

中華民國第 56 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組 數學科

030408

你不「數」真正的快樂

學校名稱：連江縣立東引國民中學

作者： 國一 林子心 國一 劉詠憶 國一 張玉安	指導老師： 詹凱喆
---	------------------

關鍵詞：n 次方差、快樂數

摘要

將快樂數的計算方式略微改變，改成將一個數的每個位數的數字做1、2、3…… n 次方後，由數字大依序減去數字較小的，再取絕對值。隨後便和快樂數一樣，將新出現的數字重複作同樣的計算動作，觀察出現的數字是否和快樂數有類似的性質。

壹、研究動機

一年級上學期時，老師上指數律的單元有講到快樂數，我們問老師如果把加法變成減法會怎樣？老師說：「這就要你們自己去研究囉！」所以就有了這個科展主題。

P.S 快樂數： $32 \rightarrow 3^2 + 2^2 = 13 \rightarrow 1^2 + 3^2 = 10 \rightarrow 1^2 + 0^2 = 1$ ，重複計算後得到1，則32就屬於快樂數。

$$4 \rightarrow 4^2 = 16 \rightarrow 1^2 + 6^2 = 37 \rightarrow 3^2 + 7^2 = 58 \rightarrow 5^2 + 8^2 = 89 \rightarrow 8^2 + 9^2 = 145$$

$\rightarrow 1^2 + 4^2 + 5^2 = 42 \rightarrow 4^2 + 2^2 = 20 \rightarrow 2^2 + 0^2 = 4$ ，重複計算後陷入不斷循環中，則4就不屬於快樂數。

貳、研究目的

一、重複「將一個數的每個位數的數字做1次方後，由數字大依序減去數字較小的，再取絕對值。」這個動作，並觀察得到的結果。

例： $316 \rightarrow |6^1 - 3^1 - 1^1| = 2 \rightarrow |2^1| = 2$ ，則316便做完計算。

二、重複「將一個數的每個位數的數字做2次方後，由數字大依序減去數字較小的，再取絕對值。」這個動作，並觀察得到的結果。

例： $36 \rightarrow |6^2 - 3^2| = 27 \rightarrow |7^2 - 2^2| = 45 \rightarrow |5^2 - 4^2| = 9 \rightarrow |9^2| = 81 \rightarrow |8^2 - 1^2| = 63 \rightarrow$

$|6^2 - 3^2| = 27$ ，27重複出現，則36做完計算。

三、重複「將一個數的每個位數的數字做3次方後，由數字大依序減去數字較小的，再取絕對值。」這個動作，並觀察得到的結果。

例： $36 \rightarrow |6^3 - 3^3| = 189 \rightarrow |9^3 - 8^3 - 1^3| = 216 \rightarrow |6^3 - 2^3 - 1^3| = 207 \rightarrow |7^3 - 2^3 - 0^3| = 335 \rightarrow$
 $|5^3 - 3^3 - 3^3| = 71 \rightarrow |7^3 - 1^3| = 342 \rightarrow \dots\dots$ 重複此動作直到有結果出現為止。

四、藉由一、二、三的步驟，推導出 n 次方的相關性質。

參、研究設備及器材

一、器材：紙、筆、計算機。

二、軟體：*Microsoft Excel*。

肆、研究過程或方法

為方便記錄因此我們將下列敘述的計算做一個命名，命名方式為模組 n ($n \in \mathbb{Z}^+$)。

模組 n 定義：

將一個 k 位數的每個位數數字由大到小排列成：

$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_k$ 後，計算 $|a_1^n - a_2^n - a_3^n - \dots - a_k^n|$ 。

一、歸納「模組 1」的性質：

步驟一：將 0 至 9 計算一次「模組 1」後，結果依然是原數。

步驟二：將 10 至 99 計算一次「模組 1」後，會得到 0 至 9 這十個數字。

根據「步驟一」的結論，可知 10 至 99 於第一次計算「模組 1」後再計算一次「模組 1」後，均會得到和 0 至 9 相同的結果。

步驟三：當三位數計算一次「模組 1」後，最大值為 $|9 - 9 - 9| = 9 \times 1$ 。

根據「步驟一」的結論，三位數重複計算「模組 1」後均會得到 0 至 9 的結果。

當四位數計算一次「模組 1」後，最大值為 $|9-9-9-9|=9 \times 2$ 。

根據「步驟二」的結論，四位數重複計算「模組 1」後均會得到 0 至 9 的結果。

以此類推，任何一個 k 位數計算一次「模組 1」後，最大值必為 $9(k-2)$ 。而重複計算後均可往前類推至「步驟二」、「步驟一」的結果，即必會得到 0 至 9 這十個數字。

模組 1 的性質：

由「步驟一」~「步驟三」得知，任何一個 k 位數，重複計算「模組 1」後均會得到 0 至 9 這十個數字。

二、歸納「模組 2」的性質：

步驟一：我們先使用 Excel 計算 0 至 99 的「模組 2」計算，觀察數字的規律性，結果發現計算到最後會得到：

(1)計算到 0、1、48 這三個數字。(如下表)

重複計算「模組 2」會得到 0 的數字
0、7、11、22、29、33、55、56、57、59、62、70、74、77、83、88、92、94、95、99
重複計算「模組 2」會得到 1 的數字
1、10
重複計算「模組 2」會得到 48 的數字
17、48、71、84、89、98

