中華民國第 56 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

第二名

030406

驚嘆尤拉線群遇到 60˚與 120˚

學校名稱：基隆市立中正國民中學

作者：	指導老師：
國二 李昱頡	張淑敏
國二 賀崇恩	林耀南
國一 劉垣妏	

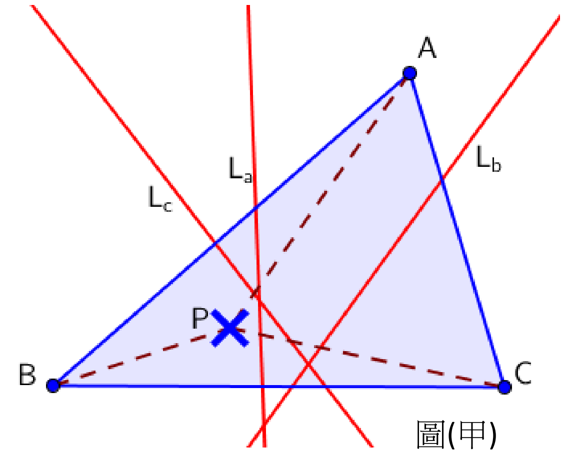
關鍵詞：尤拉線群、切割點、共點

摘要

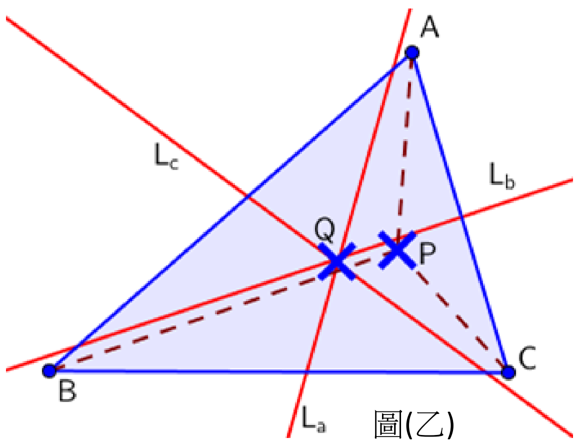
本研究探討在平面上以一定點 P 切割△，尋找使三子△尤拉線共點之 P 點。這種點有無限多但有一定排列，我們用代數法求出 P 點軌跡方程式，且發現非正△中能使尤拉線群共點的 P 點軌跡分成三部分:1.封閉曲線 2.外接圓 3.開放曲線。另外發現共點 Q 軌跡在原△尤拉線上，分成三種:1.整條直線 2.直線上下兩部分 3.直線上中下三部分。進一步，若原△有一內角為 60˚或 120˚，則開放曲線變直線，封閉曲線變圓，且此圓的半徑恰好等於外接圓半徑。尋找使三子△尤拉線平行的切割點「I」，發現非正△都有 1 個 I，且等腰△的 I 點可用尺規作圖畫出，正△中則有無限多 I 點呈擺線狀。最後用等腰△來探討 P、Q 競逐關係及速率的相對變化，非常有趣。

壹、研究動機

在數學家的故事一書中，談到▵的尤拉線，非常有趣，設想一個▵有一條尤拉線，如果這個▵被分割成多個小▵，這些小▵也各自有尤拉線，試問這些小▵的尤拉線會共點嗎? 事實上，在三邊長沒有特定關係的一般▵中，任取的切割點P所形成的三個▵的各自尤拉線都不易共點，如圖(甲)。要如何切割▵方可使那些尤拉線共點?又這共點的點都出現在何處?



圖(甲)



圖(乙)

貳、名詞解釋:

一、▵之**切割點P**: 從P點處，作$\overline{PA}$、$\overline{PB}$、$\overline{PC}$，將▵ABC分割成▵PAB、▵PBC、▵PCA，如圖(乙)。又P點不必限制在▵ABC內部，廣義上來說，P點可在▵ABC所在平面上任一處，除了三頂點之外。

二、L、L_a、L_b、L_c: 分別為原▵、▵PBC、▵PAC、▵PAB的尤拉線。

三、尤拉線群的**交點Q**: 為所有切割▵的尤拉線的交點。如圖(乙)。

參、研究目的

一、探討一般▵中有哪些特殊切割點，可使三個小▵的尤拉線共點。

又這共點的點所出現的位置，有何特殊性?

二、探討各類Δ中，三尤拉線可共點的切割點P的軌跡及其共點Q的軌跡。
三、探討等腰Δ平面上的切割點P、共點Q的競逐關係。
四、探討各類Δ中，可使三尤拉線互相平行的切割點及其**尺規作圖**法。
五、針對有一內角為60°或 120°的Δ ，利用**尺規作圖**完全畫出共點P的軌跡。

肆、研究過程

一、在研究「尤拉線群」的關係之前，我們先觀察單一尤拉線和其所在Δ的邊角關係，我們發現四個規律。

預備定理 0-1：

若Δ ABC中，$\angle B=60^{\circ}$，$\angle A\neq 60^{\circ}$，$\angle C\neq 60^{\circ}$，則尤拉線和∠B兩邊的夾角恆為60°。如圖(1)。

證明：

(1)在坐標平面上取$A(b,c),B(0,0),C(a,0)$，推得重心$G(\frac{a+b}{3},\frac{c}{3})$

(2)再由$\overline{BC}$及$\overline{BA}$的中垂線各為$x=\frac{a}{2}$及$bx+cy=\frac{b^2+c^2}{2c}$，推得外心$O(\frac{a}{2},\frac{b^2+c^2-ab}{2c})$

(3)接著由$\overline{BC}$，$\overline{AB}$邊上的高各為$x=b$及$bx+cy=ab$，推得垂心$H(b,\frac{ab-b^2}{c})$

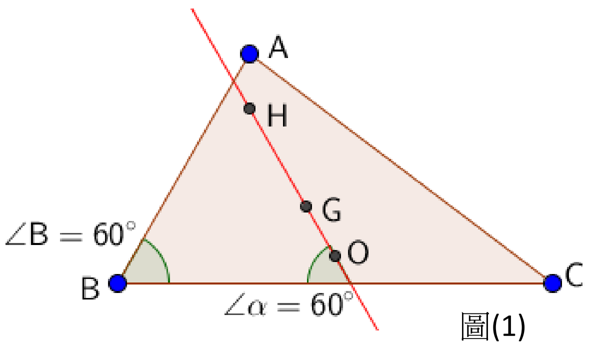
(4)$\because$ $\angle B=60^{\circ}$、$\angle A\neq 60^{\circ}$、$\angle C\neq 60^{\circ}$ $\therefore c=\sqrt{3}b$、$a\neq 2b$

計算此尤拉線的斜率$=\left(\frac{b^2+c^2-ab}{2c}-\frac{ab-b^2}{c}\right)\div\left(\frac{a}{2}-b\right)$

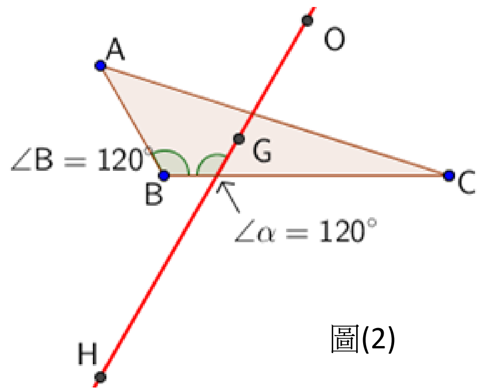
$=(3b^2-3ab+c^2)\div[c(a-2b)]$，將$c=\sqrt{3}b$代入

$=-\sqrt{3}$

由直線斜率的概念，我們可以發現Δ ABC的尤拉線與底邊的銳夾角恰為60°。



圖(1)



圖(2)

預備定理 0-2:

若Δ ABC中，$\angle B=120^{\circ}$，$\angle A\neq 30^{\circ}$，$\angle C\neq 30^{\circ}$，則尤拉線和∠B其中一邊的夾角恆為120°，如圖(2)。

證明:

(1)在坐標平面上同樣取$A(b,c),B(0,0),C(a,0)$，推得重心$G(\frac{a+b}{3},\frac{c}{3})$

(2)再由$\overline{BC}$及$\overline{BA}$的中垂線各為$x=\frac{a}{2}$及$y-\frac{c}{2}=\frac{a-b}{c}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)$，推得外心$O\left(\frac{a}{2},\frac{b^2+c^2-ab}{2c}\right)$

(3)接著由$\overline{BC}$，$\overline{AB}$邊上的高各為$x=b$及$y=\frac{a-b}{c}x$，推得垂心$H\left(b,\frac{ab-b^2}{c}\right)$

(4)$\because\ \angle B=120^\circ$、$\angle A\neq\angle C\ \therefore c=-\sqrt{3}b$、$a\neq 2b$

計算此尤拉線的斜率$=\left(\frac{b^2+c^2-ab}{2c}-\frac{ab-b^2}{c}\right)\div\left(\frac{a}{2}-b\right)$

$=(3b^2-3ab+c^2)\div[c(a-2b)]$，將$c=-\sqrt{3}b$代入

$=\sqrt{3}$

由直線斜率的概念，我們可以發現ΔABC的尤拉線與底邊的鈍夾角恰為120°。

預備定理 0-3:

若ΔABC中，兩底角的正切函數值乘積為定值3，則尤拉線和底邊必平行。如圖(3)

證明:

(1)在坐標平面上同樣取$A(b,c),B(0,0),C(a,0)$，推得重心$G\left(\frac{a+b}{3},\frac{c}{3}\right)$

(2)再由$\overline{BC}$及$\overline{BA}$的中垂線各為$x=\frac{a}{2}$及$bx+cy=\frac{b^2+c^2}{2c}$，推得外心$O(\frac{a}{2},\frac{b^2+c^2-ab}{2c})$

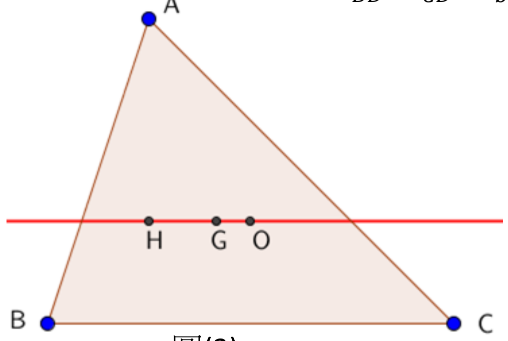
(3)接著由$\overline{BC}$，$\overline{AB}$邊上的高各為$x=b$及$bx+cy=ab$，推得垂心$H(b,\frac{ab-b^2}{c})$

(4)為了讓尤拉線平行底邊$\overline{BC}$，則O、G、H的y座標必須相同

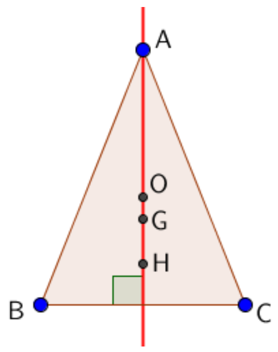
$\therefore \frac{c}{3}=\frac{b^2+c^2-ab}{2c}=\frac{ab-b^2}{c}$，且$a\neq b$

$\therefore c^2=3(ab-b^2)$

接著計算$\tan B\times\tan C=\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}\times\frac{\overline{AD}}{\overline{CD}}=\frac{c}{b}\times\frac{c}{a-b}=\frac{c^2}{ab-b^2}=3$成立，得證。



圖(3)



圖(4)

預備定理 0-4:

若ΔABC中，兩底角相等，但不是60°，則尤拉線必和底邊垂直，如上圖(4)。

證明:

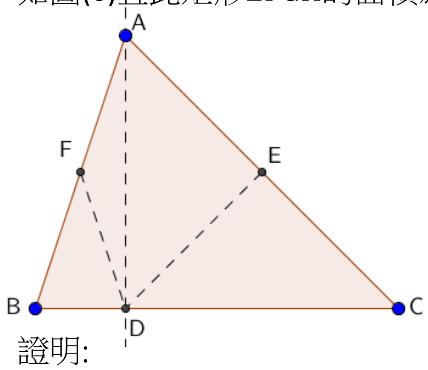
$\because\Delta ABC$為等腰Δ，$\angle B=\angle C\neq 60^\circ$，$\therefore$ O、G、H都在$\overline{BC}$的高$\overline{AD}$上，故其尤拉線必垂直底邊。

(註:在上文中，出現兩個角色顯著的角度60°及120°，後文中將慢慢看出它們的特殊性)

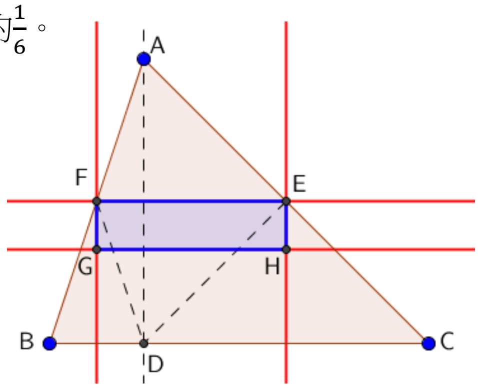
二、在動機那段文章裡提到在非正∆的一般∆中必有一條尤拉線，如果該∆被切割成許多小∆時，他們的尤拉線群是否會有很有趣的擺放排列。

發現一:

在如上圖(3)的∆ ABC中，作$\overline{AD} \perp \overline{BC}$，取E、F各為$\overline{AC}$、$\overline{AB}$的中點，連$\overline{ED}$、$\overline{FD}$，形成圖(5)，則此四個被切割出來的小∆和母∆ ABC的五條尤拉線必圍成一個矩形，如圖(6)且此矩形EFGH的面積為∆ ABC的$\frac{1}{6}$。



圖(5)



圖(6)

證明:

(1)如預備定理 0-3 所示，因$\tan B \times \tan C = 3$，所以∆ ABC的尤拉線$\overline{GH} \parallel \overline{BC}$

(2)∆ FBD為等腰∆，尤拉線$\overline{FG} \perp \overline{BC}$，同理∆ EDC的尤拉線$\overline{EH} \perp \overline{BC}$

(3)∆ AFD和∆ AED的尤拉線重合在$\overline{EF}$，故EFGH為矩形

(4)$\overline{EF} = \frac{1}{2}\overline{BC}$，$\overline{FG} = \frac{1}{2}\overline{AD} - \frac{1}{3}\overline{AD} = \frac{1}{6}\overline{AD}$，故EFGH面積$= \frac{1}{2}\overline{BC} \times \frac{1}{6}\overline{AD}$

$= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\overline{BC} \times \overline{AD}\right) = \frac{1}{6} \triangle ABC$，得證。

利用這些預備定理我們可以作出很多有趣的發現，但在接下來的研究中，我們要專注在「過定點P將∆ ABC切割成三塊∆，且要求這三個∆的尤拉線所圍成的面積是零」的探討上。我們陸陸續續的在∆ ABC的平面上發現了好多的特殊切割點P，他能使切割出來的三個∆的尤拉線「共點」，共點即指那三條尤拉線所圍成的面積是零。我們將這些發現一個一個的以定理形態敘述如下。

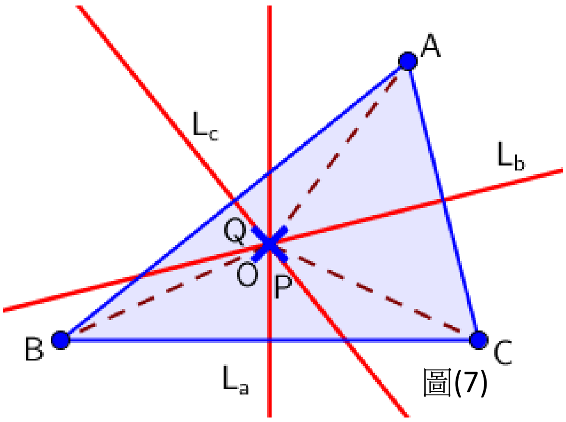
定理一:

