中華民國第56屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030403

積 排 面 — 探討方塊鑲嵌平面問題

學校名稱：臺中市立豐南國民中學

作者：	指導老師：
國二 魏英杰 國二 夏侯育 國二 劉法容	曾智鈿 廖寶貴

關鍵詞：遞迴數列、積木遊戲

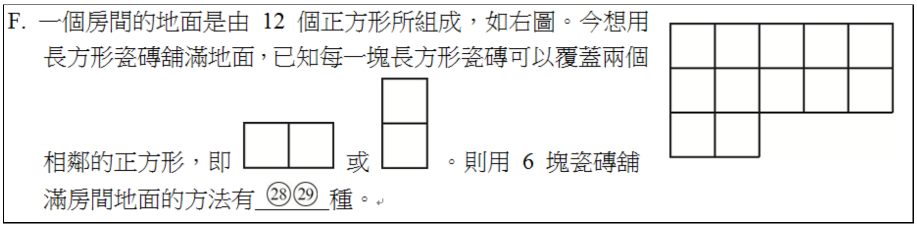
摘　　要

以2×1的方塊進行排列，探討排列成 $m \times n$ (其中 m 為 2、3、4，n 為所有自然數)的長方形時，所有的排列方法數；分別以A_n、B_n、D_n分別表示$2 \times n$、$3 \times 2n$、$4 \times n$的所有情況，並比較之間的關聯性。因為2×1方塊無法完整排成$3 \times n$的圖形（其中 n 為奇數），故不討論。研究最後結果，我們得出A_n、B_n、D_n的遞迴關係式與A_n的通式解。

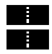
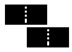
另外，還嘗試用3×1方塊，探討$3 \times n$的結果，並與A_n比較，發現之間的關係頗為類似；也因此能類推至利用$m \times 1$的方塊，排成$m \times n$的長方形之情況。

壹、　研究動機

在 103 學測題目中，我們看到這樣的一題數學題目：


F. 一個房間的地面是由 12 個正方形所組成，如右圖。今想用長方形瓷磚鋪滿地面，已知每一塊長方形瓷磚可以覆蓋兩個相鄰的正方形，即 □□ 或 □ 。則用 6 塊瓷磚鋪滿房間地面的方法有 ㉘㉙ 種。

此時，我們對於這好像遊戲似的題目給深深吸引，身邊疊疊樂的積木成了我們最大的幫手，讓我們樂於操作。然而在某次收拾方塊時，不經意將方塊排成一連串的長方形，卻對此問題產生很大的疑問？於是展開了我們對於這次科學研究的主題。我們很好奇地是否能找出所有的排放方法呢？市面上的疊疊樂都是長寬比為3：1的方塊；因此，我們自製2：1的方塊，以利我們對此問題的研究。

在研究的過程中，我們有初步的想法，例如$2 \times \mathrm{n}$長方形必由兩塊方塊橫放  或一塊方塊直放  所配對而成的，中間不存在  此種斜放的放法。在2×10以內，我們很順利地列出全部排法，並試著找出其中的關連性。然而，隨著長方形越長，我們越感困難找到全部的排法；也因此，請教指導老師對於這部分的數學觀念。

後來，老師跟我們介紹了路徑走法、乘法原理、階乘、與重複排列等相關概念，以利我們能運用這些數學原理來解決問題；也發現簡單的遊戲中，所包含的數學是無所不在的。而不是那麼簡單的拿與放罷了。隨著問題解決，我們對於這部分尚未滿足，更去改變了方塊形狀與圖形形狀，可惜對於師長所說的，對於整個平面的推廣還有點落差，但我們會繼續去研究深入的。

貳、　研究目的

一、　探討A_n數列：以2×1方塊排列成$2 \times \mathrm{n}$長方形的所有排法，找尋A_n各項之間的關聯性，並探討通式解的存在與否。

二、　探討B_n數列：以2×1方塊排列成$3 \times 2\mathrm{n}$長方形的所有排法，並找尋B_n各項之間的關聯性。

三、　探討D_n數列：以2×1方塊排列成$4 \times \mathrm{n}$長方形的所有排法，並找尋D_n各項之間的關聯性

四、　探討M_n數列：以$\mathrm{m} \times 1$方塊排列成$\mathrm{m} \times \mathrm{n}$長方形的所有排法，並找尋$M_n$各項之間的關聯性。

參、　研究設備及器材

一、　筆、紙、電腦、Excel 程式、自製積木

肆、 研究過程或方法

一、 符號定義：

A_n：	是指利用2×1方塊排列成$2\times \mathrm{n}$長方形的所有排法。(n 為自然數)
B_n：	是指利用2×1方塊排列成$3\times 2\mathrm{n}$長方形的所有排法。(n 為自然數)
D_n：	是指利用2×1方塊排列成$4\times \mathrm{n}$長方形的所有排法。(n 為自然數)
M_n：	是指利用$\mathrm{m}\times 1$方塊排列成$\mathrm{m}\times \mathrm{n}$長方形的所有排法。(n 為自然數)
$(m\times n)$：	為利用2×1方塊排成$\mathrm{m}\times \mathrm{n}$長方形的方法。
備註：	A_0、B_0、D_0可看成完全不放方塊的情形，因此均為 1
排列組合：	不盡相異物直線排列；若有 n 個不同的事物, 將相同的事物歸為一組，可歸成 k 組，且每組有m_i個事物, 其中 $i=1$、2、 $\ldots k$，且 $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$，則此 n 個事物做『不盡相異物直線排列』之方法數為 $\dfrac{n!}{m_1!\,m_2!\ldots m_k!}$ 備註：因為此篇只可分為二類情形：其中有 m 個 A，n 個 B；故排列數為 $\frac{(m+n)!}{m!n!}$，因此亦可將其視為 C_m^{m+n}(方便合併計算)

二、 問題介紹：

偶然間發現積木的排列頗具奧妙！

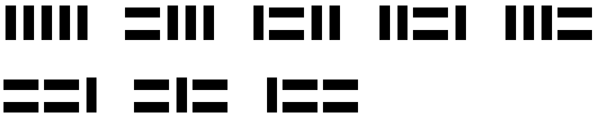
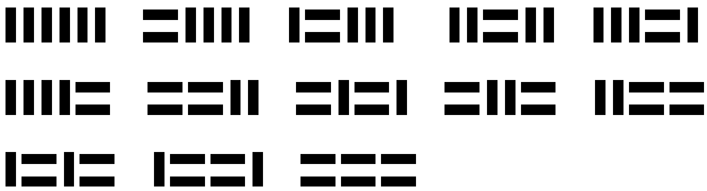
我們想要以找出【全部的方法】、想要知道【共有幾種方法】為目標！首先我們先利用 2cm×1cm 的方塊若干塊，去排列成 2cm×1cm、2cm×2cm、2cm×3cm…等等的長方形形狀，之後逐次增加長方形的長度 1cm；試圖找出所有排法。

