中華民國第 56 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

030404

三角獨子棋

學校名稱：雲林縣立斗六國民中學

作者：	指導老師：
國二 黃韻璇 國二 何碩宸	高逸凡

關鍵詞：獨子棋

摘要

三角獨子棋是一個有趣的遊戲，其玩法是在一個 15 格的三角棋盤中，由電腦隨機出題，以跳棋的方式，跳一子取一子，最後棋盤上必須只剩下一子才算過關。我們好奇到底可以出幾個不重複的關卡，也想要找出每關的破解方法，對其展開深入的研究…。透過棋子兌換法及電腦程式運算，找出了此遊戲中不同棋數的所有有解盤面；進一步透過三色定理以及自行發展找解策略：一線法、對稱跳法、棋子集中原則、棋盤切割法、缺子終點對調法等，找出了有限棋盤 T（5）至 T（8）缺一子位置與其終點位置的關係及其解法。

壹、研究動機

數學老師推薦我們一個有趣的數學遊戲─三角獨子棋。在一個15格的三角棋盤中，由電腦隨機出題（2至14個棋子的關卡），以跳棋的方式，跳一子取一子，最後棋盤上必須只剩下一子才算過關。一開始的2~5子對我們來說是輕而易舉，但隨著棋數的增加，破關可是越來越難。這個遊戲引發我們的興趣，好奇到底可以出幾個不重複的關卡，也想要找出每關的破解方法，對其展開深入的研究…。在此次科展中，我們運用到國中第二冊第四章認識函數、第四冊第一章等差數列與等差級數、第二章幾何圖形之數學概念、第六冊第三章資料整理與統計圖表。

貳、研究目的

一、尋找有限棋盤五層三角獨子棋不同棋數的有解盤面。

二、探討有限棋盤五至八層三角獨子棋缺一子位置與其終點位置的關係及其解法。

參、研究設備與器材

紙、筆、電腦程式：三角獨子棋-遊戲(Trichess)。

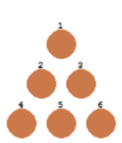
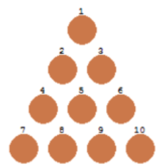
肆、研究歷程

一、名詞與符號定義

（一）P：表示棋盤上每格位置。依序以P1、P2、…來表示。

（二）T（層數）：表示三角獨子棋棋盤的層數。見表一。

表一

層數	T（3）	T（4）	說明
			1. T（3）由 P1～P6 所組成，共三層。 2. T（4）比 T（3）多了 P7～P10 這一層，共四層。

（三）M：表示棋子的移動過程。

（四）S：表示解手數。在解手數的計算上，**將可連跳的步驟視為一次**。

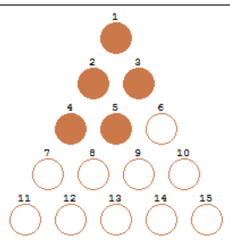
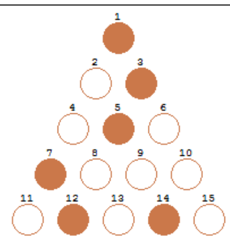
（五）L：表示缺子位置。

（六）E：表示終點位置。

（七）連子：棋盤上所有的棋子都連在一起，依連子的棋數命名。

（八）分離：棋盤上所有的棋子成堆分散，依分離的棋數由多到少命名。見表二。

表二

五連子	舉例	三.二.一分離
		

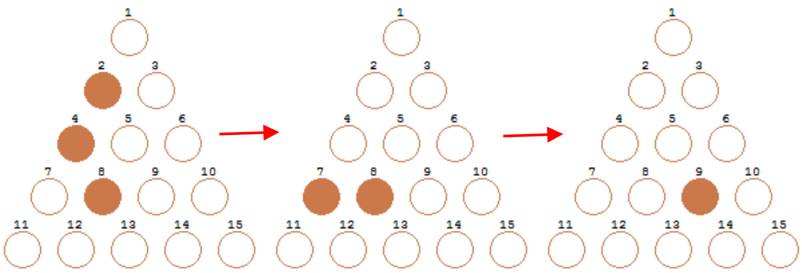
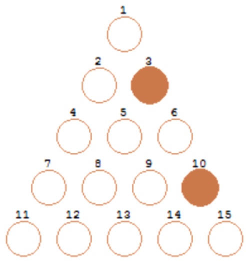
二、遊戲說明

（一）遊戲規則

三角獨子棋是一個正三角形的棋盤，每顆棋子可藉由緊鄰的一棋子來跳到另一端沒有棋子的空格中，當一顆棋子被跳過時，可從棋盤上拿走它。除了水平跳之外，還可往左上、右上、左下、右下四個方向跳，棋子只能藉由**跳過相鄰一棋子**來移動，並不能自行移動位置。

遊戲終極目標是讓棋盤上**只剩下一顆棋子**。當棋盤上剩下不只一顆棋子又無法再繼續跳動即為無解。見表三。

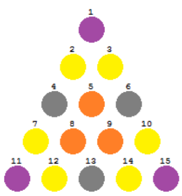
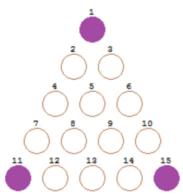
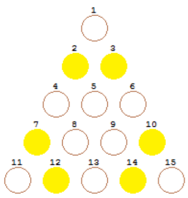
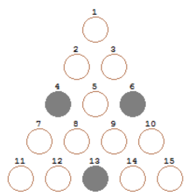
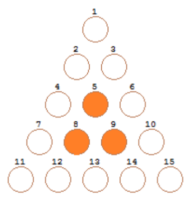
表三

有解				無解
				
步驟	① 2->7　② 7->9			
移動過程 M	2->7->9	解手數 S	1	
說明	1. 當 P2 棋往 P7 移動，會跳過 P4 棋，要將被跳過的 P4 棋移走，以此類推。 2. 當棋盤上最終只剩一顆 P9 棋，即為有解。 3. M：2->7->9 是將步驟①②合併，即為連跳。			

（二）位置說明

將三角獨子棋盤加以旋轉、鏡射，會發現棋盤上的部分位置具有同等的情形。見表四。

表四

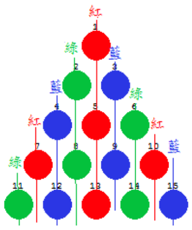
				
	P1＝P11＝P15	P2＝P7＝P12＝P14＝P10＝P3	P4＝P13＝P6	P5＝P8＝P9

在接下來探討不同棋數的有解盤面時，我們運用棋盤上位置的同等性質來簡化討論。

（三）顏色說明

我們引用「全國中小學科學展覽第 34 屆前人作品—棋盤上數學原理的研究」中的「三色定理」，用直線把棋盤縱向依序分成紅、綠、藍三色（紅線上的棋子即為紅棋，以此類推），來觀察棋子跳動時這三色棋子總數的變化，見表五。

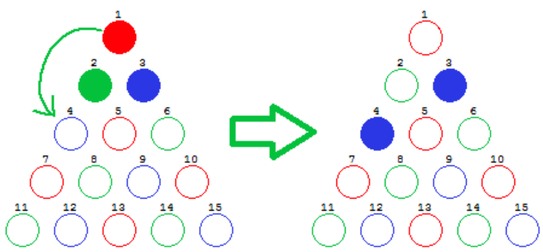
表五

<table>
<tr><td></td><td>R 表示棋盤上所有紅棋總數
G 表示棋盤上所有綠棋總數
B 表示棋盤上所有藍棋總數</td></tr>
</table>

為什麼要採取縱向劃分方式呢？不能橫向或用斜線來依序劃分三色嗎？當然不妥！因為只有縱向劃分才能明確展示出一個移動過程影響三色棋之間各自的消長情況，不管是水平跳，還是往左上、右上、左下、右下四個方向跳都可清楚表示。例如：一紅棋經過相鄰一綠棋跳到另一個空位(藍)上，三色棋的各自總數必定改變，其中兩者（紅、綠）減一，另一者（藍）加一。

三色定理可作為對棋盤盤面有解與否的初篩！由於 R±1、G±1、B±1 的奇偶性正好與 R、G、B 的奇偶性相反，因此，當三色棋的各自總數同為奇數或同為偶數時，則此盤面必定無解，見表六。

表六

<table>
<tr><td rowspan="4"></td><td colspan="4">顏色紀錄</td></tr>
<tr><td></td><td>紅 R</td><td>綠 G</td><td>藍 B</td></tr>
<tr><td>原盤面</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1->4</td><td>0</td><td>0</td><td>2</td></tr>
</table>

（四）特別限制

我們的三角獨子棋是**有限的棋盤**，如棋盤 T（5）是由 P1 至 P15 所組成，可跳動的空間只限於 P1 至 P15。

三、文獻探討

（一）相關作品分析（見表七）

表七

主題名稱	作者	參考內容
好玩的三角獨子棋	莊豐松	討論棋盤 T（5） 缺一子之終點位置及其解法
棋盤上數學原理的研究 (全國中小學科學展覽第 34 屆)	陳明揚	利用三色定理推斷三角棋盤是否可能無解
Triangular Peg Solitaire Unlimited	George Bell	運用一筆劃三角形連跳破解棋盤 T（8） (A 15-move solution to problem)

（二）我們的研究特色

1.除了討論棋盤 T（5）缺一子之終點位置及其解法，我們延伸討論至棋盤 T（8）。

2.針對有限棋盤多層缺一子找解，並非由電腦程式跑解，而是自行發展出找解策略：一線法、對稱跳法、棋子集中原則、棋盤切割法、缺子終點對調法等。

3.引用三色定理推斷棋盤是否可能無解，我們還能推論出該棋盤若有解的終點顏色與終點位置。

4.將一次連跳結合一筆劃三角形，棋盤 T(6)、T(7)是由我們自行完成，棋盤 T(8)則是引用 George Bell(2004)所提出的「A 15-move solution to problem on Triangle(8)」破解方法。

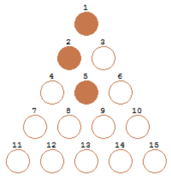
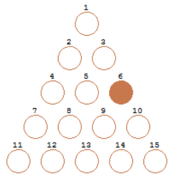
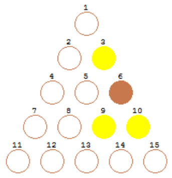
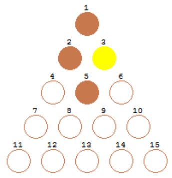
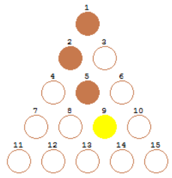
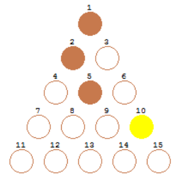
四、尋找棋盤 T（5）不同棋數的有解盤面