一般∆ ABC中，若切割點P落在∆ ABC的外心處，則三個切割∆的尤拉線會共點。如圖(7)，且此共點即為原∆的外心。

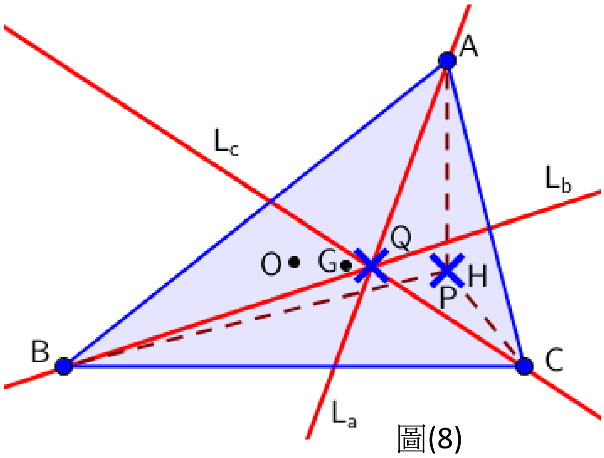
證明:

(1)令A(b, c), B(0,0), C(a, 0)，先算出∆ ABC的外心座標為$\left(\frac{a}{2}, \frac{b^2+c^2-ab}{2c}\right)$

(2)ΔPAB、ΔPBC 及ΔPCA都是等腰∆，依預備定理 0-4 知∆ PAB、 ∆ PBC 及 ∆ PCA 的尤拉線都是各自等腰∆底邊的中垂線，而三底邊$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$中垂線的交點即為原∆ ABC的外心，因此推得Q即位在P點處，故三個切割∆ 的尤拉線會共點，且此點和原ΔABC的外心重合，即Q$\left(\frac{a}{2}, \frac{b^2+c^2-ab}{2c}\right)$。



圖(7)



圖(8)

定理二:

一般△ABC中，若切割點P落在△ABC的垂心H處，則三個切割△的尤拉線L_a、L_b、L_c會共點。如上圖(8)

已知:一任意△ABC，求證:以此△之垂心當切割點時，則三子△之尤拉線共點且此共點的點位於原△之垂心與外心中點。

證明:

令$\angle HAB = \angle HCB = \alpha$、$\angle HBA = \angle HCA = \beta$、$\angle HAC = \angle HBC = \gamma$、$\angle ZAB = \angle ZBA = \theta$、$\angle YAC = \angle YCA = \varepsilon$、$\angle XBC = \angle XCB = \varphi$，O、H分別為△ABC之外心、垂心，Q為O、H之中點，X、Y、Z分別為△HBC、△HAC、△HAB之外心。如圖(9)所示。

(1)$\angle AHB = \angle AHZ + \angle BHZ = \alpha + \theta + \beta + \theta$($\overline{ZB} = \overline{ZH}$、$\overline{ZH} = \overline{ZA}$)，又 $\angle AHB = \angle CAH + \angle ACB + \angle HBC = \alpha + \gamma + \beta + \gamma$(四邊形AHBC是鏢形)，比較上兩式得$\theta = \gamma$。同理得$\alpha = \varepsilon$、$\beta = \varphi$。

(2)△HBZ 和△BHX中，∵ $\overline{HB}$公共邊，$\angle HBZ = \angle BHZ = \angle HBX = \angle BHX = \beta + \gamma$，∴△HBZ ≅△HBX(ASA) ∴ $\overline{HZ} = \overline{HX}$(對應邊)，其他亦同，∴ $\overline{HX} = \overline{HY} = \overline{HZ}$，∴ H為△XYZ 之外心 ... (1)

(3)$\overline{XZ}$為$\overline{AB}$中垂線(外心)，$\overline{XB} = \overline{BZ}$，又$\overline{BZ} = \overline{AZ}$(外心)，$\overline{BX} = \overline{BZ} = \overline{AZ}$，其餘亦同，得$\overline{AZ} = \overline{ZB} = \overline{BX} = \overline{CX} = \overline{CY} = \overline{AY}$

(4)△內角和$= 180°$， ∴ $2(\alpha + \beta + \gamma) = 180°$(△ABC 內角和)，又 $\angle AZB = 180 - 2\gamma$、$\angle YCX = 2(\alpha + \beta)$， ∴ $\angle AZB = \angle YCX$。
在△YCX 和△AZB中，∵ $\angle AZB = \angle YCX$，$\overline{YC} = \overline{CX} = \overline{AZ} = \overline{ZB}$
∴△YCX ≅△AZB(SAS)， ∴ $\overline{XY} = \overline{AB}$、$\overline{YZ} = \overline{BC}$、$\overline{XZ} = \overline{AC}$(對應邊)，
∴△ABC ≅△XYZ(SSS)

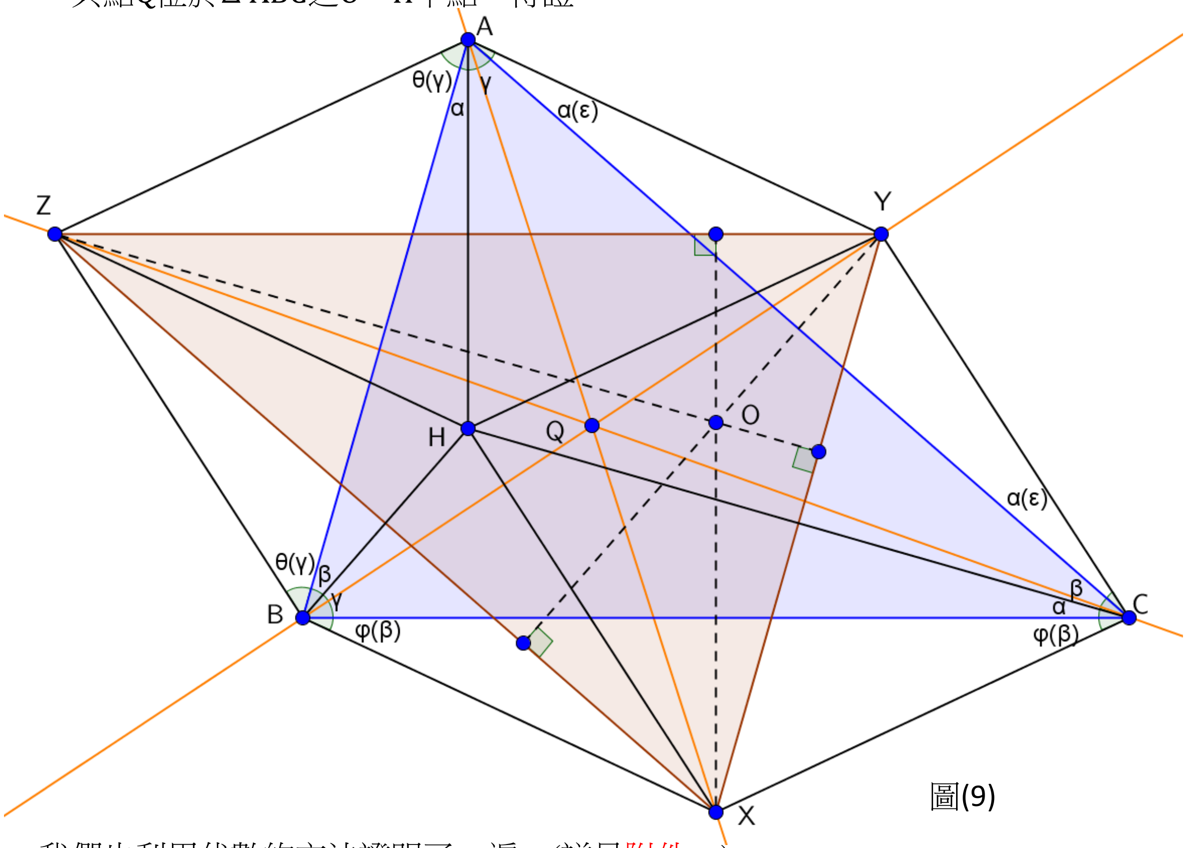
(5)$\overline{BC}$中垂線⊥ $\overline{YZ}$($\overline{YZ}$與$\overline{AH}$夾90°，$\overline{BC}$與$\overline{AH}$夾90°)因此$\overleftrightarrow{XO}$是X對$\overline{YZ}$的高(△HBC的外心X 必在$\overline{BC}$中垂線上，而原△外心亦在$\overline{BC}$中垂線上)，其餘同理，$\overleftrightarrow{YO}$是 Y 對$\overline{XZ}$的高、$\overleftrightarrow{ZO}$是Z對XY的高，三高交點為O，O是△XYZ之垂心... (2)

(6)綜合(1)、(2)，△ABC與△XYZ之垂心、外心只是互換位置，其中點Q不變，因此△XYZ 是以 Q 為旋轉中心，旋轉△ABC 180°所得($\overline{BC} \parallel \overline{YZ}$、$\overline{XZ} \parallel \overline{AC}$、$\overline{XY} \parallel \overline{AB}$)

(7)由「A、B、C、H其中一點為其他三點構成的△的垂心」特性，知B是△AHC的垂心、A是△BHC的垂心、C是△AHB的垂心。

(8)$\angle BQY =$ 旋轉角 $= 180°$，∴ B、Q、Y三點共線，而$\overleftrightarrow{BY}$是△AHC之尤拉線，過Q;

其餘同理，$\overleftrightarrow{AX}$為△ HBC之尤拉線過Q，$\overleftrightarrow{CZ}$為△ HAB之尤拉線也過Q。
∴以H切割△ ABC成△ HAB、 △ HBC、 △ HAC，則三子△之尤拉線共點且此共點Q位於△ ABC之O、H中點，得證。



圖(9)

我們也利用代數的方法證明了一遍。(詳見附件一)

定理三:

如上圖(8)，若切割點P落在△ ABC的垂心上，則共點Q落在△ ABC的垂心和外心的中點上，且此時△ ABC的外心、重心、Q點及P點(垂心)四點共線，又這四點間的距離比依序為2：1：3。

證明:

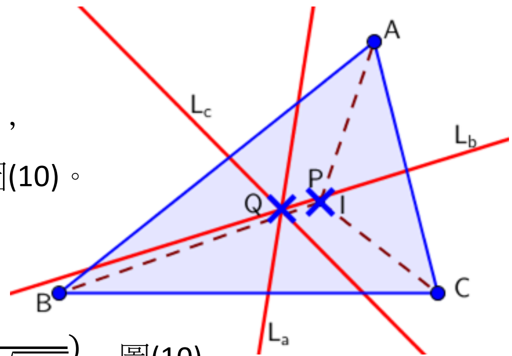
∵重心也在尤拉線上

$\therefore \overline{OG}:\overline{GQ}:\overline{QP}=2:1:3$，得證。

定理四:

一般△ ABC中，若切割點P落在△ ABC的內心I處，

則三個切割△的尤拉線L_a、L_b、L_c會共點。如圖(10)。



圖(10)

證明:

(1)先令$A(0,a),B(b,0),C(1,0)$

(2)△ ABC的內心$P\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}+b\sqrt{a^2+1}}{1-b+\sqrt{a^2+1}+\sqrt{a^2+b^2}},\frac{a(b-1)}{b-1-\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+1}}\right)$

(3)令$P(s,t)$

△ PBC尤拉線: $(3b-3sa-3bs+3s^2+t^2)x-(t+bt-2st)y+(s-b^2+bs+b^2s-b-st^2-s^3)=0$

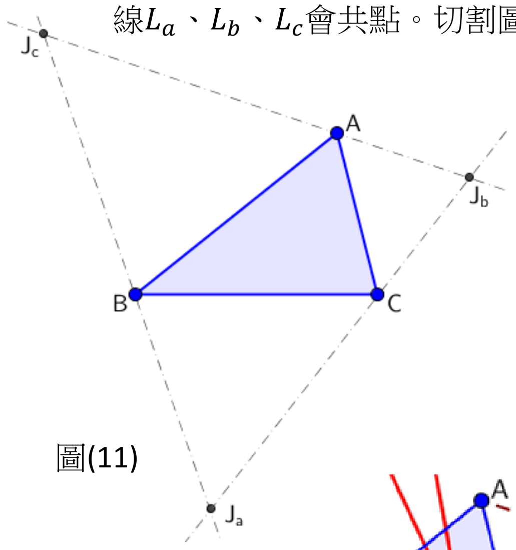
△ PAB尤拉線: $(-3b^2s+sa^2-a^2b+3bs^2+bt^2-2ast)x-(b^2t-3a^2t+as^2+3at^2-ab^2-2bst)y+(b^3s-a^3t-bs^3+at^3-bst^2+as^2t)=0$

$\triangle$ PAC尤拉線: $(-3s+a^2s-a^2+3s^2+t^2-2ast)x-(t-3a^2t+as^2+3at^2-a-2st)y+(s-a^3t-s^3+at^3-st^2+as^2t)=0$

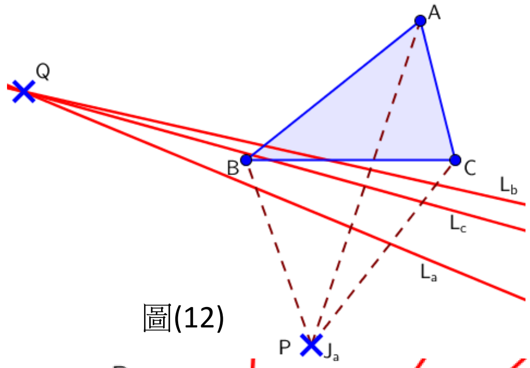
(4)展開三尤拉線行列式，再將s, t以P點座標還原，得行列式值為0，表示三尤拉線共點，得證。

定理五:

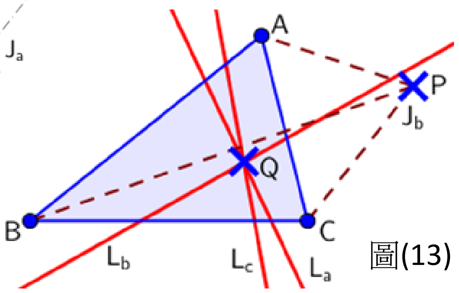
一般$\triangle$ ABC中，若切割點P落在ΔABC的旁心J_a、J_b或J_c處，則各自的三個切割Δ的尤拉線L_a、L_b、L_c會共點。切割圖如圖(11)，共點圖如圖(12)、圖(13)、圖(14)



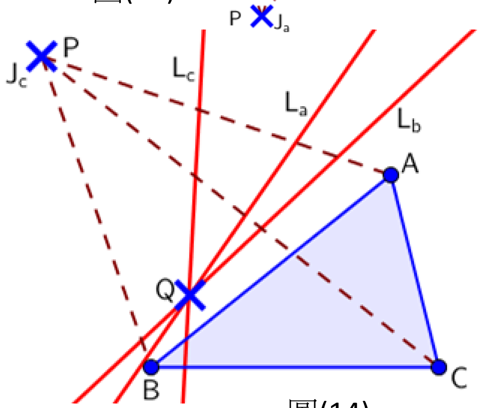
圖(11)



圖(12)



圖(13)



圖(14)

證明:

(1)先令A(0, a), B(b, 0), C(1,0)

(2)$\triangle$ ABC的旁心$J_a\left(\frac{b+\sqrt{a^2+1}-\sqrt{a^2+b^2}+1}{2},\frac{ab+a\sqrt{a^2+1}-a-a\sqrt{b^2+a^2}}{2\sqrt{a^2+1}-2}\right)$

$$J_b\left(\frac{b+\sqrt{a^2+1}+\sqrt{a^2+b^2}+1}{2},\frac{ab+a\sqrt{a^2+1}+a\sqrt{a^2+b^2}-a}{2\sqrt{a^2+1}-2}\right)$$

$$J_c\left(\frac{b-\sqrt{a^2+1}-\sqrt{a^2+b^2}+1}{2},\frac{-ab+a\sqrt{a^2+1}+a\sqrt{a^2+b^2}+a}{2\sqrt{a^2+1}+2}\right)$$

