

# 中華民國第 56 屆中小學科學展覽會 作品說明書

---

國中組 數學科

030405

怎麼排？

學校名稱：臺中市立大雅國民中學

作者：  國二 洪稔宗  國二 陳羿君  國二 翁思婷	指導老師：  蔡德吉
-----------------------------------------------	------------------

關鍵詞：最要容器、最省空間、最密排列

## 摘要

本研究目的主要探討：矩形瓶、圓瓶、八角瓶、六角瓶和三角瓶等各種飲料瓶分別以「方」形和「巢」形排法時空間使用率之比較。研究假設置物架為矩形，瓶子高度也相同，故將空間的使用率簡化成瓶子總底面積占置物架總面積之百分比。

研究結果：

一、同種排法、各種瓶子使用率比較：

1、方形：矩形瓶 > 圓弧瓶 > 圓瓶 > 八角瓶 > 六角瓶 > 三角瓶。

2、巢形：三角瓶 > 六角瓶 > 圓瓶 > 八角瓶。矩形瓶、圓弧瓶無比較。

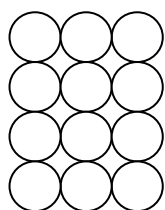
二、相同瓶子、兩種排法使用率比較：

整體上來說，行、列數愈多，則巢形排列的使用率高於方形排列。如果以市售的 1 箱(24 瓶)為例，最常見的圓瓶為巢形排法使用率較高，即可以改用比較小的外盒裝滿。而八角瓶則是方形排列的使用率較高。

## 壹、研究動機

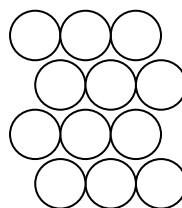
曾有次在資源回收時，處理同學喝完的礦泉水寶特瓶時，發現容器的形狀不盡相同，而為了少走幾趟，就會想辦法如何在回收籃子裡裝下最多的寶特瓶；所以，當我去便利商店時，都會注意其置物架上寶特瓶的排法，尤其是圓形寶特瓶的放置方式。不過，有些商家是方方正正整齊的排法 - 如圖(一)，本研究以「方」形排法稱之；有些則是交錯蜂巢形的排法 - 如圖(二)，本研究以「巢」形排法稱之，如果是以節省空間為前提，圓形的寶特瓶應該要怎麼排才能最有效率呢？詢問老師後，老師建議可以此問題做為研究的題目，就在老師的協助下，針對這個題目做深入的探討。

「方」形排法



圖一

「巢」形排法



圖二

## 貳、研究目的

本研究的目的是在探討各種飲料瓶在兩種不同排法時的空間使用率。

## 參、研究限制

假設置物架為矩形，因為瓶子的高度都一樣，我們將空間的使用率簡化成總底面積佔置物架總面積之百分比，且我們假設飲料瓶正好裝滿置物架上的空間，因此我們只考慮圓瓶間的空隙對使用率的變化。如下列式子所示：

$$\text{飲料瓶的空間使用率}(E) = \frac{\text{飲料瓶總面積}}{\text{置物架總面積}} \times 100\%$$

## 肆、研究過程與結果

在市面上最常見的瓶子底面形狀為圓形，另外尚有八邊形等...，但以整個平面來說，理論上可以鋪滿整個平面的圖形為矩形、正六邊形和正三角形。因此，以下我們分別將討論矩形瓶、圓形瓶、八角瓶、六角瓶和正三角形等飲料罐兩種不同排法和使用率的關係：

### 一、矩形瓶的空間使用率

若假設矩形瓶正好裝滿置物架上的空間，一個接一個，之間沒有間隙，則其使用率是可以為 100%。

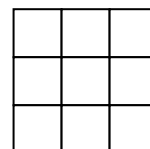


圖 2-1

## 二、圓瓶的空間使用率

設圓瓶數量為  $N$ ，半徑  $r$ ，置物架的長為  $a$ ，寬為  $b$ ，則空間使用率 ( $E$ ) 為圓瓶總底面積佔置物架總面積之百分比。(令直行數為  $n$ ，即寬為  $b$  的一邊放的瓶子數目；橫行數為  $m$ ，即長為  $a$  的一邊放的瓶子數目，則圓瓶數量( $N$ )=橫行數( $m$ )×直行數( $n$ )。)

$$\text{即 } E(\text{圓瓶}) = \frac{N(\pi r^2)}{ab} \times 100\% \dots\dots\dots(*)$$

以下分別計算兩種不同排列方法的空間使用率：

### (一)、「方」形排法

如圖 2-2a 所示，可得  $m = \frac{a}{2r}$ ， $n = \frac{b}{2r}$

$$N = \left(\frac{a}{2r}\right) \times \left(\frac{b}{2r}\right) = \frac{ab}{4r^2} \text{ 代入} (*)$$

得方形排法的空間使用率

$$E(\text{方}) = \frac{ab}{4r^2} \times \frac{\pi r^2}{ab} = \frac{\pi}{4} \approx 79\%$$

值得注意的是，此種排法的空間使用率並不受  $a$ 、 $b$  和  $r$  的值所影響。也就是說其空間使用率固定約為 79%。

### (二)、「巢」形排法

如圖 2-2b，相鄰兩橫行圓瓶圓心之間的最短距離為  $\sqrt{3}r$ 。

令橫行數為  $m$

$$\text{則 } a = 2r + (m-1) \times \sqrt{3}r, \text{ 可得 } m = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{a}{r} - 2\right)$$

令直行數目為  $n$

$$\text{則 } b = (2n+1)r, n = \frac{1}{2} \left(\frac{b}{r} - 1\right)$$

圓瓶總數( $N$ )=橫行數( $m$ )×直行數( $n$ )

$$N = \frac{1}{2} \left(\frac{b}{r} - 1\right) \left[1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{a}{r} - 2\right)\right] \text{ 代入} (*)$$

$$\text{得 } E(\text{巢}) = \frac{\frac{\pi}{2} \left(\frac{b}{r} - 1\right) \left[1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{a}{r} - 2\right)\right]}{\left(\frac{a}{r}\right) \left(\frac{b}{r}\right)} \times 100\%$$