（一）如何找到有解的基本盤面

先從棋盤 T（3）開始做起，慢慢發展至棋盤 T（4）、T（5），初步想法是從既定有解的盤面多走一步（多增加一子），讓它繼續有解。採取找解方式如下：

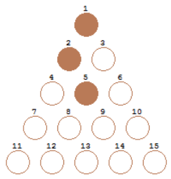
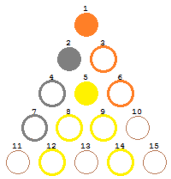
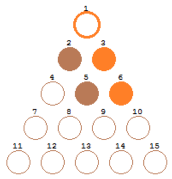
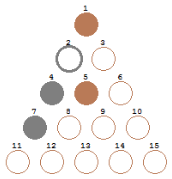
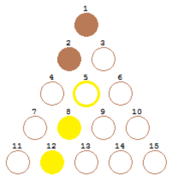
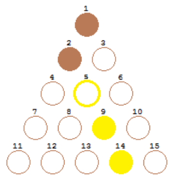
1.終點延伸法：以一個盤面的終點繼續做出可能的延伸。見表八：

表八

					
原盤面	終點	可延伸位置	新盤面(一)	新盤面(二)	新盤面(三)

2.棋子兌換法（擇二換一）：針對棋盤上的每顆棋子，另取二子來兌換。見表九：

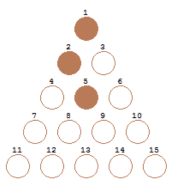
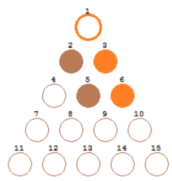
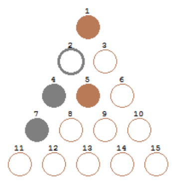
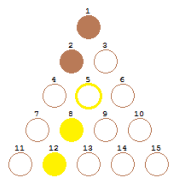
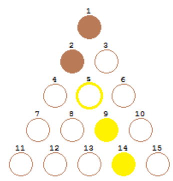
表九

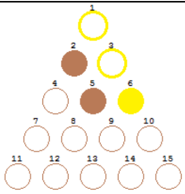
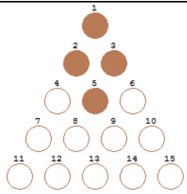
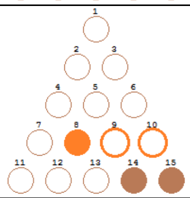
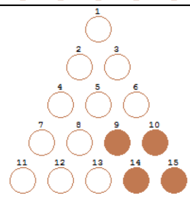
					
原盤面	可兌子位置	新盤面(一)	新盤面(二)	新盤面(三)	新盤面(四)

剛開始兩種手法並用，怕會有遺漏的情況發生，後來發現到終點延伸法有所侷限，而棋子兌換法(擇二換一)每一步驟都與「三色棋的各自總數必定改變，其中兩者減一，另一者加一」吻合，有其全面完整性，最後採用棋子兌換法將所有有解盤面找齊。

在二至六子的有解盤面探討時，採用多方校正來確保能將所有的有解盤面找齊（見附件一）。為了方便小組有系統核對，採取方式見表十。

表十

原盤面		依序代換為新盤面	 兌子 P1	 兌子 P2	 兌子 P5	 兌子 P5
命名	三連子-1	命名	四連子-1	三一分離-1	二二分離-1	二二分離-2
為了避免盤面重複造成有解盤面總數的錯誤，我們按 P1~15 依序來代換，若盤面經過旋轉、鏡射後仍是同樣圖形則須合併計算。$\boxed{\text{我們發現到}}$：**當棋子數增加時，其解法也跟著增加**。						

	原三子盤面	命名	棋子兌換	新盤面	命名
舉例		三連子-3	兌子 P6		四連子-1
		二一分離-5	兌子 P8		

3.電腦程式運算

由於人工耗時、盤面重複性高，當我們一邊在做、一邊請朋友幫忙寫程式。使用 Visual Studio 2010 撰寫，利用電腦可以自動執行的特性，採取暴力搜尋法，找尋每一盤面可能走的下一步棋，直到盤面只剩下一顆棋子，即為有解。若所有盤面都找完，卻沒有遇到只剩下一顆棋子的盤面，則初始盤面為無解。

將程式運算的結果與小組做的二至六子有解盤面探討相核對，發現兩者的數據與圖形完全吻合，加上希望可以節省時間做進一步的探討，所以七子以上的有解盤面是採用程式運算的結果，再加以按照先前分類模式來歸納與整理。

（二）**棋盤T（5）不同棋數的有解盤面**

從上述方法中找出了棋盤 T（5）不同棋數的有解盤面（見附件二），整理見表十一。

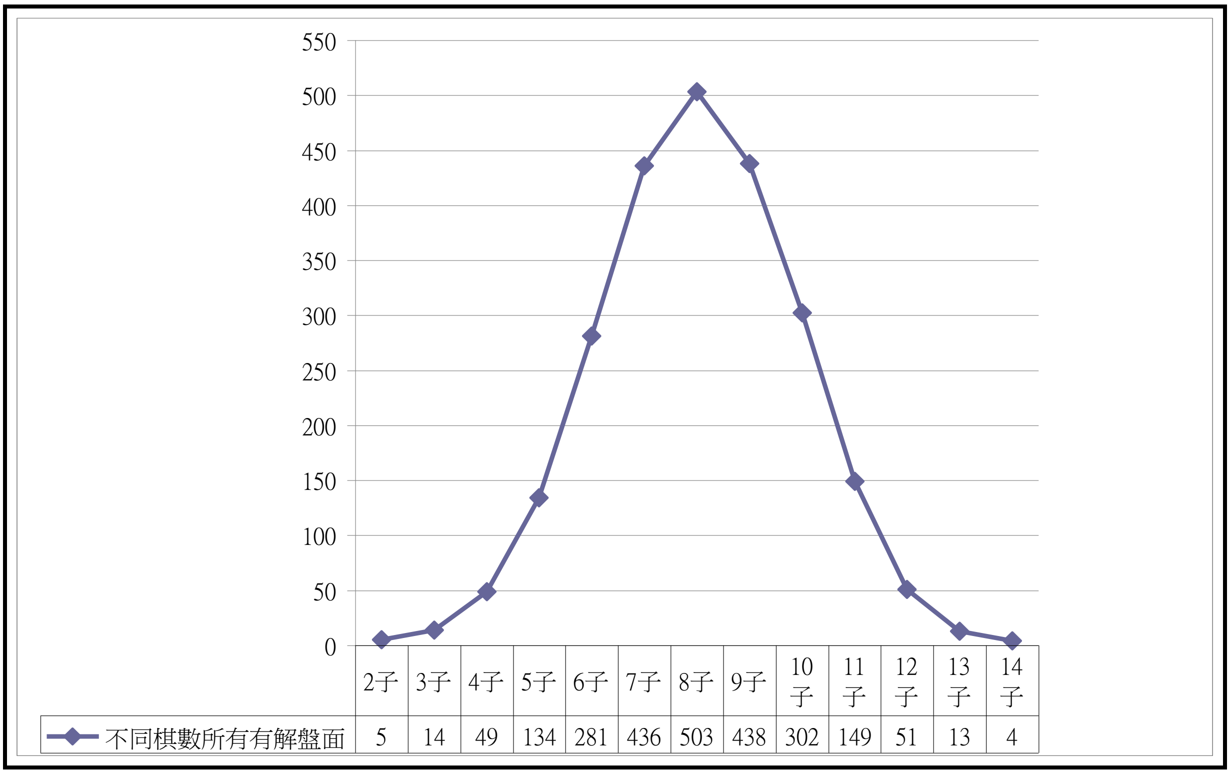
表十一

棋子數	有解的基本盤面	類別數	總數
2	二連子 5 種	1	5
3	三連子 6 種；二.一分離 8 種	2	14
4	四連子 13 種；三.一分離 22 種；二.二分離 8 種；二.一.一分離 6 種	4	49
5	五連子 44 種；四.一分離 34 種；三.二分離 21 種；三.一.一分離 17 種；二.二.一分離 16 種；二.一.一.一分離 2 種	6	134
6	六連子 79 種；五.一分離 75 種；四.二分離 44 種；四.一.一分離 23 種；三.三分離 13 種；三.二.一分離 37 種；三.一.一.一分離 4 種；二.二.二分離 6 種	8	281

7	七連子 134 種；六.一分離 123 種；五.二分離 61 種；五.一.一分離 15 種；四.三分離 28 種；四.二.一分離 31 種；四.一.一.一分離 1 種；三.三.一分離 18 種；三.二.二分離 23 種；三.二.一.一分離 2 種	10	436
8	八連子 202 種；七.一分離 123 種；六.二分離 70 種；六.一.一分離 11 種；五.三分離 29 種；五.二.一分離 22 種；四.四分離 6 種；四.三.一分離 17 種；四.二.二分離 11 種；四.二.一.一分離 1 種；三.三.二分離 11 種	11	503
9	九連子 224 種；八.一分離 98 種；七.二分離 57 種；七.一.一分離 5 種；六.三分離 19 種；六.二.一分離 6 種；五.四分離 9 種；五.三.一分離 6 種；五.二.二分離 3 種；四.四.一分離 2 種；四.三.二分離 8 種；三.三.三分離 1 種	12	438
10	十連子 192 種；九.一分離 59 種；八.二分離 26 種；七.三分離 14 種；七.二.一分離 1 種；六.四分離 4 種；六.三.一分離 1 種；五.五分離 1 種；五.四.一分離 1 種；五.三.二分離 1 種；四.四.二分離 1 種；四.三.三分離 1 種	12	302
11	十一連子 119 種；十.一分離 17 種；九.二分離 8 種；八.三分離 5 種	4	149
12	十二連子 47 種；十一.一分離 3 種；十.二分離 1 種	3	51
13	十三連子 12 種；十二.一分離 1 種	2	13
14	十四連子 4 種	1	4