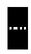
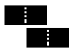
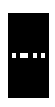
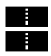
例如：2cm×1cm  有三塊，排成 2cm×3cm 的長方形，有以下排列方法：

例如：2cm×1cm  有四塊，排成 2cm×4cm 的長方形，則有以下排列方法：

三、　目的一以2×1方塊排列成$2 \times \mathrm{n}$長方形的所有排法，並找尋A_n各項之間的關聯性：

一開始，為了找尋之間的關係，我們窮舉A_1到A_6的所有方法：

邊長關係	排列情形	方法數
2cm×1cm		1
2cm×2cm		2
2cm×3cm		3
2cm×4cm		5
2cm×5cm		8
2cm×6cm		13

在組合的過程中，我們知道長方形必由兩塊方塊橫放  或一塊方塊直放  所配對而成的，中間不存在  此種斜放的排法。由上表可說明，圖形均可由 m 個「」與 n 個「」所組成〔m、n 為 0 或自然數〕，因此其方法數為$\frac{(m+n)!}{m!n!}$；可將上表表示為：

邊長關係	分類	方法數	排列數
2cm×1cm	方法 1：×1 ×0	$\frac{1!}{1!\,0!}=1$	$A_1=1$
2cm×2cm	方法 1：×2 ×0 方法 2：×0 ×1	$\frac{2!}{2!\,0!}=1$ $\frac{1!}{0!\,1!}=1$	$A_2=2$
2cm×3cm	方法 1：×3 ×0	$\frac{3!}{3!\,0!}=1$	$A_3=3$

	方法 2：▮×1　〓×1	$\frac{2!}{1!\,1!}=2$	
2cm×4cm	方法 1：▮×4　〓×0	$\frac{4!}{4!\,0!}=1$	$A_4=5$
	方法 2：▮×2　〓×1	$\frac{3!}{2!\,1!}=3$	
	方法 3：▮×0　〓×2	$\frac{2!}{0!\,2!}=1$	
2cm×5cm	方法 1：▮×5　〓×0	$\frac{5!}{5!\,0!}=1$	$A_5=8$
	方法 2：▮×3　〓×1	$\frac{4!}{3!\,1!}=4$	
	方法 3：▮×1　〓×2	$\frac{3!}{1!\,2!}=3$	
2cm×6cm	方法 1：▮×6　〓×0	$\frac{6!}{6!\,0!}=1$	$A_6=13$
	方法 2：▮×4　〓×1	$\frac{5!}{4!\,1!}=5$	
	方法 3：▮×2　〓×2	$\frac{4!}{2!\,2!}=6$	
	方法 4：▮×0　〓×3	$\frac{3!}{0!\,3!}=1$	

由上可知，我們可以整理而知：

A_n	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
排法	1	2	3	5	8	13

由上述排法的資料中，我們發現似乎前兩項之和會等於後項，因此，我們希望證明出 $A_{n+2}=A_n+A_{n+1}$。

為了證明出 $A_{n+2}=A_n+A_{n+1}$的完整，我們將 n 分為奇數與偶數二種情形；如下所示：

性質一：當 n 為奇數：

若 n 為奇數	情形	▌×n 〓×0	▌× n − 2 〓×1	▌× n − 4 〓×2	⋯	▌×1 〓×$\frac{n-1}{2}$
	方法數	$\frac{n!}{n!\,0!}$	$\frac{(n-1)!}{(n-2)!\,1!}$	$\frac{(n-2)!}{(n-4)!\,2!}$	⋯	$\frac{\left(1+\frac{n-1}{2}\right)!}{1!\left(\frac{n-1}{2}\right)!}$
	組合數	C_0^n	C_1^{n-1}	C_2^{n-2}	⋯	$C_{\frac{n-1}{2}}^{\frac{n+1}{2}}$
A_n 總排列方法 $= C_0^n + C_1^{n-1} + C_2^{n-2} + \ldots + C_{\frac{n-3}{2}}^{\frac{n+3}{2}} + C_{\frac{n-1}{2}}^{\frac{n+1}{2}}$						
則 n+1 為偶數	情形	▌×n+1 〓×0	▌×n-1 〓×1	▌×n-3 〓×2	⋯	▌×0 〓×$\frac{n+1}{2}$
	方法數	$\frac{(n+1)!}{(n+1)!\,0!}$	$\frac{n!}{(n-1)!\,1!}$	$\frac{(n-1)!}{(n-3)!\,2!}$	⋯	$\frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)!}{0!\left(\frac{n+1}{2}\right)!}$
	組合數	C_0^{n+1}	C_1^{n}	C_2^{n-1}	⋯	$C_{\frac{n+1}{2}}^{\frac{n+1}{2}}$
A_{n+1} 總排列方法 $= C_0^{n+1} + C_1^{n} + C_2^{n-1} + \cdots + C_{\frac{n-1}{2}}^{\frac{n+3}{2}} + C_{\frac{n+1}{2}}^{\frac{n+1}{2}}$						
n+2 為奇數	情形	▌×n+2 〓×0	▌×n 〓×1	▌×n-2 〓×2	⋯	▌×1 〓×$\frac{n+1}{2}$
	方法數	$\frac{(n+2)!}{(n+2)!\,0!}$	$\frac{(n+1)!}{n!\,1!}$	$\frac{n!}{(n-2)!\,2!}$	⋯	$\frac{\left(1+\frac{n+1}{2}\right)!}{1!\left(\frac{n+1}{2}\right)!}$
	組合數	C_0^{n+2}	C_1^{n+1}	C_2^{n}	⋯	$C_{\frac{n+1}{2}}^{\frac{n+3}{2}}$
A_{n+2} 總排列方法 $= C_0^{n+2} + C_1^{n+1} + C_2^{n} + \cdots + C_{\frac{n-1}{2}}^{\frac{n+5}{2}} + C_{\frac{n+1}{2}}^{\frac{n+3}{2}}$						

由上表可知，

A_n 總排列方法 $= C_0^n + C_1^{n-1} + C_2^{n-2} + \ldots + C_{\frac{n-3}{2}}^{\frac{n+3}{2}} + C_{\frac{n-1}{2}}^{\frac{n+1}{2}}$

A_{n+1} 總排列方法 $= C_0^{n+1} + C_1^{n} + C_2^{n-1} + \cdots + C_{\frac{n-1}{2}}^{\frac{n+3}{2}} + C_{\frac{n+1}{2}}^{\frac{n+1}{2}}$

A_{n+2} 總排列方法 $= C_0^{n+2} + C_1^{n+1} + C_2^{n} + \cdots + C_{\frac{n-1}{2}}^{\frac{n+5}{2}} + C_{\frac{n+1}{2}}^{\frac{n+3}{2}}$

將 A_n 與 A_{n+1} 兩式相加，利用巴斯卡定理$C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_n^{m-1}$可化簡得：

$$A_n = C_0^n + C_1^{n-1} + C_2^{n-2} + \dots + C_{\frac{n-3}{2}}^{\frac{n+3}{2}} + C_{\frac{n-1}{2}}^{\frac{n+1}{2}}$$