(2)陷入 9 循環(如例一)和 16 循環(如例二)內。(如下表格)

例一：36 做「模組 2」計算如下：

$$\begin{aligned} 36 &\rightarrow |6^2 - 3^2| = 27 \rightarrow |7^2 - 2^2| = 45 \rightarrow |5^2 - 4^2| = 9 \rightarrow |9^2| = 81 \\ &\rightarrow |8^2 - 1^2| = 63 \rightarrow |6^2 - 3^2| = 27, 27 \text{ 重複出現。} \end{aligned}$$

故 36 重複「模組 2」計算後將會陷入 $27 \rightarrow 45 \rightarrow 9 \rightarrow 81 \rightarrow 63 \rightarrow 27$ 的無限循環計算內，無法得到一個數字。
 因此我們用最小的數「9」命名此循環為「9 循環」。

例二：61 做「模組 2」計算如下：

$$61 \rightarrow |6^2 - 1^2| = 35 \rightarrow |3^2 - 5^2| = 16 \rightarrow |1^2 - 6^2| = 35 \rightarrow |3^2 - 5^2| = 16$$

故 61 重複「模組 2」計算後將會陷入 $35 \rightarrow 16 \rightarrow 35 \rightarrow 16$ 的無限循環計算內，無法得到一個數字。
 因此我們用最小的數「16」命名此循環為「16 循環」。

重複計算「模組 2」會陷入 9 循環的數字
3、5、6、9、12、14、15、18、21、23、24、25、26、27、28、30、 32、50、51、52、53、58、60、63、72、75、78、79、81、82、85、 86、87、90、93、96、97
重複計算「模組 2」會陷入 16 循環的數字
4、8、13、16、19、20、31、54、61、67、69、73、76、80、91

步驟二：當三位數做一次「模組 2」計算後，最大值為 $|9^2 - 9^2 - 9^2| = 81$ ，所以任何一個三位數計算一次「模組 2」後，都會得到 0 至 81 的計算結果。
 又 0 至 81 在「步驟一」的探討範圍內，所以根據「步驟一」的結論可知，任何一個三位數重複計算「模組 2」後，一定會得到 0、1、48 或陷入 9 循環及 16 循環內。

步驟三：當四位數做一次「模組 2」計算後，最大值為 $|9^2 - 9^2 - 9^2 - 9^2| = 162$ ，所以任何一個四位數計算一次「模組 2」後，都會得到 0 至 162 的計算結果。
 又 0 至 162 在「步驟一」及「步驟二」的探討範圍內，所以根據「步驟一」及「步驟二」的結論可知，任何一個四位數重複計算「模組 2」後，一定會得到 0、1、48 或陷入 9 循環及 16 循環內。

步驟四：當五位數做一次「模組 2」計算後，最大值為 $|9^2 - 9^2 - 9^2 - 9^2 - 9^2| = 243$ ，
故任何一個五位數計算一次「模組 2」後，都會得到 0 至 243 的計算結果。
又 0 至 243 在「步驟一」及「步驟二」的探討範圍內，所以根據「步驟一」
及「步驟二」的結論可知，任何一個五位數重複計算「模組 2」後，一定
會得到 0、1、48 或陷入 9 循環及 16 循環內。

步驟五：以上述步驟類推，任何一個數重複計算「模組 2」後，其結果的位數皆會
慢慢減少，最後必定得「步驟一」及「步驟二」探討範圍內的數字。因此
我們可以歸納到以下性質

模組 2 的性質：

任何一個數重複計算「模組 2」後，其結果必會成為 0、1、48 或陷入
9 循環及 16 循環內。

三、歸納「模組 3」的性質：

步驟一：觀察「模組 2」的「步驟三」，我們發現任何位數的數字做完一次模組計算
後，均會有最大值。我們想先推論出計算一次「模組 3」後是否有最大極限
值，以方便我們在有限的觀察內歸納出重複計算「模組 3」後的性質。推論
過程如下：

當 $k=1$ 時， $0 \leq a_1^3 \leq 9^3 \Rightarrow 0 \leq |a_1^3| \leq 9^3 \Rightarrow 0 \leq |a_1^3| \leq 729$

所以一位數計算一次「模組 3」後，最多會到三位數，故尚無法在一位數的
範圍內探討完其性質。

當 $k=2$ 時， $\because 0 \leq a_1^3 \leq 9^3$ 、 $0 \leq a_2^3 \leq 9^3$ ，

$$\therefore -9^3 \leq a_1^3 - a_2^3 \leq 9^3 \Rightarrow 0 \leq |a_1^3 - a_2^3| \leq 9^3 \Rightarrow 0 \leq |a_1^3 - a_2^3| \leq 729$$