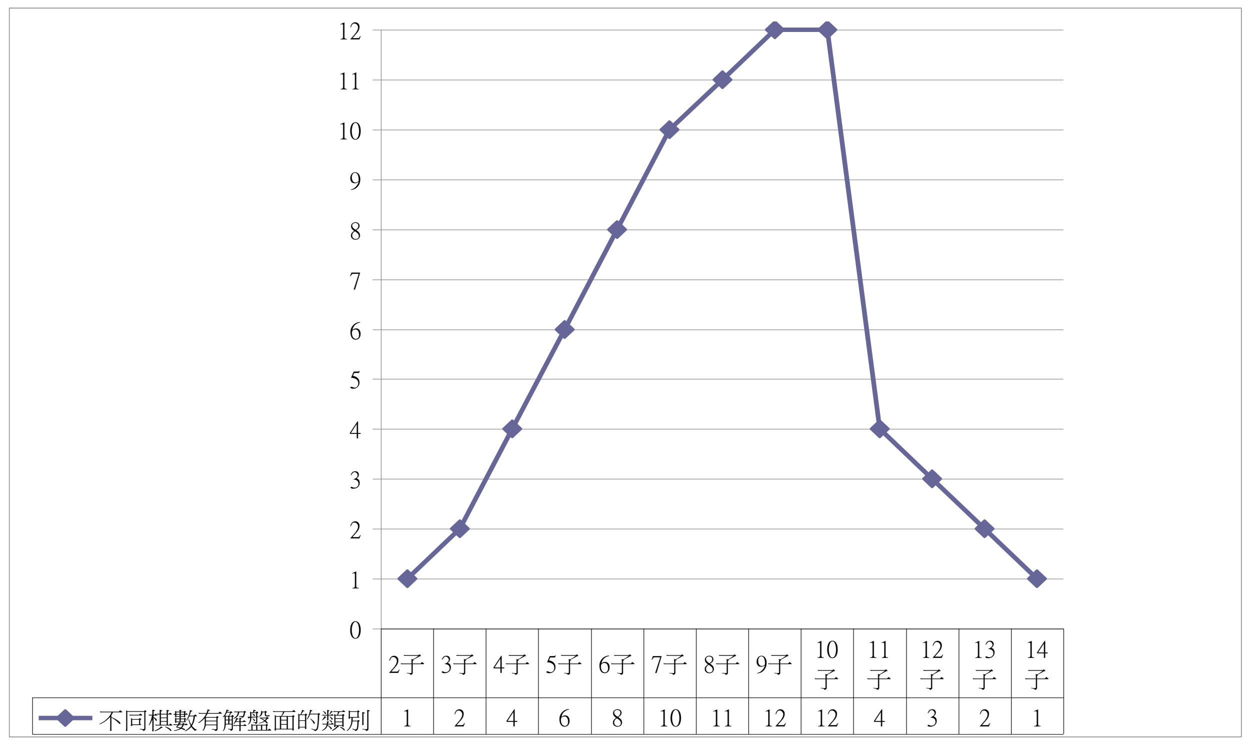
在歸納整理棋盤 T（5）不同棋數有解盤面的過程中，觀察到不同棋數有解盤面的數量變化，見表十二：

表十二



依不同種類（連子、分離）來區分的數量變化，見表十三：

表十三

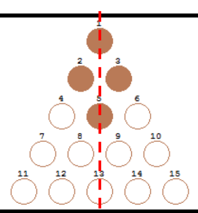
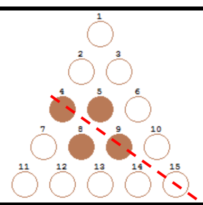
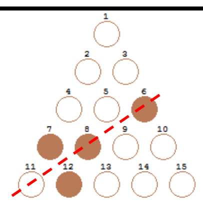


從表十二、表十三中，明顯看到有解盤面的數量從二子開始逐漸增加，至八子到達頂端再又慢慢降低；有解盤面的種類也是從二子開始逐漸增加，至九、十子最多，十一子時急速下降。這些變化其實與棋子數和空格數的多寡有關。二至六子因棋子數不夠多、十一至十四子則是因空格數太少，兩者都無法使有解盤面更豐富。而七至十子的棋子數和空格數相差不多，不僅有空間可跳，也容易引用棋子兌換法，所以有解盤面可以更多元。

（三）棋盤T（5）不同棋數有解盤面中的特殊圖形

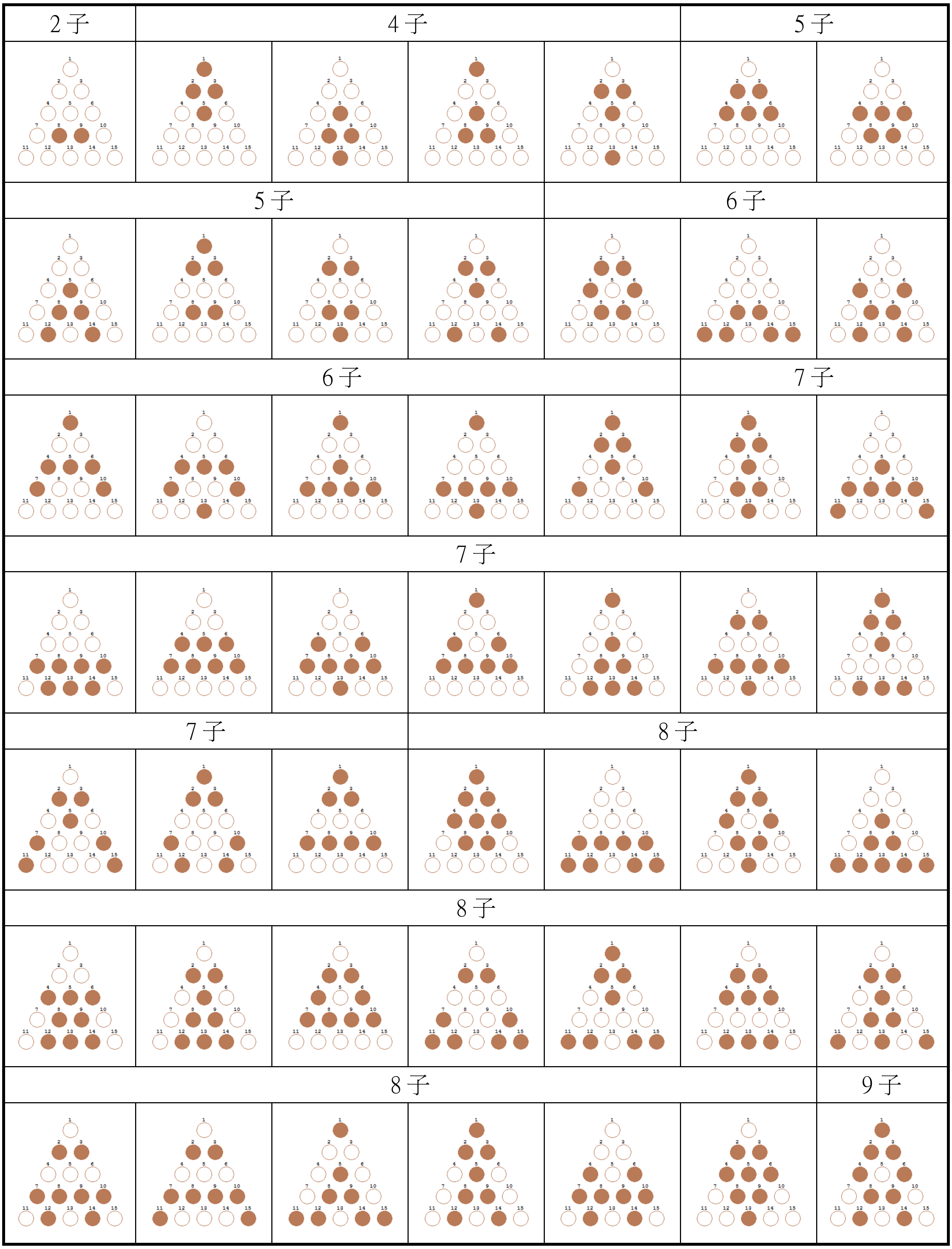
運用數學線對稱概念，從棋盤 T（5）可找到三條對稱軸，見表十四：

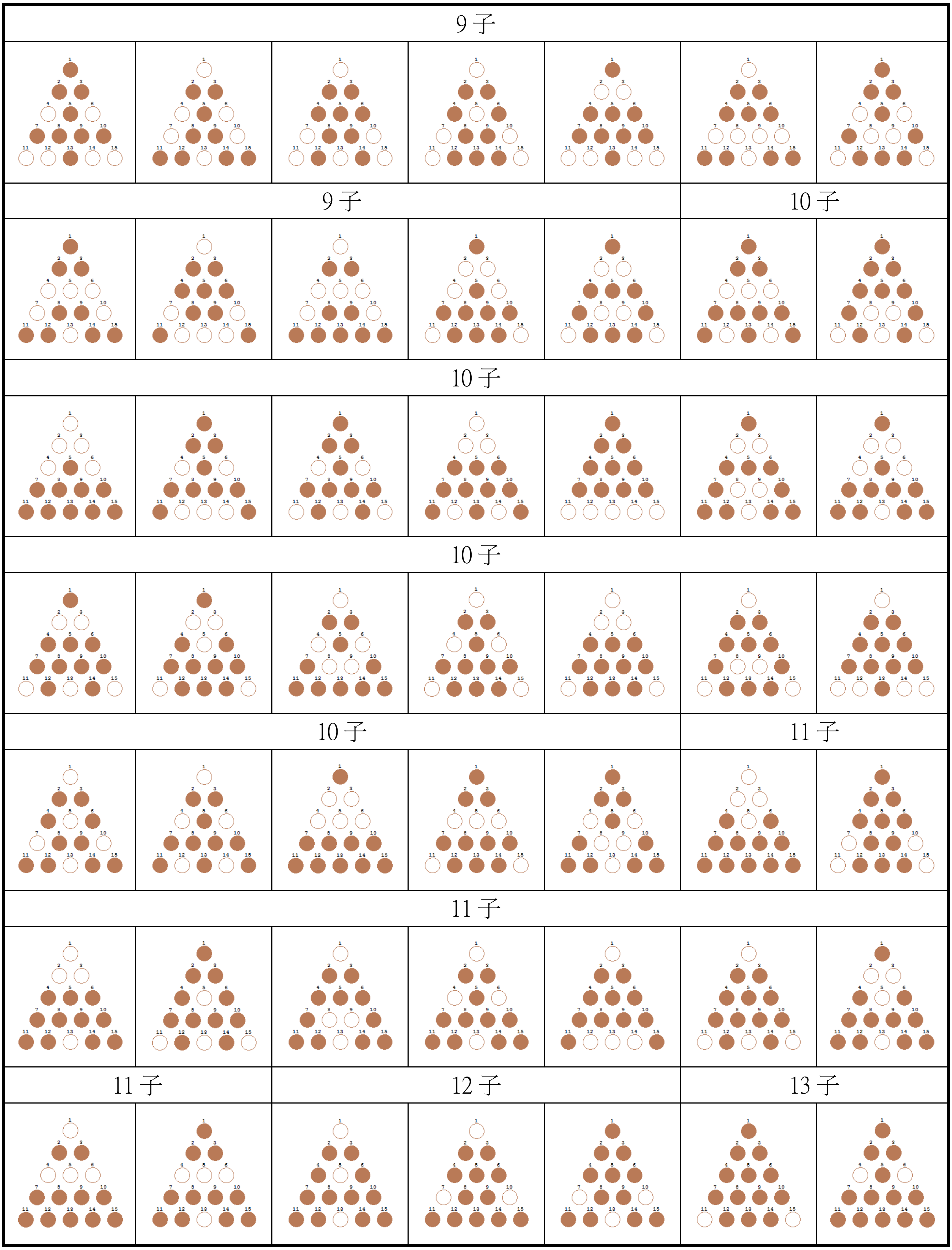
表十四

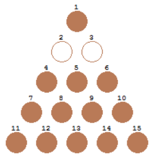
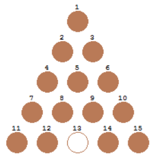
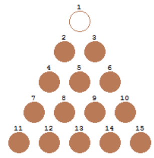
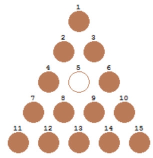
1		2		3	