＋

$$A_{n+1} = C_0^{n+1} + C_1^{n} + C_2^{n-1} + \cdots + C_{\frac{n-1}{2}}^{\frac{n+3}{2}} + C_{\frac{n+1}{2}}^{\frac{n+1}{2}}$$

比較

$$A_n + A_{n+1} = C_0^{n+1} + C_1^{n+1} + C_2^{n} + \cdots + C_{\frac{n-1}{2}}^{\frac{n+5}{2}} + C_{\frac{n+1}{2}}^{\frac{n+3}{2}}$$

$$A_{n+2} = C_0^{n+2} + C_1^{n+1} + C_2^{n} + \cdots + C_{\frac{n-1}{2}}^{\frac{n+5}{2}} + C_{\frac{n+1}{2}}^{\frac{n+3}{2}}$$

因此，當 n 為奇數時，$A_{n+2} = A_n + A_{n+1}$ 成立。

性質二：當 n 為偶數：

若 n 為偶數	情形	▮×n 〓×0	▮× n − 2 〓×1	▮× n − 4 〓×2	…	▮×0 〓×$\frac{n}{2}$
	方法數	$\frac{n!}{n!\,0!}$	$\frac{(n-1)!}{(n-2)!\,1!}$	$\frac{(n-2)!}{(n-4)!\,2!}$	…	$\frac{\left(\frac{n}{2}\right)!}{0!\left(\frac{n}{2}\right)!}$
	組合數	C_0^n	C_1^{n-1}	C_2^{n-2}	…	$C_{\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}}$

A_n 總排列方法 $= C_0^n + C_1^{n-1} + C_2^{n-2} + \cdots + C_{\frac{n-2}{2}}^{\frac{n+2}{2}} + C_{\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}}$

則 n+1 為奇數	情形	▮×n+1 〓×0	▮×n-1 〓×1	▮×n-3 〓×2	…	▮×1 〓×$\frac{n}{2}$
	方法數	$\frac{(n+1)!}{(n+1)!\,0!}$	$\frac{n!}{(n-1)!\,1!}$	$\frac{(n-1)!}{(n-3)!\,2!}$	…	$\frac{\left(1+\frac{n}{2}\right)!}{1!\left(\frac{n}{2}\right)!}$
	組合數	C_0^{n+1}	C_1^{n}	C_2^{n-1}	…	$C_{\frac{n}{2}}^{\frac{n+2}{2}}$

A_{n+1} 總排列方法 $= C_0^{n+1} + C_1^{n} + C_2^{n-1} + \cdots + C_{\frac{n}{2}-1}^{\frac{n+4}{2}} + C_{\frac{n}{2}}^{\frac{n+2}{2}}$

n+2為偶數	情形	▮×n+2 ▬×0	▮×n ▬×1	▮×n-2 ▬×2	⋯	▮×0 ▬×$\frac{n+2}{2}$
	方法數	$\frac{(n+2)!}{(n+2)!\,0!}$	$\frac{(n+1)!}{n!\,1!}$	$\frac{n!}{(n-2)!\,2!}$	⋯	$\frac{\left(\frac{n+2}{2}\right)!}{0!\left(\frac{n+2}{2}\right)!}$
	組合數	C_0^{n+2}	C_1^{n+1}	C_2^{n}	⋯	$C_{\frac{n+2}{2}}^{\frac{n+2}{2}}$
A_{n+2} 總排列方法 ＝	$C_0^{n+2}+C_1^{n+1}+C_2^{n}+\cdots+C_{\frac{n}{2}}^{\frac{n+4}{2}}+C_{\frac{n+2}{2}}^{\frac{n+2}{2}}$					

由上表可知，

A_n 總排列方法 $= C_0^{n}+C_1^{n-1}+C_2^{n-2}+\cdots+C_{\frac{n-2}{2}}^{\frac{n+2}{2}}+C_{\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}}$

A_{n+1} 總排列方法 $= C_0^{n+1}+C_1^{n}+C_2^{n-1}+\cdots+C_{\frac{n}{2}-1}^{\frac{n+4}{2}}+C_{\frac{n}{2}}^{\frac{n+2}{2}}$

A_{n+2} 總排列方法 $= C_0^{n+2}+C_1^{n+1}+C_2^{n}+\cdots+C_{\frac{n}{2}}^{\frac{n+4}{2}}+C_{\frac{n+2}{2}}^{\frac{n+2}{2}}$

將 A_n 與 A_{n+1} 兩式相加，可化簡得：

$$A_n = C_0^{n}+C_1^{n-1}+C_2^{n-2}+\cdots+C_{\frac{n-2}{2}}^{\frac{n+2}{2}}+C_{\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}}$$

＋

$$A_{n+1} = C_0^{n+1}+C_1^{n}+C_2^{n-1}+\cdots+C_{\frac{n}{2}-1}^{\frac{n+4}{2}}+C_{\frac{n}{2}}^{\frac{n+2}{2}}$$

比

$$A_n+A_{n+1} = C_0^{n+1}+C_1^{n+1}+C_2^{n}+\cdots+C_{\frac{n}{2}}^{\frac{n+4}{2}}+C_{\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}}$$

較

$$A_{n+2} = C_0^{n+2}+C_1^{n+1}+C_2^{n}+\cdots+C_{\frac{n}{2}}^{\frac{n+4}{2}}+C_{\frac{n+2}{2}}^{\frac{n+2}{2}}$$

因此，當 n 為偶數時，$A_{n+2}=A_n+A_{n+1}$ 亦成立。

當$A_{n+2}=A_n+A_{n+1}$成立，那麼是否可以計算出A_n的一般項，變成我們探討A_n數列的重點；推導過程如下：

已知$A_{n+1}=A_n+A_{n-1}$：

可將$A_{n+1}=A_n+A_{n-1}$改為$A_{n+1}-\alpha A_n=\beta(A_n-\alpha A_{n-1})$，比較係數可知$\alpha+\beta=1$，$\alpha\cdot\beta=-1$，且透過二次方程式的求解，可得α、β互為$\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$。而改寫為$A_{n+1}-\alpha A_n=\beta(A_n-\alpha A_{n-1})$後，$\{A_n-\alpha A_{n-1}\}$為一個公比為 β 的等比數列。因此可化簡得

$$A_{n+1}-\alpha A_n=\beta^{n-1}(A_2-\alpha A_1) \qquad \text{(式 1)}$$

$A_{n+1}-\alpha A_n=\beta(A_n-\alpha A_{n-1})$亦可看成$A_{n+1}-\beta A_n=\alpha(A_n-\beta A_{n-1})$；此時$\{A_n-\beta A_{n-1}\}$為一個公比為 α 的等比數列，可化簡得

$$A_{n+1}-\beta A_n=\alpha^{n-1}(A_2-\beta A_1) \qquad \text{(式 2)}$$

解聯立 $\begin{cases} A_{n+1}-\alpha A_n=\beta^{n-1}(A_2-\alpha A_1) & \text{(式 1)} \\ A_{n+1}-\beta A_n=\alpha^{n-1}(A_2-\beta A_1) & \text{(式 2)} \end{cases}$