所以二位數計算一次「模組 3」後，最多會到三位數，故尚無法在二位數的
範圍內探討完其性質。

當 $k=3$ 時， $\because 0 \leq a_1^3 \leq 9^3$ 、 $0 \leq a_2^3 \leq 9^3$ 、 $0 \leq a_3^3 \leq 9^3$ ，

$$\therefore -2 \times 9^3 \leq a_1^3 - a_2^3 - a_3^3 \leq 9^3 \Rightarrow 0 \leq |a_1^3 - a_2^3 - a_3^3| \leq 2 \times 9^3$$

$$\Rightarrow 0 \leq |a_1^3 - a_2^3 - a_3^3| \leq 1458$$

所以三位數計算一次「模組 3」後，最多會到四位數，故尚無法在三位數的範圍內探討完其性質。

當 $k=4$ 時， $\because 0 \leq a_1^3 \leq 9^3$ 、 $0 \leq a_2^3 \leq 9^3$ 、 $0 \leq a_3^3 \leq 9^3$ 、 $0 \leq a_4^3 \leq 9^3$ ，

$$\therefore -3 \times 9^3 \leq a_1^3 - a_2^3 - a_3^3 - a_4^3 \leq 9^3 \Rightarrow 0 \leq |a_1^3 - a_2^3 - a_3^3 - a_4^3| \leq 3 \times 9^3$$

$$\Rightarrow 0 \leq |a_1^3 - a_2^3 - a_3^3 - a_4^3| \leq 2187$$

所以四位數計算一次「模組 3」後，最多只會到 2187，故 2187 即為「模組 3」的觀察最大值。

所以在歸納「模組 3」的性質中，我們將只觀察 0 至 2187 重複計算「模組 3」後的性質。

步驟二：先觀察 0 至 999 重複計算「模組 3」後的性質：

我們將 1 至 99 定義成 001 至 099 後發現，如 0、1、2 這三個數字排列組合後可排出 012、021、102、120、201 及 210 這六個數字且這六個數字計算一次「模組 3」後，會得到相同的答案，所以我們只需觀察 012 的性質即可。

用這方法我們觀察到三位數以內的數字重複做「模組 3」計算後會得到三種結果，即計算出 0、1 這兩個數或陷入 18 循環。(如下表)

重複計算「模組 3」會得到 0 的數字
000、002、004、005、008、009、011、013、015、016、019、022、023、024、026、028、033、038、044、045、046、047、048、049、055、056、058、059、066、068、069、077、078、079、088、099、114、116、118、119、124、125、135、137、138、147、148、149、156、158、169、177、222、223、224、225、226、227、228、229、

233、235、236、237、238、239、244、248、249、255、256、258、 266、267、268、269、277、278、279、288、299、338、339、346、 347、348、349、356、357、359、368、369、378、379、389、444、 446、447、448、449、455、458、459、466、468、469、477、478、 479、488、489、499、555、558、559、566、567、577、578、588、 599、668、669、678、778、888、899、999。
重複計算「模組 3」會得到 1 的數字
001、003、006、007、012、014、017、025、027、029、034、035、 036、037、039、057、067、089、111、112、113、117、122、126、 127、128、129、133、134、136、139、144、145、155、157、159、 166、167、168、178、179、188、189、199、234、245、246、247、 257、259、289、333、334、335、336、337、344、345、346、355、 358、366、367、368、377、388、399、445、456、457、467、556、 557、568、569、579、589、666、667、677、679、688、689、699、 777、779、788、789、799、889。
重複計算「模組 3」會陷入 18 循環的數字
018、115、123、146。

- 步驟三：1. 四位數的每個位數的數字中若有 0 的，則其計算結果會和步驟二裡的數字一樣，如：1001 的結果和 011 是一樣的。所以有 0 的四位數就不需再觀察。
2. 將未含有 0 的四位數利用步驟二的分類方法分類後，至 2187 前，只需觀察 165 個數，觀察結果如下表所示

重複計算「模組 3」會得到 0 的數字
1111、1112、1113、1114、1118、1119、1122、1124、1126、1133、1135、 1138、1144、1145、1146、1147、1148、1155、1159、1166、1167、1168、

1177、1179、1188、1189、1199、1222、1224、1226、1227、1228、 1233、1234、1239、1244、1248、1249、1255、1256、1258、1259、 1266、1267、1268、1269、1277、1278、1288、1289、1299、1333、 1334、1336、1337、1344、1345、1346、1347、1348、1355、1357、 1358、1359、1366、1367、1368、1369、1377、1378、1388、1399、 1444、1445、1446、1447、1448、1455、1456、1457、1458、1459、 1466、1467、1469、1477、1488、1489、1499、1559、1569、1579、 1589、1667、1668、1669、1678、1679、1689、1779、1888、1889、 1899
重複計算「模組 3」會得到 1 的數字
1115、1117、1123、1127、1128、1129、1134、1136、1137、1139、1149、 1156、1157、1158、1178、1223、1229、1235、1237、1238、1245、 1246、1247、1257、1279、1335、1338、1339、1349、1356、1379、 1389、1449、1478、1555、1556、1557、1558、1566、1567、1568、 1577、1578、1588、1599、1666、1677、1688、1699、1777、1778、 1788、1789、1799、1999
重複計算「模組 3」會陷入 18 循環的數字
1116、1125、1169、1225、1236、1468、1479

