中華民國第 56 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030401

三圓共構-探討圓心和直線交點間關係

學校名稱：桃園市立內壢國民中學

作者：	指導老師：
國三 劉子瑩	謝佳純
國三 廖湘禔	楊淑媜

關鍵詞：圓、三角形、軌跡

摘要

利用「三角形兩邊之和大於的三邊」的概念，將任意∆ABC 的三頂點設為圓心，各頂點對邊長為該頂點之半徑畫圓，讓此三圓定兩兩相交於兩點。本研究以作圖與觀察為出發點，利用 GeoGebra 軟體，觀察到此三圓兩兩相交所形成之三條共弦相交於同一點 P，並發現固定 B、C 兩點，移動 A 點時，P 點位置的改變。過程中我們逐步推測與猜想，最後著眼在只討論 A、B、C、P 四點坐標位置的關係，在固定 B、C 兩點的條件下，移動 A 點觀察 P 點軌跡，及移動 P 點觀察 A 點軌跡，從中我們發現了這些移動軌跡會形成二次曲線，並將這些有趣的現象加以證明。

壹、 研究動機

數學課老師上到兩圓位置關係時，做了一些有關兩圓相交於兩點所構成的直線和兩圓圓心的題目。那時我們就在想，如果擴展至三個圓，不知道會有什麼樣的結果？回家後，我們試著用圓規畫畫看，先畫三個等圓，讓此三等圓兩兩交於兩點，發現其三共弦所在之三條直線「似乎」交於同一點。接著我們上網查「三線共點」的資料時，查到了任意三圓兩兩交於兩點，發現其三條共弦所在之三條直線也交於同一點，也查到了和我們想討論的問題相關的「根心定理」，但我們不氣餒，配合 GeoGebra 數學動態繪圖軟體的使用，進一步利用三圓心當作三角形的頂點，並以對邊長當作半徑畫圓，進一步討論三圓圓心、兩圓交點形成的共弦及三條共弦交點的關係。發現改變不同的參數，此三共弦之交點的位置，有了一些有趣的變化，決定了我們本次研究的方向。

貳、 研究目的

本研究把圖形移至直角坐標平面上討論，並將三圓半徑利用「三角形兩邊之和大於第三邊」的概念，先將圓心固定(三圓心不共線)，再利用各頂點對邊長當作此圓半徑的方法，讓三圓保證兩兩相交於兩點，再透過解二元一次聯立方程組的方法，證明由此三圓兩兩相交之共弦所在之三條直線 L_{AB}、L_{BC}、L_{CA} 的確相交於同一點 P。接著從繪圖過程中，發現三共弦之交點 P 點對於△ABC 的位置，因△ABC 的形狀不同而不同，故針對這些變化，探討令三共弦之交點 P 和三圓圓心 A 點、B 點、C 點變成動點時，彼此間的位置與圓半徑變化是否存在著特殊關係。

參、 研究設備及器材

紙、筆、圓規、電腦、GeoGebra 數學動態繪圖軟體、小畫家、MS Office

肆、 研究過程

過程中，我們主要分成幾個步驟，先討論出兩圓相於兩點所構成的直線方程式，再證明無論是在三圓心不共線的三等圓和三不等圓的情況中，三條兩圓交點的連線均交於同一點 P。為了讓三圓保證兩兩相交於兩點，我們使用了「三角形兩邊之和大於第三邊」的概念，將三個圓的圓心視為三角形的三個頂點，各頂點的對邊視為三圓的半徑，畫出的三個圓就會兩兩相交於兩點。接著我們只討論 A、B、C、P 四點坐標位置的關係，固定 B 點和

C 點，讓 A 點和 P 點變成動點，看看其中一點依著特殊方向移動時，另一點的移動軌跡是否會形成特殊的圖形。

為了方便討論及計算，整個研究過程中，我們將圖形放在直角坐標平面上，並依討論條件給定所需的圓心坐標。

一、 兩圓相交於兩點所構成的直線方程式

依照圓的定義，假設圓C_1的方程式為$x^2+y^2+d_1x+e_1y+f_1=0$，圓C_2的方程式為$x^2+y^2+d_2x+e_2y+f_2=0$，並令此二圓相交於相異兩點 S、T。