(式 1) − (式 2)：

$-(\alpha-\beta)A_n=\beta^{n-1}(A_2-\alpha A_1)-\alpha^{n-1}(A_2-\beta A_1)$

即$A_n=\beta^{n-1}\left(\frac{A_2-\alpha A_1}{\beta-\alpha}\right)+\alpha^{n-1}\left(\frac{A_2-\beta A_1}{\alpha-\beta}\right)=\beta^{n-1}\cdot C_1+\alpha^{n-1}\cdot C_2$ (式 3)

其中，$\left(\frac{A_2-\alpha A_1}{\beta-\alpha}\right)=C_1$，$\left(\frac{A_2-\beta A_1}{\alpha-\beta}\right)=C_2$，又因為$\alpha$、$\beta$、$A_1$、$A_2$均為可知；

可求得$C_1=\frac{1-\frac{3}{\sqrt{5}}}{2}=\frac{5-3\sqrt{5}}{10}$，$C_2=\frac{1+\frac{3}{\sqrt{5}}}{2}=\frac{5+3\sqrt{5}}{10}$。

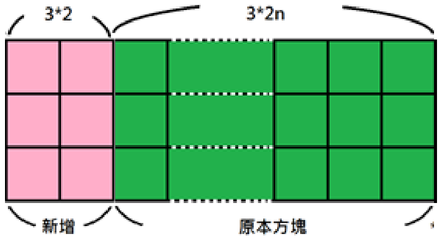
故(式 3)可改為$A_n=\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}+\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$

A_n數列通式解：$A_n=\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}+\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$

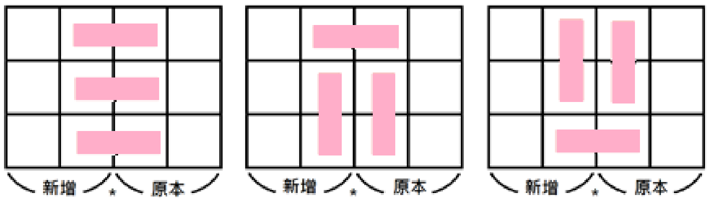
四、 目的二：探討B_n數列，以2×1方塊排列成3×2n長方形的所有排法，並找尋B_n各項之間的關聯性：

討論：B_n：3*2n 〔n 為所有自然數〕形式：
附註 1：因為 3*n 形式包含奇數個方塊，則無法利用 2*1 方塊拼成，因此不討論。
附註 2：A_n 與 A_{n+1}之間，每下一項均增加 3*2 方塊。
附註 3：〔下文粉紅色方塊為第一放置方塊，綠色則為唯一放法方塊。〕

延伸一：將新增方塊與原本方塊分開，可得B_{n+1}的排列中，其中有一部分情況為 B_1*B_n



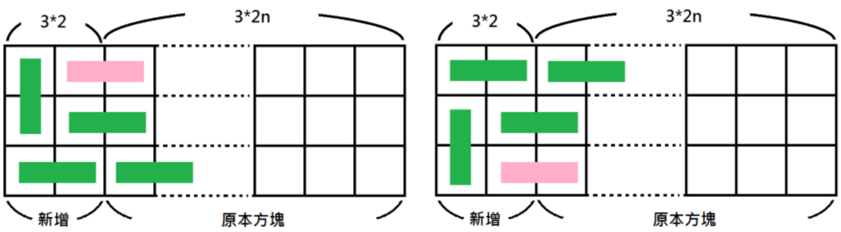
延伸二：探討原本方塊與新增方塊中，各取 3*1 格部分進行排列，如下圖：



解釋：

1. 會有以上三種情形；但很明顯最左邊會剩下 3*1 的空格，此時便無法完整利用 2*1 的方塊排列。
2. 橫放只能三塊或一塊，不存在只有二塊橫放。

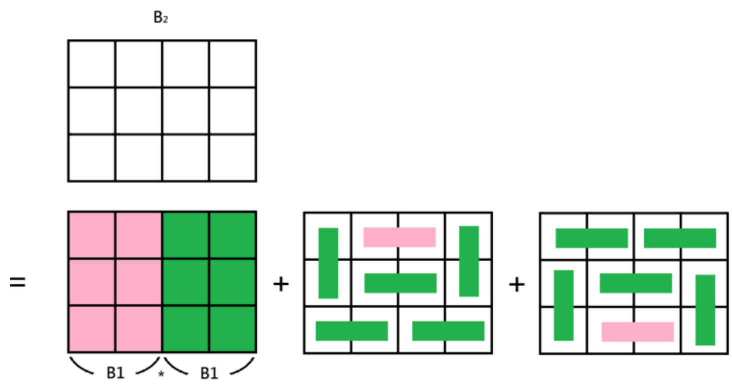
延伸三：新增方塊與原本方塊有連接情況如下，這兩種排列因屬於對稱圖形，故排列方法是一樣的：



延伸四：探討B_1形式：

可得知其方法數與A_3相同，故$B_1 = 3$。

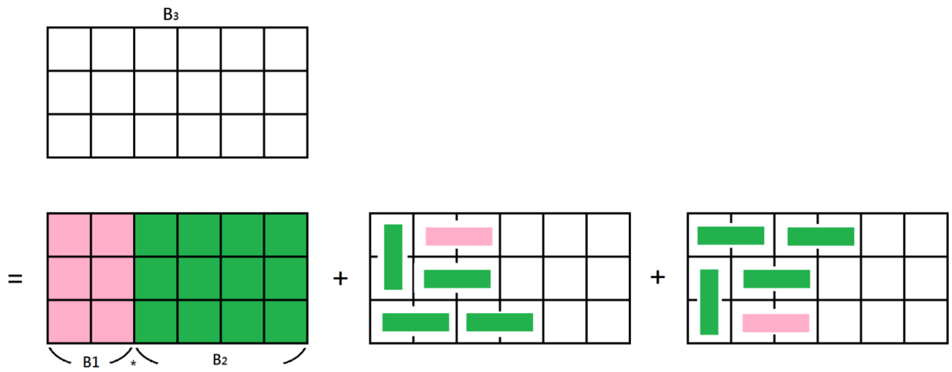
延伸五：探討B_2形式：(利用圖形探討)