3. 四位數的結果亦與三位數一樣，重複計算「模組 3」後會得到 0、1 這兩個數或陷入 18 循環。

模組 3 的性質：

根據「步驟二」及「步驟三」的結果，任何一個數字重複計算「模組 3」後會皆會得到 0、1 這兩個數或陷入 18 循環。

四、歸納「模組 4」的觀察上限值並導出觀察上限值的公式：

步驟一：利用歸納「模組 3」觀察上限值的方法，來推導「模組 4」的觀察上限值，
推導過程如下：

當 $k=1$ 時，

$$\because 0 \leq a_1^4 \leq 9^4$$

$$\therefore 0 \leq |a_1^4| \leq 9^4 \Rightarrow 0 \leq |a_1^4| \leq 6561$$

所以一個一位數做一次「模組 4」計算後，出現的最大數為 6561，為一個四位數。所以需將觀察的上限值推至四位數。

當 $k=4$ 時

將四位數各個位數數字由大至小排列成： a_1 、 a_2 、 a_3 及 a_4

$$\because 0 \leq a_1^4 \leq 9^4, 0 \leq a_2^4 \leq 9^4, 0 \leq a_3^4 \leq 9^4, 0 \leq a_4^4 \leq 9^4$$

$$\therefore -9^4 \leq a_1^4 - a_2^4 \leq 9^4$$

$$\Rightarrow -2 \times 9^4 \leq a_1^4 - a_2^4 - a_3^4 \leq 9^4$$

$$\Rightarrow -3 \times 6561 \leq a_1^4 - a_2^4 - a_3^4 - a_4^4 \leq 9^4$$

$$0 \leq |a_1^4 - a_2^4 - a_3^4 - a_4^4| \leq 3 \times 9^4 = 19683$$

所以一個四位數做一次「模組 4」計算後，出現的最大數為 19683，為一個五位數。所以需將觀察的上限值推至五位數。

當 $k=5$ 時

將五位數各個位數數字由大至小排列成： a_1 、 a_2 、 a_3 、 a_4 及 a_5

$$\because 0 \leq a_1^4 \leq 9^4, 0 \leq a_2^4 \leq 9^4, 0 \leq a_3^4 \leq 9^4, 0 \leq a_4^4 \leq 9^4, 0 \leq a_5^4 \leq 9^4$$

$$\therefore -9^4 \leq a_1^4 - a_2^4 \leq 9^4$$

$$\Rightarrow -2 \times 9^4 \leq a_1^4 - a_2^4 - a_3^4 \leq 9^4$$

$$\Rightarrow -3 \times 6561 \leq a_1^4 - a_2^4 - a_3^4 - a_4^4 \leq 9^4$$

$$\Rightarrow -4 \times 9^4 \leq a_1^4 - a_2^4 - a_3^4 - a_4^4 - a_5^4 \leq 9^4$$

$$\Rightarrow 0 \leq |a_1^4 - a_2^4 - a_3^4 - a_4^4 - a_5^4| \leq 4 \times 9^4 = 26244$$

所以一個五位數做一次「模組 4」計算後，出現的最大數為 26244 亦為五位數。

模組 4 的最大觀察上限值：

只要觀察 1 到 26244 這個五位數，就可以知道所有數字重複「模組 4」的計算後會發生什麼結果。

步驟二：雖然得出「模組 4」的觀察上限值為 26244，但此數字實在太大了，因此在時間及精力的限制下，我們只好放棄「模組 4」之後的觀察。但我們還是由步驟一的推導過程中得到一個可以推導「模組 n 」所需觀察上限值的公式，公式如下：

觀察 k 位數($k > 1$)重複計算「模組 n 」的觀察上限值的公式為：

當 $0 \leq |a_1^n - a_2^n - a_3^n - a_4^n - \dots - a_k^n| \leq (k-1) \times 9^n$ ，

且 $(k-1) \times 9^n$ 的位數等於 k 時，

則 $(k-1) \times 9^n$ 即為 k 位數重複計算「模組 n 」的觀察上限值

五、利用「四、步驟二」的觀察上限值公式，將「模組 5」至「模組 10」的觀察上限值求出：

步驟一：推導「模組 5」的觀察上限值

當 $k=2$ 時， $0 \leq |a_1^5 - a_2^5| \leq 1 \times 9^5 = 59049$ ，

因為 59049 為五位數，大於二位數，所以需將觀察上限值推至五位數。

當 $k=5$ 時， $0 \leq |a_1^5 - a_2^5 - a_3^5 - a_4^5 - a_5^5| \leq 4 \times 9^5 = 236196$ ，

因為 236196 為六位數，大於五位數，所以需將觀察上限值推至六位數。

當 $k=6$ 時， $0 \leq |a_1^5 - a_2^5 - a_3^5 - a_4^5 - a_5^5 - a_6^5| \leq 5 \times 9^5 = 295245$ ，

因為 295245 剛好為六位數，所以「模組 5」的觀察上限值為 295245。

步驟二：推導「模組 6」的觀察上限值

當 $k=2$ 時， $0 \leq |a_1^6 - a_2^6| \leq 9^6 = 531441$ ，

因為 531441 為六位數，大於二位數，所以需將觀察上限值推至六位數。

當 $k=6$ 時， $0 \leq |a_1^6 - a_2^6 - a_3^6 - a_4^6 - a_5^6 - a_6^6| \leq 5 \times 9^6 = 2657205$ ，

因為 2657205 為七位數，大於六位數，所以需將觀察上限值推至七位數。

當 $k=7$ 時， $0 \leq |a_1^6 - a_2^6 - a_3^6 - a_4^6 - a_5^6 - a_6^6 - a_7^6| \leq 6 \times 9^5 = 3188646$ ，

因為 3188646 剛好為七位數，所以「模組 6」的觀察上限值為 3188646。

步驟三：推導「模組 7」的觀察上限值

當 $k=2$ 時， $0 \leq |a_1^7 - a_2^7| \leq 9^7 = 4782969$ ，

因為 4782969 為七位數，大於二位數，所以需將觀察上限值推至七位數。

當 $k=7$ 時， $0 \leq |a_1^7 - a_2^7 - a_3^7 - a_4^7 - a_5^7 - a_6^7 - a_7^7| \leq 6 \times 9^7 = 28697814$ ，

