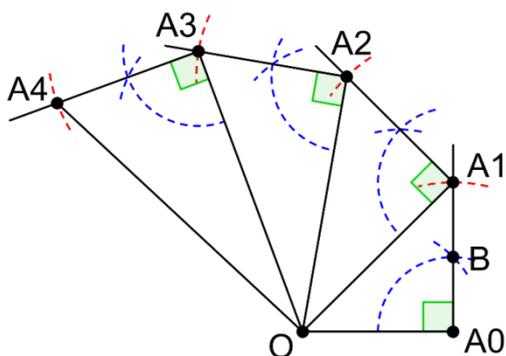
(1)取 $\overline{OA_0}$ 為一單位長。

(2)以 A_0 為圓心，適當長為半徑，作一直角，如圖(一)所示。

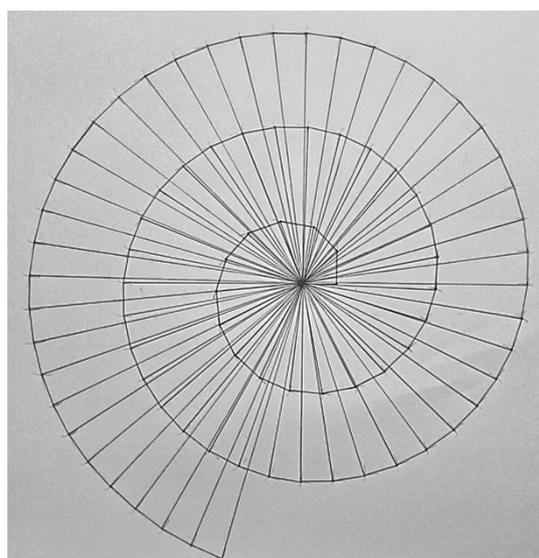
(3)延伸 $\overline{A_0B}$ ，以 A_0 為圓心， $\overline{OA_0}$ 為半徑，畫一弧，交 $\overline{A_0B}$ 於 A_1 。

(4)連接 O 、 A_1 ，得兩股長為1單位、斜邊長為 $\sqrt{2}$ 的直角三角形。

(5)以此方式類推，即得特奧多魯斯螺旋。



圖(一) GeoGebra 呈現尺規作圖的過程



圖(二) 手工繪製特奧多魯斯螺旋

(三) 討論：尺規作圖的過程到後面會越來越困難，而且無法直接畫出一條螺旋線來模擬蝸牛殼形，所以我們開始轉向利用電腦繪圖來觀察。

二、實驗二 利用 GeoGebra 畫出特奧多魯斯螺旋

(一) 方法：

利用「點的旋轉」、「線段的伸縮」這兩個概念以及 GeoGebra 中的指令 **Rotate**(旋轉)和 **Dilate**(伸縮)完成「生成」及「重置」兩個按鈕，讓電腦自動繪製出特奧多魯斯螺旋，以模擬蝸牛殼形。

(二) 實驗過程：

1、點的旋轉(如圖(三)所示)

(1)在直角坐標上取三點 $O(0,0)$ 、 $A_0(1,0)$ 、 $A_1(1,1)$ 。

(2)連接 $\overline{A_0A_1}$ 、 $\overline{OA_0}$ 、 $\overline{OA_1}$ ，得一等腰直角三角形 $\triangle OA_0A_1$ 。

(3)以 A_1 為旋轉中心， O 對 A_1 順時針旋轉 90° ，得 A_1' 。

在此用到的旋轉指令為： $A1' = \text{Rotate}[O, -(90^\circ), A1]$ 。



$\rightarrow \text{Rotate}[\text{<物件>}, \text{<旋轉角度>}, \text{<旋轉中心>}]$

(4)連接 A_1 、 A_1' ，可知 $\overline{A_1A_1'} = \overline{OA_1}$ ，且 $\overline{A_1A_1'} \perp \overline{OA_1}$ 。

2、線段的伸縮(如圖(四)所示)

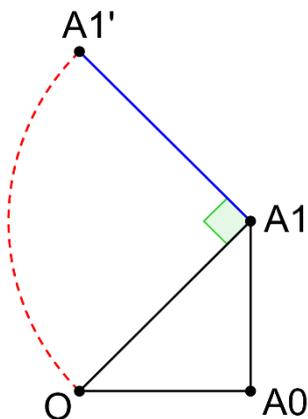
承接點的旋轉，我們想要在 $\overline{A_1A_1'}$ 取一點 A_2 ，使得 $\overline{A_1A_2} = \overline{A_0A_1}$ 。為了達到這樣的目標，

我們利用 $\overline{A_1A_1'} : \overline{OA_1} = \overline{A_1A_1'} : \overline{A_1A_1'} = 1$ ，得到 $\overline{A_1A_2} = \overline{A_1A_1'} \times \frac{1}{\overline{OA_1}}$ ，則 $\overline{A_1A_2} = \overline{A_0A_1}$ 。

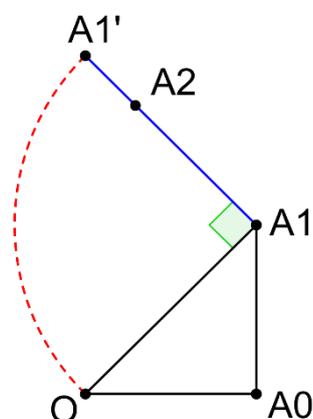
在此用到的旋轉指令為： $A2 = \text{Dilate}[A1', 1 / \text{Distance}[O, A1], A1]$ 。



$\rightarrow \text{Dilate}[\text{<物件>}, \text{<縮放倍率>}, \text{<縮放中心>}]$



圖(三) 點的旋轉



圖(四) 線段的伸縮

3、製作「生成」按鈕

(1)在繪圖區中插入一個按鈕，將此按鈕命名為「生成」。

(2)在「生成」按鈕上按右鍵，點選屬性，接著再點選程式，輸入程式碼(如圖(五)所示)。

(3)程式碼說明：

第 1、2 行：先設定一個初始值 $n=0$ ，以及真假值 `initialized`。若是真假值為真(true)，則 n 就由 $n+1$ 取代。若是真假值為否(false)，則 n 就由 1 取代。

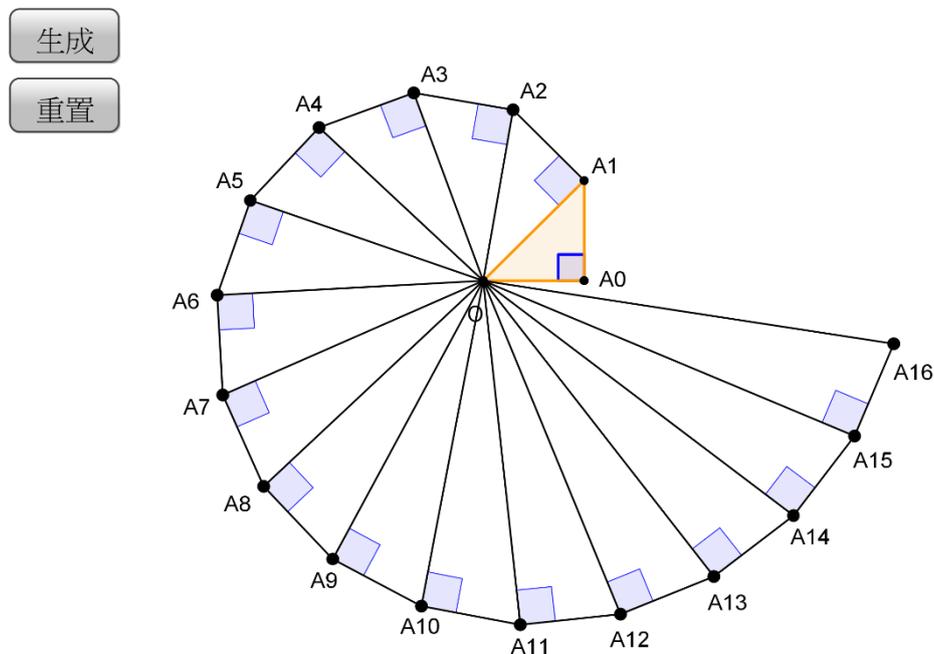
第 3 行：利用 `Execute` 這個指令和上述提及到的「點的旋轉」、「線段的伸縮」這兩個概念，來生成特奧魯斯螺旋上這些直角三角形的頂點。

第 4 行：利用 `Execute` 和 `Angle` 這兩個指令，標示出直角的地方。

第 5 行：最後，再次利用 `Execute` 和 `Segment` 這兩個指令，將頂點連接起來。

```
OnClick OnUpdate 全域 JavaScript
1 n=If[initialized,n+1,1]
2 initialized=True
3 Execute[{"A"+(n+1)+"=Dilate[Rotate[O,-pi/2,A"+n+"],1/Distance[O,A"+n+"],A"+n+"}]
4 Execute[{"Angle[A"+(n+1)+"",A"+n+"",O]"}]
5 Execute[{"Segment[A"+(n+1)+"",A"+n+""],"Segment[A"+(n+1)+"",O]"}]
```

圖(五) 生成按鈕的程式碼



圖(六) 生成按鈕下的特奧魯斯螺旋

4、製作「重置」按鈕

(1)在繪圖區中插入另一個按鈕，將此按鈕命名為「重置」。

(2)在「重置」按鈕上按右鍵，點選屬性，接著再點選程式，輸入程式碼(如圖(七)所示)。

(3)程式碼說明：

第 1、4 行：先設定一個初始值 $n=0$ ，以及真假值 `initialized`。若是真假值為真(true)，則 n 就由 $n+1$ 取代。若是真假值為否(false)，則 n 就由 0 取代。

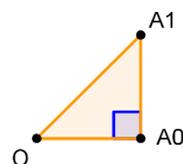
第 3 行：利用 `Sequence` 指令，將剛剛生成的直角三角形頂點收集起來，並使用 `Delete` 指令將這些頂點去除掉。