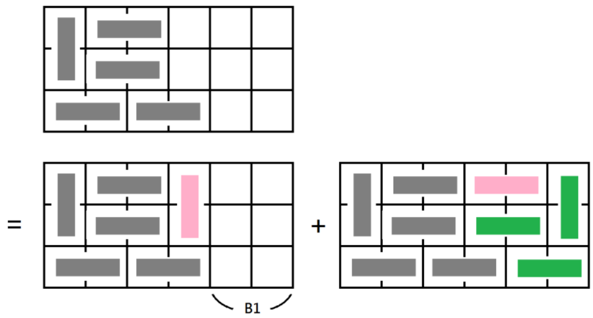
故$B_2 = B_1 \times B_1 + 2 \times 1$

即$B_2 = 3 \times 3 + 2 \times 1 = 11$

延伸六：探討B_3形式：



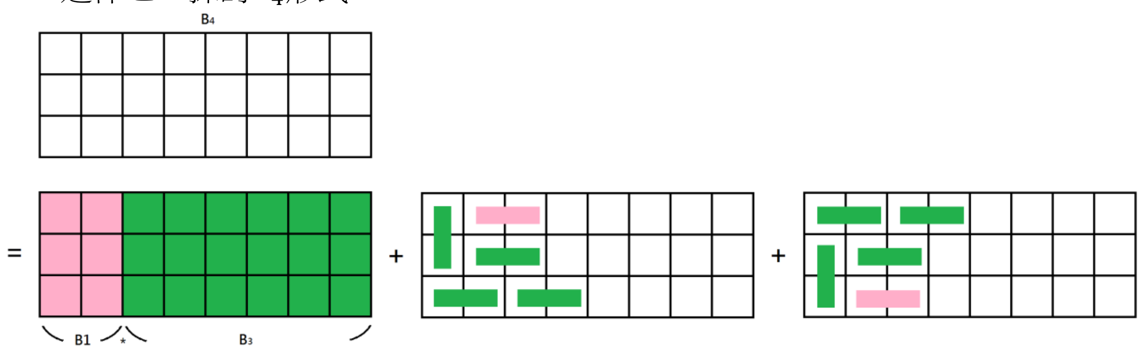
且



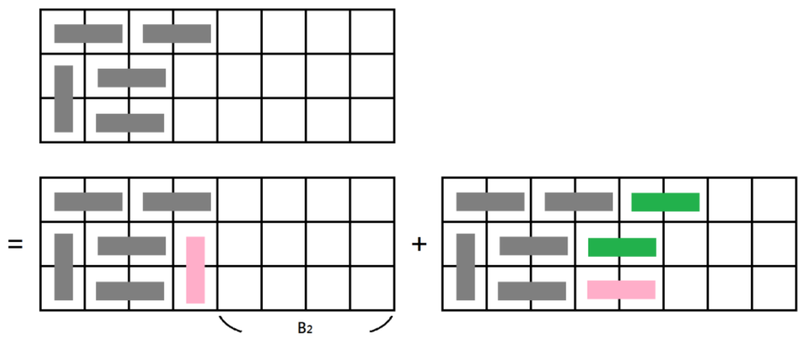
故$B_3 = B_1 \times B_2 + 2(B_1 + 1)$

即$B_3 = 3 \times 11 + 2(3 + 1) = 41$

延伸七：探討B_4形式：



且



故$B_4 = B_1 \times B_3 + 2(B_2 + B_1 + 1)$ （備註：可由延伸六得知）

即$B_4 = 3 \times 41 + 2(11 + 3 + 1) = 153$

由以上可知，當我們欲求B_n形式時，均可利用以上方法降階。最後，能推知B_n的遞迴式為：

$$B_n = B_1 \times B_{n-1} + 2(B_{n-2} + B_{n-3} + \cdots + B_1 + 1)$$

其中，因為$B_1 = 3$，又可轉換為

$$B_n = B_{n-1} + 2(B_{n-1} + B_{n-2} + B_{n-3} + \cdots + B_1 + 1)$$

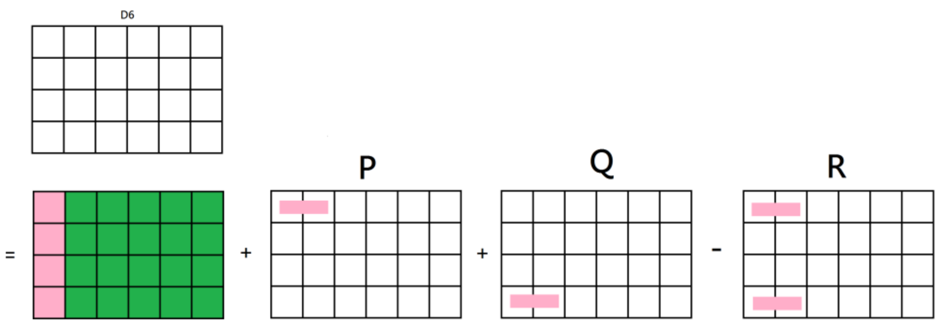
由以上關係式很明顯看得出，後項是可由前項所推得的遞迴關係式。以下是我們利用 EXCEL 程式跑出前 N 項的結果：

	B_n	B0	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8
3*n 排列	3*n	3*0	3*2	3*4	3*6	3*8	3*10	3*12	3*14	3*16
	方法數	1	3	11	41	153	571	2131	7953	29681

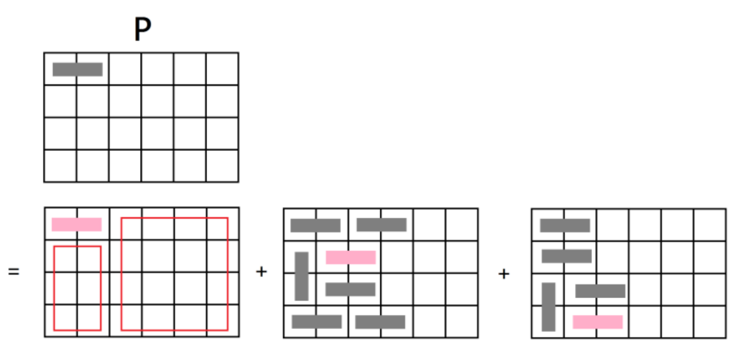
五、 目的三：探討D_n數列，以2×1方塊排列成$4 \times \mathrm{n}$長方形的所有排法，並找尋D_n各項之間的關聯性：

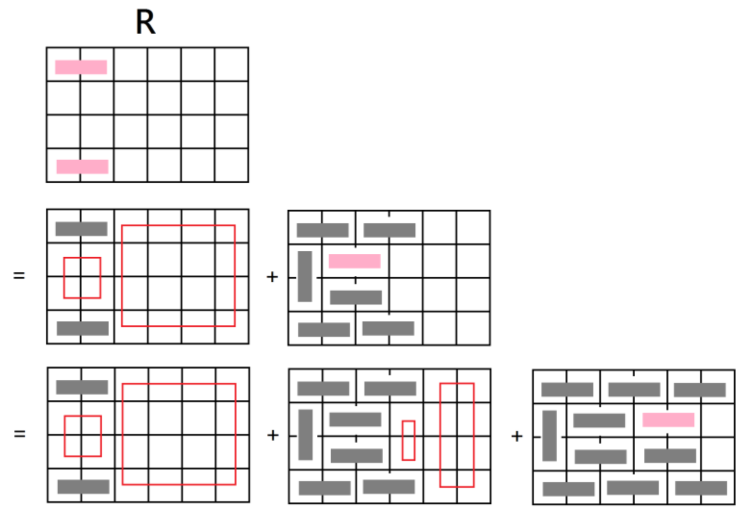
在討論D_n之前，我們質疑為何總是把新增與原先方塊做分組，而不能從另外地方分組；照道理說，不應該有問題。經過嘗試後，也證實不管分組方式為何，均可得到一樣的答案！但是，分組的方式不同，所拆解的方法也不同，以下我們舉D_6為例，我們把D_6分別以$(4 \times 1)(4 \times 5)$、$(4 \times 2)(4 \times 4)$、$(4 \times 3)(4 \times 3)$三種分組法：