由於三角獨子棋盤是正三角形，為了便於觀察，對部分有解盤面我們採用旋轉方式，方便一眼看出其對稱性，將棋盤 T（5）出現線對稱圖形的有解盤面整理見表十五：

表十五

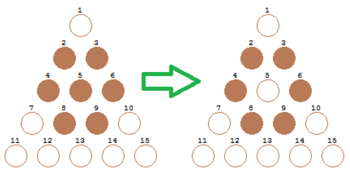
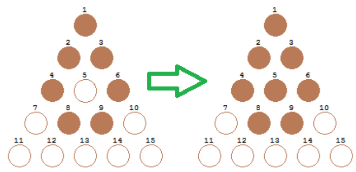



9 子
9 子
10 子
10 子
10 子
10 子
11 子
11 子
11 子
12 子
13 子

<table>
<tr><td>13 子</td><td colspan="3">14 子</td><td rowspan="2">這些線對稱圖形既漂亮又適合用於設計關卡！</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

我們也發現到有些「死局」若做適當的增減，就可以變成「活局」。見表十六。

表十六

<table>
<tr><td>減
一
子</td><td>
無解 → 有解</td><td>增
一
子</td><td>
無解 → 有解</td></tr>
</table>

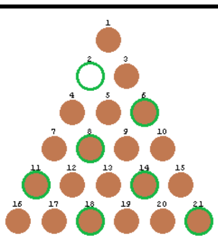
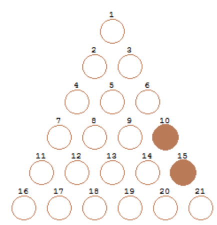
五、尋找棋盤 T（5）至 T（8）缺一子位置 L 與其終點位置 E 及其解

（一）如何找到棋盤T（5）至T（8）缺一子位置L與其終點位置E及其解

經由棋盤 T（3）、T（4）不同棋數的有解盤面探討累積經驗，在接下來探討棋盤 T（5）至 T（8）缺一子盤面找解時，除碰運氣外還運用了以下策略：

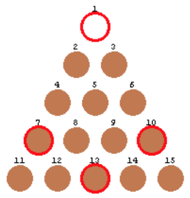
1. **一線法**：起初在盤面上設定一 L，然後進行找解工作，當找到一個對應 E 後，我們發現到有時只需改變最後一個步驟，就能找到另一個 E，一線法的想法就這麼蹦出。一線法就是把最後一步往另一個方向跳，找出同一線上另一端的 E。見表十七。

表十七

<table>
<tr><td>L</td><td rowspan="2">起始盤面</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">…………………
(相同移動過程)</td><td rowspan="2">剩最後一步的盤面</td><td rowspan="2"></td><td>R</td><td>G</td><td>B</td></tr>
<tr><td>P2</td><td>7</td><td>6</td><td>7</td></tr>
<tr><td>E</td><td colspan="5">M</td><td colspan="3">S</td></tr>
<tr><td>P6</td><td colspan="5">7 -> 2　9 -> 7　19 -> 8　11 -> 4 -> 13　17 -> 19 -> 8 -> 17　21 -> 19
16 -> 18 -> 20 -> 9　3 -> 8　10 -> 3　1 -> 4 -> 13 -> 6　3 -> 10　15 -> 6</td><td colspan="3">12</td></tr>
<tr><td>P21</td><td colspan="5">7 -> 2　9 -> 7　19 -> 8　11 -> 4 -> 13　17 -> 19 -> 8 -> 17　21 -> 19
16 -> 18 -> 20 -> 9　3 -> 8　10 -> 3　1 -> 4 -> 13 -> 6　3 -> 10 -> 21</td><td colspan="3">11</td></tr>
</table>

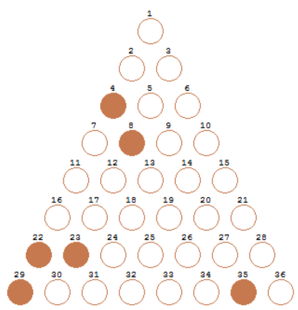
2. **對稱跳法**：當我們碰到待解盤面成線對稱圖形，想到了可以利用對稱跳法來找對稱點的解。見表十八。

表十八

<table>
<tr><td>L</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">說明</td><td rowspan="2" colspan="2">1. P7、P10 互為對稱點。
2. 若已找到 L：P1--E：P7 的解法，想找出 L：P1--E：P10 的解法時，可採用對稱跳法。</td></tr>
<tr><td>P1</td></tr>
<tr><td>E</td><td colspan="3">M</td><td>S</td></tr>
<tr><td>P7</td><td colspan="3">6 -> 1　4 -> 6　1 -> 4　10 -> 3　7 -> 2　12 -> 5　14 -> 12　11 -> 13 -> 6
3 -> 10　15 -> 6 -> 4　2 -> 7</td><td>11</td></tr>
<tr><td>P10</td><td colspan="3">4 -> 1　6 -> 4　1 -> 6　7 -> 2　10 -> 3　14 -> 5　12 -> 14　15 -> 13 -> 4
2 -> 7　11 -> 4 -> 6　3 -> 10</td><td>11</td></tr>
</table>

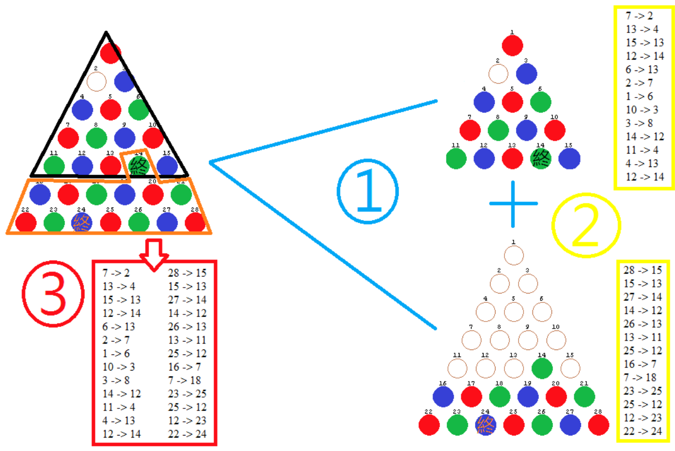
3. **棋子集中原則**：在移動棋子的過程中，我們會採取將角落的棋子先往內部移動集中。因為角落的棋子可移動位置比較受限，以盤面三個頂點來說(見下表十九之 P1)可移動位置只有兩種，遠不及內部一點(見表十九之 P13) 可移動位置有六種。若只是想替待解盤面找解，當可移動位置越多就越保有彈性空間，所以建議棋子盡量**從外部朝內部來集中**。當我們發現在同一待解盤面所找的幾個終點位置 E 均為同色時，好奇此棋盤上此色的 E 是否都可以成為終點位置？所以會**往預期終點位置採取棋子集中原則**。簡而言之，在移動過程中要隨時掌握棋子集中原則、避免出現棋子落單或過於分散情形，當棋子分散距離太遠通常會無解。見表十九。

表十九

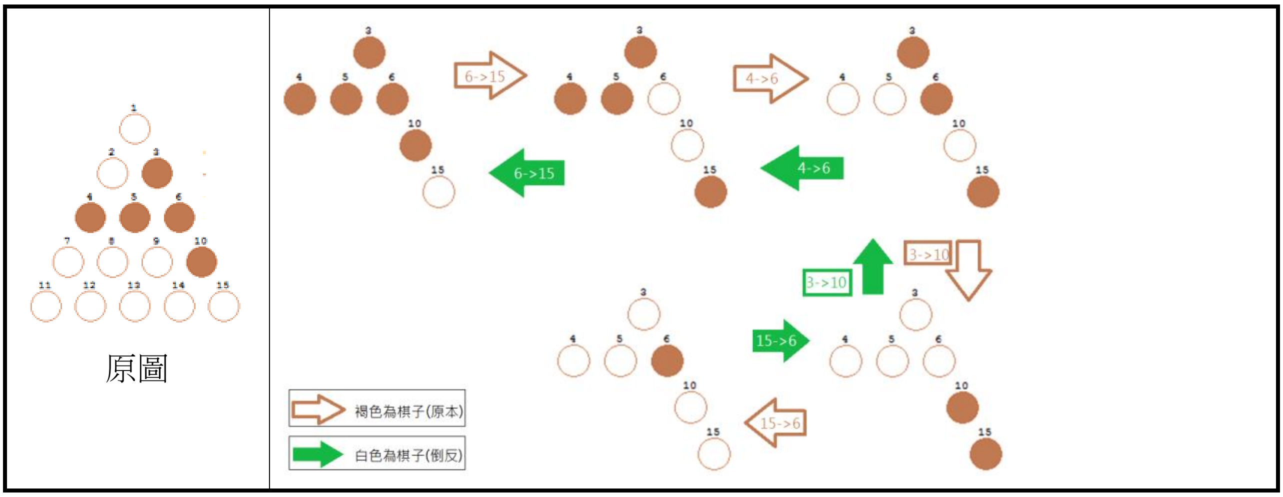
<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td>說明</td></tr>
<tr><td>棋盤的棋子過於分散，無法製造出盤面跳到只剩一子的可能性。</td></tr>
</table>

4. **棋盤切割法**：當棋盤層數增加時，我們利用已解的子盤面（掌握 L 與 E 之關係）接著繼續跳，初步將**棋盤切割成三角形和梯形**來處理。見表二十。

表二十

策略	① 先把待解棋盤切割成三角形和梯形。 ② 找出三角形的 L 與 E（已解子盤面的運用）。 ③ 將三角形跳完所剩的那一子(暫時 E)再與梯形合併接著跳完，即可找到最後 E。
圖示	

