中華民國第56屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

030402

差中存異-最長非等差數列

學校名稱：彰化縣立彰泰國民中學

作者：	指導老師：
國二 王政元 國二 葉仁慈 國二 林承宏	陳曉煒 林政瑋

關鍵詞：最長非等差數列、異、三等分位置表記法

摘要

研究目的有四：(一）連續正整數列中，求出最長非等差數列解題策略及一般項公式（二）公差 d 之等差數列中，最長非等差數列一般項公式（三）從一組等差數列中，求出最長非等差數列總項數（四）求出等差數列中，任意項 a_i 之三等分位置表記法。結果如下：

（一)定義非等差數列第 k 項與原正整數列第 k 項間的差距為「異」並令為 $T_{k-1}=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{k-1}{2^i}\right]\cdot 3^{i-1}$，

（二)定義非等差數列第 k 項與原數列第 k 項間的差距為「異」並令為 $T_{k-1}=\sum_{i=1}^{n}d\cdot\left[\frac{k-1}{2^i}\right]\cdot 3^{i-1}$，

（三）從 m 項等差數列中找出最長非等差數列：

1. 若 $m=2\cdot 3^{n_1}+R_1$，$0\le R_1<3^{n_1}$，項數 2^{n_1+1}，

2. 若 $m=\sum_{i=1}^{t-1}3^{n_i}+2\cdot 3^{n_t}+R_t$，其中 $n_1>n_2>\cdots>n_t$，$0\le R_t<3^{n_t}$，項數 $\sum_{i=1}^{t-1}2^{n_i}+2^{n_t+1}$，

3. 若 $m=\sum_{i=1}^{s}3^{n_i}+R_s$，其中 $n_1>n_2>\cdots>n_s$，$R_s\in\{0,1,2\}$，項數 $\sum_{i=1}^{s}2^{n_i}+R_s$，

（四）求等差數列中 a_k 位置，取 $3^n\le k<3^{n+1}$，$n\in\mathbb{N}$，如下：

1. k 不為 3 的倍數，則 a_k 表示為 $(z_1+1)\text{-}(z_2+1)\text{-}(z_3+1)\text{-}\cdots\text{-}(z_n+1)\text{-}C_n$，

2. k 為 3 的倍數，則 a_k 表示為 $(z_1+1)\text{-}(z_2+1)\text{-}(z_3+1)\text{-}\cdots\text{-}z_{i+1}\text{-}\underbrace{3\text{-}3\text{-}3\text{-}\cdots\text{-}3}_{n-i\text{個}}$。

以此證明最長非等差數列。

壹、研究動機

在第四冊的等差數列單元中，我們學會利用已知的首項和公差，來求出等差數列的任何一項。平時喜愛數學競賽的我提出了一道 IMO 試題請教老師,「是否可能在 1~100000 中選出 1983 個相異正整數，使得若從這 1983 個數中任選其中三個數，均不構成某個等差數列的相鄰三項？」；換言之，題目就是想問：從中選出的 1983 個數，可否「避免」任意三項形成等差數列。老師覺得這道題目的問法對我們具有很大的挑戰性和延伸性，大家討論的結果，決定試著用國中生的方法，來深入探究這個問題。

貳、名詞釋義

一、最長非等差數列：從一等差數列中找出一組項數最大的數列，其中任選三數均不形成一等差數列。

二、a_k：等差數列中第 k 項。

三、s_k：非等差數列中第 k 項。

四、異：非等差數列中第 k 項與原等差數列中第 k 項間的差距，定義為 T_{k-1}，其中

$T_{k-1}=\sum_{i=1}^{n} d\cdot\left[\frac{k-1}{2^i}\right]\cdot 3^{i-1}$，即 $T_{k-1}=s_k-a_k$。

五、三等分位置表記法：以 3 的次方數來分組，求 a_k 在等差數列中位置，分為兩種情況；

1. 若 k 不為 3 的倍數，a_k 之位置可表示為 $(z_1+1)\text{-}(z_2+1)\text{-}(z_3+1)\text{-}\cdots\text{-}(z_n+1)\text{-}C_n$，

2. 若 k 為 3 的倍數，a_k 之位置可表示為 $(z_1+1)\text{-}(z_2+1)\text{-}(z_3+1)\text{-}\cdots\text{-}z_{i+1}\text{-}\underbrace{3\text{-}3\text{-}3\text{-}\cdots\text{-}3}_{n-i\text{個}}$。

實例說明，請參閱舉例 7-8。

參、研究目的

一、連續正整數 1 至 n 中，求出最長非等差數列之解題策略及一般項公式。

二、公差 d 之等差數列中，求出最長非等差數列之一般項公式。

三、從一組等差數列中，求出最長非等差數列之總項數。

四、求出等差數列中，任意項 a_i 是否在最長非等差數列中之三等分位置表記法。

肆、研究設備及器材

紙、筆、電腦、Microsoft Word、Microsoft Excel、圖書館、書籍文獻

伍、研究過程或方法

一、連續正整數 1 至 n 中，求出最長非等差數列之解題策略及一般項公式。

(一) 解題策略及歷程

在討論怎麼解決等差數列中，任取三數不成等差的問題，我們在網路搜尋相關文獻，如在《等差數列外一章》一文中提到，任何一組等差數列中，必定能找到一組等比子數列；而首項相同，公比不同的等比子數列，其公比又可構成一新的等差數列。綜觀我們所找到的文獻，其主題都是在討論等差數列，沒有任何討論非等差數列的部份，因此我們想以自己的方式來試著推出最長非等差數列。

在以土法煉鋼的方式求出最長非等差數列後，我們試著找出其中的數學模式，此時我們想起了在上創意數學課程時，老師所講過有關數學家們的故事，其中有一位數學家名叫康托爾，那時候老師特別介紹了他最著名的康托爾集，也就是由不斷去掉線段的中間三分之一而得出。首先從區間[0, 1]中去掉中間的三分之一($^1/_3$, $^2/_3$)，留下兩條線段：[0, $^1/_3$] ∪ [$^2/_3$, 1]。然後，把這兩條線段的中間三分之一都去掉，留下四條線段：[0, $^1/_9$] ∪ [$^2/_9$, $^1/_3$] ∪ [$^2/_3$, $^7/_9$] ∪ [$^8/_9$, 1]。把這個過程一直進行下去，即為康托爾集。

利用康托爾集所提到的概念，本研究想到以分組方式來解決形成等差數列的問題，若能將一組連續正整數均分為三組，則第三組必與前兩組形成等差數列；因此本研究將一組連續正整數分為三大組，其中各大組再分為三組，再將各組分為三小組…等等，以此類推，將數列以 3 的次方數分組，試著找出其數列關係。

(二) 嘗試找出 1 至 100 中，包含最多正整數的非等差數列。

要求出連續正整數 1 至 100 中包含最多正整數的非等差數列，直觀想法就是以表格來觀察，因此我們先取 1 至 9 的連續正整數做成表 2.1 至 2.3：

表 2.1

~~1~~	~~2~~	~~3~~
~~4~~	5	6
~~7~~	8	9

表 2.2

1	~~2~~	3
~~4~~	~~5~~	~~6~~
7	~~8~~	9

表 2.3

1	2	~~3~~
4	5	~~6~~
~~7~~	~~8~~	~~9~~

由表 2.1 至 2.3，我們發現不管從哪裡開始刪去數字，其結果不受影響。因此我們選擇最直接的方法，由 1 開始逐一刪去數字。

從 1 開始，首先選 1 與 2 兩數後，再來不能選 3(因為 1, 2, 3 形成等差數列)，因此接下來選 4 以及 5，之後連續四數 6、7、8、9 都不行，所以就要選 10，得到 1, 2, 4, 5, 10。以此方法逐一求下去，可以得到一數列如下表：

表 2.4

1, 2, 4, 5, 10, 11, 13, 14, 28, 29, 31, 32, 37, 38, 40, 41, 82, 83, 85, 86, 91, 92, 94, 95

此數列中任取三數皆不為等差數列。

在從 1 開始逐一刪去數字並找出任三數不為等差數列後，我們再嘗試有沒有別的做法。利用康托爾集得到的啟發，我們將連續正整數 1 至 100 分組，其中每一組所包含的正整數個數為 3 的次方數，如下圖：