(3)令P(s, t)

$\triangle$ PBC尤拉線: $(3b-3as-3bs+3s^2+t^2)x-(t+bt-2st)y+(s-b^2+bs+b^2s-b-st^2-s^3)=0$

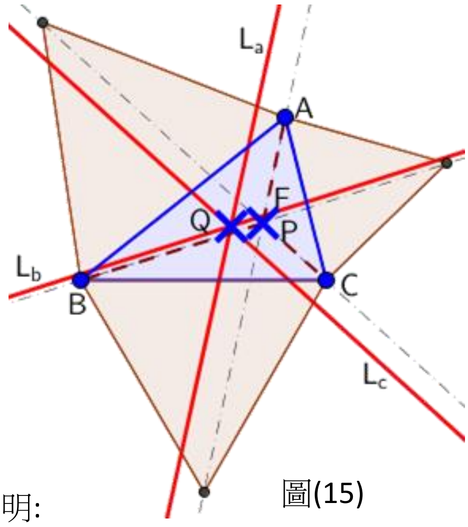
$\triangle$ PAB尤拉線: $(-3b^2s+sa^2-a^2b+3bs^2+bt^2-2ast)x-(b^2t-3a^2t+as^2+3at^2-ab^2-2bst)y+(b^3s-a^3t-bs^3+at^3-bst^2+as^2t)=0$

$\triangle$ PAC尤拉線: $(-3s+a^2s-a^2+3s^2+t^2-2ast)x-(t-3a^2t+as^2+3at^2-a-2st)y+(s-a^3t-s^3+at^3-st^2+as^2t)=0$

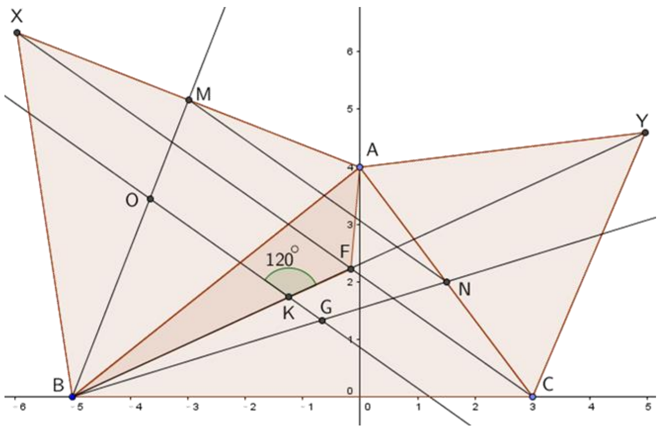
(4)展開三尤拉線行列式，再將s, t以P點座標還原，得行列式值為0，表示三尤拉線共點，得證。

定理六:

一般$\triangle ABC$中，若切割點P落在$\triangle ABC$的「外費馬點」F處，則三個切割$\triangle$的尤拉線L_a、L_b、L_c會共點，如圖(15)且此共點Q落在$\triangle ABC$的重心上



圖(15)



圖(16)

證明:

由於廣義的費馬點的位置和$\triangle ABC$中的最大角大於、等於或小於$120°$有關，假設$\angle BAC$為最大角我們分成三部分說明如下:

(一)如上圖(16)，$\triangle ABC$非正$\triangle$，當$\angle BAC < 120°$時:

(1)在$\triangle AXC$中，$\because$ M、N各為$\overline{AX}$、$\overline{AC}$中點，$\therefore \overline{MN} \parallel \overline{XC}$

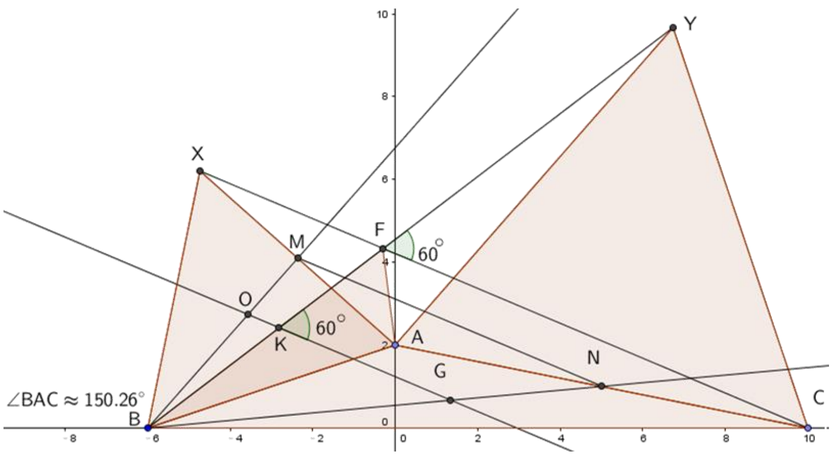
(2)在$\triangle BMN$中，$\because \overline{BO} : \overline{OM} = \overline{BG} : \overline{GN} = 2 : 1$，$\therefore \overleftrightarrow{OG} \parallel \overline{MN}$，故$\overleftrightarrow{OG} \parallel \overline{XC}$

(3) $\because$ F為費馬點$\therefore \angle XFY = \angle XFA + \angle AFY = \frac{1}{2}\widehat{XA} + \frac{1}{2}\widehat{YA} = 60° + 60° = 120°$，故

$\angle OKF = \angle XFY = 120°$

(4)由預備定理 0-2 知，$\because \triangle ABF$的一內角$\angle BFA = 120°$，$\therefore$此$\triangle$的尤拉線和$\overline{BF}$的夾角必為$120°$，又現在$\overleftrightarrow{OK}$和$\overline{BF}$的夾角恰好是$120°$且$\overleftrightarrow{OK}$通過$\triangle BFA$的外心O，因此可以斷定$\overleftrightarrow{OK}$即為$\triangle BFA$的尤拉線，而$\triangle ABC$的重心G就在$\overleftrightarrow{OK}$上，也就是說$\triangle BFA$的尤拉線通過$\triangle ABC$的重心。

(5)同理可證$\triangle BFC$、$\triangle CFA$的尤拉線都通過G。得證切割點為費馬點 F，可使三尤拉線共點，且此共點Q都位在原$\triangle$的重心上。



圖(17)

(二)如上圖(17)，當$\angle BAC > 120°$時:

同理使用預備定理 0-1 及 0-2 可證三尤拉線會共點，且Q點亦為$\triangle ABC$的重心。

(三)又當$\angle BAC = 120°$時:

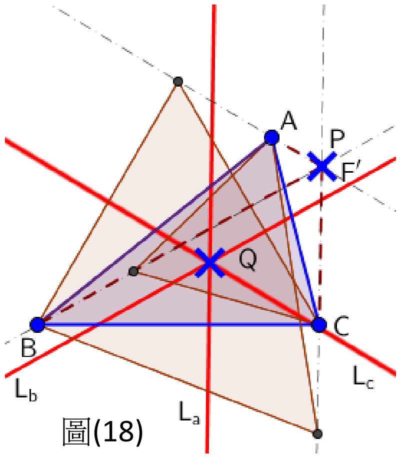
費馬點 F 就在$\triangle ABC$的頂點 A 上，三條尤拉線只剩下一條，談是否共點無意義。

發現二:

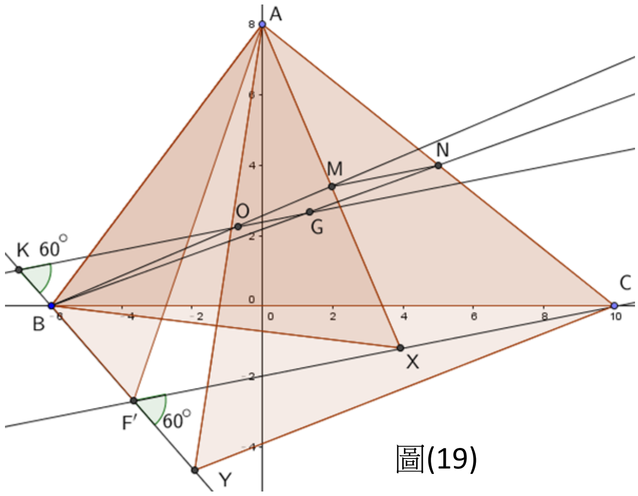
如上圖(15)，$\triangle ABC$非正$\triangle$，且$\triangle ABC$的最大角$\neq 120°$，若切割點P落在$\triangle ABC$的「外費馬點」上，則Q必落在$\triangle ABC$的重心上。

定理七:

一般$\triangle ABC$中，若切割點P落在$\triangle ABC$的「內費馬點」F'處，則三個切割$\triangle$的尤拉線L_a、L_b、L_c會共點，如圖(18)。



圖(18)



圖(19)

(註:「內費馬點」是指以$\triangle$各邊為邊長向內作正$\triangle$，此點為此三個正$\triangle$外接圓的交點。同樣當$\angle A = 60°$時，此交點落在A)

證明:

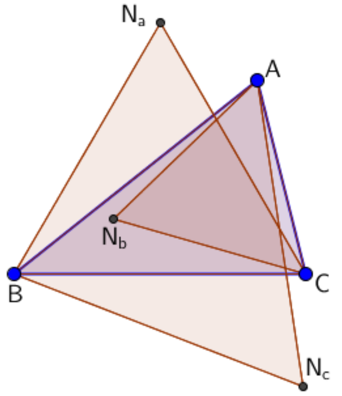
如上圖(19)，由外費馬點同理也可以證明內費馬點F'的三尤拉線的共點情形，且此共點的點也是重心。

發現三:

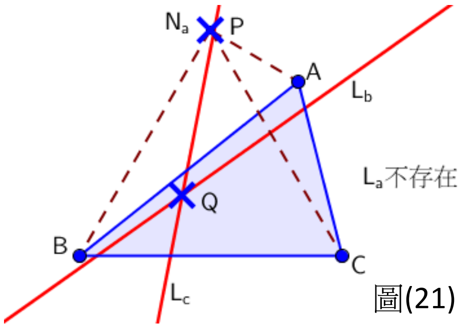
如上圖(18)，$\triangle ABC$非正$\triangle$，且$\triangle ABC$的最大角$\neq 120°$，若切割點P落在$\triangle ABC$的「內費馬點」上，則Q也必落在$\triangle ABC$的重心上，和發現二合併來看，相異的切割點F、F'對應到**同一共點重心**。

定理八:

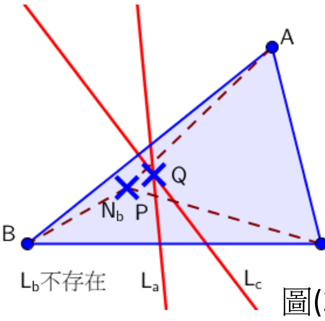
一般非正$\triangle$的$\triangle ABC$中，若切割點P落在任意邊為邊長，向內之正$\triangle$頂點N_a、N_b或N_c時，則三個切割$\triangle$的尤拉線L_a、L_b、L_c會共點。切割圖如圖(20)，共點圖如圖(21)、(22)、(23)



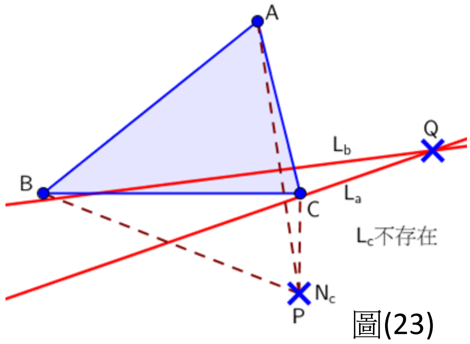
圖(20)



圖(21)



圖(22)



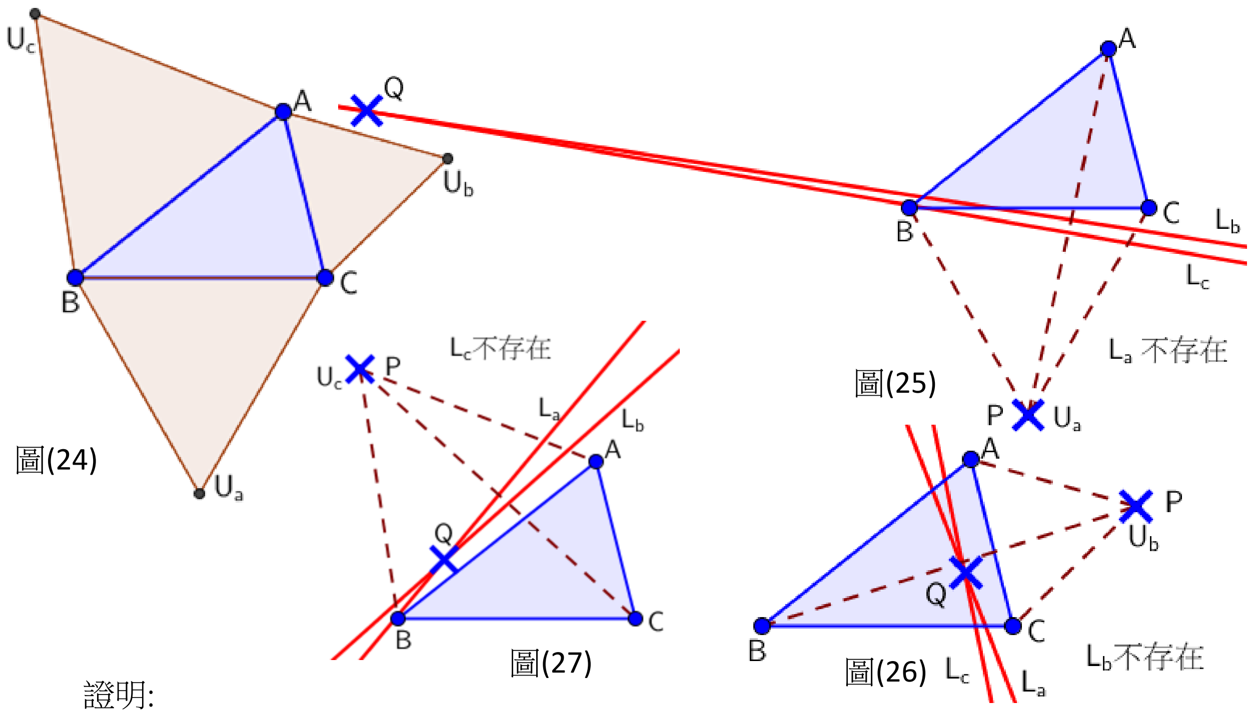
圖(23)

證明:

三切割Δ中有一切割Δ為正Δ，其尤拉線為一個點，將它解釋為通過那一點的任一條線，它與另外兩條相交的尤拉線必有一交點Q，故得證。

定理九:

一般非正Δ的Δ ABC中，若切割點P落在任意邊為邊長，向外之正Δ頂點U_a、U_b或U_c時，則三個切割Δ的尤拉線L_a、L_b、L_c會共點。切割圖如圖(24)，共點圖如圖(25)、(26)、(27)



圖(24)

圖(25)

圖(27)

圖(26)

證明:

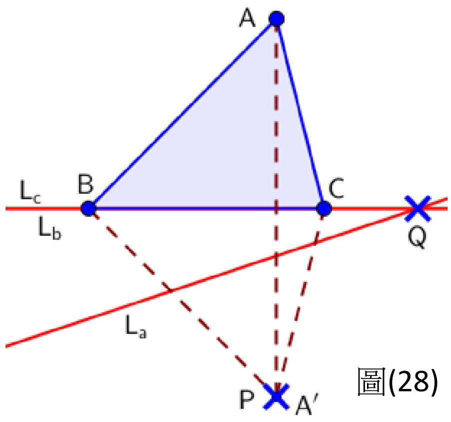
三切割Δ中有一切割Δ為正Δ，其尤拉線為一個點，將它解釋為通過那一點的任一條線，它與另外兩條相交的尤拉線必有一交點Q，故得證。