第 4 行：利用 `Sequence` 指令，將剛剛的頂點連線收集起來，並使用 `Delete` 指令將這些線段去除掉。

第 5 行：最後，設定初始值為 $n=2$ ，讓剛剛的特奧多魯斯螺旋消失，回到最初的等腰直角三角形。

```
OnClick OnUpdate 全域 JavaScript
1 n=If[initialized,n,0]
2 Execute[Sequence["Delete[A"+(k+1)+"T",k,1,n]]]
3 Execute[Sequence["Delete[Angle[A"+(k+1)+",A"+k+",0]]",k,1,n]]]
4 initialized=false
5 n=2
```

圖(七) 重置按鈕的程式碼



圖(八) 重置按鈕下去除特奧多魯斯螺旋

三、實驗三 利用特奧多魯斯螺旋模擬蝸牛殼形

(一) 方法：

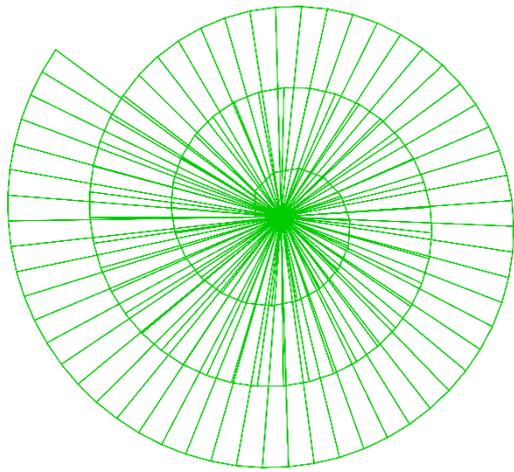
將平常隨處可見的蝸牛殼(扁蝸牛、非洲大蝸牛，以及兩種不知其名的蝸牛殼，稱作蝸牛殼 1、蝸牛殼 2)收集起來，用相機將蝸牛殼的頂視圖記錄下來，再運用實驗二畫出的特奧多魯斯螺旋來模擬蝸牛殼型。以下是我們實驗所採用的蝸牛殼：

扁蝸牛頂視圖	非洲大蝸牛頂視圖
	
蝸牛殼 1 頂視圖	蝸牛殼 2 頂視圖
	

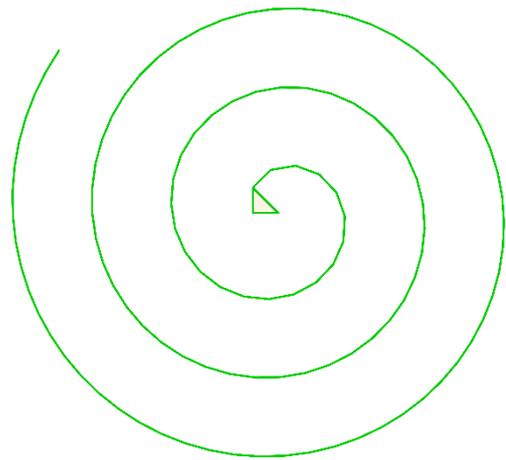
(二) 實驗過程：

以特奧多魯斯螺旋模擬蝸牛殼形

- (1)利用實驗二生成一個擁有 115 個直角三角形的特奧多魯斯螺旋，記為「115-特奧多魯斯螺旋」，並且將生成的頂點與 O 點之間的連線去除掉(就是將程式碼中的 `Segment[A" +(n+1)"+",O]` 刪掉)，保留最外圍的螺旋線，記為「115-螺旋線」。(如圖(九)、圖(十)所示)



圖(九) 115-特奧多魯斯螺旋



圖(十) 115-螺旋線

(2)利用 115-螺旋線模擬扁蝸牛殼形、非洲大蝸牛殼形、蝸牛殼 1 以及蝸牛殼 2。(如圖(十一)圖(十二)、圖(十三)、圖(十四)所示)



圖(十一) 115-螺旋線模擬扁蝸牛殼形



圖(十二) 115-螺旋線模擬非洲大蝸牛殼形



圖(十三) 115-螺旋線模擬蝸牛殼 1



圖(十四) 115-螺旋線模擬蝸牛殼 2

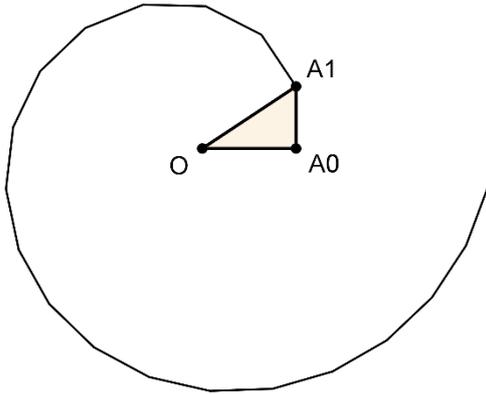
(三) 討論：

由圖(十一)、圖(十二)、圖(十三)及圖(十四)可看到 115-螺旋線的模擬並不那麼的吻合，所以我們嘗試將特奧多魯斯螺旋的初始值改變(也就是改變一開始的直角三角形條件)，來模擬蝸牛殼形。以下為改變的結果：

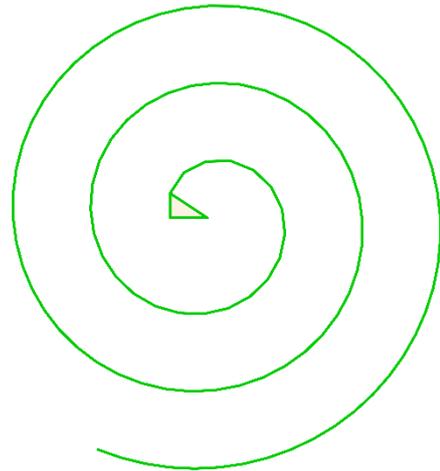
1、改變特奧多魯斯螺旋的初始值來模擬扁蝸牛殼形

(1)將初始三角形的底變為 1.5 單位長，生成 105-螺旋線，記為「1.5-105-螺旋線」。

(如圖(十五)、圖(十六)所示)

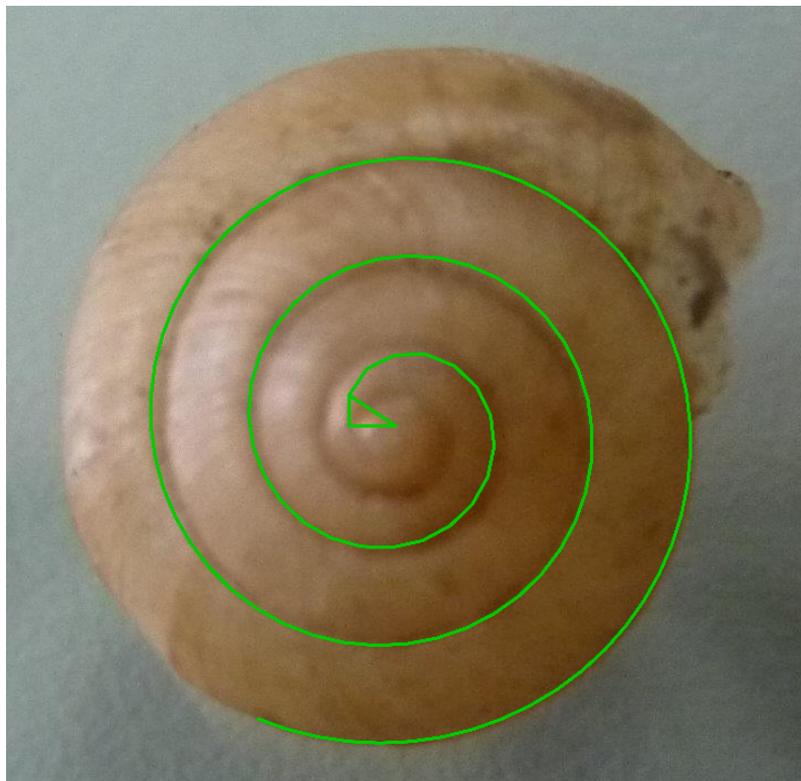


圖(十五) 將初始三角形的底變為 1.5 單位長



圖(十六) 1.5-105-螺旋線

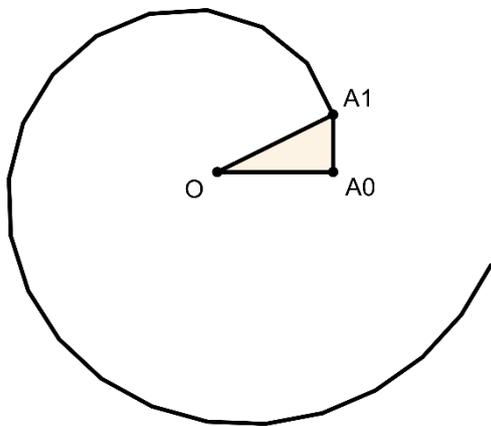
(2)利用 1.5-105-螺旋線模擬扁蝸牛殼形。(如圖(十七)所示)



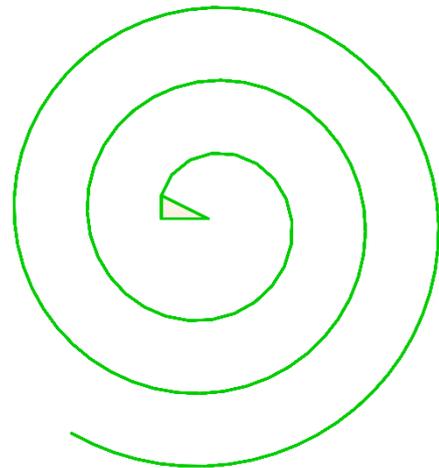
圖(十七) 1.5-105-螺旋線模擬扁蝸牛殼形

2、改變特奧多魯斯螺旋的初始值來模擬非洲大蝸牛殼形

- (1)將初始三角形的底變為 2 單位長，生成 115-螺旋線，記為「2-115-螺旋線」。
(如圖(十八)、圖(十九)所示)