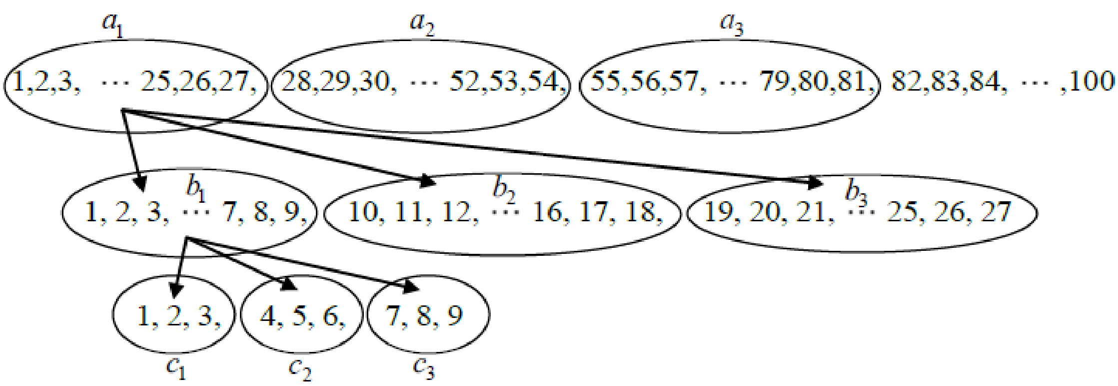

圖 2-1

以連續正整數 1 至 81 為例，首先將連續正整數 1 至 81 分為 a_1 、 a_2 、 a_3 三組，每一組包含 27 個正整數，而 82 至 100 因為不到 27 個數所以暫時先跳過。觀察這三組數後可以發現， a_3 中的每一個數皆可和 a_1 與 a_2 中的某數形成等差數列，如 1、28、55；2、29、56 等等，因此我們將 a_3 整組刪除。

隨後我們進一步將 a_1 中的數分為 b_1 、 b_2 、 b_3 三組，每一組包含 9 個正整數，觀察這三組數後可以發現，b_3 中的每一個數也會和 b_1 與 b_2 中的數形成等差數列，如 1、10、19；2、11、20 等等，因此我們將 b_3 整組刪除。

同理我們再將 b_1 中的數分為 c_1、c_2、c_3 三組，每一組包含 3 個正整數，如前段推論，我們發現 c_3 中的每一個數也會和 c_1 與 c_2 中的數形成等差數列，如 1、4、7；2、5、8；3、6、9，因此我們將 c_3 整組刪除。

最後 c_1 中包含了 1、2、3 三個數，因此將 3 刪除。

照此方法，將連續正整數 1 至 100 中任三數形成等差數列的數取走，如下圖：

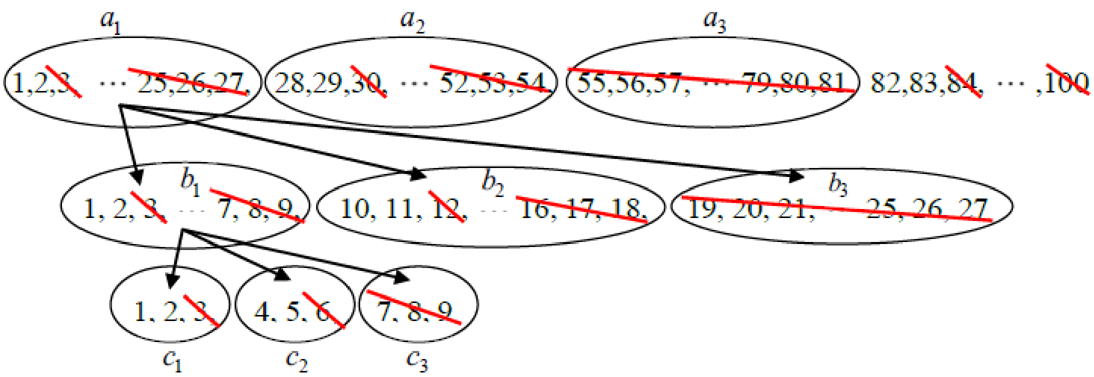

圖 2-2

由上圖可知，連續正整數 1 至 100 以 3 的次方數分組刪除後，其所求之數列為：

1, 2, 4, 5, 10, 11, 13, 14, 28, 29, 31, 32, 37, 38, 40, 41, 82, 83, 85, 86, 91, 92, 94, 95，

與我們一開始求出之表 2.4 吻合。

在找出數列後，我們試著驗證是否有誤刪掉的數，因此從 1 開始逐一檢驗數列，過程如下：

1,2,3；1,4,7；1,5,9；1,10,19；1,11,21；1,13,25；1,14,27；1,28,55；1,29,57；1,31,61；1,32,63；1,37,73；1,38,75；1,40,79；1,41,81；1,82,163。

因為 163 超過 100，因此我們再從 2 開始檢驗，

2,4,6；2,5,8；2,10,18；2,11,20；2,13,24；2,14,26；2,28,54；2,29,56；2,31,60；2,32,62；2,37,72；2,38,74；2,40,78；2,41,80；2,82,162。

因為 162 超過 100，因此我們再從 4 開始，

4,5,6；4,10,16；4,11,18；4,13,22；4,14,24；4,28,52；4,29,54；4,31,58；4,32,60；4,37,70；4,38,72；4,40,76；4,41,78；4,82,160。

因為 160 超過 100，因此我們再從 5 開始，

5,10,15；5,11,17；5,13,21；5,14,23；5,28,51；5,29,53；5,31,57；5,32,59；5,37,69；5,38,71；5,40,75；5,41,77；5,82,159。

因為 159 超過 100，因此我們再從 10 開始，

10,11,12；10,13,16；10,14,18；10,28,46；10,29,48；10,31,52；10,32,54；10,37,64；10,38,66；10,40,70；10,41,72；10,82,154。

因為 154 超過 100，因此我們再從 11 開始，

11,13,15；11,14,17；11,28,45；11,29,47；11,31,51；11,32,53；11,37,63；11,38,65；11,40,69；11,41,71；11,82,153。

因為 153 超過 100，因此我們再從 13 開始，

13,14,15；13,28,43；13,29,45；13,31,49；13,32,51；13,37,61；13,38,63；13,40,67；13,41,69；13,82,151。

因為 151 超過 100，因此我們再從 14 開始，

14,28,42；14,29,44；14,31,48；14,32,50；14,37,60；14,38,62；14,40,66；14,41,68；14,82,150。

因為 150 超過 100，因此我們再從 28 開始，

28,29,30；28,31,34；28,32,36；28,37,46；28,38,48；28,40,52；28,41,54；28,82,136。

因為 136 超過 100，因此我們再從 29 開始，

29,31,33；29,32,35；29,37,45；29,38,47；29,40,51；29,41,53；29,82,135。

因為 135 超過 100，因此我們再從 31 開始，

31,32,33；31,37,43；31,38,45；31,40,49；31,41,51；31,82,133。

因為 133 超過 100，因此我們再從 32 開始，

32,37,42；32,38,44；32,40,48；32,41,50；32,82,132。

因為 132 超過 100，因此我們再從 37 開始，

37,38,39；37,40,43；37,41,45；37,82,127。

因為 127 超過 100，因此我們再從 38 開始，

38,40,42；38,41,44；38,82,126。

因為 126 超過 100，因此我們再從 40 開始，

40,41,42；40,82,124。

因為 124 超過 100，因此我們再從 82 開始，

82,83,84；82,85,88；82,86,90；82,91,100。

因為已刪除到 100，因此我們再從 83 開始，

83,85,87；83,86,89；83,91,99；83,92,101。

因為 101 超過 100，因此我們再從 85 開始，

85,86,87；85,91,97；85,92,99；85,94,103。

因為 103 超過 100，因此我們再從 86 開始，

86,91,96；86,92,98；86,94,102。

因為 102 超過 100，因此我們再從 91 開始，

91,92,93；91,94,97；91,95,99。

因為 95 已是數列最後一項，因此我們再從 92 開始，

92,94,96；92,95,98。

因為 95 已是數列最後一項，因此我們再從 94 開始，

94,95,96。

檢驗所求出表 2.4 之數列，發現數列中並沒有誤刪的數，可知我們所用的方法可以用在由 1 開始的連續正整數數列上。

(三) 以代數方法找出 1 至 100 中，最長非等差數列。

在觀察前文所求出之非等差數列後，發現其中各項間似乎有規律，舉例來說：取連續正整數 1 至 27，將數字由 1 開始以 3 的次方數分組，其過程如下：

1. 以 3^2 開始分組，每 3^2 個數字為 1 組，將 3 的倍數組皆刪除，得到數列如下圖：

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, ~~19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27~~，