由以上可知  $E(\text{巢})$  的值和  $\frac{a}{r}$ 、 $\frac{b}{r}$  的值有關

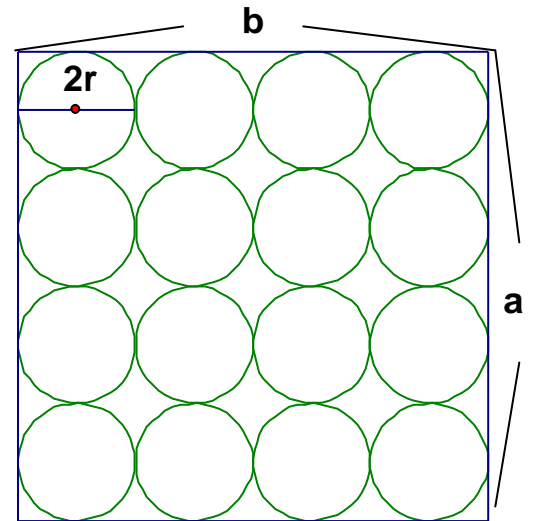


圖 2-2a

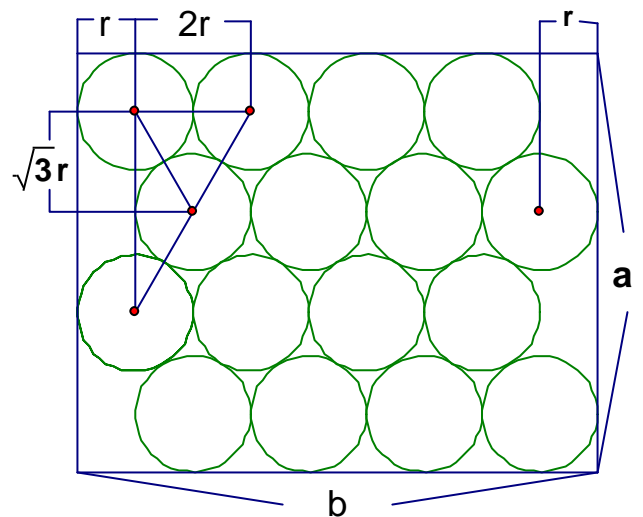


圖 2-2b

以下列出各  $\frac{a}{r}$ 、 $\frac{b}{r}$  值的空間使用率，如表 1：

表 1 圓瓶「巢」形排法  $\frac{a}{r}$ 、 $\frac{b}{r}$  值和空間使用率的關係

$\frac{b}{r} \backslash \frac{a}{r}$	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
4	68%	71%	73%	74%	75%	76%	77%	78%	78%	79%	79%	79%	80%	80%	80%	80%	81%	81%
5	69%	72%	74%	75%	76%	77%	78%	79%	79%	80%	80%	80%	81%	81%	81%	82%	82%	82%
6	69%	72%	74%	76%	77%	78%	79%	79%	80%	80%	81%	81%	82%	82%	82%	82%	83%	83%
7	70%	73%	75%	76%	78%	78%	79%	80%	81%	81%	81%	82%	82%	82%	83%	83%	83%	83%
8	70%	73%	75%	77%	78%	79%	80%	80%	81%	81%	82%	82%	82%	83%	83%	83%	83%	84%
9	70%	73%	75%	77%	78%	79%	80%	81%	81%	82%	82%	82%	83%	83%	83%	84%	84%	84%
10	71%	74%	76%	77%	78%	79%	80%	81%	81%	82%	82%	83%	83%	83%	84%	84%	84%	84%
11	71%	74%	76%	77%	79%	80%	80%	81%	82%	82%	83%	83%	83%	84%	84%	84%	84%	84%
12	71%	74%	76%	78%	79%	80%	81%	81%	82%	82%	83%	83%	83%	84%	84%	84%	84%	85%
13	71%	74%	76%	78%	79%	80%	81%	81%	82%	82%	83%	83%	84%	84%	84%	84%	85%	85%
14	71%	74%	76%	78%	79%	80%	81%	82%	82%	83%	83%	83%	84%	84%	84%	85%	85%	85%
15	71%	74%	76%	78%	79%	80%	81%	82%	82%	83%	83%	84%	84%	84%	84%	85%	85%	85%
16	71%	74%	76%	78%	79%	80%	81%	82%	82%	83%	83%	84%	84%	84%	84%	85%	85%	85%
17	71%	74%	77%	78%	79%	80%	81%	82%	82%	83%	83%	84%	84%	84%	85%	85%	85%	85%
18	71%	74%	77%	78%	79%	80%	81%	82%	82%	83%	83%	84%	84%	84%	85%	85%	85%	85%
19	72%	75%	77%	78%	79%	80%	81%	82%	83%	83%	83%	84%	84%	84%	85%	85%	85%	85%
20	72%	75%	77%	78%	80%	81%	81%	82%	83%	83%	84%	84%	84%	85%	85%	85%	85%	85%
21	72%	75%	77%	78%	80%	81%	81%	82%	83%	83%	84%	84%	84%	85%	85%	85%	85%	85%
22	72%	75%	77%	78%	80%	81%	81%	82%	83%	83%	84%	84%	84%	85%	85%	85%	85%	86%
23	72%	75%	77%	78%	80%	81%	81%	82%	83%	83%	84%	84%	84%	85%	85%	85%	85%	86%
24	72%	75%	77%	78%	80%	81%	82%	82%	83%	83%	84%	84%	84%	85%	85%	85%	85%	86%
25	72%	75%	77%	79%	80%	81%	82%	82%	83%	83%	84%	84%	84%	85%	85%	85%	85%	86%
26	72%	75%	77%	79%	80%	81%	82%	82%	83%	83%	84%	84%	84%	85%	85%	85%	85%	86%
27	72%	75%	77%	79%	80%	81%	82%	82%	83%	83%	84%	84%	85%	85%	85%	85%	86%	86%
28	72%	75%	77%	79%	80%	81%	82%	82%	83%	83%	84%	84%	85%	85%	85%	85%	86%	86%
29	72%	75%	77%	79%	80%	81%	82%	82%	83%	83%	84%	84%	85%	85%	85%	85%	86%	86%
30	72%	75%	77%	79%	80%	81%	82%	82%	83%	83%	84%	84%	85%	85%	85%	85%	86%	86%

轉換成橫行數(m)和直行數(n)和空間使用率的關係如表 1-1：

表 1-1 圓瓶「巢」形排法 m、n 和空間使用率的關係

m \ n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	68%	73%	75%	77%	79%	80%	80%	81%	82%	82%
3	69%	74%	77%	79%	80%	81%	82%	82%	83%	83%
4	70%	75%	78%	80%	81%	82%	82%	83%	83%	84%
5	70%	75%	78%	80%	81%	82%	83%	83%	84%	84%
6	71%	76%	79%	80%	82%	83%	83%	84%	84%	85%
7	71%	76%	79%	81%	82%	83%	84%	84%	85%	85%
9	71%	76%	79%	81%	82%	83%	84%	84%	85%	85%
9	71%	76%	79%	81%	82%	83%	84%	84%	85%	85%
10	71%	77%	79%	81%	82%	83%	84%	85%	85%	85%
11	72%	77%	80%	81%	83%	84%	84%	85%	85%	86%
12	72%	77%	80%	81%	83%	84%	84%	85%	85%	86%

由表 1-1 可知，若圓瓶直行數(n)少於 3 個；或直行數為 4 個，橫行數(m)少於 11 個；或直行數為 5 個，橫行數少於 4 個；或直行數 6 個，橫行數少於 3 個，以「方」形排法的空間使用率較高，也就是說，此時以「方」形排法的瓶子數目可能會比較多。不過，當橫行數或直行數增加時，以「巢」形排法的空間使用率也會隨著增加，即數目愈多時，以「巢」形排法可以放的瓶子可能比較多。