5. **缺子終點對調法**：由於我們在先前探討不同棋數的有解盤面時，需要不斷地檢視有解盤面在經過旋轉、鏡射後是否重複，除了檢視棋子所呈現的圖形之外，也會利用空位所呈現的圖形來複檢，因此，在替缺一子盤面找解時，觀察並想出了缺子終點對調法，見下圖一。



圖一

在圖一中，先將褐色當棋子、白色當空位，可解得 L：P15--E：P6，接著把原先的棋子(褐色)當空位，原先空位(白色)當棋子，移動順序倒回來，可解得 L：P6--E：P15，我們發現**兩者步驟順序正好完全顛倒，每步驟棋子移動過程均無改變**。

表二十一

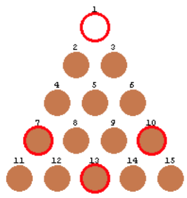
步驟	(左)　L：P1--E：P7	步驟	(右)　L：P7--E：P1
1	4 -> 1	1	2 -> 7
2	6 -> 4	2	6 -> 4
3	7 -> 2	3	15 -> 6
4	1 -> 6	4	3 -> 10
5	12 -> 5	5	13 -> 6
6	14 -> 12	6	10 -> 3
7	11 -> 13	7	11 -> 13
8	10 -> 3	8	14 -> 12
9	13 -> 6	9	12 -> 5
10	3 -> 10	10	1 -> 6
11	15 -> 6	11	7 -> 2
12	6 -> 4	12	6 -> 4
13	2 -> 7	13	4 -> 1

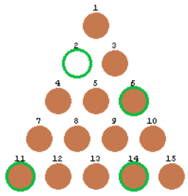
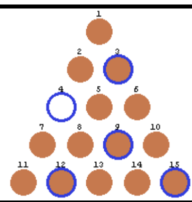
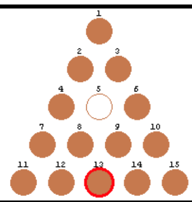
在表二十一中：左步驟 1＝右步驟 13、左步驟 2＝右步驟 12、……(即左步驟 x＝右步驟 y，x+y=14)。發現**左右兩欄步驟順序正好完全顛倒，而每步驟棋子移動過程均無改變**，左欄是 L：P1--E：P7，右欄是 L：P7--E：P1，因此，找到「**缺子終點對調法**」**：若已知 L：P_a--E：P_b，即可利用此法找到 L：P_b--E：P_a** 。

（二）棋盤T（5）至T（8）缺一子位置L與其終點位置E及其解

1.棋盤T（5）缺一子位置L與其終點位置E及其解法（見表二十二）。

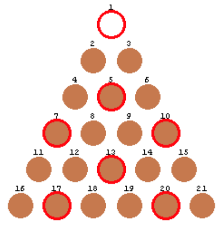
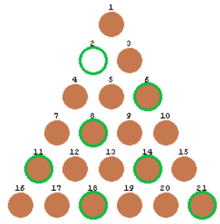
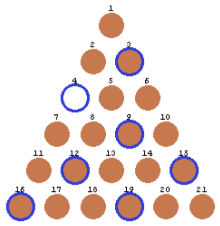
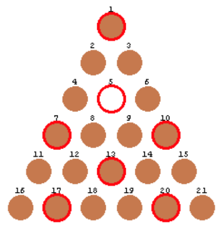
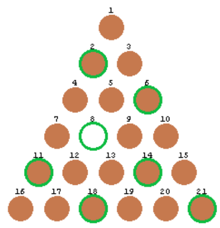
表二十二

L		R	G	B
P1		4	5	5
E	移動過程 M	解手數 S		
P1	4 -> 1　13 -> 4　11 -> 13　14 -> 12　7 -> 2　6 -> 13　12 -> 14　1 -> 6　10 -> 3 -> 8　15 -> 13 -> 4 -> 1	10		
P7	6 -> 1　4 -> 6　1 -> 4　10 -> 3　7 -> 2　12 -> 5　14 -> 12　11 -> 13 -> 6　3 -> 10　15 -> 6 -> 4　2 -> 7	11		
P10	4 -> 1　6 -> 4　1 -> 6　7 -> 2　10 -> 3　14 -> 5　12 -> 14　15 -> 13 -> 4　2 -> 7　11 -> 4 -> 6　3 -> 10	11		

<table>
<tr><td>P13</td><td>4 -> 1　6 -> 4　7 -> 2　13 -> 4　15 -> 13　12 -> 14 -> 5　2 -> 7　1 -> 6　10 -> 3 -> 8
11 -> 4 -> 13</td><td colspan="3">10</td></tr>
<tr><td>L</td><td rowspan="2"></td><td>R</td><td>G</td><td>B</td></tr>
<tr><td>P2</td><td>5</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>E</td><td>M</td><td colspan="3">S</td></tr>
<tr><td>P2</td><td>7 -> 2　6 -> 4　2 -> 7　1 -> 6　10 -> 3　12 -> 5　14 -> 12　11 -> 13 -> 6　3 -> 10
15 -> 6 -> 4　7 -> 2</td><td colspan="3">11</td></tr>
<tr><td>P6</td><td>7 -> 2　6 -> 4　1 -> 6　2 -> 7　12 -> 5　10 -> 3 -> 8　14 -> 12　11 -> 4 -> 13
12 -> 14　15 -> 13 -> 6</td><td colspan="3">10</td></tr>
<tr><td>P11</td><td>7 -> 2　6 -> 4　2 -> 7　1 -> 6　10 -> 3　12 -> 5　14 -> 12　11 -> 13 -> 6　3 -> 10
15 -> 6 -> 4 -> 11</td><td colspan="3">10</td></tr>
<tr><td>P14</td><td>7 -> 2　13 -> 4　15 -> 13　12 -> 14　6 -> 13　2 -> 7　1 -> 6　10 -> 3 -> 8　14 -> 12
11 -> 4 -> 13　12 -> 14</td><td colspan="3">11</td></tr>
<tr><td>L</td><td rowspan="2"></td><td>R</td><td>G</td><td>B</td></tr>
<tr><td>P4</td><td>5</td><td>5</td><td>4</td></tr>
<tr><td>E</td><td>M</td><td colspan="3">S</td></tr>
<tr><td>P3</td><td>1 -> 4　7 -> 2　13 -> 4　10 -> 8　3 -> 10　2 -> 7　11 -> 13 -> 4　7 -> 2 -> 9
15 -> 13 -> 6　10 -> 3</td><td colspan="3">10</td></tr>
<tr><td>P4</td><td>1 -> 4　7 -> 2　6 -> 1 -> 4 -> 6　10 -> 3　13 -> 6　11 -> 13　14 -> 12 -> 5　3 -> 10
15 -> 6 -> 4</td><td colspan="3">9</td></tr>
<tr><td>P9</td><td>1 -> 4　7 -> 2　6 -> 4　12 -> 5　14 -> 12　15 -> 6　3 -> 10 -> 8　2 -> 7　11 -> 13 -> 4
7 -> 2 -> 9</td><td colspan="3">10</td></tr>
<tr><td>P12</td><td>1 -> 4　7 -> 2　6 -> 4　2 -> 7　15 -> 6　3 -> 10　13 -> 6 -> 15 -> 13　12 -> 14
11 -> 4 -> 13　14 -> 12</td><td colspan="3">10</td></tr>
<tr><td>P15</td><td>1 -> 4　7 -> 2　13 -> 4　10 -> 8　3 -> 10　2 -> 7　11 -> 13 -> 4　7 -> 2 -> 9
15 -> 13 -> 6 -> 15</td><td colspan="3">9</td></tr>
<tr><td>L</td><td rowspan="2"></td><td>R</td><td>G</td><td>B</td></tr>
<tr><td>P5</td><td>4</td><td>5</td><td>5</td></tr>
<tr><td>E</td><td>M</td><td colspan="3">S</td></tr>
<tr><td>P13</td><td>14 -> 5　7 -> 9　3 -> 8　2 -> 7　10 -> 3　12 -> 14　1 -> 6 -> 13　14 -> 12
11 -> 4 -> 13　12 -> 14　15 -> 13</td><td colspan="3">11</td></tr>
</table>

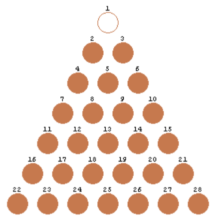
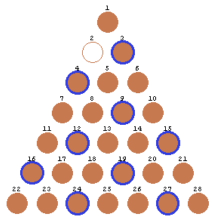
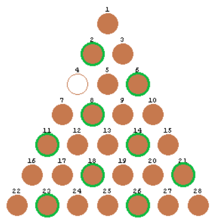
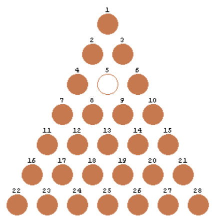
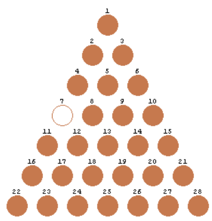
2.棋盤T（6）缺一子位置L與其終點位置E及其解（見表二十三）(移動過程見附件三)

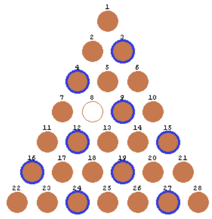
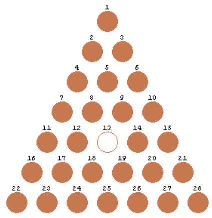
表二十三

<table>
<tr><td>L</td><td colspan="6" rowspan="2"></td><td>R</td><td>G</td><td>B</td></tr>
<tr><td>P1</td><td>6</td><td>7</td><td>7</td></tr>
<tr><td>E</td><td>P1</td><td>P5</td><td>P7</td><td>P10</td><td>P13</td><td>P17</td><td colspan="3">P20</td></tr>
<tr><td>S</td><td>12</td><td>17</td><td>12</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td colspan="3">13</td></tr>
<tr><td>L</td><td colspan="6" rowspan="2"></td><td>R</td><td>G</td><td>B</td></tr>
<tr><td>P2</td><td>7</td><td>6</td><td>7</td></tr>
<tr><td>E</td><td>P2</td><td>P6</td><td>P8</td><td>P11</td><td>P14</td><td>P18</td><td colspan="3">P21</td></tr>
<tr><td>S</td><td>13</td><td>12</td><td>11</td><td>13</td><td>17</td><td>13</td><td colspan="3">11</td></tr>
<tr><td>L</td><td colspan="6" rowspan="2"></td><td>R</td><td>G</td><td>B</td></tr>
<tr><td>P4</td><td>7</td><td>7</td><td>6</td></tr>
<tr><td>E</td><td>P3</td><td>P4</td><td>P9</td><td>P12</td><td>P15</td><td>P16</td><td colspan="3">P19</td></tr>
<tr><td>S</td><td>15</td><td>14</td><td>12</td><td>14</td><td>14</td><td>11</td><td colspan="3">11</td></tr>
<tr><td>L</td><td colspan="6" rowspan="2"></td><td>R</td><td>G</td><td>B</td></tr>
<tr><td>P5</td><td>6</td><td>7</td><td>7</td></tr>
<tr><td>E</td><td>P1</td><td>P5</td><td>P7</td><td>P10</td><td>P13</td><td>P17</td><td colspan="3">P20</td></tr>
<tr><td>S</td><td>13</td><td>14</td><td>14</td><td>14</td><td>11</td><td>14</td><td colspan="3">14</td></tr>
<tr><td>L</td><td colspan="6" rowspan="2"></td><td>R</td><td>G</td><td>B</td></tr>
<tr><td>P8</td><td>7</td><td>6</td><td>7</td></tr>
<tr><td>E</td><td>P2</td><td>P6</td><td>P8</td><td>P11</td><td>P14</td><td>P18</td><td colspan="3">P21</td></tr>
<tr><td>S</td><td>12</td><td>13</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>12</td><td colspan="3">14</td></tr>
</table>