3^2 中的第 3 組

圖 3-1

2. 以 3^1 開始分組，每 3^1 個數字為 1 組，將 3 的倍數組皆刪除，得到數列如下圖：

1, 2, 3, 4, 5, 6, ~~7, 8, 9~~, 10, 11, 12, 13, 14, 15, ~~16, 17, 18~~, ~~19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27~~，

3^1 中的第 3 組　　3^1 中的第 6 組

圖 3-2

3. 以 3^0 開始分組，每 3^0 個數字為 1 組，將 3 的倍數組皆刪除，得到數列如下圖：

1, 2, ~~3~~, 4, 5, ~~6~~, ~~7, 8, 9~~, 10, 11, ~~12~~, 13, 14, ~~15~~, ~~16, 17, 18~~, ~~19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27~~，

3^0 中的第 3 組　3^0 中的第 6 組　3^0 中的第 12 組　3^0 中的第 15 組

圖 3-3

由此可得連續正整數 1 至 27 中，包含最多正整數的非等差數列為：

1, 2, 4, 5, 10, 11, 13, 14 。

s_1　s_2　s_3　s_4　s_5　s_6　s_7　s_8

觀察此數列後可知，s_1 和 s_2 相差 1、s_2 和 s_3 相差 2、s_3 和 s_4 相差 1、s_4 和 s_5 相差 5、s_5 和 s_6 相差 1、s_6 和 s_7 相差 2、s_7 和 s_8 相差 1，其中任兩項間的差並不相同，當中似乎沒有什麼規律。但是回頭觀察最初的數列，可以發現 s_1 和 s_2 是最初連續正

整數的前兩項，因此兩項之差為 1，而原本的第三項因為與前兩項形成等差所以往後跳一位，可知 s_2 和 s_3 之差為 $1+1=2$；同理可得 s_4 為 s_3 後一位，兩項之差為 1，而 s_4 和 s_5 之差本該與 s_2 和 s_3 之差相同，但因 s_4 後連續四數皆與前幾項形成等差，因此再往後跳三位，可知 s_4 和 s_5 之差為 $1+1+3=5$。

將這些規律整理後，我們也試著以二維的方式來找線索，利用前文方法將連續正整數 1 至 81 所求出的非等差數列整理如下表：

表 3.1

1	2	**3**	4	5	**6**	**7**	**8**	**9**
10	11	**12**	13	14	**15**	**16**	**17**	**18**
19	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**
28	29	**30**	31	32	**33**	**34**	**35**	**36**
37	38	**39**	40	41	**42**	**43**	**44**	**45**
46	**47**	**48**	**49**	**50**	**51**	**52**	**53**	**54**
55	**56**	**57**	**58**	**59**	**60**	**61**	**62**	**63**
64	**65**	**66**	**67**	**68**	**69**	**70**	**71**	**72**
73	**74**	**75**	**76**	**77**	**78**	**79**	**80**	**81**

我們依照 3 的次方數分組之方法，將各次方中的第 3 組刪除，以紅色表示被刪除的數字。

觀察前 8 項可得到與前文連續正整數 1 至 27 所求出之非等差數列相同的結果，以同樣的規律可發現第 9 項與第 8 項的關係為：

$$28=14+1+1+3+9 \Rightarrow s_9=s_8+1+1+3+9，$$

而其餘各項關係為

$s_{10}=s_9+1$、$s_{11}=s_{10}+1+1$、$s_{12}=s_{11}+1$、$s_{13}=s_{12}+1+1+3$、$s_{14}=s_{13}+1$、$s_{15}=s_{14}+1+1$、$s_{16}=s_{15}+1$。

綜合圖 3-3 和表 3.1 後可知，連續 3 個正整數經過篩選後剩下 2 個；連續 9 個正整數經過篩選後剩下 4 個；連續 27 個正整數經過篩選後剩下 8 個…等等，而非等差數列中，$s_3=s_2+1+1$、$s_5=s_4+1+1+3$、$s_9=s_8+1+1+3+9$ 以此類推，可得結論：

1. 連續3^n個正整數經過篩選後剩下2^n個，其中$n \in \mathbb{N}$，

2. 非等差數列中，$s_{2^n+1} = \left(s_{2^n}+1\right)+1+3+9+\cdots+3^{n-1}$，其中$n \in \mathbb{N}$，

3. 非等差數列中，第 $2n$ 項與第$2n-1$項之差為 1，其中$n \in \mathbb{N}$。

(四) 連續正整數 1 至 n 中，求出最長非等差數列之一般項公式。

為了利用前述三點結論來推導最長非等差數列的公式，首先令連續正整數中第 k 項為

$$a_k = a_1 + \left(k-1\right)\text{，其中 } a_1 \text{ 為首項，}$$

又令s_k表示首項a_1之最長非等差數列的第 k 項，且定義T_{k-1}滿足$s_k = a_k + T_{k-1}$，則本研究稱T_{k-1}為「異」。

由上述$s_1, s_2, \cdots, s_{16}$，表示成前一項加 1，加 3，加 9 之規律，以及前述結論第三點提到，非等差數列中，第 $2n$ 項為第$2n-1$項加 1，其意義即偶數項為前項加 1，因此數列中偶數項與前項為連續正整數；綜合此三點可得，非等差數列中的偶數項的值，是原等差數列之值加上前一項的異，這代表非等差數列中偶數項的異與前一項相同，即$s_{2k} = a_{2k} + T_{2k-1} = a_{2k} + T_{2k-2}$，其中$k \in \mathbb{N}$。由此可知公式計算中只需考慮偶數個異出現次數，因此將異之個數除以 2 的次方數後再取高斯，其公式為

$$T_{k-1} = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{k-1}{2^i}\right] \cdot 3^{i-1}\text{，其中}[\ ]\text{為高斯符號，} 2^{n-1} \le k-1 \le 2^n\text{。}$$

根據T_{k-1}公式不難發現：

$$T_1 = 0,\ T_2 = T_3 = 1,\ T_4 = T_5 = 5,\ T_6 = T_7 = 6,\ T_8 = T_9 = 19\text{。}$$

舉例 1：一連續正整數數列中，首項 1 之最長非等差數列中的第 20 項為何？

$$s_{20} = a_{20} + T_{19}\text{，} T_{19} = \left\lfloor \frac{19}{2} \right\rfloor \cdot 1 + \left\lfloor \frac{19}{4} \right\rfloor \cdot 3 + \left\lfloor \frac{19}{8} \right\rfloor \cdot 9 + \left\lfloor \frac{19}{16} \right\rfloor \cdot 27 = 66\text{，}$$

$$\Rightarrow s_{20} = a_{20} + T_{19} = 20 + 66 = 86\text{。}$$

與一開始所求之數列表 2.4 中數字相符。

(五) 當數列改為 2 至 101，求包含最多正整數之非等差數列。

利用前文方法，將連續正整數 2 至 101 以 3 的次方數分組後，將每 3 的次方數的第 3 組刪除後，可以得到一數列如下表：

表 4.1

2, 3, 5, 6, 11, 12, 14, 15, 29, 30, 32, 33, 38, 39, 41, 42, 83, 84, 86, 87, 92, 93, 95, 96

此數列中任取三數皆不為等差數列。

在找出數列後，我們試著驗證是否有誤刪掉的數，因此從 2 開始逐一檢驗所求出表 4.1 之數列，發現數列中並沒有誤刪的數，可知我們所用的方法可以用在首項不為 1 開始的連續正整數數列上。

在確認此方法用在首項不為 1 開始的連續正整數列可行後，我們再嘗試用在公差不為 1 之等差數列，能否用相同方法找出最長非等差數列。

二、公差 d 之等差數列中，求出最長非等差數列之一般項公式。

(一) 當公差為 2，求 1 至 100 之等差數列中最長非等差數列。

利用前文方法，將等差數列$1,3,5,\cdots,100$中各項以 3 的次方數分組後，將每 3 的次方數的第 3 組刪除後，可以得到一數列如下表：

表 5.1

1,3,7,9,19,21,25,27,55,57,61,63,73,75,79,81

此數列中任取三數皆不為等差數列。

在找出數列後，我們試著驗證是否有誤刪掉的數，因此從 1 開始逐一檢驗所求出表 5.1 之數列，發現數列中並沒有誤刪的數，可知此方法可以用在公差不為 1 之等差數列。