整理如下圖 1-1

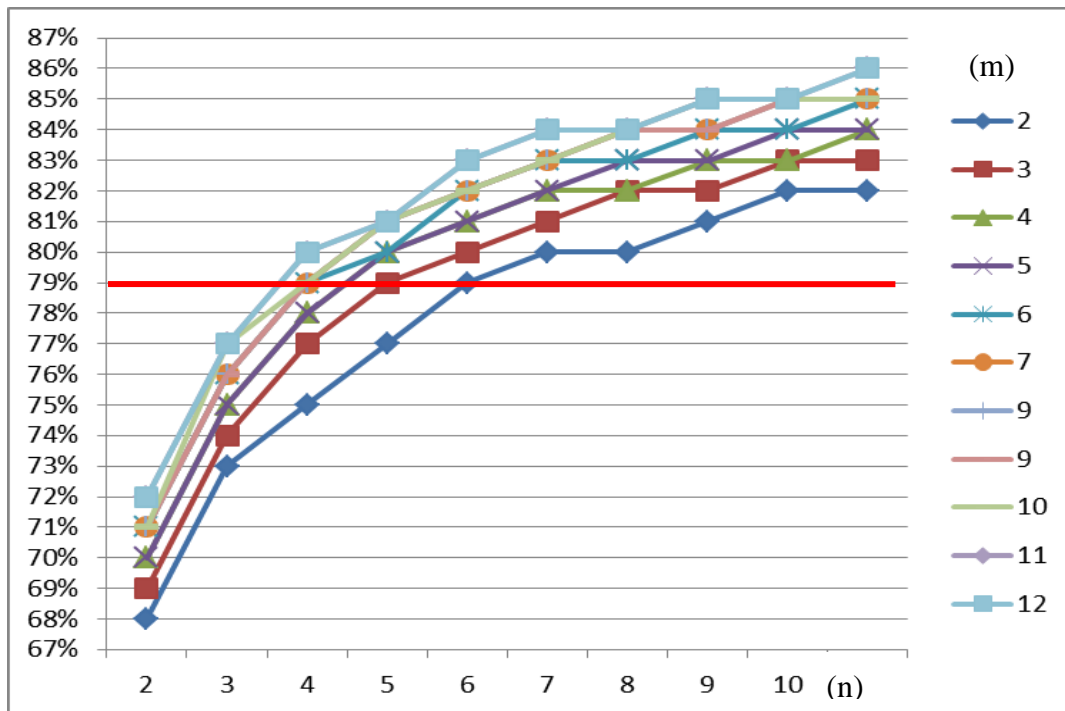


圖 1-1 圓瓶「方」和「巢」形排法空間使用率的比較

## 二、正六角瓶不同排列的使用率

市面上很少看到六角形的寶特瓶，不過，在此仍列出其空間使用率，以供參考。設正六角瓶數量為  $N$ ，邊長為  $r$ ，置物架的長亦為  $a$ ，寬為  $b$ ，則空間使用率（ $E$ ）為六角瓶總底面積佔置物架總面積之百分比。（令直行數為  $n$ ，即寬為  $b$  的一邊放的瓶子數目；橫行數為  $m$ ，即長為  $a$  的一邊放的瓶子數目，則正六角瓶數量( $N$ )=橫行數( $m$ )×直行數( $n$ )。）

$$\text{正六角瓶面積} = \frac{3\sqrt{3}}{2} r^2$$

$$\text{即 } E(\text{六角瓶}) = \frac{N(\frac{3\sqrt{3}}{2} r^2)}{ab} \times 100\% \dots\dots(**)$$

### (一)、「方」形排法

如圖 2-2a 所示： $a = m \times \sqrt{3}r$ ，得  $m = \frac{a}{\sqrt{3}r}$ ，

$b = n \times 2r$ ，得  $n = \frac{b}{2r}$

六角瓶數量( $N$ )=橫行數( $m$ )×直行數( $n$ )

$$N = \left(\frac{a}{\sqrt{3}r}\right) \times \left(\frac{b}{2r}\right) = \frac{ab}{2\sqrt{3}r^2} \text{ 代入(**)}$$

得方形排法的空間使用率：

$$E(\text{方}) = \frac{ab}{2\sqrt{3}r^2} \times \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2} r^2}{ab} = \frac{3}{4} = 75\%$$

正六角瓶的此種排法，其空間使用率亦

不受  $a$ 、 $b$  和  $r$  的值所影響。

其空間使用率固定約為 75%。

### (二)、「巢」形排法

如圖 2-2b 所示

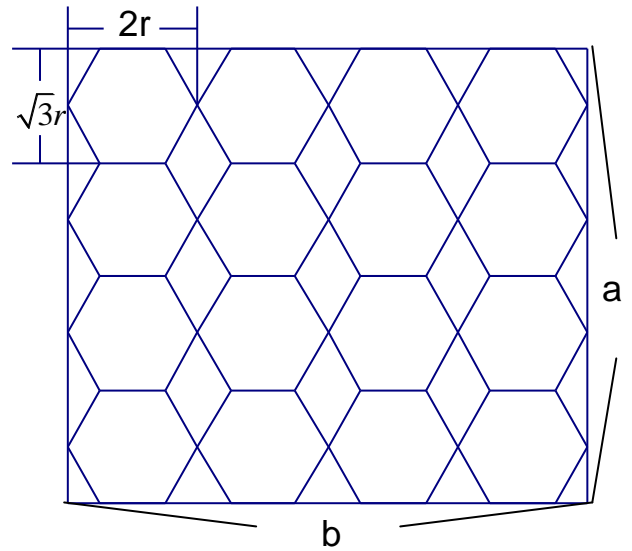


圖 2-2a

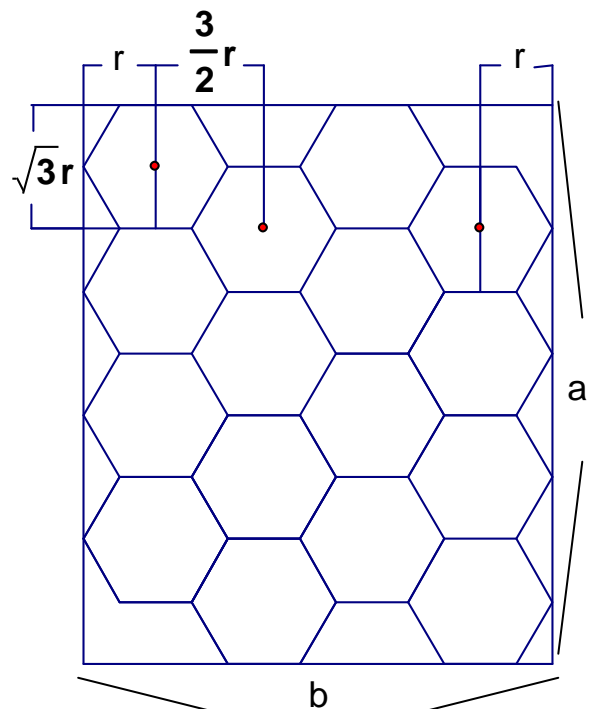


圖 2-2b

$$\text{則 } b=r(m-1) \times \frac{3}{2}r + 2r, \quad m = \frac{2}{3} \left( \frac{b}{r} - \frac{1}{2} \right)$$

$$a = \left( n + \frac{1}{2} \right) \times \sqrt{3}r, \quad n = \left( \frac{a}{r} \times \frac{1}{\sqrt{3}} \right) - \frac{1}{2}$$