圖(十八) 將初始三角形的底變為 2 單位長



圖(十九) 2-115-螺旋線

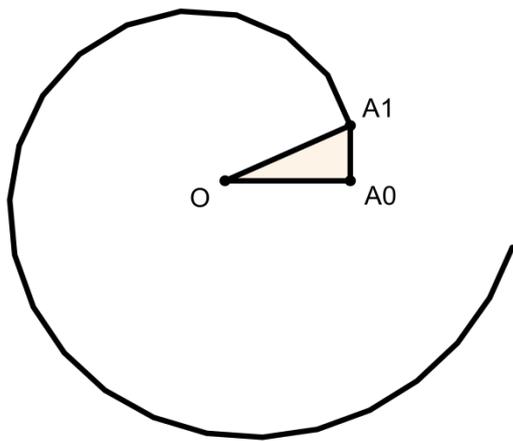
- (2)利用 2-115-螺旋線模擬扁蝸牛殼形。(如圖(二十)所示)



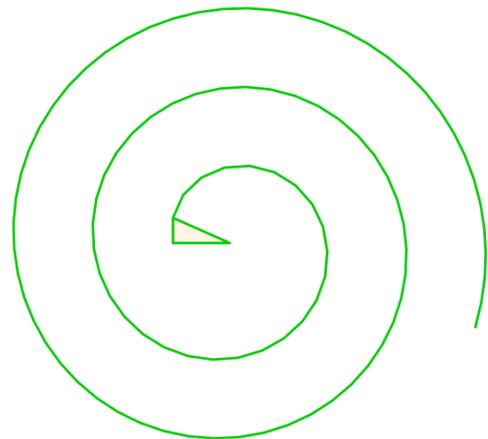
圖(二十) 2-115-螺旋線模擬非洲大蝸牛殼形

3、改變特奧多魯斯螺旋的初始值來模擬蝸牛殼 1 及蝸牛殼 2

- (1)將初始三角形的底變為 2.25 單位長，生成 100-螺旋線，記為「2.25-100-螺旋線」。
(如圖(二十一)、圖(二十二)所示)



圖(二十一) 將初始三角形的底變為 2.25 單位長



圖(二十二) 2.25-100-螺旋線

- (2)利用 2.25-100-螺旋線模擬蝸牛殼 1。(如圖(二十三)所示)



圖(二十三) 2.25-100-螺旋線模擬蝸牛殼 1

(3)利用 2.25-100-螺旋線模擬蝸牛殼 2。(如圖(二十四)所示)



圖(二十四) 2.25-100-螺旋線模擬蝸牛殼 2

4、由圖(十七)、圖(二十)、圖(二十三)及圖(二十四)可看到 1.5-105-螺旋線、2-115-螺旋線以及 2.25-100-螺旋線分別模擬出扁蝸牛殼形、非洲大蝸牛殼形、蝸牛殼 1 和蝸牛殼 2，在模擬的過程中，我們看到螺旋的第二圈及第三圈模擬的較好，但除此之外的螺旋都偏離殼形的螺旋，在此，我們想辦法在實驗四中將頂視圖的模擬做到最好。

四、實驗四 改變螺旋的初始三角形及旋轉角度模擬蝸牛殼形

(一) 方法：

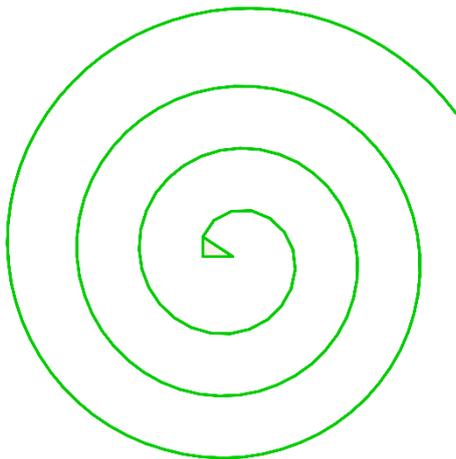
接續實驗三的討論，為了將頂視圖的模擬做到最好，我們試著去改變螺旋的初始三角形及旋轉角度(也就是說不完全是以 90 度旋轉來模擬蝸牛殼形)來模擬蝸牛殼形。

(二) 實驗過程：

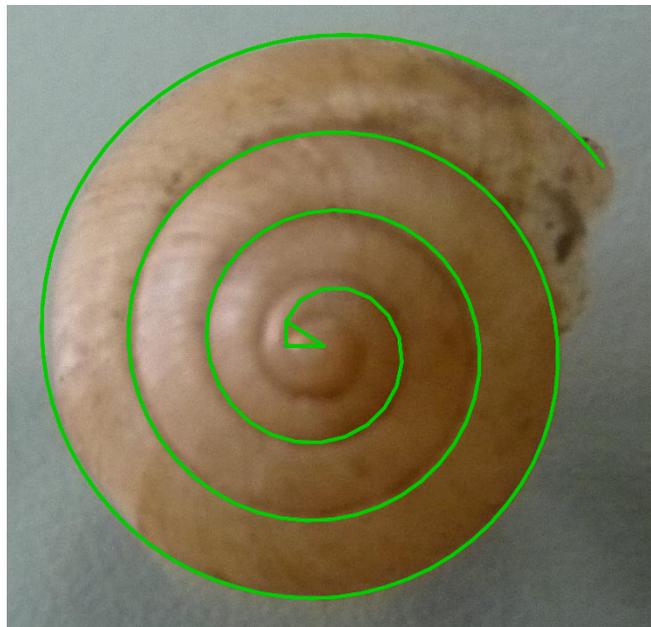
1、模擬扁蝸牛殼形

將初始三角形底變為 1.5 單位長，高為 1 單位長，並將旋轉角度的改變以及個別角度所生成的三角形個數紀錄於下表。生成出來的螺旋線如圖(二十五)所示，並於圖(二十六)中模擬扁蝸牛殼形。

旋轉角度	90 度	91.4 度
生成的三角形個數	105	45



圖(二十五) 扁蝸牛殼形

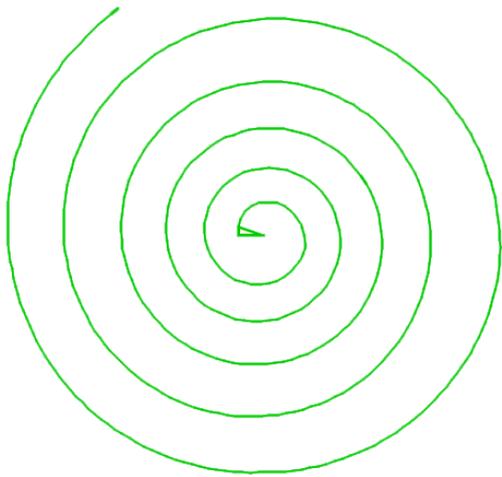


圖(二十六) 模擬扁蝸牛殼形

2、模擬非洲大蝸牛殼形

將初始三角形底變為 2 單位長，高為 0.95 單位，並將旋轉角度的改變以及個別角度所生成的三角形個數紀錄於表格之中。生成出來的螺旋線如圖(二十七)所示，並於圖(二十八)中模擬非洲大蝸牛殼形。

旋轉角度	91.4 度	92 度	89 度	91.4 度	92 度	94 度
生成的三角形個數	245	140	40	40	30	5



圖(二十七) 非洲大蝸牛殼形

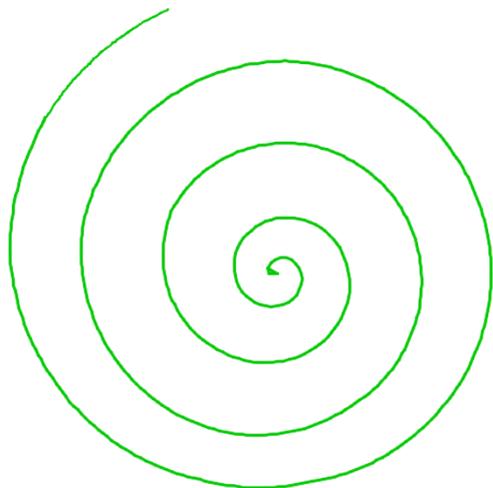


圖(二十八) 模擬非洲大蝸牛殼形

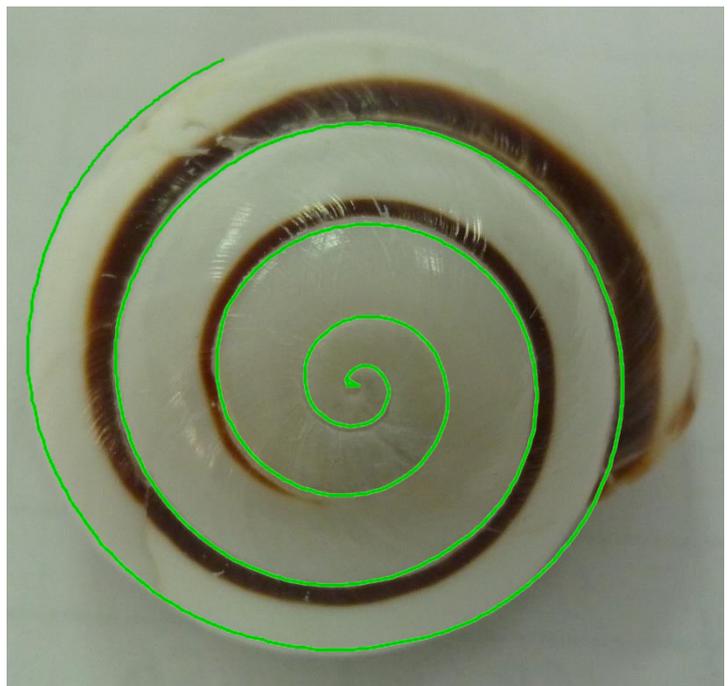
3、模擬蝸牛殼 1 的殼形

將初始三角形底變為 1.5 單位長，高為 0.95 單位，並將旋轉角度的改變以及個別角度所生成的三角形個數紀錄於表格之中。生成出來的螺旋線如圖(二十九)所示，並於圖(三十)中模擬蝸牛殼 1 的殼形。