因為 28697814 為八位數，大於七位數，所以需將觀察上限值推至八位數。

當 $k=8$ 時， $0 \leq |a_1^7 - a_2^7 - a_3^7 - a_4^7 - a_5^7 - a_6^7 - a_7^7 - a_8^7| \leq 7 \times 9^7 = 33480783$ ，

因為 33480783 剛好為八位數，所以「模組 7」的觀察上限值為 33480783。

步驟四：推導「模組 8」的觀察上限值

當 $k=2$ 時， $0 \leq |a_1^8 - a_2^8| \leq 9^8 = 43046721$ ，

因為 43046721 為八位數，大於二位數，所以需將觀察上限值推至八位數。

當 $k=8$ 時， $0 \leq |a_1^8 - a_2^8 - a_3^8 - a_4^8 - a_5^8 - a_6^8 - a_7^8 - a_8^8| \leq 7 \times 9^8 = 301327047$ ，

因為 301327047 為九位數，大於八位數，所以需將觀察上限值推至九位數。

當 $k=9$ 時， $0 \leq |a_1^8 - a_2^8 - a_3^8 - a_4^8 - a_5^8 - a_6^8 - a_7^8 - a_8^8 - a_9^8| \leq 8 \times 9^8 = 344373768$ ，

因為 344373768 剛好為九位數，所以「模組 8」的觀察上限值為 344373768。

步驟五：推導「模組 9」的觀察上限值

當 $k=2$ 時， $0 \leq |a_1^9 - a_2^9| \leq 9^9 = 387420489$ ，

因為 387420489 為九位數，大於二位數，所以需將觀察上限值推至九位數。

當 $k=9$ 時， $0 \leq |a_1^9 - a_2^9 - a_3^9 - a_4^9 - a_5^9 - a_6^9 - a_7^9 - a_8^9 - a_9^9| \leq 8 \times 9^9 = 3099363912$ ，

因為 3099363912 為十位數，大於九位數，所以需將觀察上限值推至十位數。

當 $k=10$ 時，

$0 \leq |a_1^{10} - a_2^{10} - a_3^{10} - a_4^{10} - a_5^{10} - a_6^{10} - a_7^{10} - a_8^{10} - a_9^{10} - a_{10}^{10}| \leq 9 \times 9^9 = 3486784401$ ，

因為 3486784401 剛好為十位數，所以「模組 9」的觀察上限值為 3486784401。

步驟六：推導「模組 10」的觀察上限值

當 $k=2$ 時， $0 \leq |a_1^{10} - a_2^{10}| \leq 9^{10} = 3486784401$ ，

因為 3486784401 為十位數，大於二位數，所以需將觀察上限值推至十位數。

當 $k=10$ 時，

$0 \leq |a_1^{10} - a_2^{10} - a_3^{10} - a_4^{10} - a_5^{10} - a_6^{10} - a_7^{10} - a_8^{10} - a_9^{10} - a_{10}^{10}| \leq 9 \times 9^{10} = 31381059609$ ，

因為 31381059609 為十一位數，大於十位數，

所以需將觀察上限值推至十一位數。

當 $k=11$ 時，

$0 \leq |a_1^{10} - a_2^{10} - a_3^{10} - a_4^{10} - a_5^{10} - a_6^{10} - a_7^{10} - a_8^{10} - a_9^{10} - a_{10}^{10} - a_{11}^{10}| \leq 10 \times 9^{10}$ ，

$0 \leq |a_1^{10} - a_2^{10} - a_3^{10} - a_4^{10} - a_5^{10} - a_6^{10} - a_7^{10} - a_8^{10} - a_9^{10} - a_{10}^{10} - a_{11}^{10}| \leq 34867844010$ ，

因為 34867844010 剛好為十一位數，

所以「模組 10」的觀察上限值為 34867844010。

伍、研究結果

- 一、任何一個數，重複計算「模組 1」後均會得到 0 至 9 這十個數字。
- 二、任何一個數，重複計算「模組 2」後，其結果必為「得到 0、1、48 這三個數」或「陷入 9 循環及 16 循環內」。
- 三、任何一個數，重複計算「模組 3」後，其結果必為「得到 0、1 這兩個數」或「陷入 18 循環內」。
- 四、(一)重複計算「模組 4」結果的觀察最大上限值為 26244。
(二)可用 $0 \leq |a_1^n - a_2^n - a_3^n - a_4^n - \dots - a_k^n| \leq (k-1) \times 9^n$ ，此公式推導出各模組的觀察上限值。
- 五、(一)重複計算「模組 5」結果的觀察最大上限值為 295245。
(二)重複計算「模組 6」結果的觀察最大上限值為 3188646。
(三)重複計算「模組 7」結果的觀察最大上限值為 33480783。
(四)重複計算「模組 8」結果的觀察最大上限值為 344373768。
(五)重複計算「模組 9」結果的觀察最大上限值為 3486784401。
(六)重複計算「模組 10」結果的觀察最大上限值為 348678440101。