六角瓶總數=橫行數(m)×直行數(n)

$$N = \left[ \frac{2}{3} \left( \frac{a}{r} - \frac{1}{2} \right) \right] \left[ \left( \frac{b}{r} \times \frac{1}{\sqrt{3}} \right) - \frac{1}{2} \right] \text{ 代入(**)得}$$

$$E(\text{巢}) = \frac{\left[ \frac{2}{3} \left( \frac{a}{r} - \frac{1}{2} \right) \right] \left[ \left( \frac{b}{r} \times \frac{1}{\sqrt{3}} \right) - \frac{1}{2} \right] \times \frac{3\sqrt{3}}{2} r^2}{ab} \times 100\% = \frac{\left( \frac{b}{r} - \frac{1}{2} \right) \left( a - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{\left( \frac{a}{r} \right) \left( \frac{b}{r} \right)} \times 100\%$$

由上可知  $E(\text{巢})$  的值和  $\frac{a}{r}$ 、 $\frac{b}{r}$  的值有關，以下列出各  $\frac{a}{r}$ 、 $\frac{b}{r}$  值的空間使用率，如表 2 所示：

表 2 正六角瓶「巢」形排法  $\frac{a}{r}$ 、 $\frac{b}{r}$  和空間使用率的關係

$\frac{a}{r} \backslash \frac{b}{r}$	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
4	72%	75%	77%	78%	79%	80%	81%	81%	82%	82%	82%	83%	83%	83%	84%	84%	84%	84%
5	74%	77%	79%	80%	81%	82%	83%	84%	84%	84%	85%	85%	85%	86%	86%	86%	86%	86%
6	76%	78%	80%	82%	83%	84%	84%	85%	86%	86%	86%	87%	87%	87%	87%	88%	88%	88%
7	77%	79%	81%	83%	84%	85%	86%	86%	87%	87%	87%	88%	88%	88%	89%	89%	89%	89%
8	78%	80%	82%	84%	85%	86%	86%	87%	88%	88%	88%	89%	89%	89%	89%	90%	90%	90%
9	78%	81%	83%	84%	85%	86%	87%	88%	88%	89%	89%	89%	90%	90%	90%	90%	91%	91%
10	79%	81%	83%	85%	86%	87%	88%	88%	89%	89%	90%	90%	90%	90%	91%	91%	91%	91%
11	79%	82%	84%	85%	86%	87%	88%	89%	89%	90%	90%	90%	91%	91%	91%	91%	92%	92%
12	79%	82%	84%	85%	87%	88%	88%	89%	89%	90%	90%	91%	91%	91%	91%	92%	92%	92%
13	80%	82%	84%	86%	87%	88%	89%	89%	90%	90%	91%	91%	91%	92%	92%	92%	92%	92%
14	80%	83%	84%	86%	87%	88%	89%	89%	90%	90%	91%	91%	92%	92%	92%	92%	92%	93%
15	80%	83%	85%	86%	87%	88%	89%	90%	90%	91%	91%	91%	92%	92%	92%	92%	93%	93%
16	80%	83%	85%	86%	88%	88%	89%	90%	90%	91%	91%	92%	92%	92%	92%	93%	93%	93%

轉換成橫行數(m)和直行數(n)和空間使用率的關係如下表 2-1 所示：



表 2-1 六角瓶「巢」形排法 m、n 值和空間使用率的關係

m \ n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	72%	77%	79%	81%	81%	82%	83%	83%	84%	84%	84%	84%
3	76%	80%	83%	84%	85%	86%	87%	87%	87%	88%	88%	88%
4	77%	81%	84%	86%	86%	87%	88%	88%	89%	89%	89%	90%
5	78%	83%	85%	87%	88%	89%	89%	90%	90%	91%	91%	91%
6	79%	83%	86%	88%	88%	89%	90%	90%	91%	91%	91%	92%
7	79%	84%	87%	88%	89%	90%	91%	91%	91%	92%	92%	92%
8	80%	84%	87%	89%	89%	90%	91%	92%	92%	92%	93%	93%
9	80%	85%	87%	89%	90%	91%	91%	92%	92%	93%	93%	93%
10	80%	85%	88%	89%	90%	91%	92%	92%	92%	93%	93%	93%
11	80%	85%	88%	90%	90%	91%	92%	93%	93%	93%	94%	94%
12	81%	85%	88%	90%	90%	91%	92%	93%	93%	93%	94%	94%
13	81%	86%	88%	90%	91%	92%	92%	93%	93%	94%	94%	94%
14	81%	86%	88%	90%	91%	92%	92%	93%	93%	94%	94%	94%

由表 2-1 可知，只有六角瓶的直行數(n) 和橫行數(m)各為 2 個時，六角瓶以「方」形排法的空間使用率較高，也就是說，當橫行數或直行數為 3 個以上時，以「巢」形排法可以放的瓶子可能比較多。整理如圖 2-1

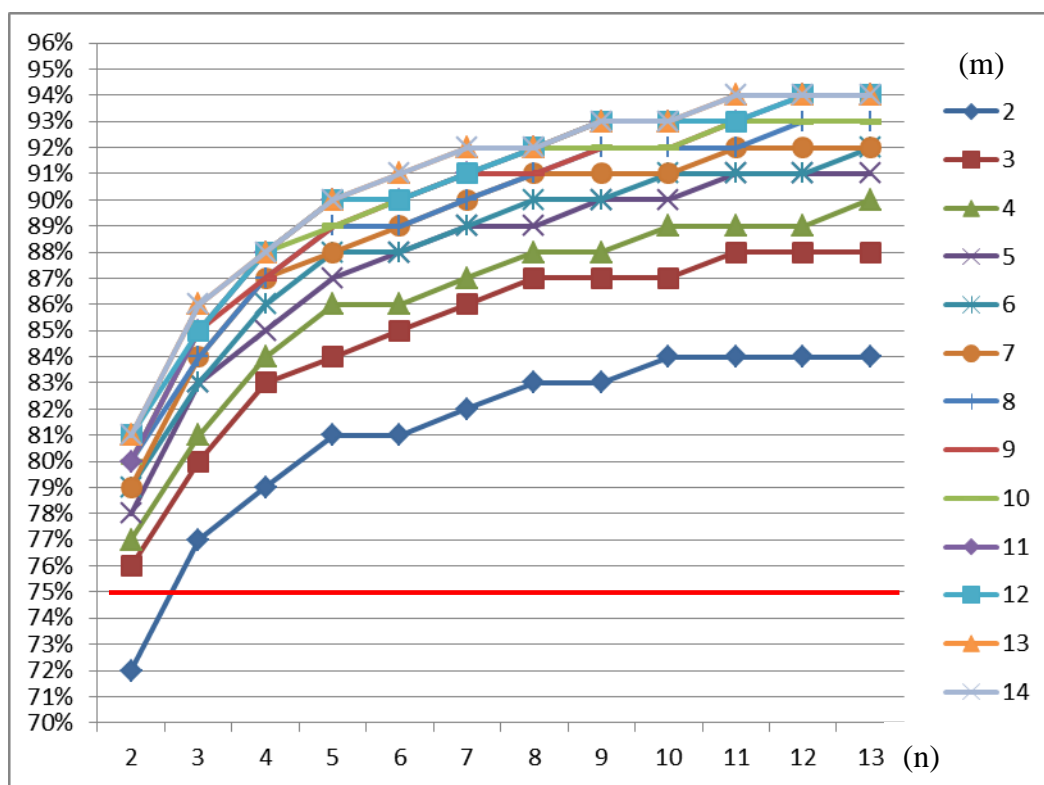


圖 2-1 六角瓶「方」和「巢」形排法空間使用率的比較

### 三、正三角瓶的空間使用率

市面上很少見到正三角的寶特瓶，不過，為了做比較，我們仍列出其空間使用率以供參考。

設正三角瓶數量為  $N$ ，邊長為  $r$ ，置物架的長亦為  $a$ ，寬為  $b$ ，則空間使用率 ( $E$ ) 為三角瓶總底面積佔置物架總面積之百分比。