定理十:

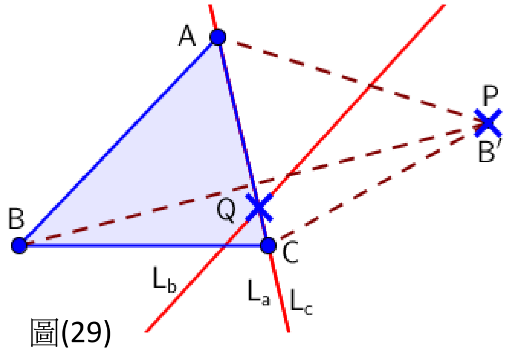
在任兩內角的正切三角函數值乘積≠ 3的一般Δ ABC中，當P在任一頂點以對邊為對稱軸的對稱點A′、B′或 C′上時，三尤拉線必共點。

證明:

(1)切割點P為A點的對稱點A′時，Δ PAB及Δ PAC為兩等腰Δ，且這兩個Δ之底邊重合，所以這兩個Δ之尤拉線同為底邊之中垂線，而第三個ΔΔ PBC 之尤拉線不平形$\overline{BC}$時，必和這兩個等腰Δ之尤拉線有一交點Q。如圖(28)



圖(28)

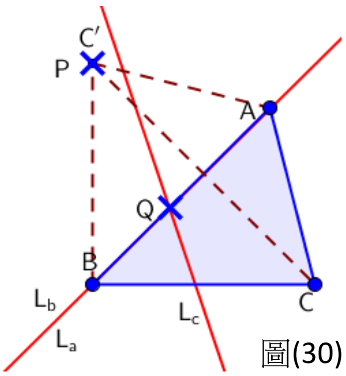


圖(29)

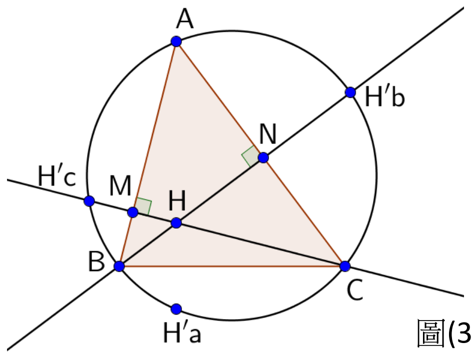
(2)若第三個△ PBC之尤拉線和底邊$\overline{BC}$平行時由對稱關係知△ ABC的尤拉線平行$\overline{BC}$邊因此$\tan B \times \tan C = 3$，不合。

(3)同理可證切割點P為B點的對稱點B′時，△ PAB、△ PBC、△ PAB的三尤拉線共點於Q，如圖(29)。

(4)又切割點P為C點的對稱點C′時，△ PAB、△ PBC、△ PAB的三尤拉線共點於Q，如上圖(30)



圖(30)



圖(31)

定理十一:

若△ ABC的垂心對△各邊的對稱點為H’a、H’b、H’c，則此三點皆為有效的P點。

(提示:先證明H’a、H’b、H’c三點皆位於外接圓上，即能證明此三點是有效的P點。)

證明:

(1)如圖(31)，△ ABC垂心為H，H對$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$的對稱點分別為H′c、H′a、H′b，直線$\overleftrightarrow{BH}$、$\overleftrightarrow{CH}$分別交$\overline{AB}$、$\overline{AC}$於 M、N。

(2) $\angle AMH = \angle ANH = 90°$ ∴ $\angle AMH + \angle ANH = 180°$ ∴ $\angle BAC + \angle MHN = 180°$，即$\angle BAC + \angle BHC = 180°$

(3)由於 H 和 H′a 對稱於$\overline{BC}$，$\angle BHC = \angle BH'aC$ ∴ $\angle BAC + \angle BH'aC = 180°$

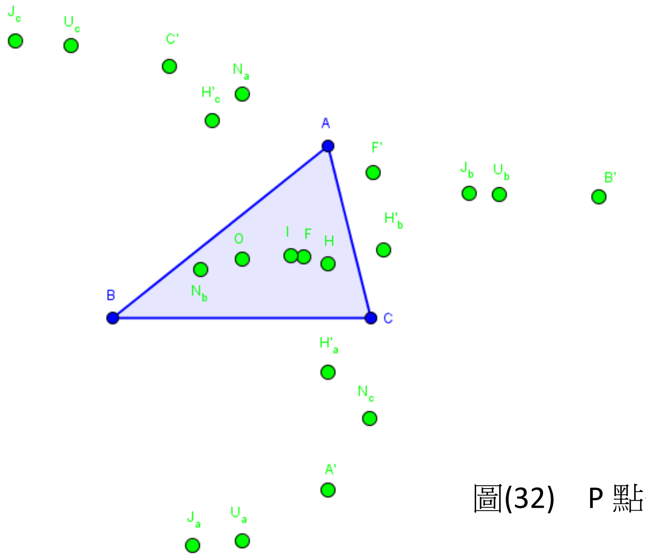
$A, B, H'a,$ C四點共圓，即H′a在△ ABC外接圓上。

同理，H′b, H′c均在△ ABC外接圓上。

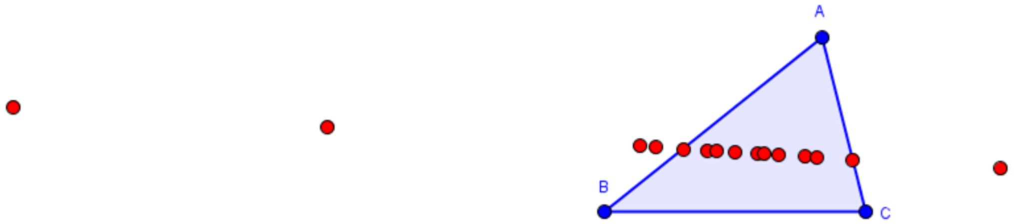
由於任何△的外接圓皆為其P點軌跡，故此三點亦為特殊點P。

(註:在此段文章中，又出現那兩個角色顯著的角度60°及120°)

研究至此，我們已發現在一般△的平面上，至少有 20 個切割點P，可使被切割的三個小△的「尤拉線群」共點，有趣的是這種P點雖然有很多，但是這些P點的排列似乎有一定的規律，如圖(32)、(33)，那是什麼規律呢?這種P點都集中在哪裡?是離散排列或是連續排列?



圖(32) P 點分布圖(綠點)

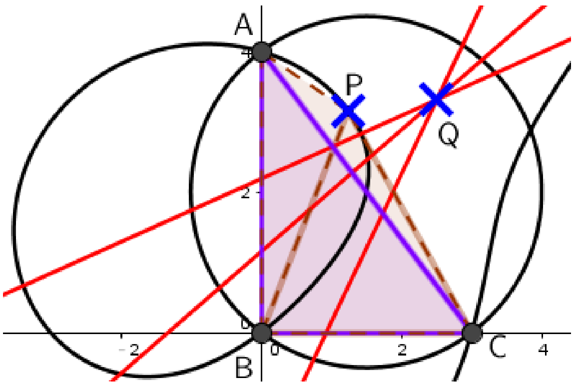


圖(33) Q 點分布圖(紅點)

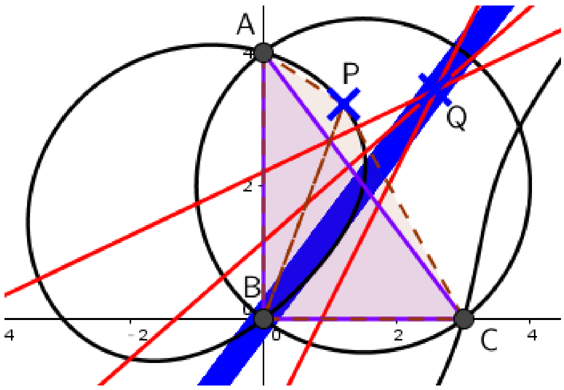
利用Geogebra軟體，建立滑桿模型，利用直角坐標，解析化簡二元高次方程式，並嘗試因式分解在特定圖形下的高次方程式以供分解圖形檢視印證，這花費了我們近半年的課餘時間，皇天不負苦心人，最終我們破解了這世紀之謎。以下就是我們的研究:

三、∆中所有的切割點P的軌跡探討

(一)為了研究所有的P點，且容易用解析方式說明計算，我們先從直角∆開始探討，在直角坐標平面上，取A(0,4)、B(0,0)、C(3,0)為直角∆的三頂點，切割點P(s,t)，計算出∆ PAB、∆ PBC、∆ PCA的各自尤拉線，再令三尤拉線共點，求出共點方程式，最後用電腦畫出P點的軌跡如圖(34)，及共點之點軌跡如圖(35)。



圖(34)，P 點軌跡有三部分(黑實線)



圖(35)，粗線為Q點軌跡

說明:

令A(0,4)、B(0,0)、C(3,0)、切割點 P(s,t)，如圖(32)，計算說明如下:

尤拉線為外心、重心和垂心的連線。我們取外心和重心的連線。

外心是三中垂線的交點，我們取兩條計算。重心的公式：$\left(\frac{\text{頂點 X 座標之和}}{3}, \frac{\text{頂點 Y 座標之和}}{3}\right)$

△PBC重心:$(\frac{s+3}{3},\frac{t}{3})$

△PBC外心，計算如下:
$\overline{BC}$中垂線:$x = 1.5$

$\overline{PB}$為$y = \frac{t}{s}x$，兩垂直線斜率相乘為-1

則$\overline{PB}$中垂線斜率為$-\frac{s}{t}$，設其為$y = -\frac{s}{t}x + k$，且此直線通過$\overline{PB}$中點$(\frac{s}{2},\frac{t}{2})$

代入得$k = \frac{s^2+t^2}{2t}$,$\overline{PB}$中垂線為$y = -\frac{s}{t}x + \frac{s^2+t^2}{2t}$

解聯立可得$\overline{PB}$中垂線和$\overline{BC}$中垂線交點為$(\frac{3}{2},\frac{s^2+t^2-3s}{2t})$,此為外心坐標

外心重心連線: $y = \frac{3s^2+t^2-9s}{3t-2st}x + \frac{9st-st^2-s^3}{3t-2st}$為△PBC尤拉線方程式。

同理△PAB重心: $(\frac{s}{3},\frac{t+4}{3})$ 、外心: $(\frac{s^2+t^2-4t}{2s},2)$

外心、重心連線:$y = \frac{2st-4s}{-s^2-3t^2+12t}x + \frac{16t-s^2t-t^3}{-s^2-3t^2+12t}$為△PAB尤拉線方程式。

同理△PAC重心: $(\frac{s+3}{3},\frac{t+4}{3})$ 、外心: $(\frac{4s^2+4t^2-7t-36}{8s+6t-24},\frac{3s^2+3t^2+7s-48}{8s+6t-24})$

外心、重心連線:$y = \frac{8st-3t^2+11s+48-9s^2}{-4s^2+6st+39t+36-12t^2}x + \frac{3s^3+3st^2-27s-4t^3-4s^2t+64t}{-4s^2+6st+39t+36-12t^2}$為△PAC尤拉線

三線共點時會有一個現象，即行列式值會等於零，

平面上有 $\begin{aligned} L_1&: a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ L_2&: a_2x + b_2y + c_2 = 0 \\ L_3&: a_3x + b_3y + c_3 = 0 \end{aligned}$ 欲使這三直線共點 必須$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

即$a_1 \times \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \times \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \times \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0$

$a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1 = 0$

以 $a_1 = 3s^2 + t^2 - 9s$ $b_1 = 2st - 4s$ $c_1 = 8st - 3t^2 + 11s + 48 - 9s^2$

$a_2 = -3t + 2st$ $b_2 = s^2 + 3t^2 - 12t$ $c_2 = 4s^2 - 6st - 39t - 36 + 12t^2$

$a_3 = 9st - st^2 - s^3$ $b_3 = 16t - s^2t - t^3$ $c_3 = 3s^3 + 3st^2 - 27s - 4t^3 - 4s^2t + 64t$

代入，並展開，得出一個二元高次方程式:

$144s^5 - 108t^5 + 144st^4 - 216s^2t^3 + 288s^3t^2 - 108s^4t - 432s^4 + 432t^4 - 756st^3 - 756s^3t - 1296s^3 + 1728t^3 + 720st^2 + 3240s^2t + 3888s^2 - 6912t^2 = 0$ 即$P(s,t)$滿足此方程式時三尤拉線能夠共點。

為了畫出曲線，(s,t)改以(x,y)代替並化簡，得

$4x^5 - 3y^5 + 4xy^4 - 6x^2y^3 + 8x^3y^2 - 3x^4y - 12x^4 + 12y^4 - 21xy^3 - 21x^3y - 36x^3 + 48y^3 + 20xy^2 + 90x^2y + 108x^2 - 192y^2 = 0$即為切割點的軌跡方程式

如圖(34)，我們發現P點軌跡分成三部分:

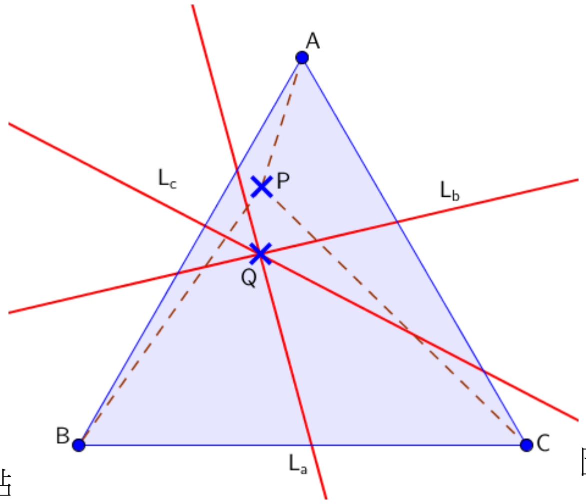
(1)$\triangle ABC$的外接圓

(2)像卵形的封閉曲線

(3)一條開放的彎曲曲線

又計算驗證得知Q點軌跡就是原$\triangle ABC$的尤拉線，如圖(35)

(二)使用正$\triangle$來試驗，取$A(0,\sqrt{3})$、$B(-1,0)$、$C(1,0)$、任一點$P(s,t)$計算，發現P點軌跡為全平面，如圖(36):



圖(36)

求證: 三尤拉線共點

證明:

(1)先算出$\triangle PAB$、 $\triangle PAC$的尤拉線L_c、L_b。

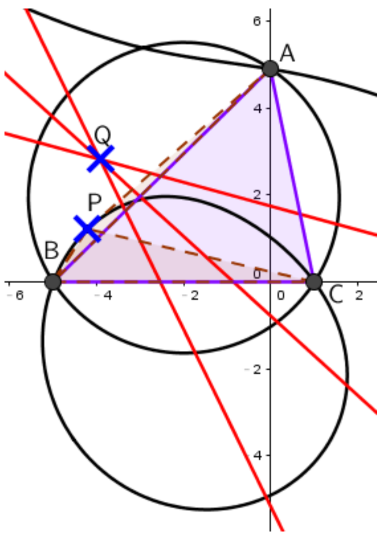
(2)算出L_b、L_c的交點Q。

(3)再算出$\triangle PBC$的尤拉線L_a。

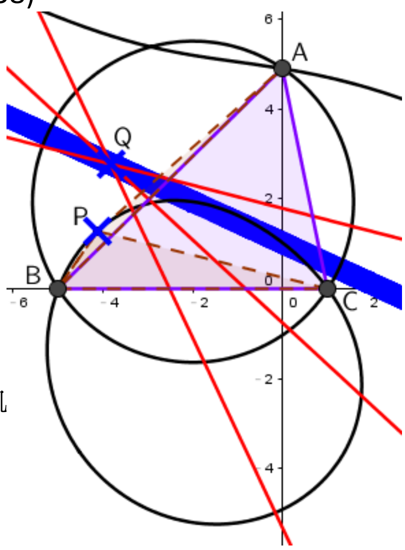
(4)將Q代入L_a，方程式成立，得證。

(詳細過程見附件二)