方法一：$(4 \times 1)(4 \times 5)$分組如下所示：



其中圖 P 與圖 Q 為上下對稱圖形，可看成兩倍 P 圖型式。又



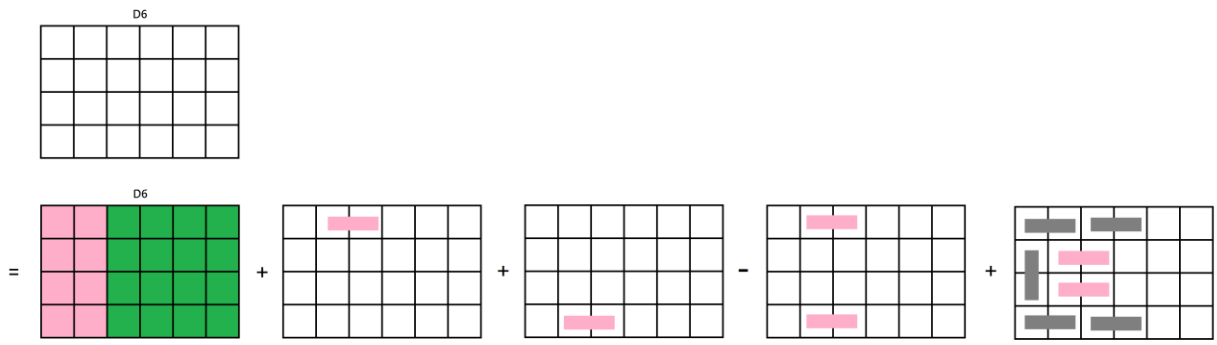


一樣利用B_n的想法方式降階，可得出以下式子：

$$\begin{aligned}(4\times6)= \quad & (4\times1)(4\times5)+2[(3\times2)(4\times4)+(2\times1)(4\times2)+(2\times1)+(2\times1)(4\times3)\\ & +(2\times1)(4\times2)+(2\times1)(4\times1)+(2\times1)]-(2\times2)(4\times4)-(2\times1)(4\times2)-(2\times1)\\ = \quad & 281\end{aligned}$$

經整理，可得$D_6=D_5+2(D_3+D_2+D_1+D_0)+4D_4+(D_2+D_0)$

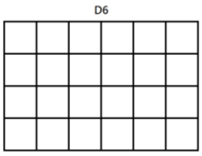
方法二：$(4\times2)(4\times4)$分組如下所示：

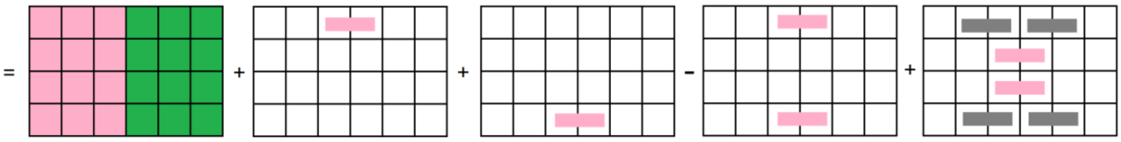


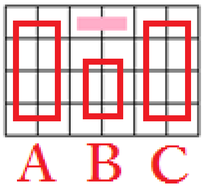
$$\begin{aligned}(4\times6)= \quad & (4\times2)(4\times4)+2\{(2\times3)(3\times4)+(2\times2)[(2\times1)(4\times2)+(2\times1)(4\times1)+(2\times1)]\\ & +(2\times1)(4\times3)+(2\times1)(4\times1)\}-(2\times2)(4\times3)-(2\times1)(4\times1)+(2\times1)(4\times2)\\ & +(2\times1)\\ = \quad & 281\end{aligned}$$

經整理，可得$D_6=D_2D_4+2\{A_3B_2+A_2(D_2+D_1+D_0)\}+D_1+D_2+D_3$

方法三：$(4\times3)(4\times3)$分組如下所示：

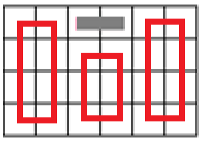
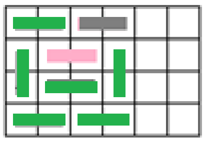
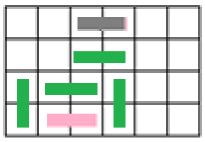
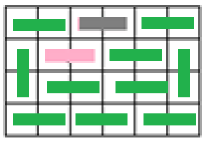
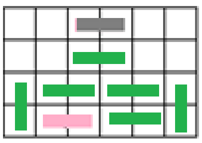






此圖情況又必須再分為以下四種：

1. A、B、C 均分離
2. AB 連、BC 分
3. AB 分、BC 連
4. ABC 均連

	情形 1：A、B、C 均分離 $(4\times2)(3\times2)(4\times2)$
	情形 2：AB 連、BC 分 （ 情形 2 與情形 3 為對稱，故相同 ） (4×2)
	$(2\times2)(4\times2)$
	情形 4：AABC 均連 1
	$(2\times2)(2\times2)$

$$
\begin{aligned}
\text{故}(4\times6) = \;& (4\times3)(4\times3)+2\{[(4\times2)(3\times2)(4\times2)]+2[(4\times2)+(2\times2)(4\times2)]+1\\
&+(2\times2)(2\times2)\}-(4\times2)(2\times2)(4\times2)-2(2\times1)(4\times2)-1+1\\
=\;& 281
\end{aligned}
$$

經整理，可得$D_6 = \ D_3D_3 + 2\{D_2B_1D_2 + 2D_2(A_1 + A_2) + 1 + A_2A_2\}$

$$-D_2A_2D_2 - 2A_1D_2 - 1 + 1$$

由以上三種方法可清楚得知，$(4 \times 1)(4 \times 5)$分組所得到的式子可完全利用D_n表示，且計算過程較為簡單；其它二種計算過程中，更包含一些集合論的概念。否則，容易少算情況。故我們決定均以$(4 \times 1)(4 \times p)$的方式進行拆解，以利我們對於D_n的探討。