令直行數為  $n$ ，即寬為  $b$  的一邊放的瓶子數目；橫行數為  $m$ ，即長為  $a$  的一邊放的瓶子數目，則正三角瓶數量 ( $N$ ) = 橫行數 ( $m$ ) × 直行數 ( $n$ )。

$$\text{正三角瓶面積} = \frac{\sqrt{3}}{4} r^2$$

$$\text{即 } E(\text{三角瓶}) = \frac{N(\frac{\sqrt{3}}{4} r^2)}{ab} \times 100\% \dots\dots(***)$$

#### (一)、「方」形排法

如圖 2-3a，三角瓶的這種排法顯然不能有高的使用率，其空隙都可以再放進三角瓶：

$$\text{由圖 2-3a 可知：} m = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{a}{r}, n = \frac{b}{r}$$

三角瓶數量 ( $N$ ) = 橫行數 ( $m$ ) × 直行數 ( $n$ ) 代入 (\*\*\*)

$$\text{得 } E(\text{方}) = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{a}{r} \times \frac{b}{r} \times \frac{\sqrt{3}}{4} r^2}{ab} \times 100\% = 50\%$$

如上所說，若在其空隙再放進三角瓶，  
那就會和下列的「巢」形的排法一樣了。

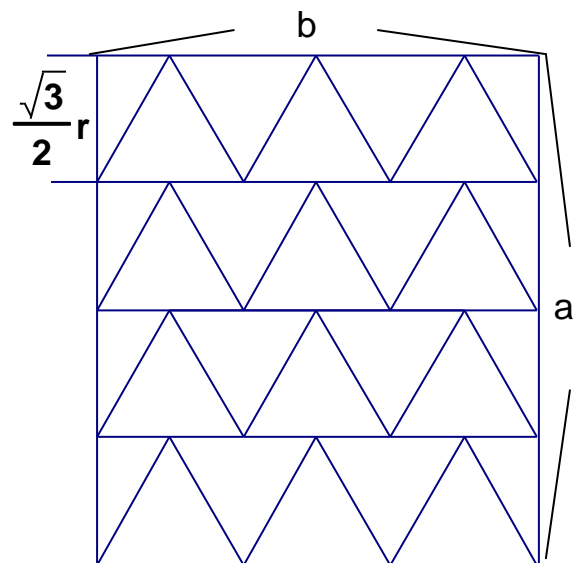


圖 2-3a

(二)、「巢」形排法

令橫行數目為  $m$ ，直行數為  $n$

$$b = \left(\frac{n+1}{2}\right)r, n = 2\left(\frac{b}{r}\right) - 1$$

$$a = m \times \frac{\sqrt{3}}{2}r, m = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{a}{r}\right) \text{ 代入(***)}$$

$$\text{得 } E(\text{巢}) = \frac{[2\left(\frac{b}{r}\right) - 1]\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{a}{r}\right)\frac{\sqrt{3}}{4}r^2}{ab}$$

$$= 1 - \frac{1}{2\left(\frac{b}{r}\right)}$$

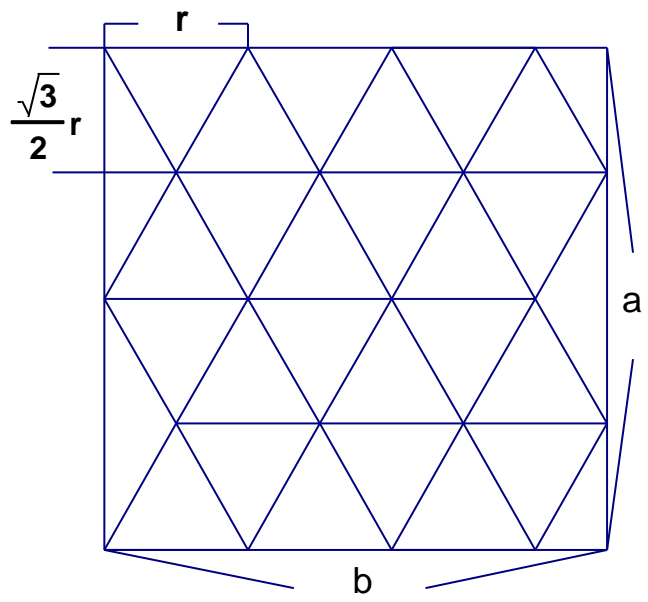


圖 2-3b

由以上可知  $E(\text{巢})$  的值和  $\frac{b}{r}$  的值有關，但和  $\frac{a}{r}$  無關

以下列出各  $\frac{b}{r}$  值的空間使用率，如表 3：

表 3 正三角瓶方形排法  $\frac{a}{r}$ 、 $\frac{b}{r}$  值和空間使用率的關係

b/r	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
%	83%	88%	90%	92%	93%	94%	94%	95%	95%	96%	96%	96%	97%	97%	97%	97%	97%	98%

轉換成橫行數( $m$ )和直行數( $n$ )和空間使用率的關係如下，如表 3-1：

表 3-1 正三角瓶方形排法  $m$ 、 $n$  值和空間使用率的關係

n	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39
%	83%	88%	90%	92%	93%	94%	94%	95%	95%	96%	96%	96%	97%	97%	97%	97%	97%	98%

#### 四、八角瓶的空間使用率

市面上的八角瓶雖不是正八角瓶，但我們以計算方便起見，以正八角瓶視之。

設正八角瓶數量為  $N$ ，邊長為  $r$ ，置物架的長亦為  $a$ ，寬為  $b$ ，則空間使用率 ( $E$ ) 為八角瓶總底面積佔置物架總面積之百分比。(令直行數為  $n$ ，即寬為  $b$  的一邊放的瓶子數目；橫行數為  $m$ ，即長為  $a$  的一邊放的瓶子數目，則八角瓶數量( $N$ )=橫行數( $m$ )×直行數( $n$ )。)

$$\text{正八角瓶面積} = (2 + \sqrt{2})r^2$$

$$E(\text{正八角瓶}) = \frac{N(2 + 2\sqrt{2})r^2}{ab} \times 100\% \dots\dots\dots (***)$$

##### (一)、「方」形排法

如下圖 2-4a 所示，

$$m = \frac{a}{(\sqrt{2} + 1)r}, \quad n = \frac{b}{(\sqrt{2} + 1)r}$$

$N = m \times n$  代入.(\*\*\*)得

$$E(\text{方}) = \frac{\frac{a}{(\sqrt{2} + 1)r} \times \frac{b}{(\sqrt{2} + 1)r} (2 + 2\sqrt{2})r^2}{ab} = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2}} \approx 76\%$$