(三)接下來使用銳角$\triangle$試驗，在直角坐標平面上，取$A(0,2\sqrt{6})$、$B(-5,0)$、$C(1,0)$為銳角$\triangle$的三頂點，三邊長5、6、7，切割點$P(a,b)$，計算出$\triangle PAB$、$\triangle PBC$、$\triangle PCA$的各自尤拉線，再令三尤拉線共點，求出共點方程式，最後用電腦畫出P點的軌跡如圖(37)及共點之點軌跡如圖(38)。



圖(37)，P 點軌跡分成三部分(黑實線)



圖(38)，粗線為 Q 點軌跡

說明: (計算過程如附件三)

在圖(37)中，我們也發現P點軌跡分成三部分:

(1)Δ ABC的外接圓

(2)像卵形的一個封閉曲線

(3)通過頂點A的一條開放曲線

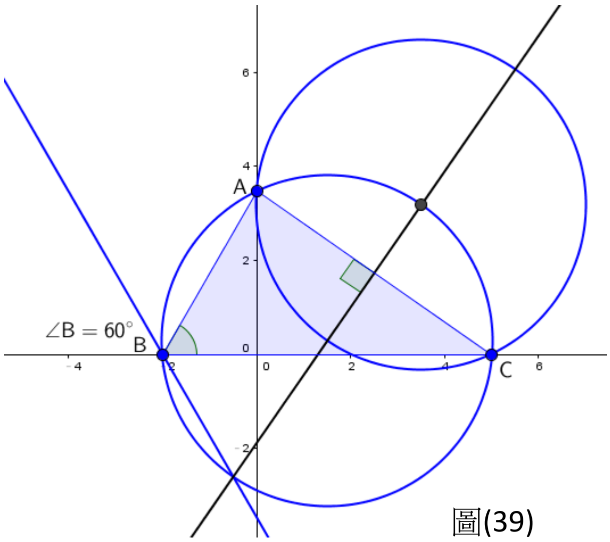
又經計算及驗證得知Q點的軌跡就是原Δ ABC的尤拉線，如圖(38)

(四)前文談到兩個顯著角度之一為60°，在此取一內角為60°的Δ ABC來計算:

取 A$(0,-\sqrt{3}b)$、B(b,0)、C(c,0)，b<0，內角$\angle$B為60°。如前文計算得P點軌跡方程式(見附件四)並「**因式分解**」為 $(-\sqrt{3}b^3y+\sqrt{3}bc^2y+3b^4-3b^2c^2-3b^3x+3bc^2x)$

$$(x^2+y^2+(b-c)x+(\sqrt{3}b-\frac{\sqrt{3}}{3}c)y-bc)(x^2+\ y^2-(b+c)x\ +(\frac{\sqrt{3}c}{3}+\sqrt{3}b)y+bc)=0$$

共分解成三段，第一段是過 B 點的斜直線，第二段是通過頂點A、C的圓，其圓心位於$\overline{AC}$的中垂線與外接圓的交點上，第三段是Δ ABC的外接圓。如圖(39)



圖(39)

討論:

1.方程式$\left(x^2+y^2+(b-c)x+\left(\sqrt{3}b-\frac{\sqrt{3}}{3}c\right)y-bc\right)=0$為圖(39)右側的圓，

可以使用二次曲線: $cx^2+dxy+ey^2+fx+gy+h=0$ 中圓的判別式來檢查，

$c=e$ 且 $d=0$ 且$f^2+g^2-4h=\frac{4c^2}{3}+4b^2$恆大於 0。這個圓的半徑是$\sqrt{\frac{c^2}{3}+b^2}$

，同理另一二次方程式$\left(x^2+\ y^2\ -(c+b)x\ +\left(\frac{\sqrt{3}c}{3}+\sqrt{3}b\right)y+c\,b\ \right)=0$

也是圓，且半徑也是$\sqrt{\frac{c^2}{3}+b^2}$，這表示可直接用尺規作圖畫出右側的圓。

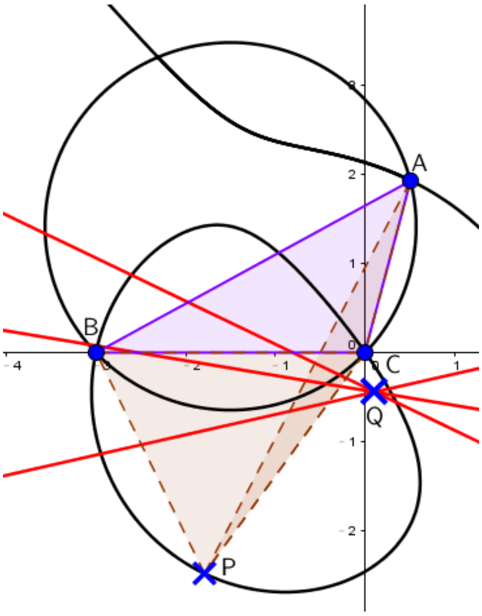
2.在有一內角為60°的不等邊Δ中，有共點Q的切割點P的(x,y)二元五次方程式可被分解為兩個二次和一個一次多項式的乘積，其中兩個二次方程式的圖形都是圓，令人驚訝的是兩圓半徑恆相等。

3.較特別的部分為:在一般Δ裡彎曲的開放曲線，在$b=-\sqrt{3}a$ 時，其方程式為 $-\sqrt{3}b^3y+\sqrt{3}bc^2y+3b^4-3b^2c^2-3b^3x+3bc^2x=0$變成一直線，通過$(0,\sqrt{3}b)$ 利用這個特色，將可以直接用尺規作圖畫出來。

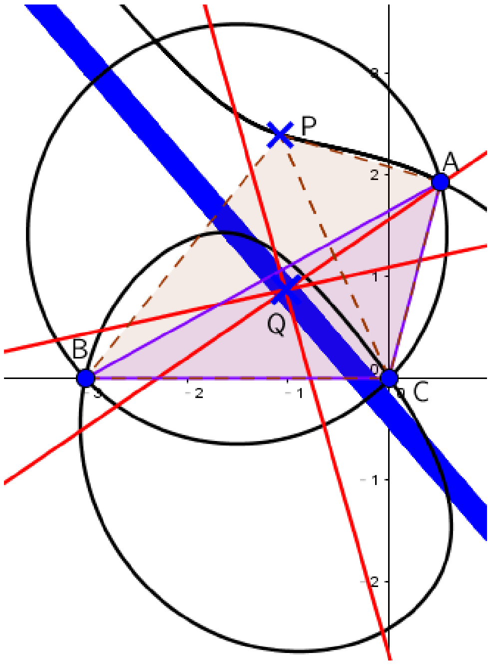
4.這條方程式也解釋了正 Δ 的 P 軌跡為何為全座標平面，當我們將 $c=-b$ 代入

此方程式時，就會得到 $0x + 0y + 0 = 0$，任意 $P(a, b)$代入皆在此方程式圖形上，因此任意的 P 皆可作為一正 ∆ 的切割點，並可使三條尤拉線共點。

(五)接著取一個鈍角∆ ABC試驗，其中$\angle ACB < 120°$，即最大角$\neq 120°$，得P點的軌跡如圖(40)，及共點之點軌跡如圖(41)：



圖(40)，P 點軌跡分成三部分(黑實線)



圖(41)，粗黑線為Q點軌跡

說明: (計算過程如附件五)

在圖(40)中，我們又發現P點軌跡分成三部分:

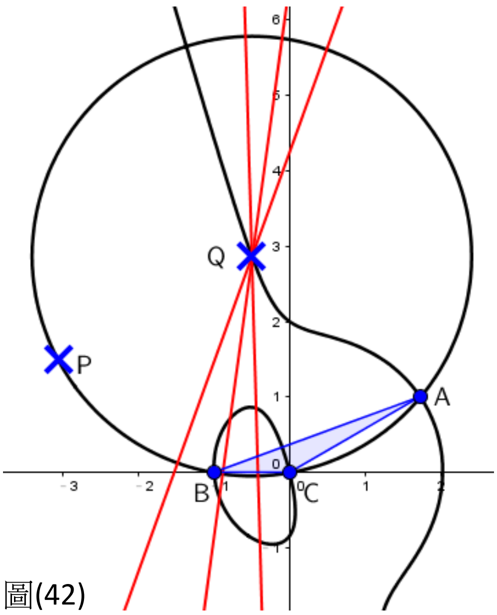
(1)∆ ABC的外接圓

(2)通過B、C兩頂點的卵形封閉曲線

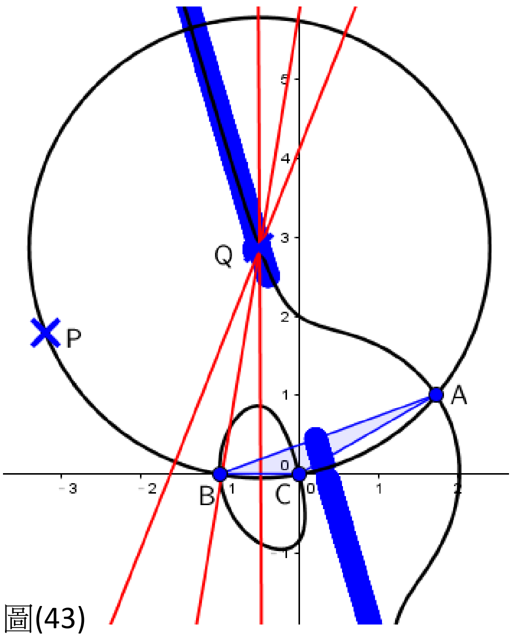
(3)通過頂點A的一條開放曲線

又經計算並驗證得知Q點的軌跡就是原∆ ABC的尤拉線，如圖(41)

(六)接著取一個鈍角∆ ABC試驗，其中$\angle ACB > 120°$，即最大角$\neq 120°$，得P點的軌跡如圖(42)，及共點之點軌跡如圖(43):



圖(42)



圖(43)

說明: (計算過程如附件六)

在圖(42)中，我們又發現P點軌跡分成三部分:

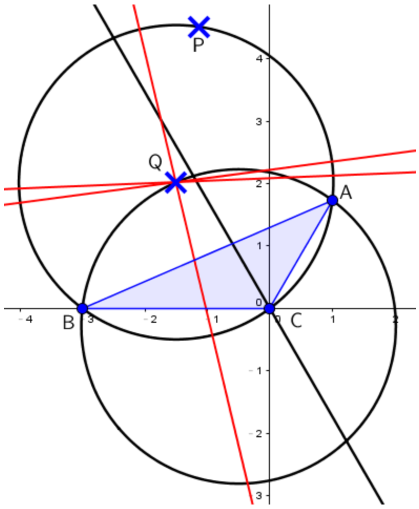
(1)$\triangle$ ABC的外接圓

(2)通過B、C兩頂點的卵形封閉曲線

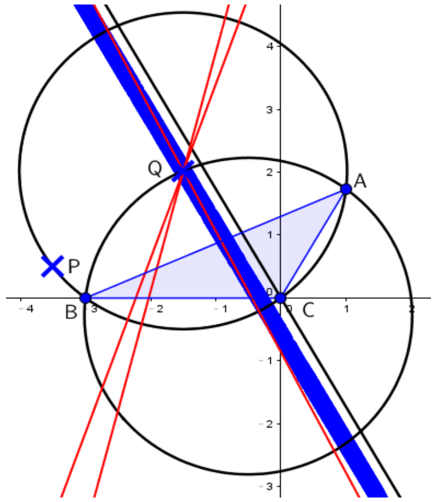
(3)通過頂點A的一條開放曲線

又經計算並驗證得知Q點的軌跡緊貼在原$\triangle$ ABC尤拉線的上中下三部分，如圖(43)

(七)由前文知道$120°$也是一個關鍵角度，在此做一個有一內角$\angle ACB$為$120°$的$\triangle$來試試，得P點軌跡如圖(44)，其共點Q的軌跡如圖(45)



圖(44)，P點軌跡分成三部分(黑實線)



圖(45)，Q點軌跡(粗線)

說明:

取$A\left(1,\sqrt{3}\right)$、$B(-3,0)$、$C(0,0)$，$\angle BCA = 120°$，如圖(44)

經過類似前文(一)、(二)、(四)、(五)的計算，得到P點軌跡的曲線方程式:

$$6\sqrt{3}x^2y^3 + 3\sqrt{3}yx^4 + 18y^2x^3 + 3\sqrt{3}y^5 + 9xy^4 + 9x^5 - 6\sqrt{3}xy^3 - 6\sqrt{3}yx^3$$
$$+18x^2y^2 + 36x^4 - 18y^4 - 21\sqrt{3}yx^2 - 25\sqrt{3}y^3 - 87xy^2 - 27x^3 + 72\sqrt{3}xy$$
$$+126y^2 - 162x^2 = 0$$

在圖(44)中，我們也有驚人的發現，我們發現P點軌跡如同圖(39)分成三部分

(1)$\triangle$ ABC的外接圓

(2)通過$\overline{AB}$的另一圓

(3)通過C點的一直線

證明的方法也是先將$\triangle$ ABC的外接圓方程式$x^2 + y^2 + 3x - \frac{7\sqrt{3}}{3}y = 0$算出來，拿它去除這高次方程式，得商式為$\sqrt{3}yx^2 + 3xy^2 + \sqrt{3}y^3 + 3x^3 + 2\sqrt{3}xy + 3x^2 + y^2 - 6\sqrt{3}y - 18x = 0$再將這商式因式分解得另一圓之方程式$\sqrt{3}x^2 + \sqrt{3}y^2 + \sqrt{3}x + y - 6\sqrt{3} = 0$及一直線方程式$\sqrt{3}x + y = 0$。

非常特殊的，我們發現當$\angle ACB = 120°$時，圖(44)中的兩個圓的半徑「恆相等」，兩個圓一樣大。又經計算並驗證得知Q點的軌跡就是原$\triangle$ ABC的尤拉線，如圖(45)。

我們將這部分整理成定理十二、十三、十四、十五、十六。

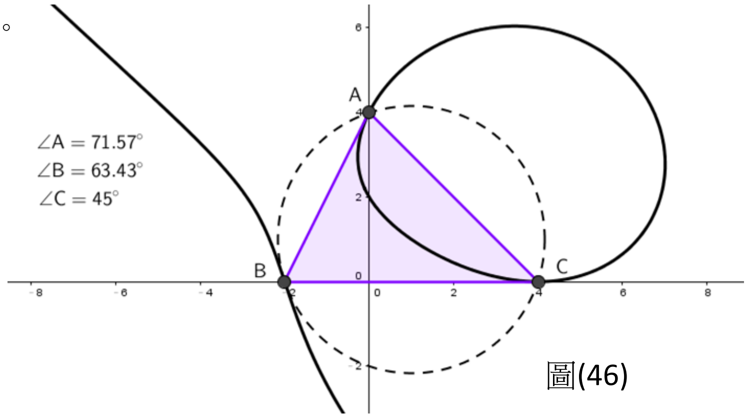
定理十二:

一般$\triangle ABC$中，若$120^{\circ} > \angle A > \angle B \neq 60^{\circ} > \angle C$(即$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$都不是$60^{\circ}$)時，如圖(46)，使三尤拉線共點的P點軌跡有三處:

(1) $\triangle ABC$的外接圓(虛線)。

(2)過A、C的卵形封閉曲線(實線)。

(3)過B的開放曲線(實線)。



圖(46)

定理十三:

一般$\triangle ABC$中，若$120^{\circ} > \angle A > \angle B = 60^{\circ} > \angle C$時，如圖(39)，使三尤拉線共點的P點軌跡有三處:

(1)$\triangle ABC$的外接圓。

(2)過A、C的圓。

(3)過B的直線。

定理十四:

$\triangle ABC$為正$\triangle$，即$120^{\circ} > \angle A = \angle B = \angle C = 60^{\circ}$時，如圖(36)，使三尤拉線共點的P點軌跡是整個平面;Q點軌跡亦為整個平面。