旋轉角度	96 度	98 度	92 度	96 度	92 度	89 度	94 度	98 度
生成的三角形個數	90	30	90	70	50	110	20	55



圖(二十九) 蝸牛殼 1 的殼形

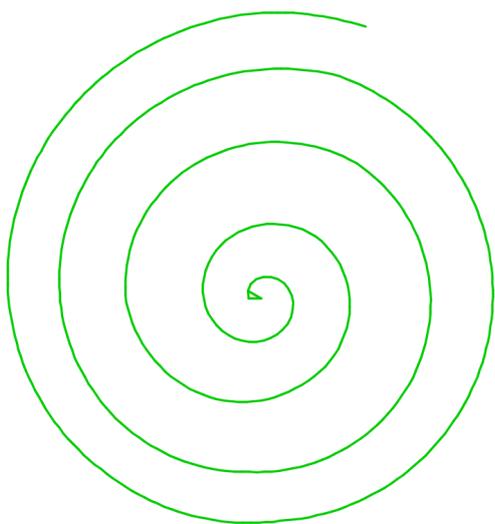


圖(三十) 模擬蝸牛殼 1 的殼形

4、模擬蝸牛殼 2 的殼形

將初始三角形底變為 1.5 單位長，高為 0.9 單位，並將旋轉角度的改變以及個別角度所生成的三角形個數紀錄於表格之中。生成出來的螺旋線如圖(三十一)所示，並於圖(三十二)中模擬蝸牛殼 2 的殼形。

旋轉角度	96 度	92 度	98 度	94 度	90 度	94 度	88 度	92 度	94 度	92 度
生成的三角形個數	50	25	30	45	60	95	85	25	85	15



圖(三十一) 蝸牛殼 2 的殼形



圖(三十二) 模擬蝸牛殼 2 的殼形

(三) 討論：

由圖(二十六)、圖(二十八)、圖(三十)及圖(三十二)，我們已將這些蝸牛殼形分別模擬出來，接著我們感興趣的是：「實驗三中，我們看到特奧多魯斯螺旋在第二圈及第三圈模擬的較好，並且想知道在此螺旋中是否存有黃金比例」以及「實驗四中，這些模擬蝸牛殼形的螺旋線與黃金比例之間的關係」。我們分別在實驗舞及實驗六中呈現這些事情。

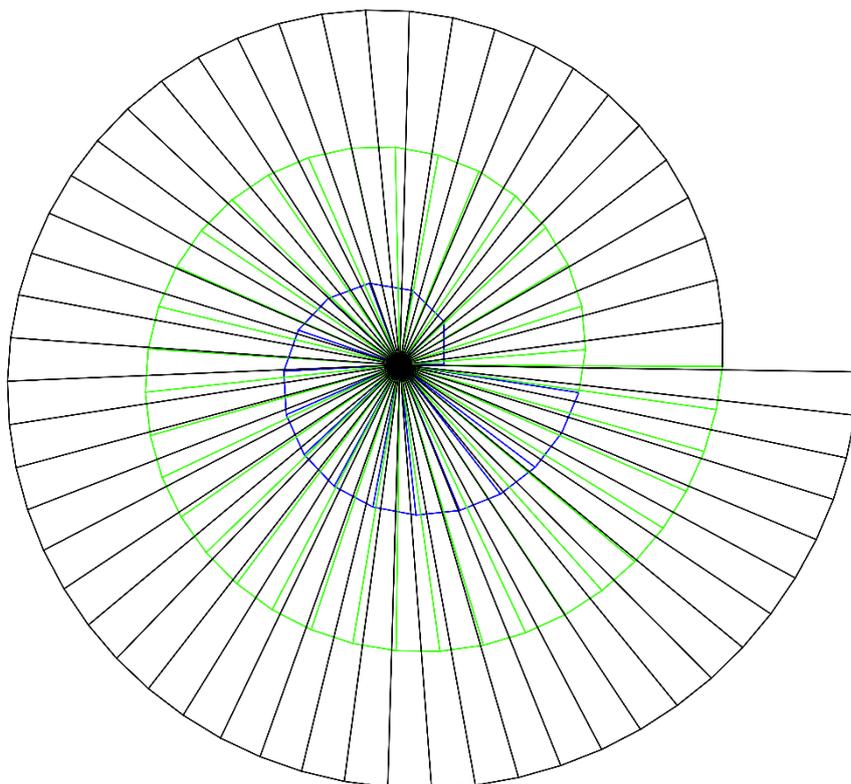
五、實驗五 特奧多魯斯螺旋與黃金比例

(一) 方法：

先將特奧多魯斯螺旋做分類的動作，再利用 GeoGebra 中的試算表，將 O 與每個 A_k 的連線長度匯出以計算線段比例值。

(二) 實驗過程：

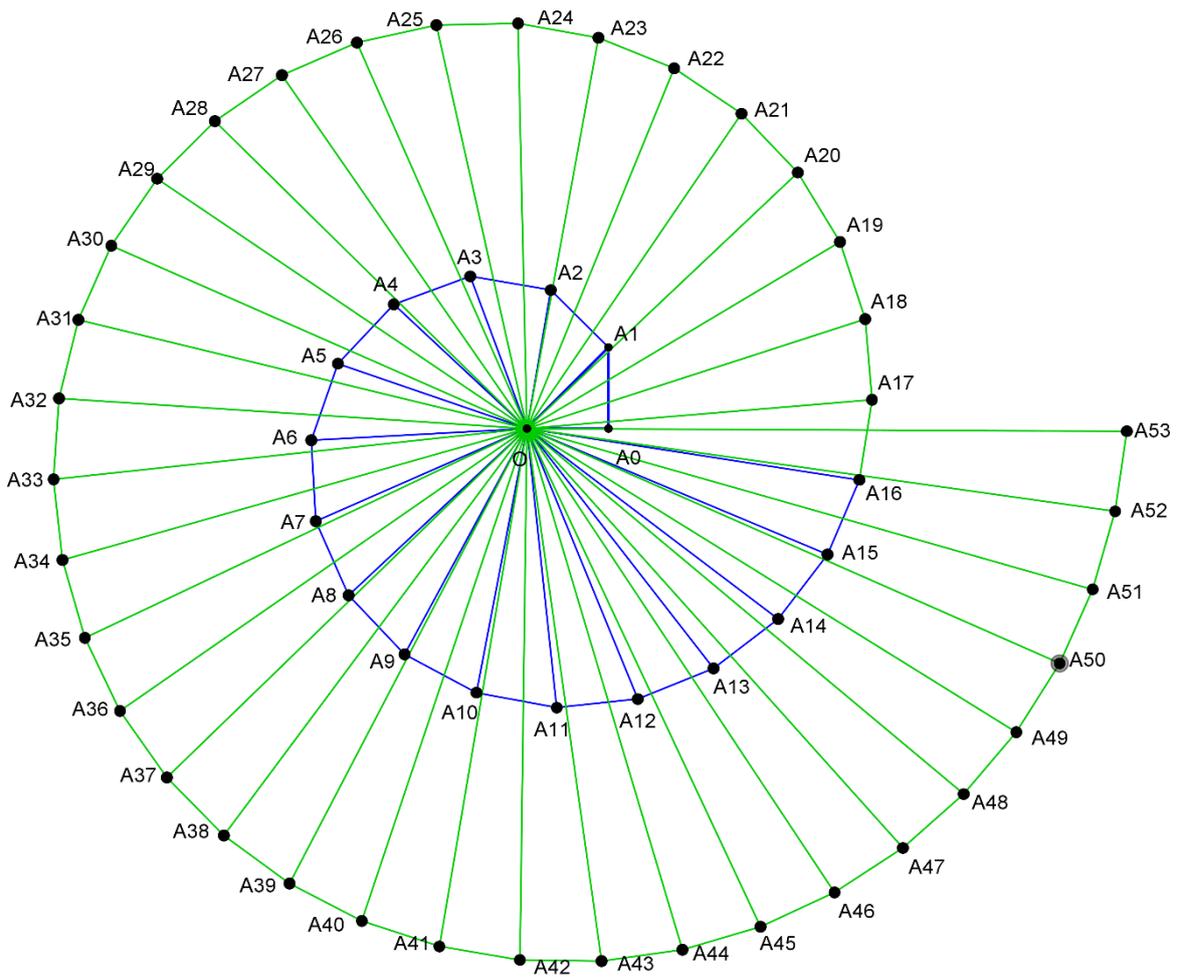
1、將特奧多魯斯螺旋的線段做分類的動作，每旋轉 360° 就用一種顏色來代表，第一圈以藍色表示，第二圈以綠色表示，第三圈以黑色表示。(如圖(三十三)所示)



圖(三十三) 分類特奧多魯斯螺旋線段

2、分類之後我們想要分析每圈的線段比例長，以圖(二十六)來舉例，第二圈的 $\overline{OA_{17}}$ 、 $\overline{OA_{18}}$ 、 $\overline{OA_{19}}$ 、 $\overline{OA_{20}}$ 這些線段所經過的三角形為 ΔOA_0A_1 ，接著利用這些線段長除以 $\overline{OA_0}$ 或 $\overline{OA_1}$ (用位置來區分，若是線段較靠近 $\overline{OA_0}$ ，就除以 $\overline{OA_0}$ ；同理，若是線段較靠近 $\overline{OA_1}$ ，就除以 $\overline{OA_1}$)，計算其比例值。一樣的手法，第二圈的 $\overline{OA_{21}}$ 、 $\overline{OA_{22}}$ 、 $\overline{OA_{23}}$ 這些線段所經過的三角形為 ΔOA_1A_2 ，接著利用這些線段長除以 $\overline{OA_1}$ 或 $\overline{OA_2}$ ，計算其比例值。以此類推，我們想知道這些比例值是否會存在著黃金比例。