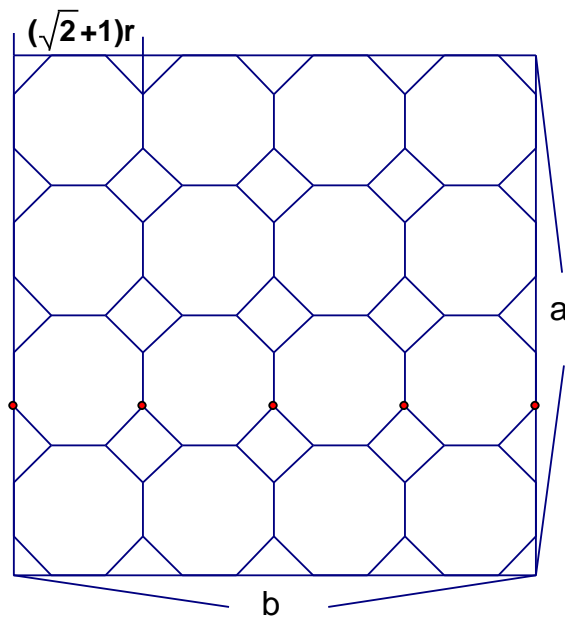


圖 2-4a

(二)、「巢」形排法

如下圖 2-4b 所示： $a=(1+\sqrt{2})r+(m-1)(1+\frac{\sqrt{2}}{2})r$ ， $m=2(\frac{a}{r}-\frac{\sqrt{2}}{2})(1-\frac{\sqrt{2}}{2})$

$$b=(1+\sqrt{2})r+(n-1)(1+\frac{\sqrt{2}}{2})r，n=2(\frac{b}{r}-\frac{\sqrt{2}}{2})(1-\frac{\sqrt{2}}{2})$$

$N = \frac{m \times n}{2}$  代入(\*\*\*\*)得

$$E(\text{巢}) = \frac{[2(\frac{a}{r}-\frac{\sqrt{2}}{2})(1-\frac{\sqrt{2}}{2}) \times 2(\frac{b}{r}-\frac{\sqrt{2}}{2})(1-\frac{\sqrt{2}}{2})] \div 2 \times (2+2\sqrt{2})r^2}{ab}$$

$$= \frac{2(\sqrt{2}-1)(\frac{a}{r}-\frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{b}{r}-\frac{\sqrt{2}}{2})}{(\frac{a}{r})(\frac{b}{r})}$$

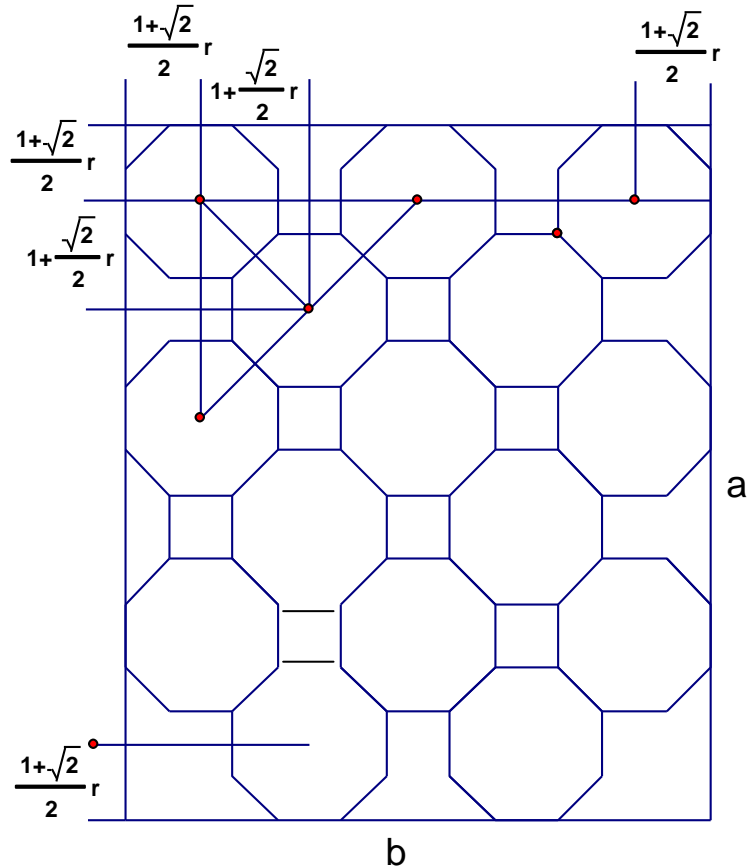


圖 2-4b

以下列出各  $\frac{a}{r}$ 、 $\frac{b}{r}$  值的空間使用率，如表 4：

表 4 八角瓶「巢」形排法  $\frac{a}{r}$ 、 $\frac{b}{r}$  值和空間使用率的關係

$\frac{a}{r} \backslash \frac{b}{r}$	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
4	56%	59%	60%	61%	62%	63%	63%	64%	64%	64%	65%	65%	65%	65%	65%	66%	66%
5	59%	61%	63%	64%	65%	66%	66%	67%	67%	67%	68%	68%	68%	68%	68%	68%	69%
6	60%	63%	64%	66%	67%	67%	68%	68%	69%	69%	69%	70%	70%	70%	70%	70%	70%
7	61%	64%	66%	67%	68%	69%	69%	70%	70%	70%	71%	71%	71%	71%	72%	72%	72%
8	62%	65%	67%	68%	69%	70%	70%	71%	71%	71%	72%	72%	72%	72%	73%	73%	73%
9	63%	66%	67%	69%	70%	70%	71%	71%	72%	72%	72%	73%	73%	73%	73%	73%	74%
10	63%	66%	68%	69%	70%	71%	72%	72%	72%	73%	73%	73%	74%	74%	74%	74%	74%
11	64%	67%	68%	70%	71%	71%	72%	72%	73%	73%	74%	74%	74%	74%	74%	75%	75%
12	64%	67%	69%	70%	71%	72%	72%	73%	73%	74%	74%	74%	74%	75%	75%	75%	75%
13	64%	67%	69%	70%	71%	72%	73%	73%	74%	74%	74%	75%	75%	75%	75%	75%	76%
14	65%	68%	69%	71%	72%	72%	73%	74%	74%	74%	75%	75%	75%	75%	76%	76%	76%
15	65%	68%	70%	71%	72%	73%	73%	74%	74%	75%	75%	75%	75%	76%	76%	76%	76%
16	65%	68%	70%	71%	72%	73%	74%	74%	74%	75%	75%	75%	76%	76%	76%	76%	76%
17	65%	68%	70%	71%	72%	73%	74%	74%	75%	75%	75%	76%	76%	76%	76%	76%	77%
18	65%	68%	70%	72%	73%	73%	74%	74%	75%	75%	76%	76%	76%	76%	76%	77%	77%
19	66%	68%	70%	72%	73%	73%	74%	75%	75%	75%	76%	76%	76%	76%	77%	77%	77%
20	66%	69%	70%	72%	73%	74%	74%	75%	75%	76%	76%	76%	76%	77%	77%	77%	77%