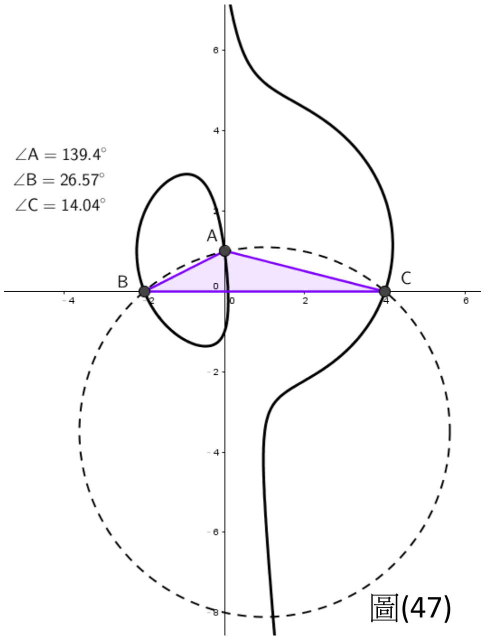
定理十五:

一般$\triangle ABC$中，若$\angle A > 120^{\circ}$，$\angle B > \angle C$時，如圖(47)，使三尤拉線共點的P點軌跡有三處:

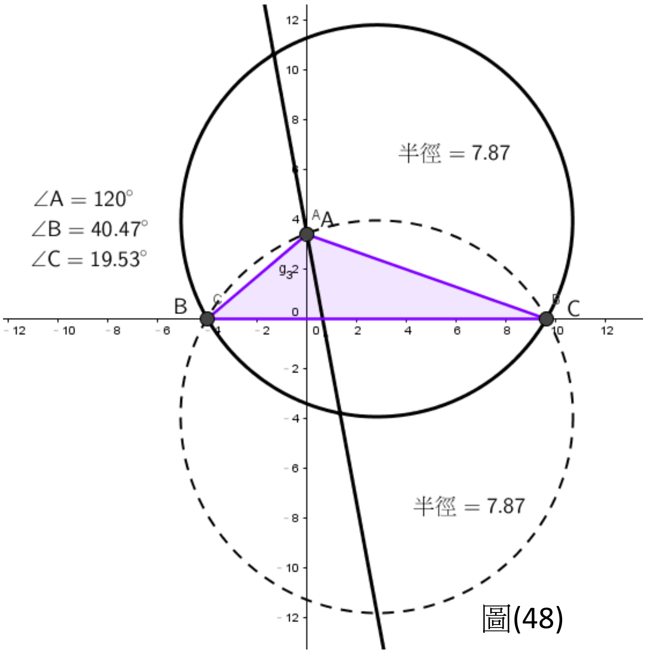
(1) $\triangle ABC$的外接圓(虛線)。

(2)過A、B的卵形封閉曲線(實線)。

(3)過C的開放曲線(實線)。



圖(47)



圖(48)

定理十六:

一般Δ ABC中，若$\angle A = 120^{\circ} > \angle B > \angle C$時，如上圖(48)，使三尤拉線共點的P點軌跡有三處:

(1) Δ ABC的外接圓(虛線)。

(2)過B、C的另一圓(實線)。

(3)過A的開放曲線，為一斜直線(實線)。

發現四:

在非正Δ的Δ中，Q點軌跡為原Δ ABC的整條尤拉線或部分尤拉線。

在發現四中談到Q點軌跡恆在原Δ尤拉線上，我們想再深入探討，到底P點軌跡中的哪一部分對應到Q點軌跡上的哪一段?

討論:

我們將所有Q點軌跡，分成四類: (詳細說明見附件七)

1.當Δ最大角$\leq 120°$時，Q點軌跡為整條原Δ的尤拉線

2.當不等腰Δ最大角$> 120°$時，Q點軌跡為原Δ的尤拉線上的三部分

3.當等腰Δ最大角$> 120°$時，Q點軌跡為原Δ的尤拉線上的兩部分

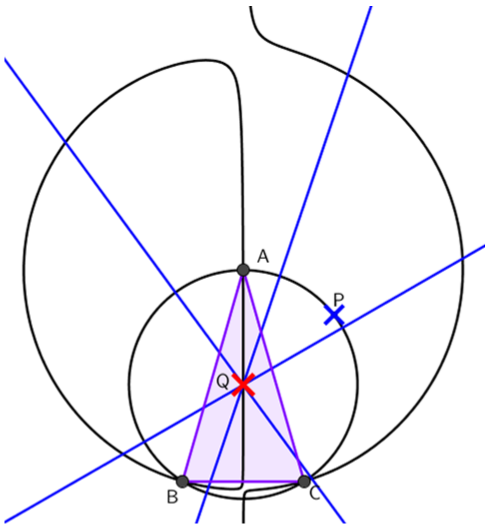
4.當Δ為正Δ時，Q點軌跡為全平面

四、依頂角大小的不同探討等腰Δ的切割點P的軌跡

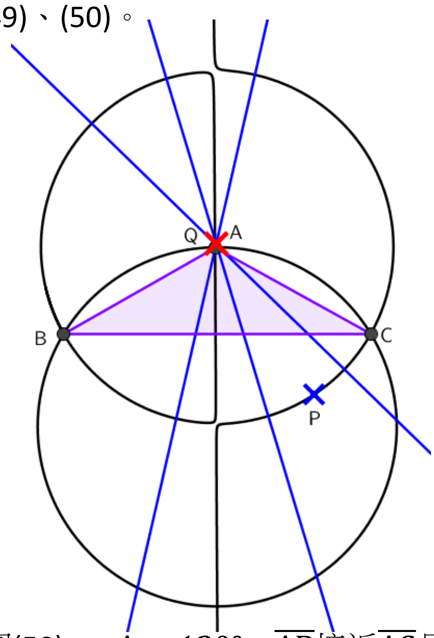
前文探討的都不是等邊的Δ，雖然發現當一內角為60°或120°時，P點軌跡有了重大的突破，但畢竟那條直線和兩圓相對位置還不是很對稱，我們想進一步去探索P和Q的相對位置及互動關係。但在此之前我們先探討更特殊Δ:

(一)近似等腰的等腰Δ的卵形封閉曲線和開放曲線位在哪裡呢?

取$A(0,4)$、$B(-1,0)$、$C(1.004,0)$及$A\left(0,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$、$B(-2,0)$、$C(2.1,0)$，即$\angle C \neq \angle B$，但大小非常接近，帶入模型，並繪出圖形如圖(49)、(50)。



圖(49)，$\angle A < 120°$，$\overline{AB}$接近$\overline{AC}$長



圖(50)，$\angle A > 120°$，$\overline{AB}$接近$\overline{AC}$長

發現五:

1.由上圖(49)可以看出其卵形封閉曲線在左側、開放曲線在右側及一個外接圓

2.由上圖(50)可以看出其卵形封閉曲線在左上側、開放曲線在右上側及一個外接圓

討論:

由發現五得知，當圖(49)的Δ變成等腰Δ時，開放曲線右側的弧及封閉曲線左側的弧合併成一大圓；而開放曲線上下部分的直線及封閉曲線右側的部份合併成一直線，且此直線就是原Δ底邊上的中垂線。

在圖(50)中也有同樣的發現。

(二)當$120^{\circ} > \angle A > \angle B = \angle C$，即$\angle A < 120^{\circ}$的等腰Δ時，切割點P的圖形如何呢?

定理十七:

等腰Δ ABC中，若$120^{\circ} > \angle A > \angle B = \angle C$，如圖(51)，使三尤拉線共點的P點軌跡有三處:

(1)Δ ABC的外接圓(虛線)。

(2)以A點為圓心，腰長為半徑的圓(實線)，其半徑比外接圓(虛線)大。

(3)$\overline{BC}$的中垂線(實線)。

(三)當$\angle A > 120^{\circ}$，$\angle B = \angle C$，即$\angle A > 120^{\circ}$的等腰Δ時，切割點P的圖形如何呢?

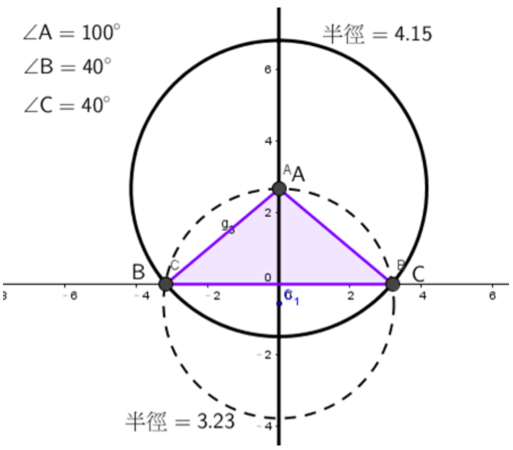
定理十八:

等腰Δ ABC中，若$\angle A > 120^{\circ}$，$\angle B = \angle C$，如圖(52)，使三尤拉線共點的P點軌跡有三處:

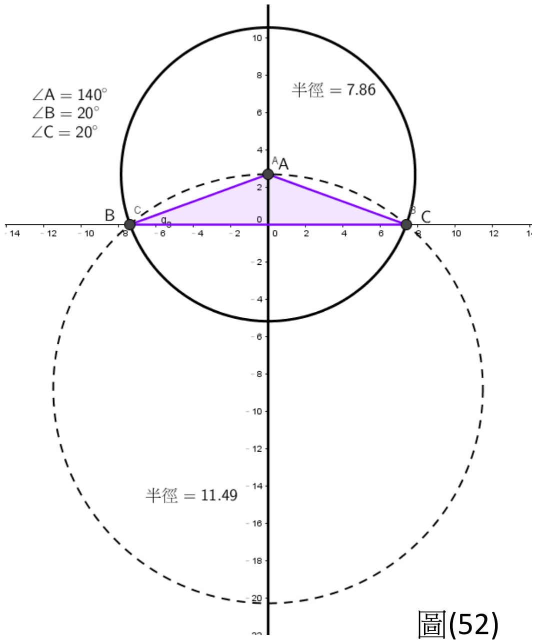
(1) Δ ABC的外接圓(虛線)。

(2)以A點為圓心，腰長為半徑的圓(實線)，其半徑比外接圓(虛線)小。

(3)$\overline{BC}$的中垂線(實線)。



圖(51)



圖(52)

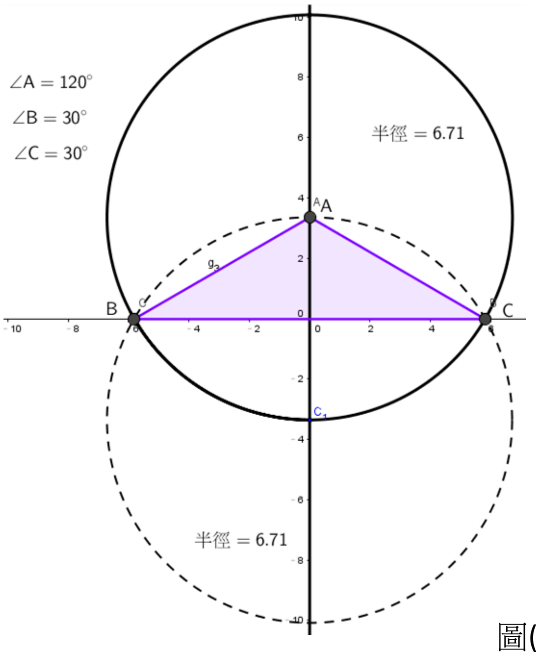
(四)當$\angle A = 120^{\circ}$，$\angle B = \angle C = 30^{\circ}$，即$\angle A = 120^{\circ}$的等腰Δ時，切割點P的圖形如何呢?

定理十九:

等腰Δ ABC中，若$\angle A = 120^{\circ}$，$\angle B = \angle C = 30^{\circ}$，如圖(53)，使三尤拉線共點的P點軌跡有三處:

(1) Δ ABC的外接圓(虛線)。

(2)以A點為圓心，腰長為半徑的圓(實線)，其半徑與外接圓(虛線)的半徑一樣大
(3)$\overline{BC}$的中垂線(實線)。



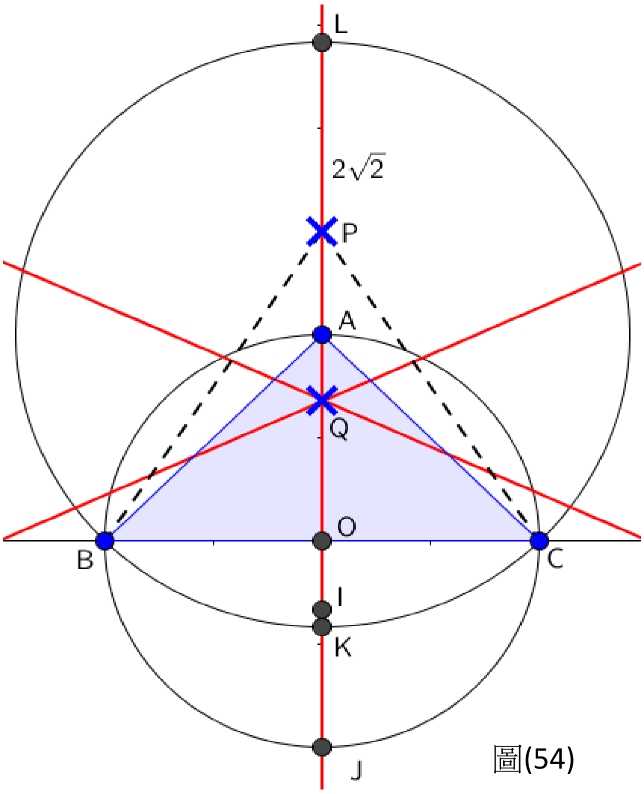
圖(53)

發現六:

這兩個相等圓的半徑用△ABC的三邊長表示為$\frac{\overline{AB}}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\overline{AB}$，其圓心一個在△ABC的外心處，一個在頂點A。

五、在一般非正△的等腰△上，切割點P和共點Q的互動探討

(一)等腰△的切割點P的軌跡，如前文所示都可以用尺規作圖畫出來，為了方便觀察P、Q的互動關係，我們利用直角坐標系統，並取等腰直角△來探討，以便充分掌握其數學性。觀察下圖(54):



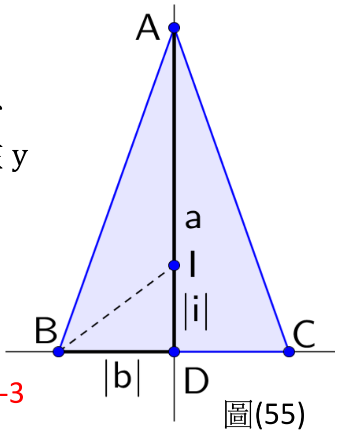
圖(54)

發現七:

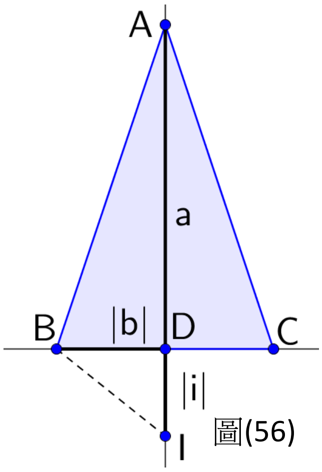
如上圖(54)，P在底邊中垂線上移動時，有一處位置(設此點位於I)可使三尤拉線互相平行，此時Q點消失。

證明:

令非正Δ的等腰Δ $A(0,a)$、$B(b,0)$、$C(-b,0)$，$a>0$、$b<0$，設P 為在 y 軸上的一個點，D 點則為$\overline{BC}$中點，∴ D(0,0)，P在底邊中垂線上移動時有一點I可使三尤拉線互相平行，計算如下:



圖(55)



圖(56)

設此點為I(0, i)，使用預備定理 0-3

如果$i>0$，如圖(55)