由前文可知，在嘗試改變首項、公差後，我們的方法依舊可以找出數列中所包含的非等差數列，但這樣逐一分組的做法實在繁瑣，因此我們再試著將此模式轉成代數方法。

(二) 檢驗首項為 3，公差為 2 之等差數列，其最長非等差數列。

取首項為 3，公差為 2，項數為 81 之等差數列填入下表 5.2，再以刪去 3 的次方組中第 3 組的方法找出非等差數列：

表 5.2

3	5	**7**	9	11	**13**	**15**	**17**	**19**
21	23	**25**	27	29	**31**	**33**	**35**	**37**
39	**41**	**43**	**45**	**47**	**49**	**51**	**53**	**55**
57	59	**61**	63	65	**67**	**69**	**71**	**73**
75	77	**79**	81	83	**85**	**87**	**89**	**91**
93	**95**	**97**	**99**	**101**	**103**	**105**	**107**	**109**
111	**113**	**115**	**117**	**119**	**121**	**123**	**125**	**127**
129	**131**	**133**	**135**	**137**	**139**	**141**	**143**	**145**
147	**149**	**151**	**153**	**155**	**157**	**159**	**161**	**163**

其中紅色表示被刪除的數字。

觀察所求出之非等差數列，我們發現其中各項間的關係與表 3.1 所求出之非等差數列類似，整理如下：

$s_1=3$ 、 $s_2=s_1+2$ 、 $s_3=s_2+2+2$ 、 $s_4=s_3+2$ 、 $s_5=s_4+2+2+6$ 、 $s_6=s_5+2$ 、 $s_7=s_6+2+2$ 、 $s_8=s_7+2$ 、 $s_9=s_8+2+2+6+18$ 、 $s_{10}=s_9+2$ 、 $s_{11}=s_{10}+2+2$ 、 $s_{12}=s_{11}+2$ 、 $s_{13}=s_{12}+2+2+6$ 、 $s_{14}=s_{13}+2$ 、 $s_{15}=s_{14}+2+2$ 、 $s_{16}=s_{15}+2$ 。

由此上述關係可得新的結論：

1. 連續 3^n 項等差數列經過篩選後剩下 2^n 項非等差數列，其中 $n\in\mathbb{N}$，

2. 非等差數列中，$s_{2^n+1}=\left(s_{2^n}+d\right)+1\cdot d+3\cdot d+\cdots+3^{n-1}\cdot d$ ，其中 $n\in\mathbb{N}$，d 為公差，

3. 非等差數列中，第 $2n$ 項與第 $2n-1$ 項之差為 d，其中 $n\in\mathbb{N}$，d 為公差。

以這三點為基礎，我們重新推導非等差數列的公式，首先原本異的公式為

$$T_{k-1}=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{k-1}{2^i}\right]\cdot 3^{i-1}$$ ，其中[ ]為高斯符號， $2^{n-1}\le k-1\le 2^n$ ，

由第 2 點可知，不同的等差數列會改變異的數值，因此重新定義異的公式為

$$T_{k-1}=\sum_{i=1}^{n}d\cdot\left[\frac{k-1}{2^i}\right]\cdot 3^{i-1}$$ ，其中[ ]為高斯符號，d 為公差， $2^{n-1}\le k-1\le 2^n$ 。

舉例 2：首項為 3，公差為 2 之等差數列，其最長非等差數列中第 12 項為？

$$s_{12}=a_{12}+T_{11}\text{，}T_{11}=2\cdot\left\lfloor\frac{11}{2}\right\rfloor\cdot 1+2\cdot\left\lfloor\frac{11}{4}\right\rfloor\cdot 3+2\cdot\left\lfloor\frac{11}{8}\right\rfloor\cdot 9=40\text{，}$$

$$\Rightarrow s_{12}=25+40=65\text{。}$$

其結果與表 5.2 中數字相符。

小結. 一組等差數列中，其最長非等差數列一般項：

$s_k=a_k+\sum_{i=1}^{n}d\cdot\left[\frac{k-1}{2^i}\right]\cdot 3^{i-1}$，其中 a_k 為原等差數項第 k 項，[ ]為高斯符號，$2^{n-1}\le k-1\le 2^n$。

三、從一組等差數列中，求出最長非等差數列之總項數。

(一) 連續正整數列中，最長非等差數列之總項數。

在找出非等差數列中第 k 項的公式後，我們下一步想知道的是一組等差數列中所包含的非等差數列之項數為多少？因此我們以實際例子來尋找其中規律：

舉例 3：連續正整數 1 至 65 中之最長非等差數列，其項數為？

利用我們的分組方法，首先觀察 65 會落在 3 的幾次方組，

因為 $3^3\le 65<3^4$，代表 65 會落在 3^4 裡，所以除以 3^3，

$$65\div 3^3=2\ ...\ 11\Rightarrow 65=2\cdot 3^3+11\text{，}$$

代表 65 落在 3^3 組中的第 3 組裡，因為第 3 組會被刪除，所以我們停止計算。

最後利用前面所找出的性質：連續 3^n 項等差數列經過篩選後剩下 2^n 項非等差數列，我們實際代入後算出項數為

$$65=2\cdot 3^3+11\Rightarrow 2\cdot 2^3=16\text{，}$$

其項數與表 3.1 中數列個數相同。

舉例 4：連續正整數 1 至 37 中之最長非等差數列，其項數為？

利用我們的分組方法，首先觀察 37 會落在 3 的幾次方組，

因為 $3^3\le 37<3^4$，代表 37 會落在 3^4 裡，所以除以 3^3，

$$37 \div 3^3 = 1 \ldots 10 \Rightarrow 37 = 1 \cdot 3^3 + 10，$$

代表 37 落在3^3組中的第 2 組裡，在其中 27 個數裡排第 10 位，

因此我們再觀察 10 會落在 3 的幾次方組，

因為$3^2 \le 10 < 3^3$，代表 10 會落在3^3裡，所以除以3^2，

$$10 \div 3^2 = 1 \ldots 1 \Rightarrow 10 = 1 \cdot 3^2 + 1，$$

代表 10 落在3^2組中的第 2 組裡，在其中 9 個數裡排第 1 位，

此時因為$3^0 \le 1 < 3^1$，所以我們停止計算。

以前文性質，我們實際代入後算出項數為

$$37 = 1 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 1 \Rightarrow 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 = 13，$$

其項數與表 3.1 中數列個數相同。

舉例 5：是否可能在 1~100000 中選出 1983 個相異正整數，使得若從這 1983 個數中任選其中三個數，均不構成某個等差數列的相鄰三項？

以我們所找出的方法，試著算出 1~100000 中有多少項非等差數列，以此解決我們一開始的問題。

利用我們的分組方法，首先觀察 100000 會落在 3 的幾次方組，

因為$3^{10} \le 100000 < 3^{11}$，代表 100000 會落在$3^{11}$裡，所以除以$3^{10}$，

$$100000 \div 3^{10} = 1 \ldots 40951 \Rightarrow 100000 = 1 \cdot 3^{10} + 40951，$$

因為$3^9 \le 40951 < 3^{10}$，代表 40951 會落在3^{10}裡，所以除以3^9，

$$40951 \div 3^9 = 2 \ldots 1585 \Rightarrow 40951 = 2 \cdot 3^9 + 1585，$$

代表 40951 落在3^9組中的第 3 組裡，在其中 19683 個數裡排第 1585 位，此時我們發現 40951 出現在第 3 組的第 1585 位，又因為第 3 組會被全部刪除，所以我們停止計算。

以前文性質，我們實際代入後算出項數為

$$100000=1\cdot 3^{10}+2\cdot 3^{9}+1585\Rightarrow 1\cdot 2^{10}+2\cdot 2^{9}=2048 ，$$

此結果代表我們可以從 1~100000 中找出包含 2048 項的最長非等差數列，因為 2048 大於 1983，所以此問題答案為可能。

(二) 公差為 d 之等差數列中，最長非等差數列之總項數。

舉例 6：首項 5，公差 3，末項為 104 的等差數列中的最長非等差數列，其項數為？

當數列不為連續正整數時，我們要怎麼找出非等差數列之項數？

利用前文所得性質：連續3^n項等差數列經過篩選後剩下2^n項非等差數列，我們先算出等差數列中項數為

$$104=5+(n-1)\cdot 3\Rightarrow 104=3n+2\Rightarrow n=34 ，$$

因此利用我們的分組方法，首先觀察 34 會落在 3 的幾次方組，

因為$3^3\le 34<3^4$，代表 34 會落在3^4裡，所以除以3^3，

$$34\div 3^3=1\ ...\ 7\Rightarrow 34=1\cdot 3^3+7 ，$$

代表 34 落在3^3組中的第 2 組裡，在其中 27 個數裡排第 7 位，

因此我們再觀察 7 會落在 3 的幾次方組，

因為$3^1\le 7<3^2$，代表 7 會落在3^2裡，所以除以3^1，

$$7\div 3^1=2\ ...\ 1\Rightarrow 7=2\cdot 3^1+1，$$

代表 7 落在3^1組中的第 3 組裡，在其中 9 個數裡排第 1 位，

此時因為 7 落在第 3 組且$3^0\le 1<3^1$，因此停止計算。

以前文性質，我們實際代入後算出項數為

$$34=1\cdot 3^3+2\cdot 3^1+1\Rightarrow 1\cdot 2^3+2\cdot 2^1=12 。$$

再利用下表 6.1 佐證

表 6.1

5	8	**11**	14	17	**20**	**23**	**26**	**29**
32	35	**38**	41	44	**47**	**50**	**53**	**56**
59	**62**	**65**	**68**	**71**	**74**	**77**	**80**	**83**
86	89	**92**	95	98	**101**	**104**	**107**	**110**