以下為我們對於$D_1 \sim D_{10}$的分解，因為圖形繁雜，不以贅述；故均以$(m \times n)$型式表示$m \times n$的排法：

$(4 \times n)$	演算過程	值
$(4 \times 1) =$	(4×1)	1
$(4 \times 2) =$	$(4 \times 1)(4 \times 1) + 2[(3 \times 2)] - (2 \times 2)$	5
$(4 \times 3) =$	$(4 \times 1)(4 \times 2) + 2[(3 \times 2)(4 \times 1) + (2 \times 1)] - (2 \times 2)(4 \times 1)$	11
$(4 \times 4) =$	$(4 \times 1)(4 \times 3) + 2[(3 \times 2)(4 \times 2) + (2 \times 1) + (2 \times 1)(4 \times 1) + (2 \times 1)] - (2 \times 2)(4 \times 2) - (2 \times 1)$	36
$(4 \times 5) =$	$(4 \times 1)(4 \times 4) + 2[(3 \times 2)(4 \times 3) + (2 \times 1)(4 \times 1) + (2 \times 1)(4 \times 2) + (2 \times 1)(4 \times 1) + (2 \times 1)] - (2 \times 2)(4 \times 3) - (2 \times 1)(4 \times 1)$	95
$(4 \times 6) =$	$(4 \times 1)(4 \times 5) + 2[(3 \times 2)(4 \times 4) + (2 \times 1)(4 \times 2) + (2 \times 1) + (2 \times 1)(4 \times 3) + (2 \times 1)(4 \times 2) + (2 \times 1)(4 \times 1) + (2 \times 1)] - (2 \times 2)(4 \times 4) - (2 \times 1)(4 \times 2) - (2 \times 1)$	281
$(4 \times 7) =$	$(4 \times 1)(4 \times 6) + 2[(3 \times 2)(4 \times 5) + (2 \times 1)(4 \times 3) + (2 \times 1)(4 \times 1) + (2 \times 1)(4 \times 4) + (2 \times 1)(4 \times 3) + (2 \times 1)(4 \times 2) + (2 \times 1)(4 \times 1) + (2 \times 1)] - (2 \times 2)(4 \times 5) - (2 \times 1)(4 \times 3) - (2 \times 1)(4 \times 1)$	781

$$(4\times 8)= (4\times 1)(4\times 7)+2[(3\times 2)(4\times 6)+(2\times 1)(4\times 4)+(2\times 1)(4\times 2)+(2\times 1)+(2\times 1)(4\times 5)+(2\times 1)(4\times 4)+(2\times 1)(4\times 3)+(2\times 1)(4\times 2)+(2\times 1)(4\times 1)+(2\times 1)]-(2\times 2)(4\times 6)-(2\times 1)(4\times 4)-(2\times 1)(4\times 2)-(2\times 1)$$

2245

$$(4\times 9)= (4\times 1)(4\times 8)+2[(3\times 2)(4\times 7)+(2\times 1)(4\times 5)+(2\times 1)(4\times 3)+(2\times 1)(4\times 1)+(2\times 1)(4\times 6)+(2\times 1)(4\times 5)+(2\times 1)(4\times 4)+(2\times 1)(4\times 3)+(2\times 1)(4\times 2)+(2\times 1)(4\times 1)+(2\times 1)]-(2\times 2)(4\times 7)-(2\times 1)(4\times 5)-(2\times 1)(4\times 3)-(2\times 1)(4\times 1)$$

6336

$$(4\times 10)= (4\times 1)(4\times 9)+2[(3\times 2)(4\times 8)+(2\times 1)(4\times 6)+(2\times 1)(4\times 4)+(2\times 1)(4\times 2)+(2\times 1)+(2\times 1)(4\times 7)+(2\times 1)(4\times 6)+(2\times 1)(4\times 5)+(2\times 1)(4\times 4)+(2\times 1)(4\times 3)+(2\times 1)(4\times 2)+(2\times 1)(4\times 1)+(2\times 1)]-(2\times 2)(4\times 8)-(2\times 1)(4\times 6)-(2\times 1)(4\times 4)-(2\times 1)(4\times 2)-(2\times 1)$$

18061

經過整理，可得以下簡式：

$D_1 = D_1$

$\boxed{D_2 = D_1 + 2[B_1] - A_2}$

$D_3 = D_2 + 2[D_0] + 4D_1 + (0)$

$D_4 = D_3 + 2[D_1+D_0] + 4D_2 + (D_0)$

$D_5 = D_4 + 2[D_2 + D_1+D_0] + 4D_3 + (D_1)$

$D_6 = D_5 + 2[D_3 + D_2 + D_1+D_0] + 4D_4 + (D_2+D_0)$

$D_7 = D_6 + 2[D_4 + D_3 + D_2+D_1 + D_0] + 4D_5 + (D_3+D_1)$

$D_8 = D_7 + 2[D_5 + D_4 + D_3 + D_2 + D_1+D_0] + 4D_6 + (D_4+D_2+D_0)$

$D_9 = D_8 + 2[D_6 + D_5 + D_4 + D_3 + D_2 + D_1+D_0] + 4D_7 + (D_5+D_3+D_1)$

$D_{10} = D_9 + 2[D_7 + D_6 + D_5 + D_4 + D_3 + D_2 + D_1+D_0] + 4D_8 + (D_6 + D_4+D_2+D_0)$

其中，$D_2 = D_1 + 2[B_1] - A_2 = 5$，我們將之改為$D_2 = D_1 + 2[0] + 4D_0$，答案依舊不變；可重新整理成下式：

$D_1 = D_1$
$\boxed{D_2 = D_1 + 2[0] + 4D_0}$
$D_3 = D_2 + 2[D_0] + 4D_1 + (0)$
$D_4 = D_3 + 2[D_1 + D_0] + 4D_2 + (D_0)$
$D_5 = D_4 + 2[D_2 + D_1 + D_0] + 4D_3 + (D_1)$
$D_6 = D_5 + 2[D_3 + D_2 + D_1 + D_0] + 4D_4 + (D_2 + D_0)$
$D_7 = D_6 + 2[D_4 + D_3 + D_2 + D_1 + D_0] + 4D_5 + (D_3 + D_1)$
$D_8 = D_7 + 2[D_5 + D_4 + D_3 + D_2 + D_1 + D_0] + 4D_6 + (D_4 + D_2 + D_0)$
$D_9 = D_8 + 2[D_6 + D_5 + D_4 + D_3 + D_2 + D_1 + D_0] + 4D_7 + (D_5 + D_3 + D_1)$
$D_{10} = D_9 + 2[D_7 + D_6 + D_5 + D_4 + D_3 + D_2 + D_1 + D_0] + 4D_8 + (D_6 + D_4 + D_2 + D_0)$

由此，我們發現D_n存在遞迴關係：

(一)、 若n 為奇數$(n \geq 2)$，則

$$D_n = D_{n-1} + 2[D_{n-3} + \cdots + D_1 + D_0] + 4D_{n-2} + (D_{n-4} + D_{n-6} + \cdots + D_3 + D_1)$$