(1)第一圈與第二圈的特奧多魯斯螺旋頂點標示如圖(三十四)所示。



圖(三十四) 第一圈及第二圈的特奧多魯斯螺旋線段

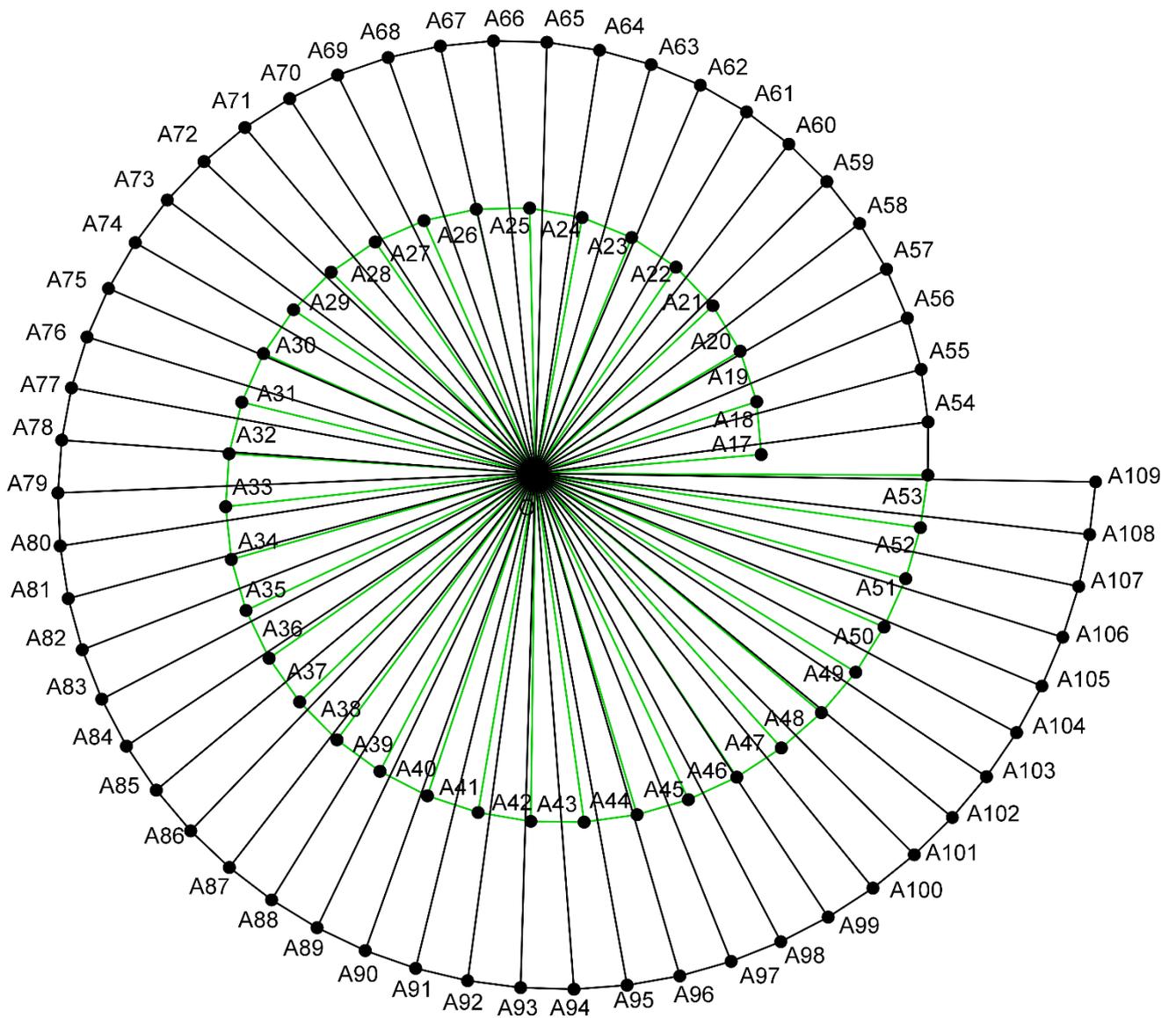
(2)以下列表格(如表(一))所示呈現第一圈及第二圈的線段比例值，以及第二圈線段所在的三角形區域。

表(一) 特奧多魯斯螺旋線段第一圈及第二圈的線段比例值

第一圈三角形	第一圈三角形所包含的第二圈線段	線段比例值 (取到小數第三位)	第一圈三角形	第一圈三角形所包含的第二圈線段	線段比例值 (取到小數第三位)
ΔOA_0A_1	$\overline{OA_{17}}$	4.240	ΔOA_1A_2	$\overline{OA_{21}}$	2.711
	$\overline{OA_{18}}$	4.360		$\overline{OA_{22}}$	2.775
	$\overline{OA_{19}}$	4.470		$\overline{OA_{23}}$	2.832
	$\overline{OA_{20}}$	3.248	ΔOA_2A_3	$\overline{OA_{24}}$	2.890
				$\overline{OA_{25}}$	2.948

第一圈三角形	第一圈三角形所包含的第二圈線段	線段比例值 (取到小數第三位)	第一圈三角形	第一圈三角形所包含的第二圈線段	線段比例值 (取到小數第三位)
ΔOA_8A_9	$\overline{OA_{37}}$	2.053	$\Delta OA_{10}A_{11}$	$\overline{OA_{41}}$	1.952
	$\overline{OA_{38}}$	2.080		$\overline{OA_{42}}$	1.896
ΔOA_9A_{10}	$\overline{OA_{39}}$	2.000	$\Delta OA_{11}A_{12}$	$\overline{OA_{43}}$	1.837
	$\overline{OA_{40}}$	2.025		$\overline{OA_{44}}$	1.859
ΔOA_3A_4	$\overline{OA_{26}}$	2.600	$\Delta OA_{12}A_{13}$	$\overline{OA_{45}}$	1.813
	$\overline{OA_{27}}$	2.645		$\overline{OA_{46}}$	1.834
	$\overline{OA_{28}}$	2.695	$\Delta OA_{13}A_{14}$	$\overline{OA_{47}}$	1.791
ΔOA_4A_5	$\overline{OA_{29}}$	2.446		$\overline{OA_{48}}$	1.809
	$\overline{OA_{30}}$	2.273	$\Delta OA_{14}A_{15}$	$\overline{OA_{49}}$	1.827
ΔOA_5A_6	$\overline{OA_{31}}$	2.136		$\overline{OA_{50}}$	1.845
	$\overline{OA_{32}}$	2.166	$\Delta OA_{15}A_{16}$	$\overline{OA_{51}}$	1.803
ΔOA_6A_7	$\overline{OA_{33}}$	2.060	$\Delta OA_{16}A_{17}$	$\overline{OA_{52}}$	1.717
	$\overline{OA_{34}}$	2.092		$\overline{OA_{53}}$	1.733
ΔOA_7A_8	$\overline{OA_{35}}$	2.120			
	$\overline{OA_{36}}$	2.148			

(3)第二圈與第三圈的特奧多魯斯螺旋頂點標示如圖(三十五)所示。



圖(三十五) 第二圈及第三圈的特奧多魯斯螺旋線段

(2)以下列表格(如表(二)所示)呈現第二圈及第三圈的線段比例值，以及第三圈線段所在的三角形區域。

表(二) 特奧多魯斯螺旋線段第二圈及第三圈的線段比例值

第二圈 三角形	第二圈三角 形所包含的 第三圈線段	線段比例值 (取到小數第 三位)	第二圈 三角形	第二圈三角 形所包含的 第三圈線段	線段比例值 (取到小數第 三位)
$\Delta OA_{17}A_{18}$	$\overline{OA_{54}}$	1.750	$\Delta OA_{18}A_{19}$	$\overline{OA_{56}}$	1.689
	$\overline{OA_{55}}$	1.764		$\overline{OA_{57}}$	1.705

第二圈三角形	第二圈三角形所包含的第三圈線段	線段比例值 (取到小數第三位)	第二圈三角形	第二圈三角形所包含的第三圈線段	線段比例值 (取到小數第三位)
$\Delta OA_{19}A_{20}$	$\overline{OA_{58}}$	1.677	$\Delta OA_{30}A_{31}$	$\overline{OA_{75}}$	1.541
$\Delta OA_{20}A_{21}$	$\overline{OA_{59}}$	1.652		$\overline{OA_{76}}$	1.549
	$\overline{OA_{60}}$	1.665	$\Delta OA_{31}A_{32}$	$\overline{OA_{77}}$	1.538
$\Delta OA_{21}A_{22}$	$\overline{OA_{61}}$	1.640		$\overline{OA_{78}}$	1.549
	$\overline{OA_{62}}$	1.654	$\Delta OA_{32}A_{33}$	$\overline{OA_{79}}$	1.533
$\Delta OA_{22}A_{23}$	$\overline{OA_{63}}$	1.667		$\Delta OA_{33}A_{34}$	$\overline{OA_{80}}$
$\Delta OA_{23}A_{24}$	$\overline{OA_{64}}$	1.645	$\overline{OA_{81}}$		1.554
	$\overline{OA_{65}}$	1.657	$\Delta OA_{34}A_{35}$	$\overline{OA_{82}}$	1.539
$\Delta OA_{24}A_{25}$	$\overline{OA_{66}}$	1.638		$\Delta OA_{35}A_{36}$	$\overline{OA_{83}}$
	$\overline{OA_{67}}$	1.650	$\overline{OA_{84}}$		1.537
$\Delta OA_{25}A_{26}$	$\overline{OA_{68}}$	1.630	$\Delta OA_{36}A_{37}$	$\overline{OA_{85}}$	1.525
$\Delta OA_{26}A_{27}$	$\overline{OA_{69}}$	1.610	$\Delta OA_{37}A_{38}$	$\overline{OA_{86}}$	1.515
	$\overline{OA_{70}}$	1.621		$\overline{OA_{87}}$	1.523
$\Delta OA_{27}A_{28}$	$\overline{OA_{71}}$	1.610	$\Delta OA_{38}A_{39}$	$\overline{OA_{88}}$	1.511
$\Delta OA_{28}A_{29}$	$\overline{OA_{72}}$	1.558	$\Delta OA_{39}A_{40}$	$\overline{OA_{89}}$	1.502
	$\overline{OA_{73}}$	1.569		$\overline{OA_{90}}$	1.491
$\Delta OA_{29}A_{30}$	$\overline{OA_{74}}$	1.555	$\Delta OA_{40}A_{41}$	$\overline{OA_{91}}$	1.480