由表可知，此等差數列所包含非等差數列之項數為 12。

(三) 從一組等差數列中，求出最長非等差數列之總項數方法：

由前面的例子，我們整理出項數為 m 的等差數列中，其所包含的最長非等差數列項數，對任意正整數 m，下列三者之一成立：

1. 存在 n_1，$0 \le R_1 < 3^{n_1}$，使得

$$m = 2\cdot 3^{n_1} + R_1 \text{，}$$

2. 存在 t，$n_1 > n_2 > \cdots > n_t$，$0 \le R_t < 3^{n_t}$，使得

$$m = \sum_{i=1}^{t-1} 3^{n_i} + 2\cdot 3^{n_t} + R_t \text{，}$$

3. 存在 s，$n_1 > n_2 > \cdots > n_s$，$R_s \in \{0,1,2\}$，使得

$$m = \sum_{i=1}^{s} 3^{n_i} + R_s \text{，}$$

由以上三種可能，分別求出項數之公式如小結。

小結. 從一組等差數列中，求出最長非等差數列之總項數：

(1) 若 $m = 2\cdot 3^{n_1} + R_1$，其中 $0 \le R_1 < 3^{n_1}$，則最長非等差數列之項數為 2^{n_1+1}，

(2) 若 $m = \sum_{i=1}^{t-1} 3^{n_i} + 2\cdot 3^{n_t} + R_t$，其中 $n_1 > n_2 > \cdots > n_t$，$0 \le R_t < 3^{n_t}$，則最長非等差數列之項數為 $\sum_{i=1}^{t-1} 2^{n_i} + 2^{n_t+1}$，

(3) 若 $m = \sum_{i=1}^{s} 3^{n_i} + R_s$，其中 $n_1 > n_2 > \cdots > n_s$，$R_s \in \{0,1,2\}$，則最長非等差數列之項數為 $\sum_{i=1}^{s} 2^{n_i} + R_s$。

四、求出等差數列中，任意項a_i是否在最長非等差數列中之三等分位置表記法。

(一) 以三等分位置表記法，求出任意項a_i在等差數列中的位置

本研究公式是以等差數列中必有等差子數列的想法，將一組等差數列均分為三組，則第三組必與前兩組形成等差數列；因此本研究將一組等差數列分為三大組，其中各大組再分為三組，再將各組分為三小組…等等，以此類推，將數列以 3 的次方數分組後，再各 3 的次方數組中的第 3 組刪除後找出非等差數列，整理此推論後即可解釋為：

等差數列中第$k+2\cdot 3^{n-1}$項與第k和$k+3^{n-1}$項形成等差，其中$3^{n-2}<k\le 3^{n-1}$，$n\in\mathbb{N}$，因此刪除第$k+2\cdot 3^{n-1}$項。

但此推論有一個問題，也就是當 k 為 3 的倍數，則第k和$k+3^{n-1}$項已被刪除，那第$k+2\cdot 3^{n-1}$項是否仍要刪去？

以連續正整數 1 至 9 為例：

1. 以3^1開始分組，每3^1個數字為 1 組，將 3 的倍數組皆刪除，得到數列如下圖：

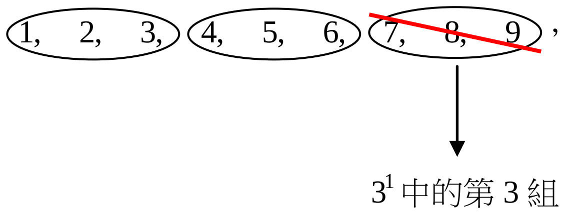

圖 7-1

2. 以3^0開始分組，每3^0個數字為 1 組，將 3 的倍數組皆刪除，得到數列如下圖：

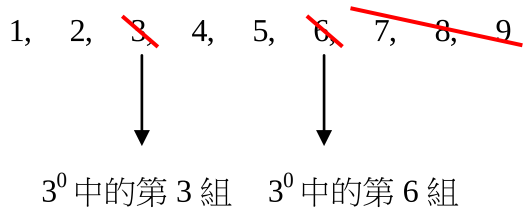

圖 7-2

由第 1 點可知，將 1 至 9 分為 3 組後，因為 1、4、7 和 2、5、8 以及 3、6、9 皆形成等差數列，因此將第 3 組的 7、8、9 皆刪除；再觀察第 2 點可知，1、2、3 和 4、5、6 皆形成等差數列，因此各別將 3 和 6 刪除。此時我們發現，第 1 點所刪除的 9 是因為 3、6、9 此數列，但第 2 點又將 3 和 6 刪除，那是否 9 可以再放回數列中呢？因此我們嘗試將 9 放回數列，得到下圖

1, 2, ~~3,~~ 4, 5, ~~6,~~ ~~7, 8,~~ 9，

圖 7-3

觀察圖 7-3 後可以發現，雖然 3 和 6 已被刪除，但是 9 依然可以與 1 和 5 形成一個 1、5、9 的等差數列，因此仍然該把 9 刪除。

此結果是特例或是所有情況皆成立？觀察圖 7-3 可發現，1、5、9 分別是以 3^1 分組中各組裡的第 1、2、3 項，表示為

3^1 中的第 1 組　3^1 中的第 2 組　3^1 中的第 3 組

(1, 2, 3,)　(4, 5, 6,)　(7, 8, 9)，

第 1 項　第 2 項　第 3 項

利用本研究以 3 的次方數來分組之想法，將 1 表示為 $1\text{-}1\left(3^1\text{-}3^0\right)$、5 表示為 $2\text{-}2\left(3^1\text{-}3^0\right)$、9 表示為 $3\text{-}3\left(3^1\text{-}3^0\right)$，其中 1-1 意義為 3^1 中第 1 組、3^0 中第 1 項，2-2 意義為 3^1 中第 2 組、3^0 中第 2 項，3-3 意義為 3^1 中第 3 組、3^0 中第 3 項。以此可推論，若一數字 z 以此分組法在 3^j 中排在第 3 組，代表必存在兩個數字 x 與 y 會落在 3^j 之第 2 組和第 1 組，使得 x、y、z 三數形成一等差數列。

以此方法求等差數列中第 k 項，即 a_k 在等差數列中的位置：先取 $3^n \le k < 3^{n+1}$，其中 $n \in \mathbb{N}$，並分為兩種情況討論：

1. 若 k 不為 3 的倍數

$$\Rightarrow k \div 3^{n} = z_1 \dots C_1 \text{，}$$

$$\Rightarrow C_1 \div 3^{n-1} = z_2 \dots C_2 \text{，}$$

$$\Rightarrow C_2 \div 3^{n-2} = z_3 \dots C_3 \text{，}$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow C_{n-1} \div 3 = z_n \dots C_n \text{，}$$

則正整數 a_k 之位置可表示為 (z_1+1)-(z_2+1)-(z_3+1)-‧‧‧-(z_n+1)-C_n 。

2. 若 k 為 3 的倍數

$$\Rightarrow k \div 3^{n} = z_1 \dots C_1 \text{，}$$

$$\Rightarrow C_1 \div 3^{n-1} = z_2 \dots C_2 \text{，}$$

$$\Rightarrow C_2 \div 3^{n-2} = z_3 \dots C_3 \text{，}$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow C_i \div 3^{n-i} = z_{i+1} \dots 0 \text{，}$$

則正整數 a_k 之位置可表示為 (z_1+1)-(z_2+1)-(z_3+1)-‧‧‧-z_{i+1}-$\underbrace{3\text{-}3\text{-}3\text{-}\cdots\text{-}3}_{n-i\text{個}}$ ，