陸、討論

- 一、雖然我們覺得「模組 4」以上的觀察上限值過於龐大，因此沒有繼續觀察下去，但卻也有些不甘心，因此對於「模組 4」至「模組 10」，我們還是觀察了其中部份的數字結果(結果如附件所示)。

在觀察「模組 4」至「模組 10」的部份數字後，我們發現，除了「模組 1」以外，任何一個模組除了必定會出現的「0」、「1」之結果或陷入某種循環外，有一些模組中會出現某些不是「0」、「1」，但重複計算後卻又可以跳脫循環，最終計算得到某些數字。因

此我們針對這種類型再做一次「模組 4」至「模組 10」四位數的檢測，看有哪些數字符合這種規則，我們將這些數字記錄在附件八，且把他們最終收斂的數字整理如下：

模組 2：48	模組 3：無
模組 4：224、240、5920	模組 5：54900
模組 6：(暫時)無	模組 7：94509
模組 8：(暫時)無	模組 9：(暫時)無
模組 10：(暫時)無	
(模組 4~模組 10 並不是完整的數據。)	

我們覺得這些數很有趣，扣除一定會出現的「0」、「1」不算。上述的數字具有像快樂數跳脫循環的性質，因此我們將重複計算「模組 n 」後會收斂到固定數的數字命名為「死性不改數」。

例如：「模組 4」中的 359 經重複計算「模組 4」後會收斂到 240 這個數，則 359 即被我們稱為「死性不改數」。

但礙於目前的能力及時間的限制，我們無法再對這些「死性不改數」做更多的研究，而且「模組 4」至「模組 10」也因只有觀察部份數字，所以也無法確定是否還有其他的「死性不改數」，因此也希望能再尋找更多的數學知識，以幫助我們能更深入了解我們定義的這種「死性不改數」。

二、在利用 $0 \leq |a_1^n - a_2^n - a_3^n - a_4^n - \dots - a_k^n| \leq (k-1) \times 9^n$ 這個公式進行「模組 5」至「模組 10」的推導過程中，我們發現一個有趣的現象：

當 $k=2$ 時，若 $0 \leq a_1^n - a_2^n \leq x$ ，
則觀察所需上限值的位數皆為「 x 的位數加 1」。
如：「模組 8」中，當 $k=2$ 時， $0 \leq a_1^8 - a_2^8 \leq 43046721$
43046721 為八位數，則最終的觀察上限值 344373768 為「八+1=九」位數。

但因為這只有「模組 5」至「模組 10」六組的觀察結果，因此未能當做一個研究的結論。但若未來有機會及時間，我們希望能將這觀察到的結果，再做一個詳細的驗證。

如此一來可以把 $0 \leq |a_1^n - a_2^n - a_3^n - a_4^n - \dots a_k^n| \leq (k-1) \times 9^n$ 這個公式變得更加的完美。

柒、結論

一、任何一個數在重複計算「模組 1」、「模組 2」及「模組 3」後，均會有和快樂數類似的性質。即計算出一個固定的數值或陷入某個循環中。

二、於「模組 2」、「模組 4」、「模組 5」、「模組 7」中均有找到我們定義的「死性不改數」，唯獨「模組 3」是目前確定沒有「死性不改數」的模組。而「模組 6」、「模組 8」、「模組 9」、「模組 10」尚無法確定是否有「死性不改數」的存在。

因此希望未來能更深入探討「陸、一、」中定義的「死性不改數」，以了解為何他們能除了「0」、「1」以外，還可在各自的模組中跳脫循環。

三、任何一個模組，均可用 $0 \leq |a_1^n - a_2^n - a_3^n - a_4^n - \dots a_k^n| \leq (k-1) \times 9^n$ 公式尋找到觀察所需最大上限值。

但在「陸、二、」的發現，亦讓我們在構思是否能把這個推導方式變得更加的完美。

四、未來希望能更深入研究 Excel 的函數語言，或提升自己的程式語言能力，藉以能夠操作更方便的電腦軟體，以設計出可更快計算本次主題實驗結果的方法，以利觀察研究更高次方的模組。

捌、參考資料及其他

1. 國民中學七上數學 翰林出版社 2011 年 2 月初版；2016 年 2 月再版
2. 張書裴、廖思虹(指導老師：李國賢、陳鑫達)「漩渦鳴人－ n 次方和黑洞的探討」 中華民國第四十六屆中小學科學展覽會，國中數學組。
3. 洪笙觀、邱兆妤、傅瑋翎(指導老師：侯蓓菁)「來自平方的九」 中華民國第五十五屆中小學科學展覽會，國中數學組。

附件一：模組 4 的觀察結果(觀察數字 001 至 500)

重複計算「模組 4」會得到 0 的數字
000、011、022、033、044、055、066、077、088、099
重複計算「模組 4」會得到 1 的數字
001、111、122、133、138、144、155、166、177、188、199、269、378
重複計算「模組 4」會得到 224 的數字
224
重複計算「模組 4」會得到 240 的數字
017、024、134、147、225、228、359、446、478
重複計算「模組 4」會得到 5920 的數字
259
重複計算「模組 4」會陷入 16 循環的數字
002、004、005、006、007、008、009、012、013、014、015、016、019、023、028、029、034、035、036、037、038、039、045、046、047、048、049、056、057、058、059、067、068、078、079、112、113、114、115、116、117、118、119、123、124、125、126、129、135、136、137、139、145、146、148、149、156、157、158、159、167、168、178、179、222、223、226、227、233、234、235、236、237、238、239、244、245、246、247、249、255、256、257、258、266、268、277、278、279、288、289、299、334、335、336、337、338、339、345、346、347、348、356、357、358、367、368、369、444、445、448、449、455、456、457、458、466、468、469、477、488、499
重複計算「模組 4」會陷入 2383 循環的數字
003、018、025、026、027、069、089、127、128、169、189、229、248、267、333、344、349、355、366、377、379、388、389、399、447、459、467、479、489