轉換成橫行數(m)和直行數(n)和空間使用率的關係如下表 4-1 所示：

表 4-1 八角瓶「巢」形排法 m、n 值和空間使用率的關係

$m \backslash n$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	61%	64%	66%	66%	67%	68%	68%	68%	68%	69%	69%	69%
3	64%	67%	69%	69%	70%	71%	71%	71%	72%	72%	72%	72%
4	66%	69%	70%	71%	72%	72%	73%	73%	73%	74%	74%	74%
5	66%	69%	71%	72%	72%	73%	73%	74%	74%	74%	74%	75%
6	67%	70%	72%	72%	73%	74%	74%	75%	75%	75%	75%	76%
7	68%	71%	72%	73%	74%	75%	75%	75%	76%	76%	76%	76%
8	68%	71%	73%	73%	74%	75%	75%	76%	76%	76%	76%	77%
9	68%	71%	73%	74%	75%	75%	76%	76%	76%	77%	77%	77%
10	68%	72%	73%	74%	75%	76%	76%	76%	77%	77%	77%	77%
11	69%	72%	74%	74%	75%	76%	76%	77%	77%	77%	77%	78%
12	69%	72%	74%	74%	75%	76%	76%	77%	77%	77%	78%	78%
13	69%	72%	74%	75%	76%	76%	77%	77%	77%	78%	78%	78%

由表 4-1 可知，若正八角瓶直行數(n)少於 7 個；或直行數為 8 個，橫行數(m)少於 13 個；或直行數為 9 個，橫行數少於 11 個；或直行數 10 個，橫行數少於 10 個；或直行數 11 或 12 個，橫行數少於 9 個；或直行數 13 個，橫行數少於 8 個，以「方」形排法的空間使用率較高，也就是說，此時以「方」形排法的瓶子數目可能會比較多。不過，當橫行數或直行數增加時，以「巢」形排法的空間使用率也會隨著增加，即數目愈多時，以「巢」形排法可以放的瓶子可能比較多。