3.**棋盤T（7）缺一子位置L與其終點位置E及其解**（見表二十四）(移動過程見附件四)

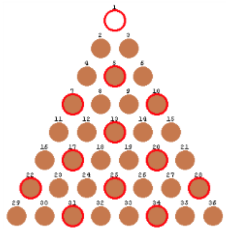
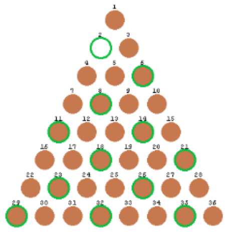
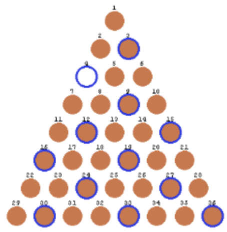
表二十四

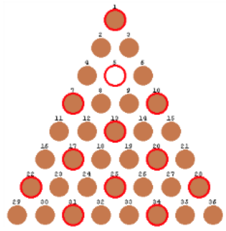
<table>
<tr><td>L</td><td colspan="6" rowspan="2"></td><td>R</td><td>G</td><td>B</td></tr>
<tr><td>P1</td><td>9</td><td>9</td><td>9</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="6">三奇無解</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td>L</td><td colspan="6" rowspan="2"></td><td>R</td><td>G</td><td>B</td></tr>
<tr><td>P2</td><td>10</td><td>8</td><td>9</td></tr>
<tr><td>E</td><td>P3</td><td>P4</td><td>P9</td><td>P12</td><td>P15</td><td>P16</td><td>P19</td><td>P24</td><td>P27</td></tr>
<tr><td>S</td><td>16</td><td>18</td><td>18</td><td>18</td><td>17</td><td>19</td><td>19</td><td>18</td><td>17</td></tr>
<tr><td>L</td><td colspan="6" rowspan="2"></td><td>R</td><td>G</td><td>B</td></tr>
<tr><td>P4</td><td>10</td><td>9</td><td>8</td></tr>
<tr><td>E</td><td>P2</td><td>P6</td><td>P8</td><td>P11</td><td>P14</td><td>P18</td><td>P21</td><td>P23</td><td>P26</td></tr>
<tr><td>S</td><td>18</td><td>17</td><td>18</td><td>16</td><td>17</td><td>19</td><td>18</td><td>18</td><td>17</td></tr>
<tr><td>L</td><td colspan="6" rowspan="2"></td><td>R</td><td>G</td><td>B</td></tr>
<tr><td>P5</td><td>9</td><td>9</td><td>9</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="6">三奇無解</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td>L</td><td colspan="6" rowspan="2"></td><td>R</td><td>G</td><td>B</td></tr>
<tr><td>P7</td><td>9</td><td>9</td><td>9</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="6">三奇無解</td><td colspan="3"></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>L</td><td colspan="6" rowspan="2"></td><td>R</td><td>G</td><td>B</td></tr>
<tr><td>P8</td><td>10</td><td>8</td><td>9</td></tr>
<tr><td>E</td><td>P3</td><td>P4</td><td>P9</td><td>P12</td><td>P15</td><td>P16</td><td>P19</td><td>P24</td><td>P27</td></tr>
<tr><td>S</td><td>22</td><td>17</td><td>21</td><td>16</td><td>15</td><td>19</td><td>18</td><td>18</td><td>17</td></tr>
<tr><td>L</td><td colspan="6" rowspan="2"></td><td>R</td><td>G</td><td>B</td></tr>
<tr><td>P13</td><td>9</td><td>9</td><td>9</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="6">三奇無解</td><td colspan="3"></td></tr>
</table>

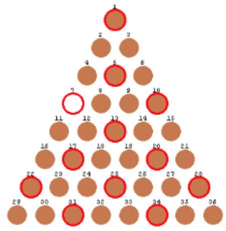
4.棋盤T（8）缺一子位置L與其終點位置E及其解（見表二十五）(移動過程見附件五)

表二十五

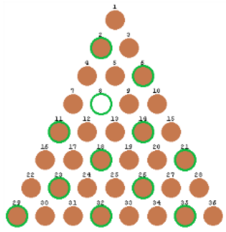
<table>
<tr><td>L</td><td colspan="9" rowspan="2"></td><td>R</td><td>G</td><td>B</td></tr>
<tr><td>P1</td><td>11</td><td>12</td><td>12</td></tr>
<tr><td>E</td><td>P1</td><td>P5</td><td>P7</td><td>P10</td><td>P13</td><td>P17</td><td>P20</td><td>P22</td><td>P25</td><td>P28</td><td>P31</td><td>P34</td></tr>
<tr><td>S</td><td>24</td><td>24</td><td>22</td><td>22</td><td>22</td><td>22</td><td>22</td><td>22</td><td>21</td><td>22</td><td>22</td><td>22</td></tr>
<tr><td>L</td><td colspan="9" rowspan="2"></td><td>R</td><td>G</td><td>B</td></tr>
<tr><td>P2</td><td>12</td><td>11</td><td>12</td></tr>
<tr><td>E</td><td>P2</td><td>P6</td><td>P8</td><td>P11</td><td>P14</td><td>P18</td><td>P21</td><td>P23</td><td>P26</td><td>P29</td><td>P32</td><td>P35</td></tr>
<tr><td>S</td><td>20</td><td>18</td><td>18</td><td>21</td><td>21</td><td>19</td><td>21</td><td>20</td><td>20</td><td>24</td><td>19</td><td>20</td></tr>
<tr><td>L</td><td colspan="9" rowspan="2"></td><td>R</td><td>G</td><td>B</td></tr>
<tr><td>P4</td><td>12</td><td>12</td><td>11</td></tr>
<tr><td>E</td><td>P3</td><td>P4</td><td>P9</td><td>P12</td><td>P15</td><td>P16</td><td>P19</td><td>P24</td><td>P27</td><td>P30</td><td>P33</td><td>P36</td></tr>
<tr><td>S</td><td>22</td><td>23</td><td>19</td><td>20</td><td>22</td><td>19</td><td>18</td><td>19</td><td>21</td><td>19</td><td>19</td><td>19</td></tr>
</table>

L		R	G	B
P5		11	12	12

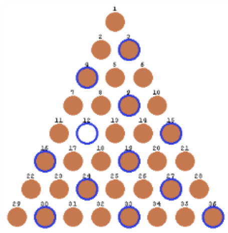
E	P1	P5	P7	P10	P13	P17	P20	P22	P25	P28	P31	P34
S	20	20	19	19	19	21	21	20	21	20	19	19

L		R	G	B
P7		11	12	12

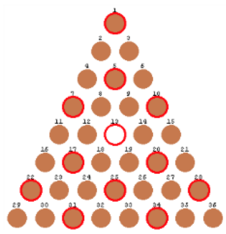
E	P1	P5	P7	P10	P13	P17	P20	P22	P25	P28	P31	P34
S	24	24	22	24	22	22	22	22	23	22	22	21

L		R	G	B
P8		12	11	12

E	P2	P6	P8	P11	P14	P18	P21	P23	P26	P29	P32	P35
S	21	23	21	23	23	22	19	22	22	22	22	21

L		R	G	B
P12		12	12	11

E	P3	P4	P9	P12	P15	P16	P19	P24	P27	P30	P33	P36
S	18	20	20	19	22	19	20	19	23	19	20	23

L		R	G	B
P13		11	12	12

E	P1	P5	P7	P10	P13	P17	P20	P22	P25	P28	P31	P34
S	24	21	21	21	20	21	20	20	21	20	19	19

（三）棋盤T（5）至T（8）缺一子位置L與其終點位置E及其解之綜合討論

1. 棋盤T（？）會有無解狀況呢？

當我們進行棋盤T（5）至T（8）L與E及其解之探討時，也同時在思考：棋盤T（？）會有無解狀況？這當中是否有規律？整理見表二十六：

表二十六

層數	棋子總數	無缺子時的各色總數			缺一子時所缺那子的顏色總數		
T		R	G	B	L：R	L：G	L：B
3	6	2	2	2	1 (空間受限)	1(空間受限)	1 (空間受限)
4	10	4	3	3	3 (三奇無解)	2	2
5	15	5	5	5	4	4	4
6	21	7	7	7	6	6	6
7	28	10	9	9	9 (三奇無解)	8	8
8	36	12	12	12	11	11	11
9	45	15	15	15	14	14	14
10	55	19	18	18	18 (三偶無解)	17	17
11	66	22	22	22	21	21	21
12	78	26	26	26	25	25	25
13	91	31	30	30	30 (三偶無解)	29	29
…	…	…	…	…	…	…	…

※第 T 層棋子總數：$\dfrac{T(T+1)}{2}$

※當 T≠3N+1(N 為正整數)成立且無缺子時，三色相同，R=G=B=$\dfrac{\text{總數}}{3}=\dfrac{T(T+1)}{6}$ 。

※當 T＝3N+1(N 為正整數)成立且無缺子時，三色不相同，R-1＝G＝B＝$\dfrac{\text{棋子數}-1}{3}$

$$=\frac{\frac{T(T+1)}{2}-1}{3}=\frac{T(T+1)-2}{6}$$

我們發現到

(1)當缺子是綠色或藍色時，T(4)以上皆有解。

(2)當缺子是紅色時，T(4)以上、T≠3N+1(N 為正整數)成立時皆有解。

(3)當缺子是紅色時，T＝3N+1(N 為正整數)成立時皆無解。

小結：棋盤 T（T＝3N+1 時）缺子是紅色則必定無解！

2.三色定理還能做什麼？

從三色定理我們得知當 R.G.B 的總數同為奇數或同為偶數時，則此盤面必定無解，反之，三色總數出現一奇二偶或二偶一奇時，則此盤面就會有解。以棋盤 T(5)(L：P1--E：P1）來討論每個步驟的三色總數變化，見表二十七。