以此可求得正整數 a_k 在連續正整數數列之位置。綜合前文可知，若此數字在其位置分組中出現 3，則必存在另兩個數字在位置分組 2 和位置分組 1 且與 a_k 形成一等差數列，以此想法代入等差數列中，判斷等差數列第 k 項在數列中的位置。

舉例 7：求 107 在首項為 5，公差為 3 之等差數列中位置，並判斷是否落在首項 5 之最長非等差數列中？

$\frac{107-5}{3}+1=35$，即 107 為第 35 項，且不為 3 的倍數，則取 $3^3 \le 35 < 3^4$ ，

$$\Rightarrow 35 \div 3^3 = 1 \dots 8 \text{，}$$

$$\Rightarrow 8 \div 3^2 = 0 \dots 8 \text{，}$$

$$\Rightarrow 8 \div 3^1 = 2 \dots 2 \text{，}$$

$\Rightarrow 107$ 為 $2\text{-}1\text{-}3\text{-}2$ 。

由前文推論可知，必存在兩數字位置為 $2\text{-}1\text{-}1\text{-}2$ 和 $2\text{-}1\text{-}2\text{-}2$ ，其兩數字與 74 形成等差數列，因此利用公式反推可得

$2\text{-}1\text{-}1\text{-}2 = 1\cdot 3^3 + 0\cdot 3^2 + 0\cdot 3^1 + 2 = 29$ ，代回等差數列第 29 項為 89，

$2\text{-}1\text{-}2\text{-}2 = 1\cdot 3^3 + 0\cdot 3^2 + 1\cdot 3^1 + 2 = 32$ ，代回等差數列第 32 項為 98，

則可得 89、98、107 確為一等差數列，由表 6.1 可知 89 和 98 已落在非等差數列中，因此 107 不會落在非等差數列中。

舉例 8：求 110 在首項為 5，公差為 3 之等差數列中位置，並判斷是否落首項 5 之最長非等差數列中？

$\frac{110-5}{3}+1=36$ ，即 110 為第 36 項，且為 3 的倍數，則取 $3^3 \le 36 < 3^4$ ，

$\Rightarrow 36 \div 3^3 = 1 \ldots 9$ ，

$\Rightarrow 9 \div 3^2 = 1 \ldots 0$ ，

$\Rightarrow 110$ 為 $2\text{-}1\text{-}3\text{-}3$ 。

由前文推論可知，必存在兩數字位置為 $2\text{-}1\text{-}1\text{-}1$ 和 $2\text{-}1\text{-}2\text{-}2$ ，其兩數字與 110 形成等差數列，因此利用公式反推可得

$2\text{-}1\text{-}1\text{-}1 = 1\cdot 3^3 + 0\cdot 3^2 + 0\cdot 3^1 + 1 = 28$ ，代回等差數列第 28 項為 86，

$2\text{-}1\text{-}2\text{-}2 = 1\cdot 3^3 + 0\cdot 3^2 + 1\cdot 3^1 + 2 = 32$ ，代回等差數列第 32 項為 98，

則可得 86、98、110 確為一等差數列，由表 6.1 可知 86 和 98 已落在非等差數列中，因此 110 不會落在非等差數列中。

此結論恰恰證明本研究公式想法正確，以 3 的次方數分組後，將所有 3 的倍數組皆刪除後所得之非等差數列，其位置分組中必不出現 3，而所有位置分組中會出現 3 的數皆會在非等差數列中找到另兩數，其位置分組分別為 1 和 2 並與其形成等差數列。

(二) 證明本研究公式所找出之非等差數列，為等差數列中之最長非等差數列

綜合上述可得，本研究利用 3 的次方數進行分組後，所刪去的數其位置分組中必出現 3；而位置分組中未出現 3 的數，其必為非等差數列中的一員。由此可知，本研究利用公式從一組等差數列中所刪去的數，皆會與公式所求出的非等差數列形成等差，以此可推論本研究公式所找出之非等差數列，為等差數列中之最長非等差數列。

但這樣的論述數學性不夠完整，在我們進入全國科展後，和指導老師及教授討論後，對這段論述有了完整的數學證明，我們將證明放在附件。

小結. 利用公式求等差數列中第 k 項，即 a_k 在等差數列中位置，並以此推論本研究所求之最長非等差數列，其項數為最大：

取 $3^n \le k < 3^{n+1}$，其中 $n \in \mathbb{N}$，並將其分為兩種情形來討論

1.若 k 不為 3 的倍數，

則 a_k 之位置可表示為 $(z_1+1)\text{-}(z_2+1)\text{-}(z_3+1)\text{-}\cdots\text{-}(z_n+1)\text{-}C_n$。

2. 若 k 為 3 的倍數，

則 a_k 之位置可表示為 $(z_1+1)\text{-}(z_2+1)\text{-}(z_3+1)\text{-}\cdots\text{-}z_{i+1}\text{-}\underbrace{3\text{-}3\text{-}3\text{-}\cdots\text{-}3}_{n-i\text{個}}$。

若 a_k 在其位置分組中出現 3，則必存在另兩數在位置分組 2 和位置分組 1 且落在非等差數列中，而此兩數必與 a_k 形成一等差數列。因此推論本研究公式所找出之非等差數列，其項數為最大。

陸、研究結果

根據我們的研究目的，提出研究結果如下：

一、要在連續正整數中找出最長非等差數列，我們利用 3 的次方數將連續正整數進行分組，再將各次方數組中的第 3 組刪除，以此方法求出規律，從首項開始逐一推導後項，並定義其各項間的值為「異」，以此推導出連續正整數中最長非等差數列之第 k 項為 $s_k = a_k + \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{k-1}{2^i} \right] \cdot 3^{i-1}$，其中 a_k 為連續正整數中第 k 項，$[\ ]$ 為高斯符號。

二、由前文方法，推出等差數列中最長非等差數列，其非等差數列中第 k 項為 $s_k = a_k + \sum_{i=1}^{n} d \cdot \left[\frac{k-1}{2^i} \right] \cdot 3^{i-1}$，其中 a_k 為原等差數列第 k 項，d 為公差，$[\ ]$ 為高斯符號。

三、依據三等分法所得最長非等差數列之總項數如下：

$$
\text{總項數} = \begin{cases}
2^{n_1+1} & \text{若 } n = 2\times 3^{n_1} + R_1, \\
& \quad \text{其中 } 0 \le R_1 < 3^{n_1}, \\
2^{n_t+1} + \sum_{i=1}^{t-1} 2^{n_i} & \text{若 } n = \sum_{i=1}^{t-1} 3^{n_i} + 2\times 3^{n_t} + R_t, \\
& \quad \text{其中 } n_1 > n_2 > \cdots > n_t,\ 0 \le R_t < 3^{n_t}, \\
R_s + \sum_{i=1}^{s} 2^{n_i} & \text{若 } n = \sum_{i=1}^{s} 3^{n_i} + R_s, \\
& \quad \text{其中 } n_1 > n_2 > \cdots > n_s, R_s \in \{0,1,2\},
\end{cases}
$$

四、對本研究所找出的最長非等差數列，判斷其項數是否為最大。因此利用三等分位置表記法將 1 表示為 1-1$\left(3^1\text{-}3^0\right)$、5 表示為 2-2$\left(3^1\text{-}3^0\right)$、9 表示為 3-3$\left(3^1\text{-}3^0\right)$，以此求等差數列中第 k 項，即 a_k 在等差數列中的位置：先取 $3^n \le k < 3^{n+1}$，其中 $n \in \mathbb{N}$，並分為兩種情況討論，

1. 若 k 不為 3 的倍數則正整數 a_k 之位置可表示為

$$\left(z_1+1\right)\text{-}\left(z_2+1\right)\text{-}\left(z_3+1\right)\text{-}\cdots\text{-}\left(z_n+1\right)\text{-}C_n \text{ ,}$$

2. 若 k 為 3 的倍數則正整數 a_k 之位置可表示為

$$\left(z_1+1\right)\text{-}\left(z_2+1\right)\text{-}\left(z_3+1\right)\text{-}\cdots\text{-}z_{i+1}\text{-}\underbrace{3\text{-}3\text{-}3\text{-}\cdots\text{-}3}_{n-i\text{個}} \text{ ,}$$

若 a_k 在其位置分組中出現 3，則必存在另兩數在位置分組 2 和位置分組 1 且落在非等差數列中，而此兩數必與 a_k 形成一等差數列。因此推論本研究公式所找出之非等差數列，其項數為最大。