第二圈三角形	第二圈三角形所包含的第三圈線段	線段比例值 (取到小數第三位)	第二圈三角形	第二圈三角形所包含的第三圈線段	線段比例值 (取到小數第三位)
$\Delta OA_{41}A_{42}$	$\overline{OA_{92}}$	1.470	$\Delta OA_{47}A_{48}$	$\overline{OA_{101}}$	1.457
	$\overline{OA_{93}}$	1.479		$\Delta OA_{48}A_{49}$	$\overline{OA_{102}}$
$\Delta OA_{42}A_{43}$	$\overline{OA_{94}}$	1.486			$\overline{OA_{103}}$
$\Delta OA_{43}A_{44}$	$\overline{OA_{95}}$	1.461	$\Delta OA_{49}A_{50}$	$\overline{OA_{104}}$	1.450
	$\overline{OA_{96}}$	1.469		$\Delta OA_{50}A_{51}$	$\overline{OA_{105}}$
$\Delta OA_{44}A_{45}$	$\overline{OA_{97}}$	1.460			$\overline{OA_{106}}$
$\Delta OA_{45}A_{46}$	$\overline{OA_{98}}$	1.468	$\Delta OA_{51}A_{52}$	$\overline{OA_{107}}$	1.441
	$\overline{OA_{99}}$	1.475		$\Delta OA_{52}A_{53}$	$\overline{OA_{108}}$
$\Delta OA_{46}A_{47}$	$\overline{OA_{100}}$	1.465			$\overline{OA_{109}}$

(三) 討論：

1、從上述的數據，可看到黃金比例存在於特奧多魯斯螺旋的第二圈及第三圈的線段比例值當中，當我們拿 1.5-105-螺旋線、2-115-螺旋線、2.25-100-螺旋線分別模擬出扁蝸牛殼形、非洲大蝸牛殼形、蝸牛殼 1 和蝸牛殼 2 時，第二圈及第三圈模擬的極為相似，由此，我們可推論特奧多魯斯螺旋確實有著黃金比例。

2、利用 Excel 計算第二圈及第三圈線段比例值(共 54 筆數據)的數據誤差值(如下表所示)：

計算特奧多魯斯螺旋的第二圈及第三圈線段比例值								
1.75	1.665	1.638	1.569	1.533	1.515	1.47	1.468	1.45
1.764	1.64	1.655	1.555	1.554	1.523	1.479	1.475	1.443
1.689	1.654	1.63	1.541	1.539	1.511	1.486	1.465	1.448
1.705	1.667	1.61	1.549	1.528	1.502	1.461	1.457	1.441
1.677	1.645	1.621	1.538	1.537	1.491	1.469	1.45	1.434
1.652	1.657	1.558	1.549	1.525	1.48	1.46	1.457	1.441
54 筆數據平均值				1.549				
與黃金比例間的誤差值				0.042	準確值		0.958	

3、由這些數據中，我們也觀察到另一件事：模擬蝸牛殼形時，第四圈之後就越來越不準確，而且這些比例值有越來越趨近於 1 的現象。或許趨近於 1 的情況是可能的，當直角三角形的一股(設為高)固定為 1，另一股(設為底)的值非常大時，斜邊也會非常的大，且底和斜邊的值會幾乎相等，所以會有此現象。再者，我們也發現到特奧多魯斯螺旋的螺旋線最後應該會跟圓周率有關，但以我們目前的所學無法說明這樣的情況，須等到高中時才有辦法得到結果。

六、實驗六 蝸牛殼形(頂視圖)與黃金比例

(一) 方法：

由於特奧多魯斯螺旋無法完整的模擬出蝸牛殼形，所以在實驗四中我們改變了螺旋的初始三角形以及旋轉角度，將蝸牛殼形模擬出來，一樣的，我們透過 GeoGebra 中的試算表，將 O 與每個 A_k 的連線長度匯出以計算每圈之間的線段比例值。

(二) 實驗過程：

1、利用 Excel 計算扁蝸牛殼形(頂視圖)每圈的線段比例值，如下表所示：

扁 蝸 牛 線 段 比 例 值	第一、二圈			第二、三圈				第三、四圈		
	2.617	2.125	1.793	1.636	1.548	1.478	1.447	1.449	1.462	1.466
2.675	2.153	1.810	1.649	1.534	1.468	1.443	1.446	1.460	1.472	
2.732	2.060	1.773	1.662	1.544	1.476	1.426	1.455	1.457		
2.787	2.086	1.740	1.640	1.531	1.467	1.435	1.441	1.455		
2.842	2.006	1.709	1.653	1.540	1.458	1.432	1.438	1.452		
2.896	1.938	1.681	1.632	1.550	1.466	1.429	1.446	1.450		
2.578	1.879	1.696	1.644	1.537	1.458	1.438	1.443	1.457		
2.623	1.901	1.670	1.624	1.525	1.449	1.435	1.441	1.455		
2.200	1.848	1.646	1.606	1.534	1.472	1.432	1.449	1.453		
2.236	1.802	1.659	1.617	1.522	1.464	1.429	1.446	1.460		
2.109	1.821		1.572	1.510	1.456	1.450	1.454	1.458		
2.142	1.779		1.556	1.519	1.463	1.447	1.452	1.465		
2.038	1.859		1.567	1.508	1.455	1.444	1.460	1.463		
2.067	1.815		1.552	1.479	1.447	1.452	1.457	1.470		
2.236	1.833		1.562	1.487	1.440		1.454	1.468		
131 筆數據平均值			1.668							
誤差值			0.0309				準確值		0.9691	

2、利用 Excel 計算非洲大蝸牛殼形(頂視圖)每圈的線段比例值，如下表所示：

	第一、二圈		第二、三圈			第三、四圈				第四、五圈				第五、六圈	
	非洲大蝸牛線段比例值	2.372	1.783	1.622	1.535	1.481	1.460	1.414	1.397	1.396	1.405	1.402	1.412	1.361	1.297
	2.259	1.760	1.610	1.528	1.486	1.456	1.418	1.396	1.395	1.404	1.405	1.414	1.358	1.298	1.275
	2.289	1.739	1.620	1.521	1.481	1.452	1.415	1.400	1.399	1.403	1.404	1.413	1.358	1.297	1.274
	2.319	1.752	1.608	1.528	1.477	1.457	1.413	1.398	1.402	1.402	1.403	1.412	1.354	1.296	1.274
	2.222	1.700	1.617	1.521	1.482	1.453	1.410	1.397	1.401	1.405	1.406	1.415	1.350	1.294	1.276
	2.139	1.712	1.627	1.514	1.478	1.450	1.414	1.401	1.400	1.404	1.405	1.414	1.346	1.296	1.275
	2.165	1.694	1.615	1.521	1.464	1.446	1.411	1.394	1.403	1.403	1.404	1.413	1.346	1.291	1.274
	2.092	1.706	1.624	1.515	1.469	1.442	1.409	1.392	1.402	1.406	1.403	1.412	1.342	1.290	1.273
	2.029	1.688	1.613	1.521	1.464	1.439	1.416	1.391	1.401	1.405	1.406	1.412	1.339	1.288	1.275
	2.052	1.672	1.622	1.515	1.460	1.443	1.420	1.395	1.404	1.404	1.409	1.411	1.335	1.287	1.275
	2.075	1.683	1.611	1.521	1.465	1.440	1.417	1.393	1.403	1.403	1.408	1.410	1.335	1.289	1.274
	2.098	1.694	1.601	1.527	1.461	1.436	1.414	1.392	1.402	1.401	1.411	1.412	1.331	1.287	1.276
	1.965	1.706	1.609	1.521	1.457	1.441	1.411	1.396	1.400	1.400	1.410	1.412	1.327	1.319	1.275
	1.986	1.689	1.599	1.515	1.462	1.437	1.408	1.394	1.399	1.399	1.409	1.411	1.324	1.285	1.277
	1.939	1.700	1.571	1.521	1.458	1.434	1.419	1.393	1.398	1.402	1.412	1.410	1.324	1.286	1.276
	1.959	1.684	1.579	1.515	1.463	1.431	1.416	1.391	1.397	1.401	1.411	1.412	1.320	1.285	1.275
	1.959	1.669	1.588	1.509	1.467	1.435	1.420	1.401	1.400	1.400	1.410	1.409	1.317	1.284	1.275
	1.999	1.680	1.596	1.515	1.463	1.439	1.417	1.399	1.399	1.399	1.409	1.406	1.313	1.282	1.274
	1.954	1.665	1.578	1.510	1.459	1.436	1.406	1.398	1.398	1.402	1.412	1.406	1.313	1.281	1.276
	1.973	1.628	1.577	1.493	1.455	1.440	1.404	1.401	1.396	1.401	1.411	1.402	1.310	1.283	1.275
	1.876	1.638	1.585	1.499		1.437	1.401	1.400	1.400	1.400	1.410	1.399	1.306	1.284	1.274
	1.894	1.625	1.576	1.493		1.434	1.399	1.399	1.399	1.408	1.409	1.395	1.303	1.283	1.274
	1.811	1.635	1.567	1.488		1.438	1.402	1.397	1.397	1.406	1.408	1.395	1.304	1.282	1.276
	1.827		1.575	1.494		1.435	1.400	1.396		1.405	1.407	1.392	1.303	1.284	1.275
	1.798		1.567	1.488		1.432	1.397	1.400		1.408	1.406	1.388	1.301	1.282	1.271
	1.771		1.574	1.483		1.428	1.401	1.398		1.407	1.409	1.389	1.300	1.281	1.270
	1.786		1.566	1.489		1.433	1.399	1.397		1.406	1.408	1.385	1.305	1.280	1.270
	1.760		1.558	1.484		1.429	1.396	1.396		1.405	1.407	1.381	1.304	1.278	1.272
	1.775		1.565	1.489		1.426	1.394	1.394		1.408	1.410	1.377	1.302	1.280	1.271
	1.790		1.557	1.495		1.423	1.403	1.398		1.407	1.409	1.377	1.301	1.280	1.270
	1.804		1.564	1.490		1.420	1.401	1.397		1.406	1.408	1.373	1.299	1.279	
	1.779		1.557	1.485		1.417	1.398	1.395		1.409	1.411	1.369	1.301	1.278	
	1.793		1.549	1.490		1.421	1.402	1.394		1.404	1.413	1.369	1.300	1.280	
	1.769		1.556	1.486		1.419	1.399	1.402		1.403	1.412	1.365	1.298	1.276	
470 筆數據平均值 1.462															
誤差值 0.097 準確值 0.903															