表二十七

L：P1--E：P1		R	G	B
步驟	跳法	4(偶)	5(奇)	5(奇)
1	4 -> 1	5(奇)	4(偶)	4(偶)
2	13 -> 4	4(偶)	3(奇)	5(奇)
3	11 -> 13	5(奇)	2(偶)	4(偶)
4	14 -> 12	4(偶)	1(奇)	5(奇)
5	7 -> 2	3(奇)	2(偶)	4(偶)
6	6 -> 13	4(偶)	1(奇)	3(奇)
7	12 -> 14	3(奇)	2(偶)	2(偶)
8	1 -> 6	2(偶)	3(奇)	1(奇)
9	10 -> 3	1(奇)	2(偶)	2(偶)
10	3 -> 8	0(偶)	3(奇)	1(奇)
11	15 -> 13	1(奇)	2(偶)	0(偶)
12	13 -> 4	0(偶)	1(奇)	1(奇)
13	4 -> 1	1(奇)	0(偶)	0(偶)
※三種顏色的奇偶每經過一個步驟就會換一次(奇變偶、偶變奇)				

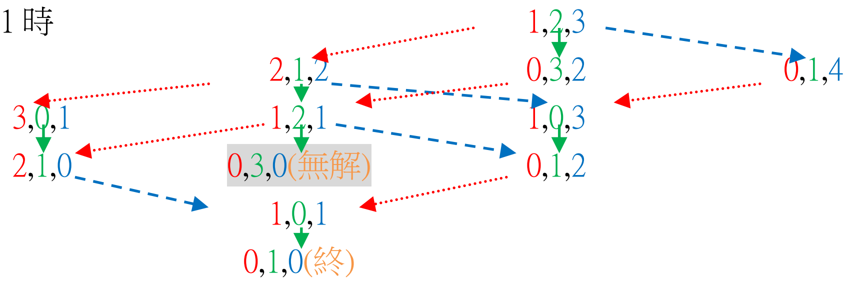
我們發現到

(1)只要三色的數字是連續整數，終點顏色必為中項顏色，所以只要將棋子跳到呈現連續整數時就可以知道終點顏色。說明如下表二十八：

表二十八

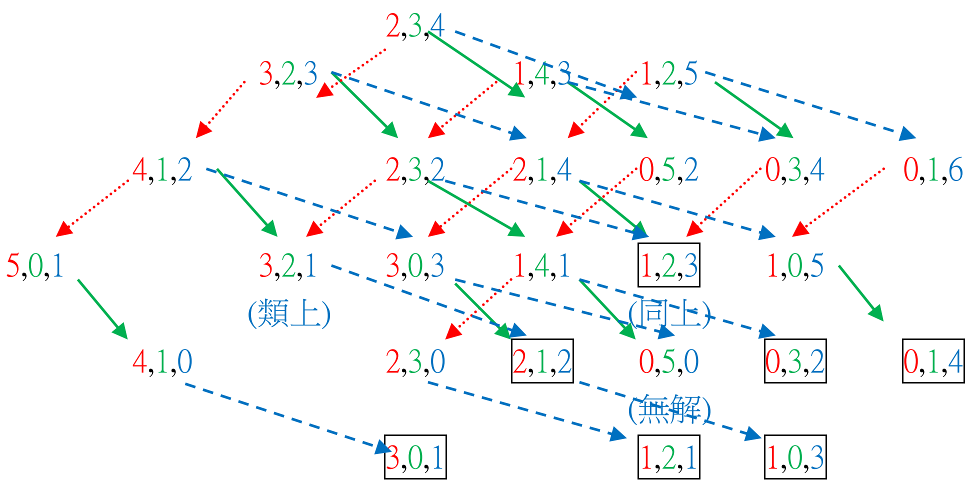
假設三色數量分別為 n,n+1,n+2

當 n=1 時



當 n=1 時，成立！

當 n=2 時



凡是框起來的如 $\boxed{1,2,3}$ 為 n=2 重覆了 n=1 出現的情況。

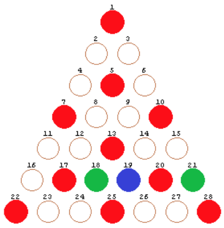
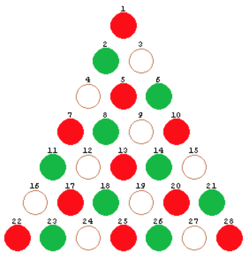
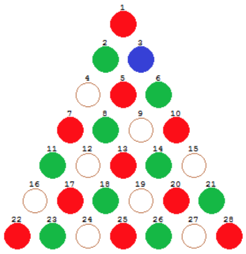
當 n=2 時，也成立！

以此類推…只要三色的數字是連續整數，終點顏色必為中項顏色。

(2) 三色的數字是連續整數，連續整數必定呈現二偶一奇或一偶二奇，其中項必定與前後不同奇偶，因此在三色中只要是奇偶數與其他兩者不同時，那個顏色就一定是終點顏色，所以可以直接透過三色定理判定有解盤面的終點顏色。

(3) 我們也好奇如果三色數量落差很大，並非呈連續整數，但棋子並無太分散時，是否也可找到其解？見表二十九。

表二十九

舉例	(R,G,B)	M	結果
	(10,2,1) (偶,偶,奇)	18 -> 16　22 -> 11 -> 4 -> 6　10 -> 3 1 -> 6　13 -> 26　25 -> 27　28 -> 26 -> 15 21 -> 10 -> 3	有解！ 終點顏色： B奇
 (七層填滿去除藍色的棋子)	(10,9,0) (偶,奇,偶)	1 -> 4　7 -> 2 -> 9 -> 7 -> 16　14 -> 12 22 -> 11 -> 13　23 -> 12 -> 14 26 -> 24 -> 13　28 -> 15　10 -> 21 13 -> 15　21 -> 10　6 -> 15 -> 26	有解！ 終點顏色： G奇
	(10,9,1) (偶,奇,奇)	25 -> 27　28 -> 15 -> 26　27 -> 25 -> 12 7 -> 16　22 -> 24 -> 11　16 -> 7 -> 18 -> 9 6 -> 15 -> 13 -> 6 -> 4　2 -> 7 -> 9 1 -> 6 -> 13	有解！ 終點顏色： R偶
※就算三色數量皆有一些落差，但仍會有解，且終點顏色為二偶一奇中的「奇」或二奇一偶中的「偶」。			

小結：我們引用三色定理判斷棋盤有解與否，還能推論出該棋盤若有解的終點顏色。

3. 缺子位置L與終點位置E之間有何關係？

我們探討棋盤 T(5)至 T(8)L 與 E 的關係，如下表三十：

表三十

T(5)				
L	1	2	4	5
E	1、~~5~~(空間受限)、7、10、13	2、6、~~8~~(空間受限)、11、14	3、4、9、12、15	~~1~~、~~5~~、~~7~~、~~10~~(以上均為空間受限)、13

T(6)					
L	1	2	4	5	8
E	1、5、7、10、13、17、20	2、6、8、11、14、18、21	3、4、9、12、15、16、19	同 L1	同 L2

T(7)							
L	1	2	4	5	7	8	13
E	無解	3、4、9、12、15、16、19、24、27	2、6、8、11、14、18、21、23、26	無解	無解	同 L2	無解

T(8)								
L	1	2	4	5	7	8	12	13
E	1、5、7、10、13、17、20、22、25、28、31、34	2、6、8、11、14、18、21、23、26、29、32、35	3、4、9、12、15、16、19、24、27、30、33、36	同 L1	同 L1	同 L2	同 L4	同 L1

	T≠3N+1			T＝3N+1		
L	R	G	B	R	G	B
E	R	G	B	無解	B	G

我們發現到

考慮了將三角獨子棋盤加以旋轉、鏡射，棋盤上的部分位置具有同等的情形，

(1) 棋盤T（5）缺任何一子均有解，但不同的L有其對應的E；當L：P4時，可到達的E**有五個**，L：P5時，可到達的E只有一個。我們認為是**空間受限**的關係，故將L:P1--E:P5、L:P2--E:P8、L:P5--E:P1、L:P5--E:P5、L:P5--E:P7、L:P5--E:P10等**放入無限棋盤討論，均能找到其解（見附件六）**，因此，棋盤T（5）L:R--E:R，L:G--E:G，L:B--E:B。

(2) 棋盤T（6）缺任何一子均有解，但不同L有其對應的E；每個L可到達的E**均有七個，且同顏色的L可到達的E彼此重複**。棋盤T（6）L:R--E:R，L:G--E:G，L:B--E:B。

(3) 棋盤T（7）若L是紅色，均無解！此外，有解的每個L可到達的E**均有九個，且同顏色的L可到達的E彼此重複**。棋盤T（7）L:R--E:無解，L:G--E:B，L:B--E:G。

(4) 棋盤T（8）缺任何一子均有解，但不同的L有其對應的E；每個L可到達的E**均有十二個，且同顏色的L可到達的E彼此重複**。棋盤T（8）L:R--E:R，L:G--E:G，L:B--E:B。

小結：**我們引用三色定理推論出該棋盤若有解的終點顏色，也可推論其終點位置。**

此外，$\boxed{\text{我們也發現到}}$

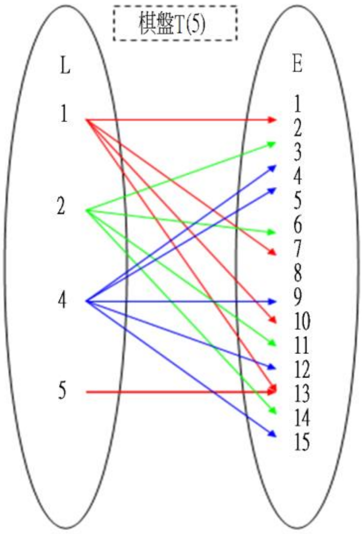
(5) 棋盤T（5），L：P15以下的任意正整數(除了P5、P8、P9)時，**E可跳回原本L**，如缺1終1。

(6) 棋盤T（6），L：P21以下的任意正整數時，**E可跳回原本L**。

(7) 棋盤T（7），L與E均不相同，**無法跳回原本L。**

(8) 棋盤T（8），L：P36以下的任意正整數時，**E可跳回原本L**。

小結：當缺子與終點位置同，可將此歸為封閉區塊，以利後續討論多層棋盤的切割。



圖二

(9) 從圖二可知，棋盤T（5），L：P1--E：P1、P7、P10、P13，一對多，不是函數關係。以此類推。L：P5--E：P13(同等L：P8--E：P6； L：P9--E：P4)，一對一，函數關係。