P.S 136 即代表 136、163、316、361、613、631 等六個數字

附件二：模組 5 的觀察結果(觀察數字 001 至 500)

重複計算「模組 5」會得到 0 的數字
000、002、003、008、011、012、013、014、016、022、023、024、026、028、029、033、036、037、038、044、045、047、048、049、055、056、066、069、077、079、088、089、099、112、115、118、123、126、128、135、138、145、148、156、157、168、169、179、222、223、224、226、229、233、234、236、237、244、245、246、248、249、255、257、259、266、267、268、269、277、279、288、299、333、334、336、344、346、348、355、356、357、358、359、366、367、368、369、389、399、447、448、449、456、469、479
重複計算「模組 5」會得到 1 的數字
001、004、005、006、018、019、067、068、111、113、114、122、124、127、133、136、139、144、146、149、155、158、159、166、177、188、189、199、225、227、228、235、238、256、258、289、377、388、444、445、455、466、477、488、499
重複計算「模組 5」會得到 54900 的數字
025、058、116、117、137、337、339、459
重複計算「模組 5」會陷入 781 循環的數字
007、009、015、017、027、034、035、046、057、059、078、125、129、134、147、178、239、247、335、338、345、347、349、378、379、457、458、467、468、478、489
重複計算「模組 5」會陷入 3127 循環的數字
446
重複計算「模組 5」會陷入 25795 循環的數字
039、119、167

P.S 136 即代表 136、163、316、361、613、631 等六個數字

附件三：模組 6 的觀察結果(觀察數字 001 至 500)

重複計算「模組 6」會得到 0 的數字
000、007、011、022、033、044、055、066、077、088、099、178
重複計算「模組 6」會得到 1 的數字
001、010、111、122、133、144、155、156、166、177、188、199、
重複計算「模組 6」會陷入 2 循環的數字
002、003、024、039、046、056、078、113、135、136、169、222、233、234、244、255、 266、277、279、288、299、333、336、337、344、355、356、366、377、388、399、446、 467、468、478
重複計算「模組 6」會陷入 730 循環的數字
037、047、114、138、146、168、335
重複計算「模組 6」會陷入 14039 循環的數字
004、005、006、008、009、012、013、015、016、017、018、019、023、025、026、027、 028、029、034、035、036、038、045、048、049、057、058、059、067、068、069、079、 089、112、115、116、117、118、119、123、124、125、126、127、128、129、134、137、 139、145、147、148、149、157、158、159、167、179、189、223、224、225、226、227、 228、229、235、236、237、238、239、245、246、247、248、249、256、257、258、259、 267、268、269、278、289、334、338、339、345、346、347、348、349、357、358、359、 367、368、369、378、379、389、444、445、447、457、458、459、466、469、477、479、 488、489、499

P.S 136 即代表 136、163、316、361、613、631 等六個數字

附件四：模組 7 的觀察結果(觀察數字 001 至 300)

重複計算「模組 7」會得到 0 的數字
000、011、017、022、033、044、055、066、077、088、099、168
重複計算「模組 7」會得到 1 的數字
001、111、122、133、144、155、166、177、188、199
重複計算「模組 7」會陷入 2 循環的數字
002、003、004、005、007、008、012、013、014、015、016、024、025、026、027、028、 036、037、039、045、047、049、057、068、069、112、113、116、117、118、119、124、 126、127、128、129、135、137、138、139、148、149、156、159、169、179、222、225、 226、227、228、229、233、234、235、236、237、238、239、244、246、247、255、257、 266、267、268、269、277、278、279、288、289、299
重複計算「模組 7」會陷入 34955 循環的數字
019、023、038、048、067、145、147、158、167、178、189、259
重複計算「模組 7」會陷入 42913 循環的數字
006、018、029、034、079、114、125、134、136、157、245、256
重複計算「模組 7」會陷入 80441 循環的數字
035、056、058
重複計算「模組 7」會陷入 282126 循環的數字
009、046、059、078、089、115、123、146、223、224、248、258
重複計算「模組 7」會陷入 637997 循環的數字
249

P.S 136 即代表 136、163、316、361、613、631 等六個數字

附件五：模組 8 的觀察結果(觀察數字 001 至 300)

重複計算「模組 8」會得到 0 的數字
000、011、022、033、044、055、066、077、088、099
重複計算「模組 8」會得到 1 的數字
001、111、122、133、144、155、166、177、188、199
重複計算「模組 8」會陷入 7329 循環的數字
002、004、005、006、008、012、013、014、016、019、023、024、026、027、028、029、 034、038、039、046、047、049、057、068、069、078、079、089、112、113、114、115、 116、117、119、123、124、125、126、127、128、129、134、135、136、137、138、139、 145、147、148、178、222、224、225、227、228、233、237、244、245、255、256、258、 266、267、269、277、278、279、288、289、299
重複計算「模組 8」會陷入 6819 循環的數字
003、007、009、015、017、018、025、035、036、037、045、048、056、058、059、067、 118、146、149、156、157、158、167、168、169、179、189、223、226、229、234、235、 236、238、239、246、247、248、249、257、259、268
重複計算「模組 8」會陷入 252480 循環的數字
159