整理如圖 4-1

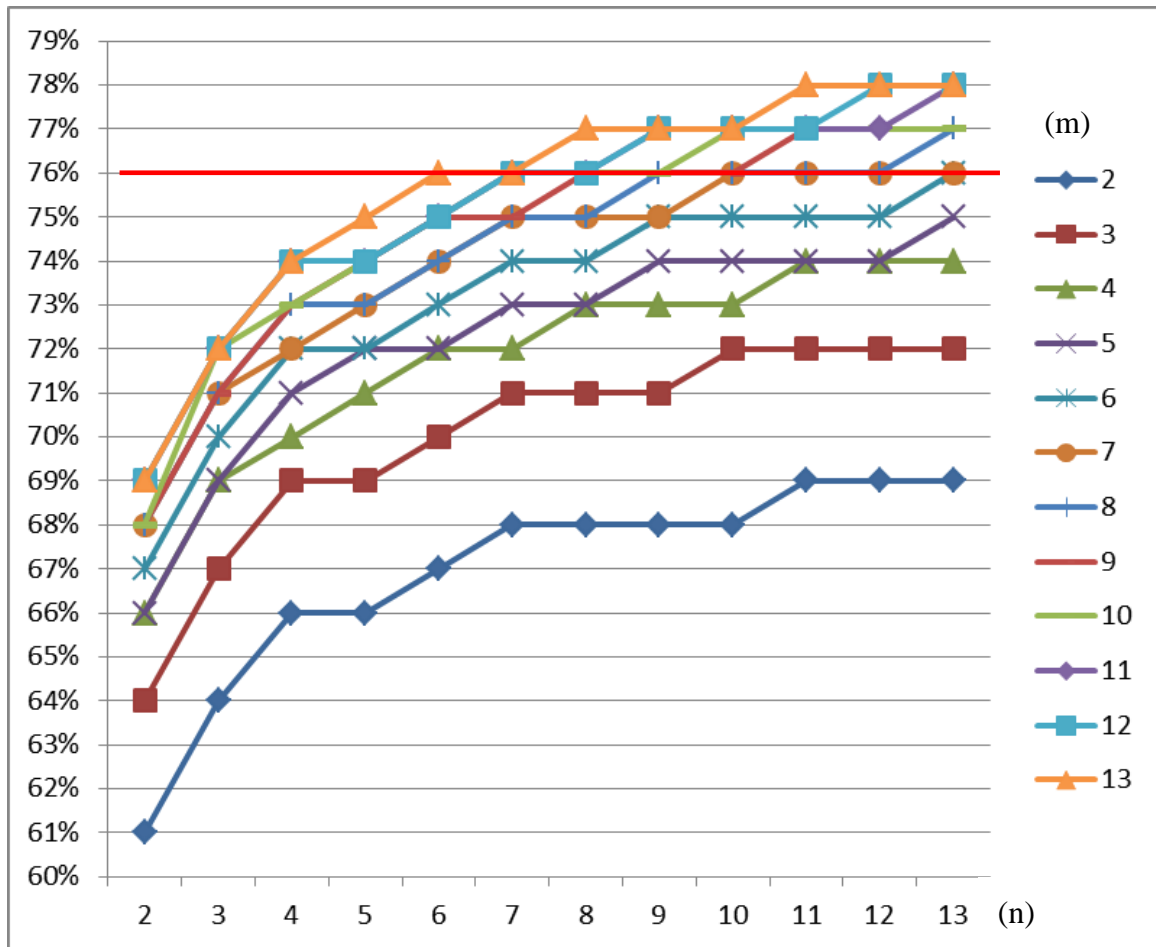


圖 4-1 八角瓶「方」和「巢」形排法空間使用率的比較

## 伍、討論

就市面上常見的圓瓶來說，“1箱”即24瓶的排列法都是以方形排列法( $n=6, m=4$ )，而研究結果顯示巢形排列法的使用率比方形排列法高。

試算外盒的面積

### 1、方形排列

$$a=8r, b=12r$$

$$ab=96r^2$$

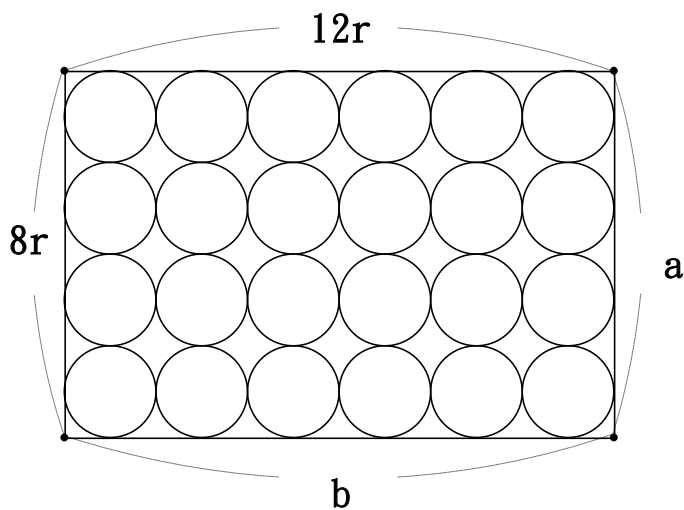


圖 5-1

### 2、巢形排列

$$a=(3\sqrt{3}+2)r, b=13r$$

$$ab=(39\sqrt{3}+26)r^2 \doteq 93.5r^2$$

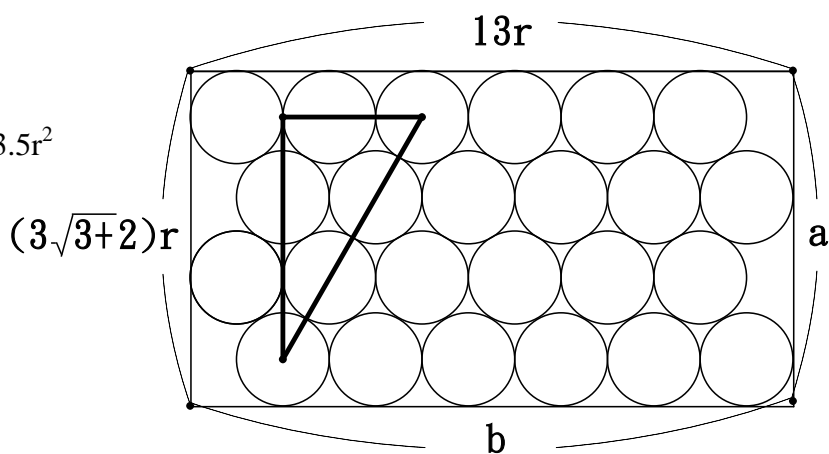


圖 5-2

所以在不考慮其他因素下，以巢形排列法可以用比較小的外盒裝滿同樣是24瓶。老師也提到要得到同樣的容量，圓瓶容器可以最節省材料，這可能也是市面上大多數是以圓瓶為主的原因吧。

根據網路上的資料與實際測量以600cc為例，圓瓶的直徑約為6.8cm，以方形排列的紙箱長約42cm，寬約28cm，以巢形排列的紙箱長約45cm，寬約25cm。



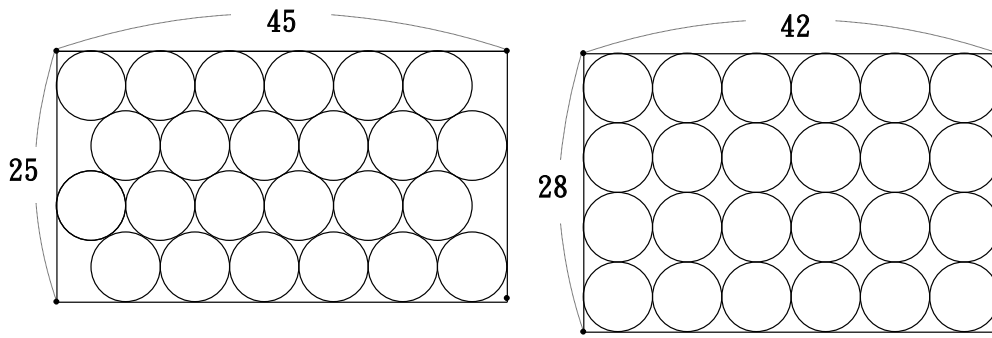


圖 5-3 一箱 24 瓶紙箱尺寸比較圖

以上圖 5-3 的外盒尺寸，計算常見各尺寸小貨車的後車斗可裝最多紙箱數比較，如圖 5-4，除了兩種貨車外，巢形排列的紙箱都可以裝比較多箱的飲料。

車種	車斗(cm)		方形排列42x28(cmxcn)					巢形排列45x25(cmxcn)								
			橫排		零排數	直排		最多裝箱數	橫排		零排數	直排		最多裝箱數		
	長	寬	42	28		28	42		45	25		25	45			
中華威利	226	140	5	5		8	3		25	5	5		9	3		27
中華菱利	230	148	5	5		8	3		25	5	5		9	3		27
中華得利卡	285	163	6	5	3	10	3	6	36	6	6		11	3	6	39
福特載卡多	284	173	6	6	4	10	4		40	6	6		11	3	6	39
中華堅達	308	170	7	6		11	4		44	6	6	3	12	3	6	42
五十鈴一路發	322	175	7	6	4	11	4		46	7	7		12	3	7	49

圖 5-4 各車種可裝最多紙箱數比較圖

最多裝箱數會受剩餘的空間的影響，如果尺寸設計得宜，不管是哪種排列都可以增加裝箱數，而大致上巢形排列比方形排列可以得到更多的裝箱數。未來也可針對特定的空間設計最佳容器節省空間。

另外也有些並非真正的矩形瓶，而是四角成圓弧形，如圖所示：

空間使用率視其圓弧半徑而定，我們以邊長的 1/4 為例，設矩形邊長為  $r$ ，圓弧半徑為  $r/4$ ，則方形排列中的空間使用率：

$$E = \left(1 - \frac{1}{16}\pi\right) \times 100\% \approx 80\%$$

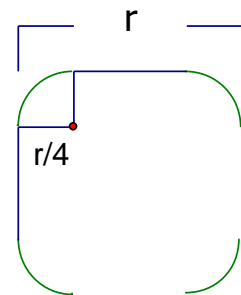


圖 5-5

空間使用率比圓瓶的方形排列法高，這可能是在材料考量上，可以替代的方式。

## 陸、結論

表 5 各種類形瓶兩種排法 m、n 值和空間使用率的關係

使用率% 種類	排法	方形排列	巢形排列(大於方形排列) n：直行數 m：橫行數
矩形瓶		100	
圓瓶		79	n>6 時，(n=6, m>2), (n=5, m>3), (n=4, m>10)
三角瓶		50	皆大於方形排列
六角瓶		75	n>3 時，(n=3, m>2)
八角瓶		76	(n=8, m>12), (n=9, m>10), (n=10, m>9), (n=11、12, m>10)
圓弧瓶		80	無比較

### 1、方形排列的空間使用率

矩形瓶 > 圓弧瓶 > 圓瓶 > 八角瓶 > 六角瓶 > 三角瓶

這也和市面上常見的容器種類相符合

### 2、巢形排列的空間使用率

不考慮矩形瓶和圓弧瓶的話，三角瓶 > 六角瓶 > 圓瓶 > 八角瓶

### 3、相同形狀之兩種排法使用率比較

整體上來說，行數愈多，則巢形排列的空間使用率 > 方形排列的空間使用率，如果以市售的 1 箱(24 瓶)為例，常見的圓瓶是巢形排列的空間使用率較高，且可以用較小的紙箱裝下同樣的 24 瓶。而八角瓶則是方形排列的空間使用率較高。

## 柒、參考文獻

一、羅浩源(1998)，生活的數學，台北市，九章。

二、泰元企業 各種貨車尺寸

(<http://www.0229851111.com/P3.html>)

三、新光合成纖維股份有限公司 飲料瓶產品規格

(<http://www.shinkong.com.tw/product/showProduct?product=33&industry=6>)

## 【評語】 030405

考慮用正  $n$  邊形或圓形填充一個長方形，填充率的高低問題。針對  $n=3, 4, 6, 8$  或圓形的不同填充方式作了計算，給出了填充率的比較。問題有趣也具有實用性，值得鼓勵。在討論填充率時，為了分析上的便利性，作者們假設所給的長方形的長寬值與所要填充的正  $n$  邊形（或圓形）的邊長（或圓半徑）有簡單的關係。這當然會讓結果看起來更為精簡而且美觀，但也讓問題與真實會面對的情況有了落差。如果可以針對任意的長寬設定，討論不同大小的正  $n$  邊形（或圓形）填充率的高低，應該更為有趣，也會更貼近真實的狀況。如果能進一步朝這個方向努力會更好。