柒、討論

一、本研究結果與文獻之異同。

利用康托爾集中將數線分成三等分並取走中間部份的想法，利用分組方式來解決形成等差數列的問題，將等差數列以 3 的次方數分組，並以此找出非等差數列。

二、當條件與方法改變時，檢驗所求出之最長非等差數列。

我們在前面以 3 的次方數分組並刪去各次方組中第 3 組的方法，找出等差數列中包含最多數的非等差數列。但是刪去第 3 組是否是最好的方法？刪去第 1 組或第 2 組會不會更方便計算？還有，我們的公式是建立在由 1 開始的連續正整數數列，如果改變首項和公差，是否也可以用相同方法求出公式？因此在這裡我們考慮利用二維方法來刪去第 1 組或第 2 組，看看會不會有不一樣的結果；再來，觀察不同首項和公差下，是否也可以求出非等差數列的公式。

(一) 利用二維方式刪去第 1 項，求 1 至 81 中包含最多正整數之非等差數列。

將連續正整數 1 至 81 以 3 的次方數分組後，刪去各次方組的第 1 組。可得下表：

表 8.1

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
10	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**
19	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**
28	**29**	**30**	**31**	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**
37	**38**	**39**	**40**	41	42	**43**	44	45
46	**47**	**48**	**49**	50	51	**52**	53	54
55	**56**	**57**	**58**	**59**	**60**	**61**	**62**	**63**
64	**65**	**66**	**67**	68	69	**70**	71	72
73	**74**	**75**	**76**	77	78	**79**	80	81

紅色表示被刪除的數字，由上表我們可以知道，刪去第 1 組後，非等差數列的項數與刪去第 3 組後的項數相同。

(二) 利用二維方式刪去第 2 項，求 1 至 81 中包含最多正整數之非等差數列。

將連續正整數 1 至 81 以 3 的次方數分組後，刪去各次方組的第 2 組。可得下表：

表 8.2

1	**2**	3	**4**	**5**	**6**	7	**8**	9
10	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**
19	**20**	21	**22**	**23**	**24**	25	**26**	27
28	**29**	**30**	**31**	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**
37	**38**	**39**	**40**	**41**	**42**	**43**	**44**	**45**
46	**47**	**48**	**49**	**50**	**51**	**52**	**53**	**54**
55	**56**	57	**58**	**59**	**60**	61	**62**	63
64	**65**	**66**	**67**	**68**	**69**	**70**	**71**	**72**
73	**74**	75	**76**	**77**	**78**	79	**80**	81

紅色表示被刪除的數字，由上表我們可以知道，刪去第 2 組後，非等差數列的項數與刪去第 3 組後的項數相同。

由上可知，不管刪去第幾組，我們所求出的非等差數列項數都相同。但是在建立公式上面，若是以刪去第 1 組或第 2 組來建立公式，方法比刪去第 3 組繁複，因此我們還是選擇以刪去第 3 組來建立公式。

捌、結論與心得

經由這次做科展的經驗，讓我們學到做研究的方法。在一開始尋找非等差數列的相關文獻時，找不到有關的資料，因此我們只能嘗試土法煉鋼的做法，逐一找出數列；在找出數列後，我們發現竟然可以利用老師以前所介紹的數學家中，康托爾的康托爾集作法來找出相同的數列，乍看下不相關的兩種方法，居然可以得到一樣的結果。這讓我們學到，在解決數學問題時，有些方法往往跟主題沒有關係，但是經過應用後卻可以解決困擾以久的難題。因此在遇到問題時，不要去對問題的方法設限，大膽嘗試所學過的各種知識並小心驗證，才是做研究的方法。

非等差數列的奧秘還有許多許多，礙於能研究時間有限，我們暫時只能在本文中討論一部份，還有許多其他的想法，希望在學到更高深的數學方法或有更多的資源後能繼續深入研究。例如，如同等差級數一般將非等差級數的和算出，或是能在任何數列中找

出一非等差數列；同時我們也希望未來能嘗試將此數列應用在抽樣調查上，以非等差數列來做立意抽樣，或是應用在密碼學上等等。

玖、參考資料及其他

一、杜信達、許名雅、杜鴻祥、宋碧金（2002）。**等差數列外一章**。中華民國第四十二屆中小學科學展覽會國中組數學科。

二、維基百科（2014 年 9 月 15 日）。**康托爾集**。取自 https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%BA%B7%E6%89%98%E5%B0%94%E9%9B%86

三、*24th International Mathematical Olympiad*. (1983). Retrieved August 4, 2015, from https://www.imo-official.org/default.aspx

附件　真正最長非等差數列之證明

底下證明係由指導老師補充並指導我們，推導的過程中，邏輯的脈絡是我們前文結果的整理，所以雖制式，但我們還可以瞭解，茲補充於下：

令 $f(n)$ 表示等差數列 $1,2,\cdots,n$ 之真正最長非等差數列之總項數，$g(n)$ 表示等差數列 $1,2,\cdots,n$ 利用三等分法所得之最長非等差數列之總項數。因此，

$$g(n) \le f(n),\ \forall n \in N \qquad (1)$$

且根據本文之推導可得：

$$g(n)=\begin{cases} 2^{n_1+1} & \text{若 } n = 2\times 3^{n_1}+R_1, \\ & \quad \text{其中 } 0 \le R_1 < 3^{n_1}, \\ 2^{n_t+1}+\sum_{i=1}^{t-1} 2^{n_i} & \text{若 } n=\sum_{i=1}^{t-1} 3^{n_i}+2\times 3^{n_t}+R_t, \\ & \quad \text{其中 } n_1>n_2>\cdots>n_t,\ 0\le R_t<3^{n_t}, \\ R_s+\sum_{i=1}^{s} 2^{n_i} & \text{若 } n=\sum_{i=1}^{s} 3^{n_i}+R_s, \\ & \quad \text{其中 } n_1>n_2>\cdots>n_s, R_s\in\{0,1,2\}, \end{cases} \qquad (2)$$

【性質 1】若存在正整數 k，使得 $g\left(3^k\right)=f\left(3^k\right)$，則 $g\left(2\times 3^k\right)=f\left(2\times 3^k\right)$。

【證明】

令 $n=2\times 3^k$，將等差數列 $1,2,\cdots,n$ 等分成兩群，即 $1,2,\cdots,3^k$ 為第一群，$3^k+1,3^k+2,\cdots,2\times 3^k$ 為第二群。所以，第一群之真正最長非等差數列之總項數為 $f\left(3^k\right)$，而第二群之真正最長非等差數列之總項數亦為 $f\left(3^k\right)$，故

$$f(n)=f\left(2\times 3^k\right)\le f\left(3^k\right)+f\left(3^k\right)=2f\left(3^k\right)。 \qquad (3)$$

根據條件 $g\left(3^k\right)=f\left(3^k\right)$ 與 (3) 可得

$$f(n)=f\left(2\times 3^k\right)\le f\left(3^k\right)+f\left(3^k\right)=2f\left(3^k\right)=2g\left(3^k\right)， \qquad (4)$$

另外，根據 (2) 可得 $2g\left(3^k\right)=g\left(2\times 3^k\right)=g(n)$，再回到 (4) 可得 $f(n)\le 2g\left(3^k\right)=g(n)$。此時，結合 (1) 可得 $f(n)=g(n)$。■

【性質 2】若存在正整數 k，使得 $g\left(3^k\right)=f\left(3^k\right)$ 且 $g\left(3^{k+1}\right)=f\left(3^{k+1}\right)$，則對任意正整數 n，$2\times 3^k \le n \le 3^{k+1}$， 恆有 $f(n)=2^{k+1}=f\left(2\times 3^k\right)=f\left(3^{k+1}\right)$。

【證明】

因為 $2\times 3^k \le n \le 3^{k+1}$，所以

$$f\left(2\times 3^k\right)\le f(n)\le f\left(3\times 3^k\right)=f\left(3^{k+1}\right)。\qquad (5)$$

又根據 (2)， 條件 $g\left(3^k\right)=f\left(3^k\right)$， $g\left(3^{k+1}\right)=f\left(3^{k+1}\right)$ 與性質 1 可得

$$f\left(2\times 3^k\right)=2^{k+1}，\ f\left(3^{k+1}\right)=2^{k+1}。$$

因此，根據 (5) 可得

$$f(n)=2^{k+1}=f\left(2\times 3^k\right)=f\left(3^{k+1}\right)。\blacksquare$$

【討論 1】在性質 2 的條件下，若將 $1,2,\cdots,3^{k+1}$ 等分為三群，即 $1,2,\cdots,3^k$ 為第一群，$3^k+1,3^k+2,\cdots,2\times 3^k$ 為第二群，$2\times 3^k+1,2\times 3^k+2,\cdots,3\times 3^k$ 為第三群時，則在第三群範圍之 n 的函數 $f(n)$ 值均為定值。亦即真正最長非等差數列之作法上，其與三等分法在求最長非等差數列時，刪除第三群的方式之作法相同。