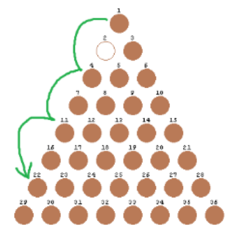
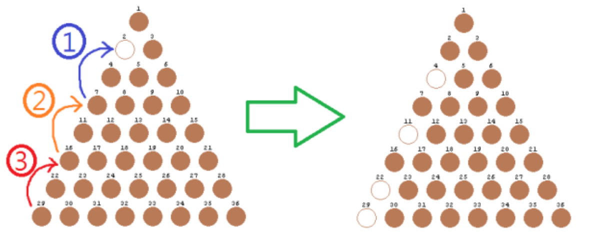
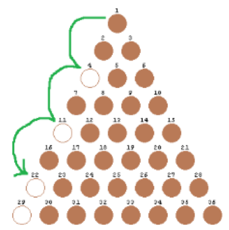
(10) 棋盤T（7），L：P1--E：無解，一對無，不是函數關係。以此類推。

小結：除了棋盤T（5），L：P5--E：P13(同等L：P8--E：P6； L：P9--E：P4)，一對一，其餘均不是函數關係。

4.如何尋找較少的解手數？

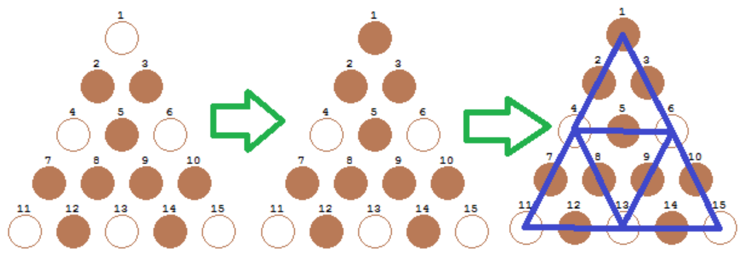
以棋盤T（5）缺一子求解舉例，盤面上原有14顆棋子與1個空位，依據每跳一次少一顆棋的概念，跳完13次盤面上才會剩下一顆棋，所以不管怎麼跳解手數都是S=13。但在跳動過程中我們發現有時棋子是可以連跳的，若**將可連跳的步驟視為一次**，這樣可以降低解手數，而且，尋找較少的解手數是個有趣的挑戰。面對多層缺一子求解，為了要找出較少的解手數，先規劃**一次連跳**所用到的棋子跟空位。見表三十一。

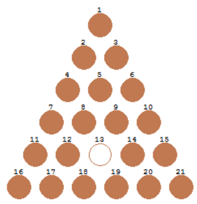
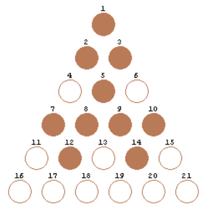
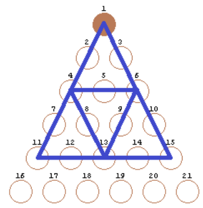
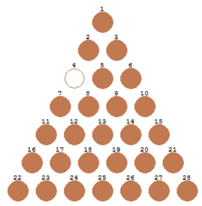
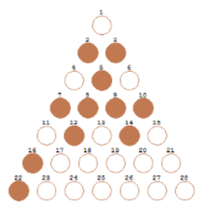
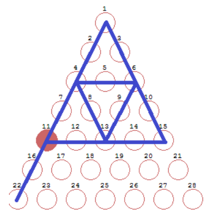
表三十一

棋盤 T（8）L：P2		
		
想要從 P1 連跳 P4、P11 到 P22	需要先跳一些步驟： ① 7 -> 2　② 16 -> 7　③ 29 -> 16	接著就可開始**連跳**： 1 ->4 ->11 -> 22

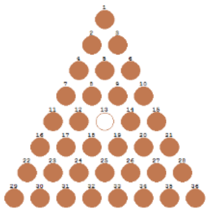
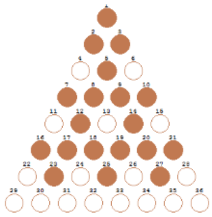
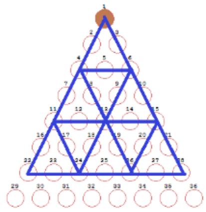
要怎麼充分運用**一次連跳**？我們想到了**一筆劃問題**。**一次連跳可以與一筆劃三角形做結合**，分成兩個階段，階段一：先將盤面跳到剩下一筆劃三角形連跳所需的棋子；階段二：再用一筆劃三角形連跳將盤面跳至剩下一子。我們在努力嘗試的過程中碰巧讀到了 George Bell (2004)關於無限三角棋盤的研究，其中也有將一次連跳與一筆劃三角形做結合。棋盤 T(6)、T(7)是由我們自行完成(見表三十二)，**棋盤 T(8)則是引用 George Bell(2004)所提出的「A 15-move solution to problem on Triangle(8)」之破解方法**(見表三十三)。

表三十二

 圖三	只要在剩餘的任意空間加上一個棋子（如 P1），就可以產生一個 S=1 的有解盤面，見圖三。

<table>
<tr><td colspan="6">棋盤 T(6) L：P13--E：P1</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="3">階段一</td><td colspan="3">階段二(見附件七--動態說明)</td></tr>
<tr><td colspan="2">4 -> 13　10 -> 8　7 -> 9　19 -> 8　6 -> 13
16 -> 7　17 -> 19　20 -> 18 -> 9　21 -> 10</td><td>S=9</td><td colspan="2">1 -> 6 -> 15 -> 13 -> 11 -> 4 -> 6 -> 13 -> 4 ->
1</td><td>S=1</td></tr>
<tr><td colspan="6">合計 S=10</td></tr>
<tr><td colspan="6">棋盤 T(7) L：P4--E：P11</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="3">階段一</td><td colspan="3">階段二(見附件七)</td></tr>
<tr><td colspan="2">1 -> 4　7 -> 2　16 -> 7　24 -> 11　7 -> 16
9 -> 7　18 -> 9　15 -> 13　6 -> 15　19 -> 8
21 -> 10　26 -> 24　23 -> 25　28 -> 26
25 -> 27 -> 14</td><td>S=15</td><td colspan="2">22 -> 11 -> 4 -> 1 -> 6 -> 15 -> 13 -> 4
-> 6 -> 13 -> 11</td><td>S=1</td></tr>
<tr><td colspan="6">合計 S=16</td></tr>
<tr><td>多次分段
連跳</td><td colspan="4">11 -> 4　2 -> 7　22 -> 11 -> 4　13 -> 11　25 -> 12　15 -> 13　23 -> 25 -> 14
10 -> 19　27 -> 25 -> 14　3 -> 10　28 -> 15 -> 6　8 -> 10 -> 3　20 -> 9　1 -> 6
9 -> 2 -> 7 -> 16 -> 18 -> 9　6 -> 13 -> 11</td><td>S=16</td></tr>
<tr><td colspan="6">追求較少的解手數，除了規劃「一筆劃三角形連跳」之外，也可考慮「多次分段連跳」。</td></tr>
</table>

表三十三

<table>
<tr><td colspan="4">引用 **George Bell(2004)**所提出的「**A 15-move solution to problem on Triangle(8)**」</td></tr>
<tr><td colspan="4">棋盤 T(8) L：P13--E：P1</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2"></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">階段一</td><td colspan="2">階段二(見附件七)</td></tr>
<tr><td>4 -> 13　10 -> 8　7 -> 9　19 -> 8　6 -> 13
34 -> 19　18 -> 9　32 -> 34　16 -> 7
30 -> 32　21 -> 10　29 -> 16　36 -> 21
35 -> 33 -> 31 -> 18</td><td>S=14</td><td>1 -> 6 -> 15 -> 28 -> 26 -> 24 -> 22 -> 11 ->
13-> 15 -> 26 -> 13 -> 24 -> 11 -> 4 -> 6 ->
13 -> 4 -> 1</td><td>S=1</td></tr>
<tr><td colspan="4">合計 S=15</td></tr>
</table>

小結：若想要尋找較少的解手數，除了透過電腦跑程式之外，最佳人工方法就是努力製造多次「連跳」的機會：若能先將盤面跳至剩下「一筆劃三角形連跳」所需的棋子，或者採取「多次分段連跳」，或許可以找出較少的解手數。

伍、結論與展望

我們透過棋子兌換法及電腦程式運算，找到了有限棋盤 T（5）不同棋數的所有有解盤面，並整理出其中的特殊型—線對稱圖形；對有限棋盤多層缺一子找解，自行發展出許多找解策略：一線法、對稱跳法、棋子集中原則、棋盤切割法、缺子終點對調法等，找出了有限棋盤 T（5）至 T（8）缺一子的位置與其終點位置的關係及其解法。更進一步運用三色定理來研究盤面的特性：預測是否有解及終點顏色與位置。此研究未來可以朝替「大型棋盤」缺一子找解方向努力，對大型棋盤進行不同棋盤切割的方式來處理。

陸、參考資料

小遊戲—三角獨子棋 https://www.csie.Ttu.edu.tw/~b7506028/20151027_trichess/coTteTt.html

好玩的三角獨子棋 http://oddest.Tc.hcc.edu.tw/math393.htm

陳明揚（1994）。**棋盤上數學原理的研究**。載於國立科學教育館，全國中小學科學展覽第 34 屆國中組數學科。

George Bell (2004). Triangular Peg Solitaire Unlimited。The Games and Puzzles Journal — Issue 36 , November-December 2004。Retrieved June 9, 2016, from http://www.mayhematics.com/j/gpj36.htm

【評語】030404

一個規則簡單的單人跳棋遊戲。作者針對不同大小的三角垛棋盤的不同盤面的可解性作了討論，給出了簡化問題的一些方式，並藉由電腦輔助，對於五到八層的三角垛的可解圖像，給出了一個完整的解答。藉由簡單的可解條件分析和化簡可解圖形的技巧，作者們成功的把需要討論的盤面限縮到一個小的範圍，透過對稱性和程式的輔助，給出了五到八層的三角垛的可解盤面一個完整的解答。分析問題想法精簡而有效，十分難得。美中不足的是，作者們可能沒有特別留意到列在參考資料中一篇文章的作者一些較新的結果是與他們的成果有部分重疊了，如果在考慮這個問題時多一點資料蒐集，說不定可藉助已有的結果得到更多新的結論，有點可惜了。（PS：藉由盤面是否可變換成另一個盤面的想法來簡化問題是好方法，如果能把這部分討論的更清楚，對於近一部分析更大的三角垛應該會有幫助。）