設圓C_1、C_2相交於兩點 S(x_1,y_1)、T(x_2,y_2)。由於交點 S(x_1,y_1)在圓C_1與C_2上，必須滿足方程式

$$x_1{}^2+y_1{}^2+d_1x_1+e_1y_1+f_1=0-(1)$$

與

$$x_1{}^2+y_1{}^2+d_2x_1+e_2y_1+f_2=0-(2)$$

又 T(x_2,y_2)在圓C_1與C_2上，必須滿足方程式

$$x_2{}^2+y_2{}^2+d_1x_2+e_1y_2+f_1=0-(3)$$

與

$$x_2{}^2+y_2{}^2+d_2x_2+e_2y_2+f_2=0-(4)$$

我們將(1)－(2)得

$$(d_1-d_2)x_1+(e_1-e_2)y_1+(f_1-f_2)=0-(5)$$

再將(3)－(4)得

$$(d_1-d_2)x_2+(e_1-e_2)y_2+(f_1-f_2)=0-(6)$$

由(5)、(6)兩式可知 S(x_1,y_1)、T(x_2,y_2)兩點必在直線$(d_1-d_2)x+(e_1-e_2)y+(f_1-f_2)=0$上，意即直線 ST 的方程式為$(d_1-d_2)x+(e_1-e_2)y+(f_1-f_2)=0$。由以上推導過程，我們得到了【性質一】。

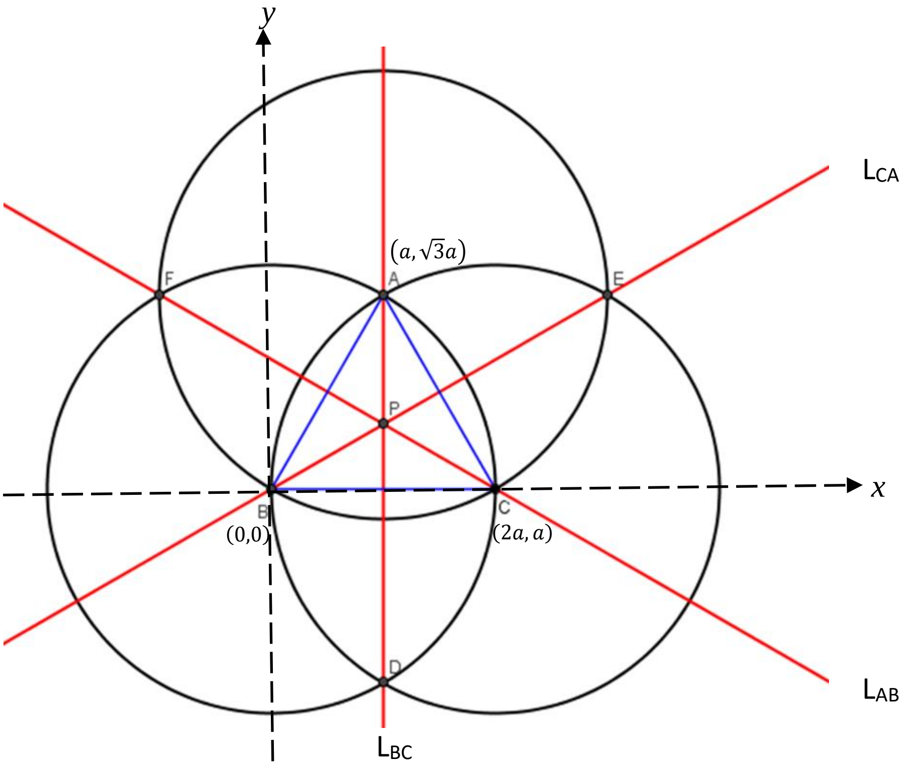
【性質一】

設圓$\boldsymbol{C_1}$：$\boldsymbol{x^2+y^2+d_1x+e_1y+f_1=0}$，圓$\boldsymbol{C_2}$：$\boldsymbol{x^2+y^2+d_2x+e_2y+f_2=0}$，相交於相異兩點 S、T，則直線 ST 的方程式為 $\boldsymbol{(d_1-d_2)x+(e_1-e_2)y+(f_1-f_2)=0}$