【討論 2】根據本文求等差數列 $1,2,\cdots,81$ 之真正最長非等差數列發現：$f\left(3\right)=g\left(3\right)=2$，$f\left(3^2\right)=g\left(3^2\right)=2^2$，$f\left(3^3\right)=g\left(3^3\right)=2^3$，$f\left(3^4\right)=g\left(3^4\right)=2^4$。

【性質 3】對任意正整數 n， 恆有 $f\left(3^n\right)=g\left(3^n\right)=2^n$。

【證明】

使用數學歸納法證明，根據討論 2 可知 $n=1,2,3,4$ 時成立。

假設 $n=k$ 時成立，亦即在 $n=5,6,\cdots,k$ 時，可根據性質 2 與討論 1，來求作真正最長非等差數列，即利用三等分法求最長非等差數列時之作法，刪除第三群的方式。

今觀察 $n=k+1$，然後將 $1,2,\cdots,3^{k+1}$ 等分為三群，即 $1,2,\cdots,3^k$ 為第一群，

$3^k+1, 3^k+2, \cdots, 2\times 3^k$ 為第二群，$2\times 3^k+1, 2\times 3^k+2, \cdots, 3\times 3^k$ 為第三群。又因三等分之故，各群之總項數均為 3^k，故根據數學歸納法之假設，各群之真正最長非等差數列的總項數為 2^k，此時，可猜測 $f\left(3^{k+1}\right)=2^k+2^k+2^k$ 或 $f\left(3^{k+1}\right)=2^k+2^k$。為了證明 $f\left(3^{k+1}\right)=2^k+2^k$，現在將前兩群之真正最長非等差數列分別記為 $a_1, a_2, \cdots, a_{2^k}$ 與 $b_1, b_2, \cdots, b_{2^k}$，又因為 $g\left(3^k\right)=2^k$，故 $a_1, a_2, \cdots, a_{2^k}$ 與 $b_1, b_2, \cdots, b_{2^k}$ 之實際求法，可利用三等分法求作其最長非等差數列時之作法來得到，進而，不管哪一個 a_i 或 b_i，其對應的三等分位置表記法，均可明確標記，例如：a_1 之三等分位置表記法為 $\underbrace{1-1-1-\cdots-1}_{k\text{ 個}}$，$b_1$ 之三等分位置表記法為 $\underbrace{2-1-1-\cdots-1}_{k\text{ 個}}$。因為有三等分位置表記法之協助，現在來考慮第三群 $2\times 3^k+1, 2\times 3^k+2, \cdots, 3\times 3^k$ 中之任何一個數 c_j，會發現均可在 $a_1, a_2, \cdots, a_{2^k}$ 與 $b_1, b_2, \cdots, b_{2^k}$ 中，分別各找到一個對應項 a_j 與 b_j，使 a_j，b_j，c_j 成等差，而為保留前兩群的最長非等差數列之狀態，不得不全數刪除第三群，故可得 $f\left(3^{k+1}\right)\le 2^k+2^k=2^{k+1}$。但因 $g\left(3^{k+1}\right)\le f\left(3^{k+1}\right)$ 且 $g\left(3^{k+1}\right)=2^{k+1}$，故得到 $f\left(3^{k+1}\right)=2^{k+1}$

根據數學歸納法可得對任意正整數 n， 恆有 $f\left(3^n\right)=2^n$。■

【性質 4】對任意正整數 t 與正整數 n_i， $i=1,2,\cdots,t$ 恆有

$$f\left(\sum_{i=1}^{t}3^{n_i}\right)=\sum_{i=1}^{t}f\left(3^{n_i}\right)=\sum_{i=1}^{t}2^{n_i}\text{。}$$

【證明】

根據 (2) 與性質 3 可得

$$g\left(\sum_{i=1}^{t}3^{n_i}\right)=\sum_{i=1}^{t}g\left(3^{n_i}\right)=\sum_{i=1}^{t}f\left(3^{n_i}\right)\text{，}\tag{6}$$

另外，因為

$$g\left(\sum_{i=1}^{t}3^{n_i}\right)\le f\left(\sum_{i=1}^{t}3^{n_i}\right)\le\sum_{i=1}^{t}f\left(3^{n_i}\right)\tag{7}$$

結合 (6) (7) 可得 $f\left(\sum_{i=1}^{t} 3^{n_i}\right)=\sum_{i=1}^{t} f\left(3^{n_i}\right)=\sum_{i=1}^{t} 2^{n_i}$ 。■

【性質 5】對任意正整數 n， 恆有 $f(n)=g(n)$ 。

【證明】

因為對任意正整數 n，恆有

$$n=\begin{cases} 2\times 3^{n_1}+R_1 & \text{其中 } 0\le R_1<3^{n_1}, \\ \sum_{i=1}^{t-1} 3^{n_i}+2\times 3^{n_t}+R_t & \text{其中 } n_1>n_2>\cdots>n_t,\ 0\le R_t<3^{n_t}, \\ \sum_{i=1}^{s} 3^{n_i}+R_s, & \text{其中 } n_1>n_2>\cdots>n_s,\ 0\le R_s<3, \end{cases}$$

故當 $n=2\times 3^{n_1}+R_1$ 時，$2\times 3^{n_1}<n<3\times 3^{n_1}$，根據性質 2 與性質 3，可得 $f(n)=g(n)=2^{n_1+1}$ 。

其次，當 $n=\sum_{i=1}^{t-1} 3^{n_i}+2\times 3^{n_t}+R_t$ 時，則

$\sum_{i=1}^{t-1} 3^{n_i}+2\times 3^{n_t}<n<\sum_{i=1}^{t-1} 3^{n_i}+3\times 3^{n_t}$ ，因為

$$g(n)\le f(n)\le f\left(\sum_{i=1}^{t-1} 3^{n_i}+3\times 3^{n_t}\right) \qquad (8)$$

根據性質 3 性質 4 可得

$$f\left(\sum_{i=1}^{t-1} 3^{n_i}+3\times 3^{n_t}\right)=\sum_{i=1}^{t-1} f\left(3^{n_i}\right)+f\left(3^{n_t+1}\right)， \qquad (9)$$

又根據 (2) 可得

$$g(n)=2^{n_t+1}+\sum_{i=1}^{t-1} 2^{n_i} \qquad (10)$$

結合 (8) (9) (10) 可得 $f(n)=2^{n_t+1}+\sum_{i=1}^{t-1} 2^{n_i}$ 。最後當 $n=\sum_{i=1}^{s} 3^{n_i}+R_s$ 時，因為

$$g(n)\le f(n)=f\left(\sum_{i=1}^{s} 3^{n_i}+R_s\right)\le\sum_{i=1}^{s} f\left(3^{n_i}\right)+R_s=\sum_{i=1}^{s} 2^{n_i}+R_s$$

又根據 (2) 可得

$$g(n)=\sum_{i=1}^{s} 2^{n_i}+R_s，$$

故 $f(n)=\sum_{i=1}^{s} 2^{n_i}+R_s$ 。■

【評語】030402

考慮 1, 2, …, n 這個數列中的所有子數列。如果限制子數列的任三項均不會形成等差數列，子數列長的最大可能值的問題。針對這個問題，找出了建構這樣一個子數列的方法，並由此得出了一個不錯的下界。這是由 Erdös 和 Turán 所提的一個古老的問題。這個問題至今仍然懸而未解。作者們利用簡單的想法，給出了一個不錯的下界，想法巧妙而且單純，值得嘉許。可惜的是，他們沒能注意到滿足條件的子數列可能是不規則的，也因此，誤以為所得出的答案就是最好的結果。如果在檢查較小的例子時能更小心些，試著用窮舉法把所有可能的結果都測試一遍，應該可以避免耗費時間在一些基於不正確的假設的論述上，可惜！（PS:相關資料可參考論文 Sharma A. Sequences of Integers Avoiding 3-term Arithmetic Progressions. Elec. J.of Comb., 19 #P27, 2012.和 J. Dybizbánski Sequences containing no 3-term arithmetic progressions. Elec. J. of Comb., 19(2) #P15, 2012.）