$\angle BIA > 90°$、$\angle BAI < 90°$， $\tan(\angle BIA)\times\tan(\angle BAI) < 0 \neq 3$

如果$i<0$，$\angle BIA < 90°$、$\angle BAI < 90°$， $\tan(\angle BIA)\times\tan(\angle BAI) > 0$ 有可能$=3$

如圖(56)，$\tan(\angle BAI)=\left|\frac{b}{a}\right|$，$\tan(\angle BIA)=\left|\frac{b}{i}\right|$， 令$\left|\frac{b}{a}\right|\times\left|\frac{b}{i}\right|=3$ 即$\frac{b^2}{|ai|}=3$

得$|i|=\frac{b^2}{3|a|}=\frac{b^2}{3a}$，而$i<0$，∴ $i=-\frac{b^2}{3a}$

(在已知a、b條件下可以用**尺規作圖**畫出$|i|$長的線段來，故可作出此I點。見附件八)

因P在大圓上時，Q恆在A；P在外接圓上時，Q恆在O。故只討論P在中垂線上由上往下移動即可。

當P從中垂線上方往下移動時，Q點也跟著往下方移動，

P在L點時，Q在A點； (L是圓A和y軸的交點)

P在O點時，Q也在O點； (O是Δ ABC的外心)

P在I點時，Q點消失； ($\tan(\angle BAI)\times\tan(\angle BIA)=3$，三尤拉線平行或重合y軸)

P在K點時，Q在A點； (K是圓A和y軸的交點，Q在消失後又從上方出現並往下追P)

P在J點時，Q在O點； (J是Δ ABC的外接圓和y軸的交點)

P再向下方移動時，Q點隨後跟著往下方移動。從上述文字描述中P，Q互相纏繞競逐，關係非常複雜，為讓讀者容易了解，我們令P在y軸上的位置= x、Q在y軸上的位置= y，計算列表(1)、(2)如下：

P	從y軸上方往下	L	O	I	K	J	從J點繼續往下
Q	跟著往下	A	O	無限遠處	A	O	隨後跟著往下

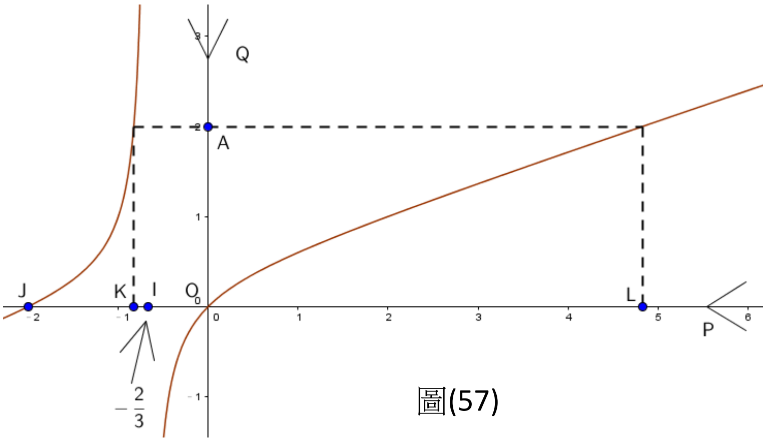
表(1)

x	$2+2\sqrt{2}$	0	$-\frac{2}{3}$	$2-2\sqrt{2}$	-2
y	2	0	無限遠處	2	0

表(2)

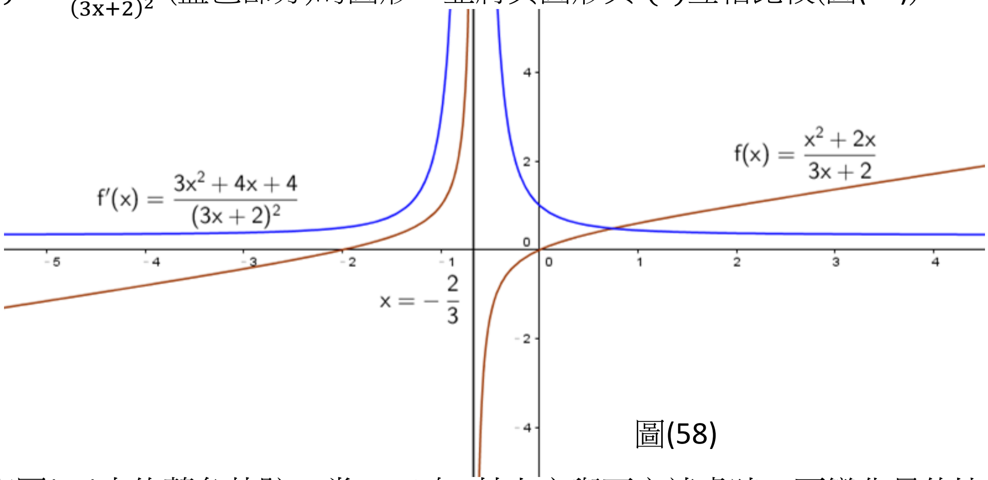
由表(2)的資料，與計算Δ PAB 尤拉線的 y軸截距，推得x、y的關係式為:$y=\frac{x^2+2x}{3x+2}$

明顯的，此關係式為二元二次方程式，圖示如圖(57):



圖(57)

在圖(57)中可以看出平時P、Q移動平緩，但當P點接近$-\frac{2}{3}$時，Q點急速移動，非常有趣。藉由函數導數可以描述「一個函數在一點附近的變化率」的特性，我們繪出了$f'(x)=\frac{3x^2+4x+4}{(3x+2)^2}$(藍色部分)的圖形，並將其圖形與f(x)互相比較(圖(58))。



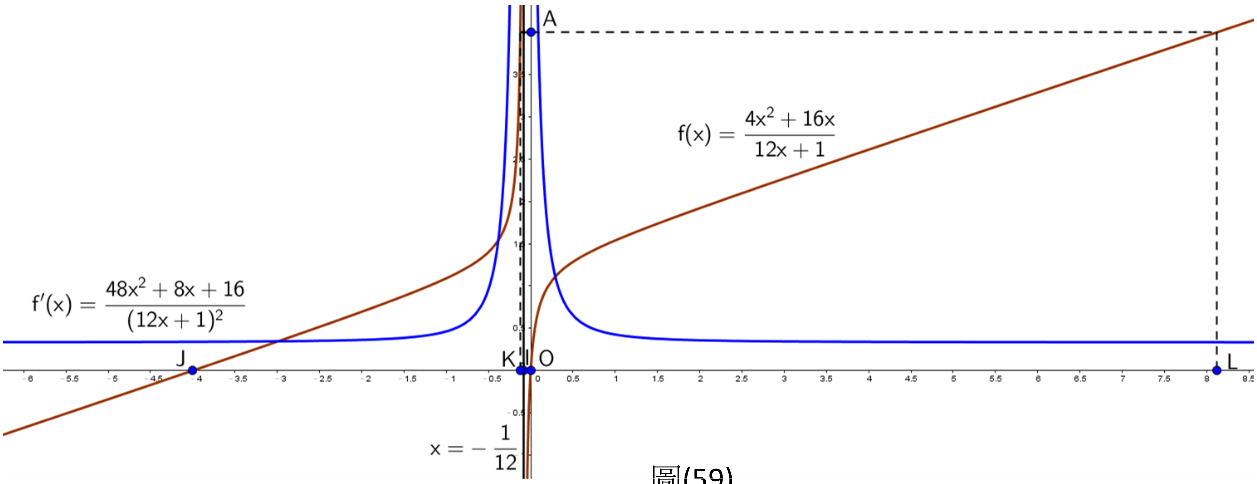
圖(58)

觀察圖(58)中的藍色軌跡，當P、Q在y軸上方與下方遠處時，兩變化量的比值幾乎是一個定值，表示P、Q接近等速移動，但當P接近$(0,-\frac{2}{3})$，Q的變化量逐漸變大，直到P非常接近$(0,-\frac{2}{3})$，Q點速率接近無限大，即Q點高速移動。

(二)計算△ PAB 尤拉線的 y軸截距，也可以得到對於所有其他等腰△的P，Q關係式。

發現八:

對於非正△的任意等腰△(A(0, a)、B(−b, 0)、C(b, 0))之P、Q互動關係式為$y=\frac{a^2x+ax^2}{b^2+3ax}$。例如之前算過的非等腰△ A(0,4)、B(−1,0)、C(1,0)之圖形如圖(59)，當P接近$(0,-\frac{1}{12})$時，Q點高速離開:



圖(59)

六、一般△中的切割點「I」存在性探討:

(一)一般非正△應該存在一個「I」點，可讓三個切割△的尤拉線都和原△尤拉線平行，以三邊長為3、4、5的直角△為例，如圖(60)，步驟如下:

(1)計算出原△的尤拉線為: $y=ax+b$

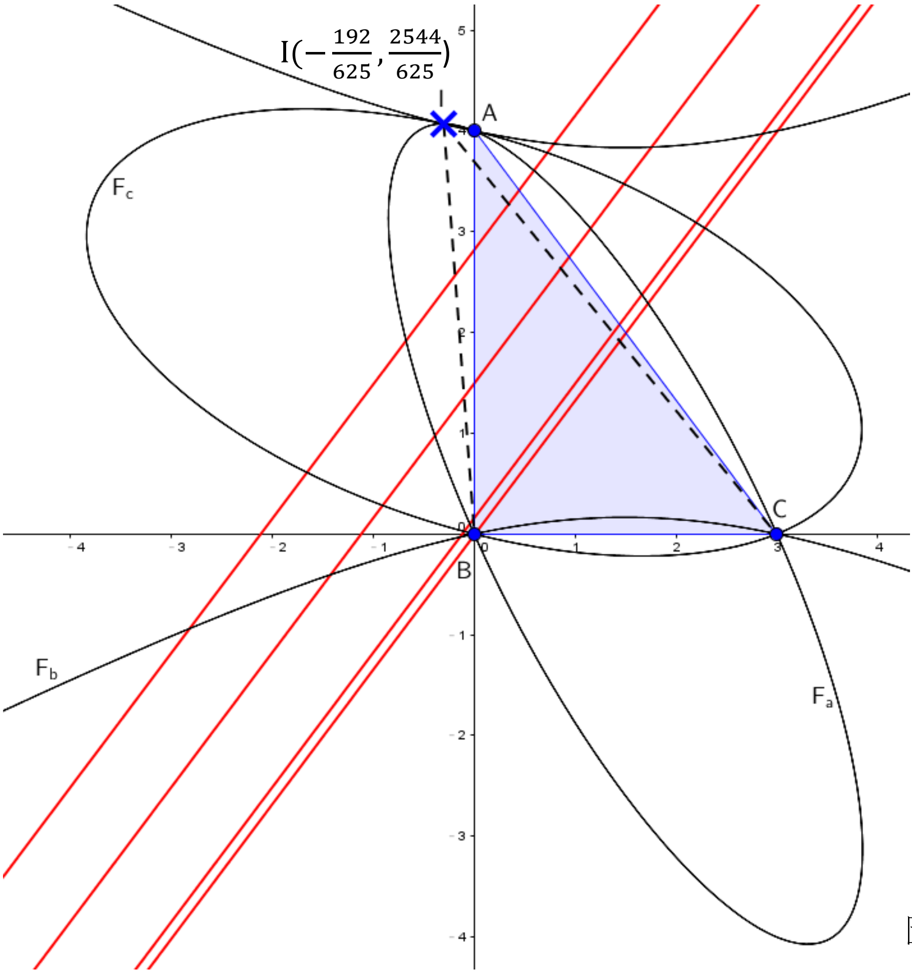
(2)取$P(s,t)$，計算△ PAB的尤拉線:$y=a_1x+b_1$

(3)令$a_1=a$，以x、y替換s、t算出二元二次方程式$F_c: 2x^2+3xy+6y^2-6x-24y=0$ 此為一個橢圓圖形

(4)同理算出△ PAC相關的二元二次方程式$F_b: -11x^2+39y^2+33x-156y=0$ 此為一個雙曲線圖形

(5)再同理算出△ PBC相關的二元二次方程式$F_a: -9x^2-8xy-3y^2+27x+12y=0$ 此為一個橢圓圖形

(6)設F_a、F_b、F_c三曲線交於I點，則此切割點I必能使四條(含母△的)尤拉線平行

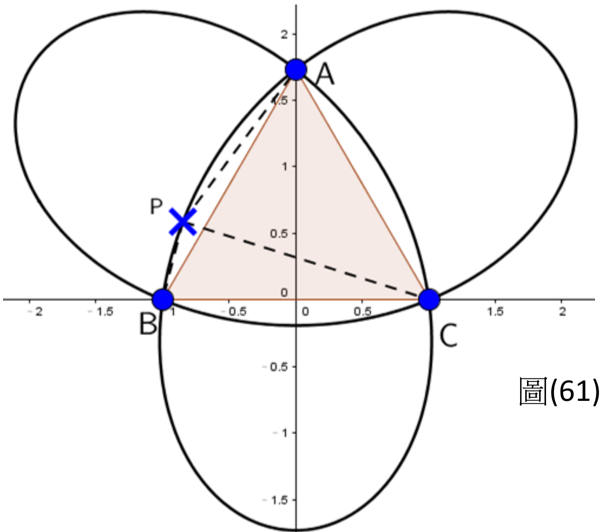


圖(60)

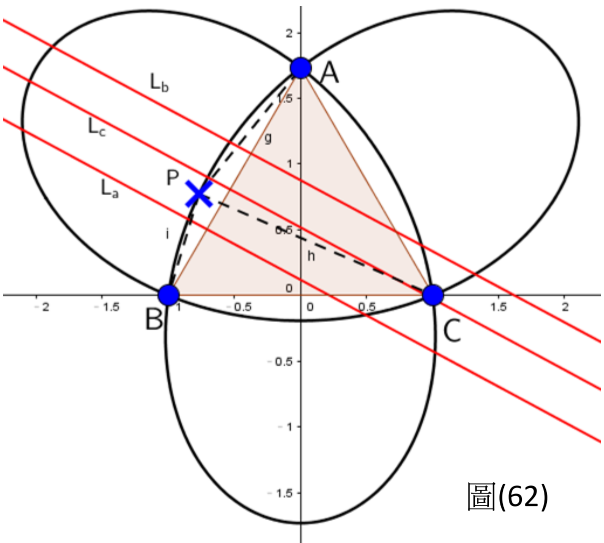
(二)正∆的I點有無限多個

利用三尤拉線的斜率相等的方法，得I點方程式如下，並繪出圖形，如圖(61)、(62)

$$-9x^4-9y^4-18x^2y^2+8\sqrt{3}y^3+24\sqrt{3}x^2y+18x^2+30y^2-24\sqrt{3}y-9=0$$



圖(61)



圖(62)

驗證上圖中所有黑色實線曲線上的P點都是I點:

1.取$x=1$ (鉛直線)代入，得y有三個可能:0、$\frac{4\sqrt{3}\pm2\sqrt{39}}{9}$

2.當取I(1,0)時，因為(1,0)為原∆之一頂點，不能當作切割點

3.當取$I(1,\frac{4\sqrt{3}+2\sqrt{39}}{9})$時，求出三尤拉線，得斜率相等，故皆平行

4.當取$I(1,\frac{4\sqrt{3}-2\sqrt{39}}{9})$時，求出三尤拉線，得斜率相等，故平行。(詳細過程見附件九)

討論:

圖(61)中，I點的軌跡經過我們在網路上查證，得知為一種擺線。(詳見附件十)

(三)除了等腰∆外，有沒有一種∆，它的「I」點可以直接用尺規作圖畫出來?