(二)、 若n 為偶數$(n \geq 2)$，則

$$D_n = D_{n-1} + 2[D_{n-3} + \cdots + D_1 + D_0] + 4D_{n-2} + (D_{n-4} + D_{n-6} + \cdots + D_2 + D_0)$$

我們利用 EXCEL 程式跑出前 N 項的結果：

	D_n	D0	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8
4*n 排列	4*n	4*0	4*1	4*2	4*3	4*4	4*5	4*6	4*7	4*8
	方法數	1	1	5	11	36	95	281	781	2245

六、 目的四：探討M_n數列，以 $m \times 1$方塊排列成 $m \times n$ $(m < n)$長方形的所有排法，並找尋M_n各項之間的關聯性：

同目的一的想法，只能有一個 $m \times 1$方塊直放、與 m 個 $m \times 1$方塊全部橫放成$m \times m$正方形此兩種形式所排列而成；因此，同理應用組合概念也能得到類似結果如下：

$$M_n = M_{n-1} + M_{n-m} \quad (n > m)$$

伍、　研究結果

一、　探討A_n情況：

(一)、　若n為奇數，可得：

$$A_n \text{ 總排列方法 } = C_0^n + C_1^{n-1} + C_2^{n-2} + \ldots + C_{\frac{n-3}{2}}^{\frac{n+3}{2}} + C_{\frac{n-1}{2}}^{\frac{n+1}{2}}$$

$$A_{n+1} \text{ 總排列方法 } = C_0^{n+1} + C_1^{n} + C_2^{n-1} + \cdots + C_{\frac{n-1}{2}}^{\frac{n+3}{2}} + C_{\frac{n+1}{2}}^{\frac{n+1}{2}}$$

$$A_{n+2} \text{ 總排列方法 } = C_0^{n+2} + C_1^{n+1} + C_2^{n} + \cdots + C_{\frac{n-1}{2}}^{\frac{n+5}{2}} + C_{\frac{n+1}{2}}^{\frac{n+3}{2}}$$

故 n 為奇數時，$a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$成立。

(二)、　若n為偶數，可得：

$$A_n \text{ 總排列方法 } = C_0^n + C_1^{n-1} + C_2^{n-2} + \cdots + C_{\frac{n-2}{2}}^{\frac{n+2}{2}} + C_{\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}}$$

$$A_{n+1} \text{ 總排列方法 } = C_0^{n+1} + C_1^{n} + C_2^{n-1} + \cdots + C_{\frac{n}{2}-1}^{\frac{n+4}{2}} + C_{\frac{n}{2}}^{\frac{n+2}{2}}$$

$$A_{n+2} \text{ 總排列方法 } = C_0^{n+2} + C_1^{n+1} + C_2^{n} + \cdots + C_{\frac{n}{2}}^{\frac{n+4}{2}} + C_{\frac{n+2}{2}}^{\frac{n+2}{2}}$$

故 n 為偶數時，$a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$成立。

(三)、　通式解 $A_n = \frac{5-3\sqrt{5}}{10} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$

二、　探討B_n情況：

(一)、　$B_n = B_1 \times B_{n-1} + 2(\mathrm{B_{n-2}} + \mathrm{B_{n-3}} + \cdots + \mathrm{B_1} + 1)$　$B_1 = 3$，或可整理成

(二)、　$\mathrm{B_n} = \mathrm{B_{n-1}} + 2(\mathrm{B_{n-1}} + \mathrm{B_{n-2}} + \mathrm{B_{n-3}} + \cdots + \mathrm{B_1} + 1)$

(三)、　$\mathrm{B_n}$ 整理的結果如下：

B_n	B0	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8
3*n	3*0	3*2	3*4	3*6	3*8	3*10	3*12	3*14	3*16
方法數	1	3	11	41	153	571	2131	7953	29681

三、　探討D_n情況：

(三)、　若n 為奇數$(n > 2)$，則

$$D_n = D_{n-1} + 2[D_{n-3} + \cdots + D_1 + D_0] + 4D_{n-2} + (D_{n-4} + D_{n-6} + \cdots + D_3 + D_1)$$

(四)、　若n 為偶數$(n > 2)$，則

$$D_n = D_{n-1} + 2[D_{n-3} + \cdots + D_1 + D_0] + 4D_{n-2} + (D_{n-4} + D_{n-6} + \cdots + D_2 + D_0)$$

四、　探討M_n情況：$(m < n)$

(一)、　$M_n = M_{n-1} + M_{n-m}$　$(n > m)$

陸、 結論與討論

生活中處處是數學，以前常不以為意，沒想到簡單的疊疊樂積木方塊中，也能得到大道理。A_n、B_n、D_n數列的結果讓我們非常訝異，原本以為雜亂無章的排序，卻隱含數學神秘的性質；這讓我們以後對周遭的環境充滿了好奇心。尤其，A_n數列的通式解，更讓我們嘖嘖稱奇呢！

然而，美中不足的是，我們有一些特殊想法尚未深入探討：

1. 2×1方塊拼滿平面 $m \times n$的情況，找出之間是否存在遞迴關係。
2. B_n、D_n的通式解是目前我們正在努力的方向。

打從一開始的動機，其實就想去尋找立體的情況之下，所有的排列方法；然而卻不得其門而入。因此，在指導教師的建議之下，從簡入繁；先由平面開始著手。不過，也是因為這個原因，讓我們更添對數學的好奇心；而不會一開始遭遇打擊就放棄了。

從發現、欣賞、到了解數學研究的整個過程中，不僅發現生活數學的神奇，更培養出對數學的好奇心與創造力；也感謝指導教師的辛苦教導，讓我們對於數學有另外一層的認識。

柒、 參考資料及其他

一、 103 學年度指考試題 (2014)。

二、 翰林出版社編輯群 (2011)。國民中學數學課本第四冊。翰林出版社。

三、 吳振奎 (2002)。世界數學名著欣賞。九章出版社。

【評語】030403

這應該是被廣泛討論過的一個古老的問題。作者們在考慮用 2×1 的長方形來鋪滿 $2\times n$ 的長方形時，先給出了一個分類求和的計算方式，再由此導出遞迴關係，驗證遞迴關係的正確性，最後求出遞迴關係的解。這個過程有點奇怪，事實上，遞迴關係式是遠比分類求和來的直觀，透過求和的表示式來驗證遞迴關係的正確性好像是繞了一大圈，既不必要也不方便。此外，在 $m=3$ 時（$m=4$ 時也類似，只是更複雜些），應該可以很容易的得到如下的遞迴關係：$B_n=2D_n+B_{n-1}$，$D_n=B_{n-1}+D_{n-1}$，化簡得 $B_n=4B_{n-1}-B_{n-2}$。由初始值 $B_1=1$，$B_2=11$，可得遞迴關係式的解為 $(3+\sqrt{3})/6\,(2+\sqrt{3})^n+(3-\sqrt{3})/6\,(2-\sqrt{3})^n$。沒能看到更簡單的關係式，使得表示法變得繁複，有點可惜了。