P.S 136 即代表 136、163、316、361、613、631 等六個數字

附件六：模組 9 的觀察結果(觀察數字 001 至 300)

重複計算「模組 9」會得到 0 的數字
000、011、022、033、044、055、066、077、088、099
重複計算「模組 9」會得到 1 的數字
001、111、122、133、144、155、166、177、188、199
重複計算「模組 9」會陷入 20198 循環的數字
004、012、013、014、018、019、024、026、034、045、058、067、068、069、113、115、 123、124、127、129、136、139、146、147、156、159、168、169、224、226、229、236、 237、239、246、249、267、268、278、279、
重複計算「模組 9」會陷入 262658 循環的數字
002、003、006、007、008、009、010、017、028、029、035、037、039、057、059、078、 079、114、116、118、119、125、134、137、138、145、149、158、222、223、225、227、 228、233、235、238、244、245、248、255、256、259、266、277、288、289、299
重複計算「模組 9」會陷入 563655 循環的數字
015、023、025、027、038、047、089、112、117、126、135、157、167、234、257、258、 269
重複計算「模組 9」會陷入 20099799 循環的數字
005、016、036、046、048、049、056、128、148、178、179、189、247

P.S 136 即代表 136、163、316、361、613、631 等六個數字

附件七：模組 10 的觀察結果(觀察數字 001 至 300)

重複計算「模組 10」會得到 0 的數字
000、011、022、033、044、055、066、077、088、099
重複計算「模組 10」會得到 1 的數字
001、111、112、122、133、144、155、166、177、188、199
重複計算「模組 10」會陷入 178172 循環的數字
002、004、005、006、007、008、009、012、013、014、015、016、017、018、019、023、 024、025、026、027、028、029、034、035、036、037、038、039、045、046、047、048、 049、056、057、058、059、067、068、069、078、079、089、113、114、116、117、118、 119、123、124、125、126、127、128、129、134、135、136、137、138、139、146、147、 148、149、156、157、158、159、167、168、169、178、179、189、222、223、224、225、 226、227、228、229、233、234、235、236、237、238、239、244、245、246、247、248、 249、255、256、257、258、259、266、267、268、269、277、278、279、288、289、299
重複計算「模組 10」會陷入 10992374 循環的數字
003、115
重複計算「模組 10」會陷入 211075749 循環的數字
145

P.S 136 即代表 136、163、316、361、613、631 等六個數字

附件八：各模組中的死性不改數統整表

模組 2 死性不改數 (模組 2 只檢測 1-99 的數字)：

收斂於 48 的「模組 2」死性不改數
17、48、71、84、89、98

模組 3 死性不改數：無

模組 4 死性不改數 (模組 4 只檢測至四位數)：

收斂於 224 的「模組 4」死性不改數
0224、1777、1788、1799、4567、4889
收斂於 240 的「模組 4」死性不改數
0017、0024、0134、0147、0225、0228、0359、0446、0478、0569、0578、1128、1139、1122、1233、1244、1255、1266、1277、1288、1299、1349、1379、1489、2234、2236、2567、3457、3557、3558、3789、4445、4467、4469、4478、4666、4677、4678、4688、4699、4777、4788、4799、5558
收斂於 5920 的「模組 4」死性不改數
0259、1225、2559、2579、4489、4558

模組 5 死性不改數 (模組 5 只檢測至四位數)：

重複計算「模組 5」會得到 54900 的數字
0025、0058、0116、0117、0137、0337、0339、0459、1117、1158、1178、1256、1339、1345、1379、1448、1468、1568、1578、1588、1899、2239、2559、2568、3348、3369、3456、4556、4559、4669、4777、4788、4799、5778、6667

模組 6 死性不改數 (模組 6 只檢測至四位數)：暫無

模組 7 死性不改數 (模組 7 只檢測至四位數)：

收斂於 94509 的「模組 7」死性不改數
0778、4555、4599

模組 8 死性不改數 (模組 8 只檢測至四位數)：暫無

模組 9 死性不改數 (模組 9 只檢測至四位數)：暫無

模組 10 死性不改數 (模組 10 只檢測至四位數)：暫無

P.S 0136 即代表 0136、0163、0316、0361、0613、0631、1036、1063……等 24 個數字

【評語】 030408

討論數字依特定的次方相減規則，是否會落入一個固定的數，或是落入一個固定循環的類似快樂數（happy number）的問題。針對作一次方、平方、三次方運算所可能得出的結果，作了完整的討論。對於高次方的情況，也給了一些初步的分析。類似的數字性質其實很多，有一些是廣為人知也頗為有趣的。為了要與前人所討論的問題有所區隔，作者們設定了一個特殊的運算規則，討論在此規則下，任一數字是否會收斂到一個特定的數，或是會落入一個循環。規則定的有點奇怪，這使得分析規律性變成一個較為複雜的工作，也因此，沒能得出一般性的結論，有點可惜。在分析三次或三次以上數字運算的性質時，所考慮的數字條件似乎與原始的假設有些出入，這讓整個討論變的更複雜了。如果回到初始的限制條件，說不定可以有更多的好結果，可惜了。