1.已知: $\triangle ABC$中，$\angle B = 60°$、$\overline{BA} \neq \overline{BC}$，如圖(63)

求作: 作出$\triangle ABC$的「I」點

作法: (1)過A作直線$L_1 \parallel \overline{BC}$

(2)過C作直線$L_2 \parallel \overline{AB}$，設$L_1$、$L_2$交於「I」，則點I即為所求

證明: (1)連$\overline{IB}$

(2)在$\triangle ABC$中，$\because \angle B = 60°$，由預備定理 0-1 知$\therefore \triangle ABC$的尤拉線L和$\overleftrightarrow{BC}$的夾角為$60°$，因$\overline{AI} \parallel \overline{BC}$，$\therefore$該尤拉線也和$\overline{AI}$的夾角為$60°$

(3)在$\triangle IAC$中，$\because \angle AIC = 60°$，$\therefore$由預備定理 0-1 知$\triangle IAC$的尤拉線$L_b$和$\overleftrightarrow{AI}$的夾角為$60°$

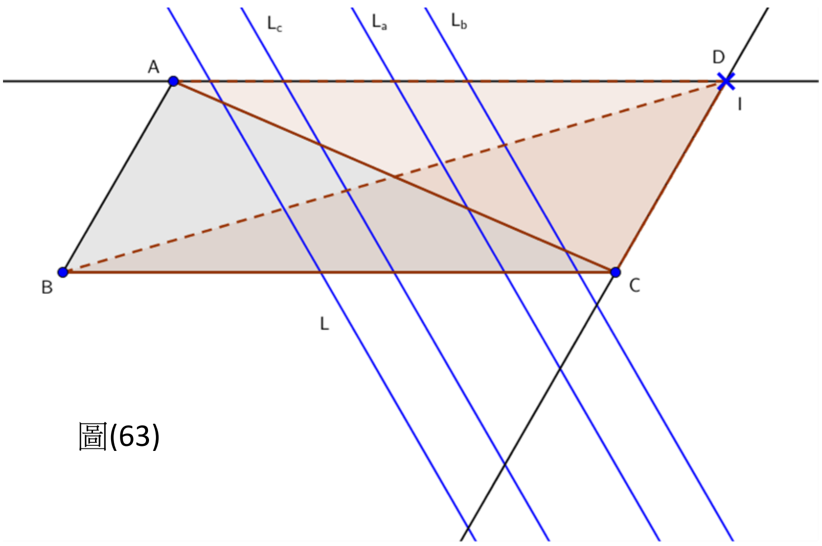
(4)在$\triangle IAB$中，$\because \angle IAB = 120°$，$\therefore$由預備定理 0-2 知$\triangle IAB$的尤拉線$L_c$和$\overleftrightarrow{AI}$的夾角為$120°$

(5)在$\triangle IBC$中，$\because \angle ICB = 120°$，$\therefore$由預備定理 0-2 知$\triangle IBC$的尤拉線$L_a$和$\overleftrightarrow{BC}$的夾角為$120°$

(6)由(2)、(3)、(4)、(5)知$L \parallel L_a \parallel L_b \parallel L_c$，四尤拉線互相平行

定理二十:

在非正∆的$\triangle ABC$中，若$\angle B = 60°$，且 ABCD 為平行四邊形，則點「I」位在D點處，如圖(63):



圖(63)

2.已知: $\triangle ABC$中，$\angle B = 120°$，如圖(64)

求作: 作出$\triangle ABC$的「I」點

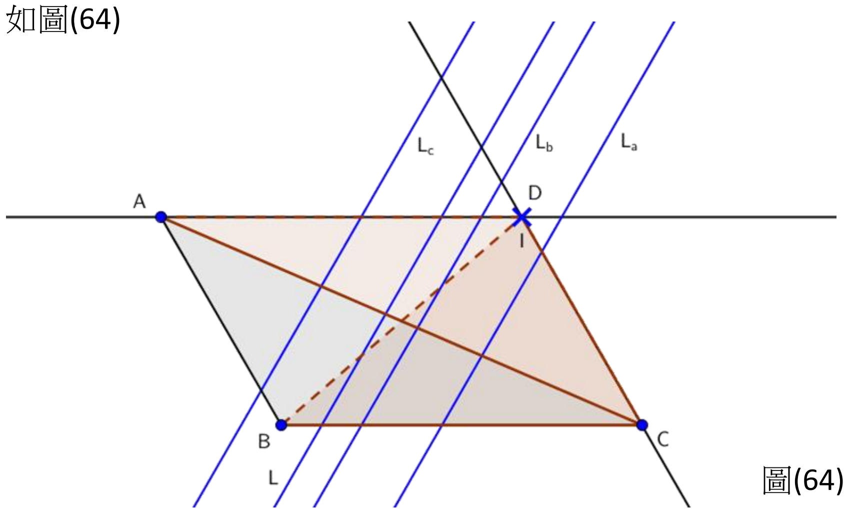
作法: (1)過A作直線$L_1 \parallel \overline{BC}$

(2)過C作直線$L_2 \parallel \overline{AB}$，設$L_1$、$L_2$交於「I」，則點I即為所求

證明: 同前文，利用預備定理 0-1、0-2 可證。

定理二十一:

在非正$\triangle$的$\triangle ABC$中，若$\angle B = 120°$，且 ABCD 為平行四邊形，則點「I」位在D點處，如圖(64)



圖(64)

討論:

非正三角形、只有一內角為60°的$\triangle$及只有一內角為120°的$\triangle$，它們的「I」點可直接用尺規作圖畫出來。因此在有一內角為60°或120°的$\triangle$中，可用尺規作圖畫出的切割點又多了一個，合計共二十一個。

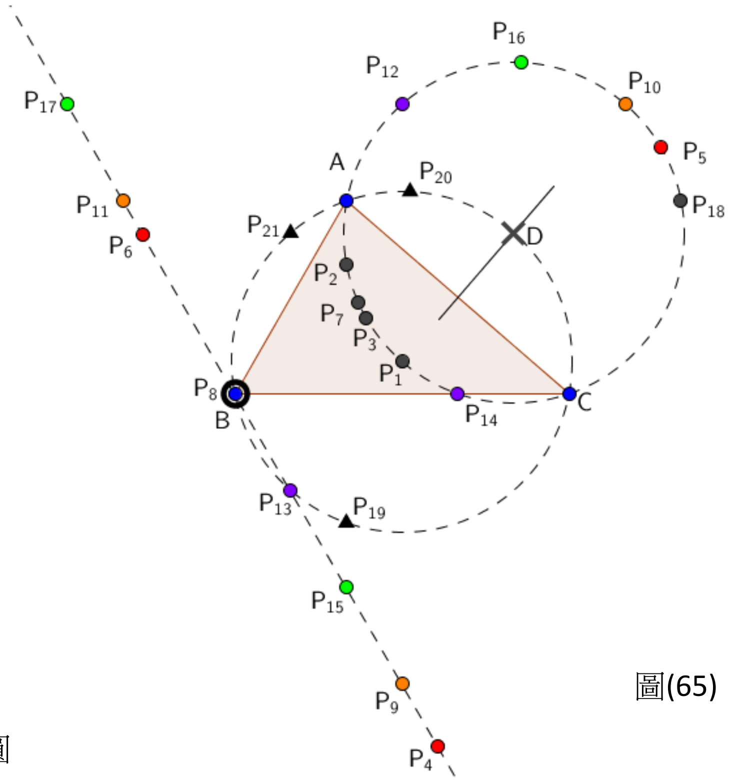
七、利用尺規作圖將一內角為60°或 120°的$\triangle$中所有的P點畫出來，P點對應如下表(3):

P_1:外心	P_6:旁心c	P_{11}:外接正$\triangle$ 3	P_{16}:邊對稱點B
P_2:垂心	P_7:外費馬點	P_{12}:內接正$\triangle$ 1	P_{17}:邊對稱點C
P_3:內心	P_8:內費馬點	P_{13}:內接正$\triangle$ 2	P_{18}:平行四邊形第四頂點
P_4:旁心 a	P_9:外接正$\triangle$ 1	P_{14}:內接正$\triangle$ 3	P_{19}:垂心邊對稱點1
P_5:旁心 b	P_{10}:外接正$\triangle$ 2	P_{15}:邊對稱點A	P_{20}:垂心邊對稱點2
			P_{21}:垂心邊對稱點3

表(3)

定理二十二:

在$\triangle ABC$中，若$\angle B = 60°$則利用尺規作圖可畫出完整切割點P的圖形，並發現有 12 個在封閉曲線變成的圓上，有 8 個在外接圓上，有 9 個在開放曲線變成的直線上。如圖(65)



圖(65)

做法:

(1)做出△ ABC的外接圓

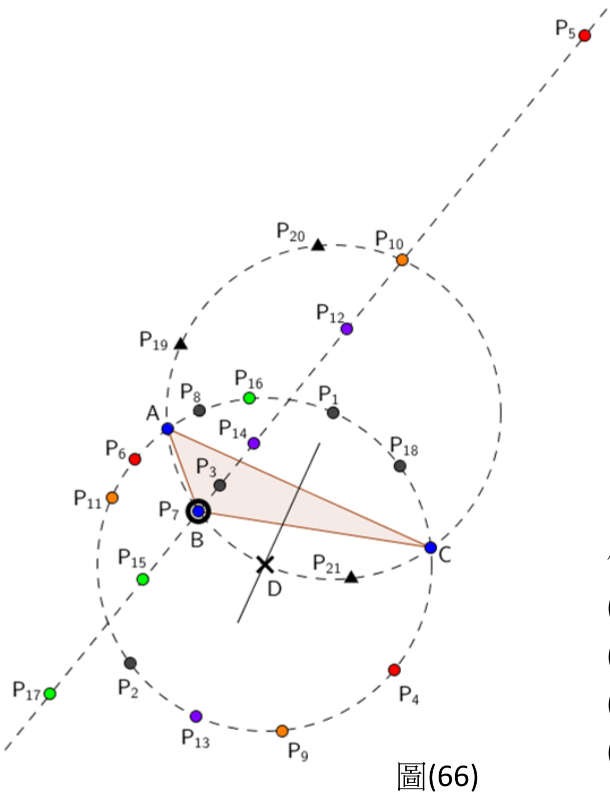
(2)作$\overline{AC}$中垂線交外接圓於D

(3)以D為圓心，$\overline{AD}$為半徑，畫圓。

(4)做出P_{15}點，並畫出$\overline{BP_{15}}$，如圖(65)即為所求。

定理二十三:

在△ ABC中，若$\angle B = 120°$則利用尺規作圖可畫出完整切割點P的圖形，並發現有 12 個在封閉曲線變成的圓上，有 8 個在外接圓上，有 9 個在開放曲線變成的直線上。如圖(66)



圖(66)

做法:

(1)做出△ ABC的外接圓

(2)作$\overline{AC}$中垂線交外接圓於D

(3)以D為圓心，$\overline{AD}$為半徑，畫圓。

(4)做出P_{15}點，並畫出$\overline{BP_{15}}$，如圖(66)即為所求。

伍、未來展望

一、我們希望更進一步研究任意三角形的「I」點，有關於已經研究的部分，詳見附件十一。

二、猜測一個四邊形中有P、Q的存在。我們發現菱形、矩形、等腰梯形、有外接圓存在的四邊形中，P有無限多個。有的四邊形中，P有意義但不一定有無限多個，如:對角線呈直角的四邊形，對角線交點即為P。其它的不規則四邊形P點軌跡都是散狀分布、乍看之下不成圖形，對應的Q也是。我們想進一步探討:

(一)P的數量和內角角度是否有關?

(二)有內角是60°、120°的四邊形是否影響P的個數、P、Q的圖形?內角小於、大於60°、120°是否影響P的個數?

(三)還有沒有其他種類的四邊形，其P有意義或有無限多個?

陸、結論

一、切割點P落在任一非正△之△的外心、內心、垂心、旁心、邊的外接正△頂點、邊的內接正△頂點、外費馬點、內費馬點時，切割出的三個子△之尤拉線皆共點；且這些共點之點都位在原△的尤拉線上。

二、在△ ABC中，若$\tan B \times \tan C \neq 3$，且A'為A點以$\overline{BC}$為對稱軸的對稱點，則以A'為切割點的三條尤拉線必共點，且此共點位在原△的尤拉線上。在B'、C'時亦同。

三、P點軌跡整理:

不等腰△

<table>
<tr><th>△內角條件
軌跡三部分</th><th>$120^{\circ} > \angle A > \angle B \neq 60^{\circ} > \angle C$</th><th>$120^{\circ} > \angle A > \angle B = 60^{\circ} > \angle C$</th></tr>
<tr><td>外接圓</td><td colspan="2">所有軌跡皆包含外接圓</td></tr>
<tr><td>封閉曲線</td><td>過A、C的卵形曲線</td><td>過A、C的圓</td></tr>
<tr><td>開放曲線</td><td>過B的曲線</td><td>過B的直線</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>$\angle A > 120^{\circ}$，$\angle B > \angle C$</th><th>$\angle A = 120^{\circ} > \angle B > \angle C$</th></tr>
<tr><td colspan="2">所有軌跡皆包含外接圓</td></tr>
<tr><td>過A、B的卵形曲線</td><td rowspan="2">合併成一圓及一直線</td></tr>
<tr><td>過C的曲線</td></tr>
</table>

等腰△

<table>
<tr><th>△內角條件
軌跡三部分</th><th>$120^{\circ} > \angle A > \angle B = \angle C$</th><th>$\angle A > 120^{\circ}$，$\angle B = \angle C$</th></tr>
<tr><td>外接圓</td><td colspan="2">所有軌跡皆包含外接圓</td></tr>
<tr><td>封閉曲線</td><td rowspan="2">合併成一圓與一直線，且此圓的半徑大於外接圓的半徑</td><td rowspan="2">合併成一圓與一直線，且此圓的半徑小於外接圓的半徑</td></tr>
<tr><td>開放曲線</td></tr>
</table>

$\angle A=120^{\circ}$，$\angle B=\angle C=30^{\circ}$	$\angle A=\angle B=\angle C=60^{\circ}$
所有軌跡皆包含外接圓	全平面
合併成一圓與一直線，且此圓的半徑等於外接圓的半徑	

四、Q點軌跡整理:

最大角大小	$\leq 120^{\circ}$	$> 120^{\circ}$	$= 60^{\circ}$
等腰	整條原△尤拉線	整條原△尤拉線的上下兩部分	全平面
不等腰		整條原△尤拉線的上、中、下三部分	

五、在等腰△的P、Q關係中，當P由對稱軸上方往下移動時，Q點卻先往下到無限遠再跳到上方無限遠出現往下方追向P。使尤拉線群平行的唯一 P 點位在 I。

六、在非正△的△ ABC中，若$\angle B=60^{\circ}$或 120°，以$\overline{AB}$、$\overline{BC}$為平行四邊形的兩邊，作出平行四邊形ABCD，則D點就是能使四尤拉線平行的切割點「I」。

七、一般非正△只有 1 個I點，正△則有無限多個I點。

八、可用尺規作圖法畫出的P點整理:

△特性	可用尺規作圖做出的P點
只有一內角為60°的△	可以全部作出
一內角為120°的△	可以全部作出
等腰△(頂角$\neq 60^{\circ}$)	可以全部作出
正△	整個平面
兩底角正切值為 3 的△	外接圓與 21 點(其I即為A')
不等腰、內角非60°或120°、尤拉線不平行底邊的△	外接圓與 20 點

柒、參考資料及其他

一、翰林版 國三上、國二下 數學課本

二、數學傳播　張海潮 撰　33卷2期pp. 48 – 51

三、組合幾何　單墫 著　2006年　九章出版社

四、幾何明珠　黃家禮 著　2001年　九章出版社

【評語】030406

作者們針對所提出的問題，給出了完整的解答，說明清楚，分析問題想法精簡而有效；能利用 Geogebra 軟體，建立滑桿模型，利用直角坐標，解析化簡二元高次方程式，並嘗試因式分解在特定圖形下的高次方程式以供分解圖形檢視印證十分難得。最後藉由等腰∆來探討 P、Q 競逐關係及速率的相對變化，亦非常有趣。