3、利用 Excel 計算蝸牛殼 1 的殼形(頂視圖)每圈的線段比例值，如下表所示：

	第一、二圈			第二、三圈				第三、四圈							
	4.871	2.845	2.600	2.588	2.316	2.046	1.822	1.776	1.709	1.633	1.581	1.508	1.440	1.333	1.320
4.019	2.876	2.625	2.610	2.321	2.050	1.814	1.783	1.688	1.631	1.578	1.505	1.437	1.328	1.325	1.354
4.104	2.779	2.583	2.575	2.327	2.031	1.822	1.773	1.694	1.629	1.574	1.502	1.434	1.328	1.325	1.363
4.189	2.809	2.607	2.596	2.297	2.012	1.813	1.763	1.686	1.631	1.574	1.502	1.435	1.324	1.325	1.363
3.652	2.838	2.567	2.616	2.303	2.016	1.822	1.770	1.692	1.629	1.571	1.499	1.432	1.321	1.324	1.362
3.723	2.749	2.590	2.582	2.274	1.997	1.813	1.760	1.684	1.631	1.567	1.496	1.429	1.319	1.329	
3.350	2.777	2.613	2.603	2.279	2.002	1.821	1.767	1.690	1.629	1.567	1.496	1.780	1.322	1.329	
3.412	2.806	2.574	2.570	2.251	1.983	1.813	1.757	1.682	1.627	1.564	1.493	1.426	1.319	1.329	
3.474	2.723	2.596	2.590	2.257	1.966	1.821	1.764	1.672	1.629	1.564	1.489	1.423	1.316	1.328	
3.535	2.750	2.559	2.610	2.262	1.970	1.813	1.755	1.674	1.627	1.561	1.490	1.421	1.314	1.333	
3.596	2.777	2.581	2.578	2.235	1.974	1.805	1.745	1.664	1.625	1.557	1.487	1.421	1.316	1.333	
3.657	2.700	2.603	2.597	2.240	1.957	1.813	1.752	1.666	1.627	1.557	1.483	1.418	1.314	1.333	
3.352	2.726	2.567	2.554	2.246	1.961	3.454	1.743	1.656	1.626	1.554	1.484	1.415	1.311	1.332	
3.406	2.752		2.561	2.219	1.944	1.797	1.749	1.645	1.628	1.550	1.481	1.415	1.308	1.337	
3.460	2.680		2.568	2.194	1.948	1.805	1.740	1.648	1.625	1.550	1.478	1.413	1.311	1.337	
3.215	2.705		2.527	2.199	1.931	1.797	1.746	1.638	1.625	1.547	1.478	1.410	1.309	1.336	
3.264	2.730		2.533	2.174	1.935	1.805	1.738	1.640	1.621	1.544	1.475	1.407	1.306	1.341	
3.312	2.663		2.494	2.150	1.919	1.797	1.729	1.638	1.622	1.544	1.472	1.407	1.304	1.341	
3.109	2.687		2.500	2.155	1.923	1.804	1.735	1.636	1.618	1.540	1.472	1.869	1.303	1.340	
3.154	2.710		2.507	2.160	1.907	1.812	1.726	1.638	1.614	1.540	1.469	1.398	1.308	1.340	
3.198	2.647		2.469	2.137	1.911	1.804	1.733	1.636	1.610	1.537	1.466	1.392	1.308	1.345	
3.242	2.670		2.475	2.141	1.915	1.812	1.724	1.634	1.610	1.534	1.466	1.392	1.308	1.344	
3.066	2.693		2.481	2.119	1.900	1.804	1.730	1.636	1.606	1.534	1.463	1.386	1.308	1.344	
3.107	2.633		2.445	2.123	1.865	1.797	1.722	1.634	1.603	1.531	1.460	1.380	1.313	1.344	
3.148	2.655		2.451	2.128	1.869	1.804	1.714	1.636	1.603	1.527	1.460	1.380	1.313	1.348	
2.995	2.599		2.416	2.106	1.873	1.797	1.720	1.634	1.599	1.527	1.457	1.374	1.312	1.348	
3.033	2.620		2.422	2.111	1.859	1.804	1.711	1.636	1.599	1.524	1.454	1.368	1.312	1.348	
3.071	2.642		2.388	2.826	1.862	1.797	1.703	1.634	1.596	1.521	1.454	1.362	1.317	1.347	
2.936	2.588		2.394	2.094	1.848	1.804		1.632	1.592	1.521	1.451	1.362	1.317	1.352	
2.972	2.614		2.400	2.073	1.852	1.794		1.634	1.592	1.517	1.448	1.356	1.317	1.351	
3.007	2.569		2.367	2.077	1.838	1.783		1.632	1.589	1.514	1.446	1.350	1.316	1.351	
2.887	2.594		2.373	2.057	1.841	1.790		1.630	1.589	1.514	1.446	1.345	1.321	1.351	
2.920	2.620		2.341	2.061	1.828	1.780		1.633	1.585	1.511	1.443	1.345	1.321	1.355	
2.953	2.576		2.346	2.041	1.814	1.787		1.630	1.581	1.508	1.440	1.339	1.321	1.355	
488 筆數據平均值		1.919													
誤差值		0.186		準確值		0.814									

4、利用 Excel 計算蝸牛殼 1 的殼形(頂視圖)每圈的線段比例值，如下表所示：

	第一、二圈			第二、三圈				第三、四圈				第四、五圈						
蝸 牛 殼 2 線 段 比 例 值	4.737	2.662	2.394	2.386	2.139	1.917	1.738	1.522	1.488	1.480	1.449	1.433	1.420	1.362	1.360	1.347		
	4.837	2.678	2.418	2.408	2.116	1.907	1.718	1.512	1.485	1.477	1.449	1.433	1.421	1.361	1.359	1.350		
	4.936	2.695	2.383	2.368	2.125	1.896	1.719	1.517	1.482	1.475	1.447	1.433	1.421	1.359	1.358	1.349		
	4.130	2.711	2.350	2.330	2.103	1.898	1.699	1.522	1.487	1.479	1.447	1.432	1.419	1.358	1.356	1.347		
	3.630	2.609	2.320	2.294	2.081	1.888	1.701	1.513	1.484	1.476	1.448	1.432	1.418	1.361	1.355	1.350		
	3.699	2.624	2.342	2.306	2.060	1.890	1.686	1.504	1.481	1.467	1.447	1.431	1.419	1.360	1.354	1.353		
	3.767	2.640	2.364	2.271	2.069	1.880	1.652	1.509	1.485	1.465	1.446	1.431	1.418	1.363	1.353	1.352		
	3.834	2.546		2.283	2.048	1.882	1.659	1.500	1.490	1.469	1.447	1.430	1.418	1.362	1.351	1.351		
	3.902	2.462		2.295	2.057	1.872	1.645	1.491	1.487	1.466	1.446	1.431	1.418	1.365	1.354	1.353		
	3.968	2.386		2.306	2.037	1.874	1.651		1.484	1.464	1.445	1.430	1.418	1.364	1.353	1.352		
	3.582	2.400		2.318	2.045	1.864	1.638		1.489	1.468	1.445	1.428	1.417	1.362	1.352	1.351		
	3.295	2.413		2.284	2.054	1.866	1.644		1.486	1.472	1.444	1.429	1.416	1.365	1.355	1.346		
	3.348	2.343		2.296	2.062	1.856	1.650		1.483	1.470	1.443	1.429	1.416	1.359	1.358	1.349		
	3.401	2.374		2.263	2.036	1.858	1.637		1.480	1.474	1.444	1.428	1.416	1.358	1.356	1.348		
	3.453	2.406		2.232	2.038	1.849	1.625		1.477	1.471	1.443	1.428	1.415	1.356	1.355	1.345		
	3.505	2.437		2.202	2.013	1.851	1.631		1.474	1.469	1.442	1.428	1.414	1.360	1.358	1.343		
	3.557	2.468		2.213	2.015	1.841	1.618		1.479	1.473	1.442	1.427	1.415	1.358	1.357	1.345		
	3.311	2.341		2.185	2.003	1.832	1.624		1.476	1.471	1.442	1.426	1.410	1.357	1.355	1.342		
	3.114	2.370		2.195	2.005	1.834	1.595		1.473	1.462	1.439	1.426	1.405	1.360	1.350	1.340		
	3.157	2.327		2.168	1.993	1.836	1.583		1.478	1.466	1.440	1.426	1.406	1.363	1.353	1.338		
	3.201	2.355		2.178	1.995	1.837	1.589		1.482	1.464	1.439	1.425	1.400	1.362	1.352	1.343		
	3.244	2.383		2.188	1.983	1.828	1.578		1.480	1.461	1.439	1.425	1.396	1.360	1.350	1.341		
	3.267	2.411		2.198	1.985	1.830	1.567		1.484	1.465	1.439	1.425	1.392	1.359	1.349	1.339		
	3.290	2.439		2.209	1.973	1.821	1.572		1.481	1.463	1.438	1.424	1.392	1.362	1.352	1.337		
	3.313	2.329		2.182	1.975	1.823	1.561		1.479	1.467	1.437	1.423	1.387	1.361	1.355	1.338		
	3.117	2.355		2.192	1.964	1.814	1.567		1.483	1.471	1.438	1.423	1.382	1.355	1.354	1.336		
	3.138	2.318		2.130	1.966	1.816	1.572		1.473	1.468	1.437	1.422	1.378	1.353	1.353	1.334		
	3.160	2.343		2.140	1.955	1.807	1.562		1.471	1.465	1.436	1.422	1.379	1.357	1.355	1.332		
	2.829	2.369		2.116	1.943	1.799	1.567		1.475	1.460	1.435	1.423	1.374	1.355	1.354	1.333		
	2.848	2.394		2.125	1.933	1.800	1.556		1.472	1.460	1.436	1.422	1.369	1.354	1.353			
2.722	2.357		2.102	1.934	1.778	1.546		1.470	1.455	1.435	1.422	1.370	1.357	1.352				
2.740	2.322		2.111	1.924	1.780	1.536		1.474	1.450	1.434	1.421	1.367	1.356	1.351				
2.757	2.346		2.121	1.926	1.758	1.526		1.478	1.450	1.434	1.422	1.361	1.359	1.349				
2.645	2.370		2.130	1.915	1.759	1.531		1.476	1.449	1.434	1.421	1.359	1.357	1.348				
486 筆數據平均值									1.788									
誤差值									0.105				準確值				0.895	

(三) 討論：

- 1、從上述的數據，扁蝸牛的殼形與黃金比例之間的誤差值為 0.0309、非洲大蝸牛的殼形誤差值為 0.097、蝸牛殼 1 的誤差值為 0.186、蝸牛殼 2 的誤差值為 0.105。由此可看到，以扁蝸牛殼形的模擬誤差最小，其餘的誤差較大，這樣的誤差結果，是可預見的。扁蝸牛本身殼形高度最矮，頂視圖的呈現一定最接近本身的殼形，而其餘的蝸牛因為殼形高度較高，頂視圖無法呈現的較真實的一面，所以誤差絕對會偏大。
- 2、為了減少誤差，我們嘗試用測量工具將殼形上每圈螺旋線間的距離測量出來(蝸牛殼的軸垂直地面，將頂視圖切割為八等分，並將這些直線延伸，以此測量每圈螺旋線間的距離)，如下所示：

非洲大蝸牛	1~2 圈	2~3 圈	3~4 圈	4~5 圈	5~6 圈
第 1 等分	0.9	1.93	3.43	5.72	10.37
第 2 等分	0.97	2.02	3.45	6.11	10.4
第 3 等分	0.98	2.03	3.5	6.23	10.41
第 4 等分	1.02	2.06	3.64	6.38	11.12
第 5 等分	1.1	2.14	3.72	6.53	11.14
第 6 等分	1.11	2.19	3.82	6.56	11.2
第 7 等分	1.13	2.23	3.86	6.57	11.28
第 8 等分	1.19	2.24	3.88	6.73	11.69
平均值	1.05	2.105	3.6625	6.3538	10.951

蝸牛殼 1	1~2 圈	2~3 圈	3~4 圈	4~5 圈
第 1 等分	1.33	4.02	6.36	7.53
第 2 等分	1.45	4.11	6.47	7.55
第 3 等分	1.46	4.2	6.51	7.56
第 4 等分	1.46	4.35	6.7	7.87
第 5 等分	1.64	4.39	6.76	7.99
第 6 等分	1.71	4.4	7.08	8.24
第 7 等分	1.94	4.41	7.19	8.26
第 8 等分	1.95	4.5	7.34	8.39
平均值	1.6175	4.2975	6.8013	7.9238

蝸牛殼 2	1~2 圈	2~3 圈	3~4 圈
第 1 等分	2.02	4.01	6.35
第 2 等分	2.08	4.05	6.52
第 3 等分	2.10	4.09	6.67
第 4 等分	2.13	4.13	6.7
第 5 等分	2.17	4.19	6.8
第 6 等分	2.18	4.26	7.03
第 7 等分	2.22	4.28	7.2
第 8 等分	2.32	4.3	7.21
平均值	2.1525	4.1638	6.81

測量完這些數據後，我們遭遇到了困難點：無法利用儀器將蝸牛殼的內徑測量出來，以至於無法判斷頂視圖及實體螺線之間的倍率關係，所以依照我們目前模擬的型態來說，較適用於扁蝸牛科的蝸牛，而其餘型態的蝸牛較不適用。

伍、研究結果

在研究過程中：

- 1、實驗一中運用尺規作圖畫出特奧多魯斯螺旋，但尺規作圖到後面的過程越來越困難，而且無法只呈現螺旋線的部分，所以用來模擬蝸牛殼形會有所困難。所以在實驗二中我們想辦法利用 Geogebra 來繪製螺旋，並且為了簡易畫圖的過程，我們也做出一個按鈕來消除剛剛的作圖過程，以利我們的模擬過程。
- 2、在實驗三中利用 1.5-105-螺旋線、2-115-螺旋線、2.25-100-螺旋線分別模擬出扁蝸牛殼形、非洲大蝸牛殼形、蝸牛殼 1 和蝸牛殼 2 前三圈的螺旋。為了將蝸牛殼形模擬得更臻完美，我們在實驗四中改變了螺旋的初始三角形以及旋轉的角度，達成我們的目的。
- 3、在實驗五中我們得知黃金比例只存在於特奧多魯斯螺旋的第二圈及第三圈的線段比例值中，從中也觀察到越後面圈數的線段比例值會趨近於 1，但要如何證明這件事，以我們目前所學無法得知，須等到高中學習到三角函數及極限才有辦法解決。
- 4、實驗六中呈現出扁蝸牛的殼形與黃金比例之間的誤差值為 0.0309、非洲大蝸牛的殼形誤差值為 0.097、蝸牛殼 1 的誤差值為 0.186、蝸牛殼 2 的誤差值為 0.105。由於扁蝸牛的殼形高度較矮，所呈現的頂視圖較接近於實體的螺線，看出此模擬過程由扁蝸牛的殼形模擬的最佳。而其餘的蝸牛殼，因為本身的殼形高度較高，頂視圖無法與實體相近，所以誤差偏大，必須由其他部分著手修正，但由於無法測量出蝸牛殼的內徑，也就無法判斷頂視圖及實體螺線之間的倍率關係，這部分還有待解決。

陸、討論

已解決的問題：

- 1、是否能用尺規作圖畫出特奧多魯斯螺旋來模擬蝸牛殼形？
- 2、是否能用電腦繪圖軟體 GeoGebra 畫出特奧多魯斯螺旋？
- 3、是否能用電腦繪圖軟體 GeoGebra 畫出的特奧多魯斯螺旋來模擬蝸牛殼形？
- 4、特奧多魯斯螺旋中是否藏有黃金比例？蝸牛殼形中是否藏有黃金比例？

待解決的問題：

- 1、特奧多魯斯螺旋後面圈數的線段比例值會趨近於 1。
- 2、修正蝸牛殼頂視圖與實體螺線之間的倍率關係，好讓這樣的模擬方式用在更多型態的蝸牛殼上。

未來展望：

- 1、希望能找出蝸牛殼頂視圖與實體螺線之間的倍率關係，將所有科類的蝸牛殼形模擬出來，並且將此應用在 3D 列印中，製造出蝸牛的立體模型。
- 2、蝸牛殼形中存有黃金比例，是否對於蝸牛的生長有著莫大的關係，這也是我們希望知道的。

柒、結論

- 1、能利用尺規作圖及電腦繪圖軟體 GeoGebra 畫出的特奧多魯斯螺旋。
- 2、能以特奧多魯斯螺旋的第二圈及第三圈來模擬蝸牛殼紋(利用 1.5-105-螺旋線、2-115-螺旋、2.25-100-螺旋線分別模擬出部份扁蝸牛殼形、非洲大蝸牛殼形、蝸牛殼 1 和蝸牛殼 2)，因為其線段比例值平均起來約為 1.560，誤差值約有 3.6%→準確值約為 96.4%，十分接近黃金比例(如表二所示)，由此證明，特奧多魯斯螺旋的第二圈及第三圈與黃金比例有緊密的關係。
- 3、利用這樣的模擬過程，看到在扁蝸牛科的蝸牛模擬的最好，也能推論出扁蝸牛殼形確實存有著黃金比例。

捌、參考資料及其他

- 1、2-3 畢氏定理、2-3 尺規作圖·取自國中數學翰林版第三、四冊
- 2、環境資訊中心·取自 <http://e-info.org.tw/topic/snail/2005/sn05081601.htm>
- 3、螺殼·取自 <https://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%9E%BA%E5%A3%B3>
- 4、黃金比例·取自 <https://zh.wikipedia.org/wiki/%E9%BB%84%E9%87%91%E5%88%86%E5%89%B2%E7%8E%87>
- 5、畢氏定理·取自 <https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%8B%BE%E8%82%A1%E5%AE%9A%E7%90%86>
- 6、尺規作圖·取自 <https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%B0%BA%E8%A7%84%E4%BD%9C%E5%9B%BE#.E>
- 7、Spiral of Theodorus·取自 https://en.wikipedia.org/wiki/Spiral_of_Theodorus
- 8、數學啟蒙老師，特奧魯斯螺旋，和商高指數(1)、(2)、(4)·取自 <http://blog.sciencenet.cn/blog-333331-936776.html>
<http://blog.sciencenet.cn/blog-333331-937066.html>
<http://blog.sciencenet.cn/blog-333331-942000.html>
- 9、LAB4-1B 電腦如何旋轉點：GeoGebra 為例·取自 https://www.youtube.com/watch?v=kWNg4FdhS-M&list=PLXH05kw-i_5IPOLGqqFk7j7TG1OPhK_k7&index=2
- 10、LAB4-1C 電腦如何旋轉點：Geogebra 初步介紹·取自 https://www.youtube.com/watch?v=CLL2I8AQbwE&list=PLXH05kw-i_5IPOLGqqFk7j7TG1OPhK_k7&index=3
- 11、LAB4-1D 電腦如何旋轉點：Geogebra 操作指令·取自 https://www.youtube.com/watch?v=CoPRvzRDfWs&list=PLXH05kw-i_5IPOLGqqFk7j7TG1OPhK_k7&index=4
- 12、LAB4-1F 電腦如何旋轉點：Geogebra 按鈕與程式碼·取自 https://www.youtube.com/watch?v=jl-h9L3ao20&list=PLXH05kw-i_5IPOLGqqFk7j7TG1OPhK_k7&index=6

13、LAB4-1G 電腦如何旋轉點：如何解決問題

https://www.youtube.com/watch?v=3Z38S5nARTw&list=PLXH05kw-i_5IPOLGqgFk7i7TGIOPhK_k7&index=7

【評語】 030411

藉由直角三角形所形成的特奧多魯斯螺旋來描繪蝸牛的紋路
具有實驗科學的精神，而且利用幾何軟體 GeoGebra 的比對，具有
很高的相似度，值得嘉許；如果能選擇另外的螺旋圖形來逼近也許
會有更好的結果。