二、 證明兩兩相交於兩點的三等圓，其三條任兩圓交點的連線都交於同一點。

在繪圖的過程中，我們發現要構造出三個圓兩兩相交於兩點，其困難點在於如何決定三個圓的半徑及圓心位置。所以我們先討論三個等圓兩兩相交於兩點的情況。因三圓半徑相同，此三圓半徑可以形成一個正三角形。

如圖一，在直角坐標平面上，定圓心 B$(0,0)$、圓心 C$(2a,0)$、圓心 A$(a,\sqrt{3}a)$，其中 $a\neq 0$，則圓 B 的方程式為$x^2+y^2=4a^2$，圓 C 的方程式為$(x-2a)^2+y^2=4a^2$，圓 A 的方程式為$(x-a)^2+\left(y-\sqrt{3}a\right)^2=4a^2$。而由圓 A 和圓 B 兩圓相交之兩點所構成的直線，我們命名為 L_{AB}，由圓 B 和圓 C 兩圓相交之兩點所構成的直線，我們命名為 L_{BC}，由圓 C 和圓 A 兩圓相交之兩點所構成的直線，我們命名為 L_{CA}。



三等圓中，三條兩圓交點的連線會交於同一點

圖一

由性質一，我們可知 L_{AB}、L_{BC}、L_{CA} 的方程式各為:

$$L_{BC}：x^2-(x-2a)^2+y^2-y^2=0$$

$$L_{CA}：(x-2a)^2+y^2-(x-a)^2-\left(y-\sqrt{3}a\right)^2=0$$

$$L_{AB}：x^2-(x-a)^2+y^2-\left(y-\sqrt{3}a\right)^2=0$$

三式化簡後得

$$L_{BC}：x=a—(7)$$

$$L_{CA}：x=\sqrt{3}y—(8)$$

$$L_{AB}：x+\sqrt{3}y-2a=0—(9)$$

將(7)(8)式代入(9)式，等號成立，可知 L_{AB}、L_{BC}、L_{CA} 三條直線交於一點。

由上述可知，兩兩相交於兩點的三等圓，其三條兩圓交點的連線交於同一點。

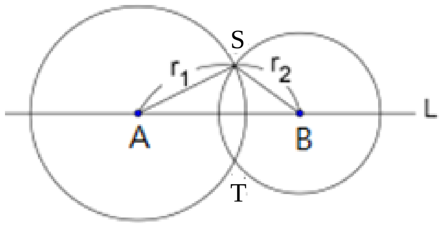
【性質二】

設正三角形 ABC 中，分別以 A、B、C 三頂點為圓心，以此正三角形的邊長為半徑，畫三等圓則此兩兩相交於兩點的三等圓，其三條由任兩圓交點所構成的連線都交於同一點。

三、 固定三不等圓圓心及決定此三不等圓的半徑，讓此三圓兩兩相交於兩點

三個等圓的情況我們已得到 L_{AB}、L_{BC}、L_{CA} 三條直線交於一點的結論，現在想推廣至三個不等圓的情況，看看是否也可得到相同的性質。但困難點在於如何決定三圓半徑，讓三圓可以兩兩相交於兩點，卻又不失其一般性。我們想到了課本中提到兩圓相交於兩點的圖形。

當兩圓相交於兩點時，從下圖中發現 S、A、B 三點可形成一個三角形，且$\overline{SA} = r_1$、 $\overline{SB} = r_2$ $(r_1 > r_2)$，根據三角形的邊長關係，得到$r_1 - r_2 < \overline{AB} < r_1 + r_2$。



兩圓相交於兩點時，兩圓半徑和連心線段長的關係

圖二

看到上面的圖形之後，我們就想利用「三角形兩邊之和大於第三邊」的概念，將三個圓的圓心視為三角形的三個頂點，各頂點的對邊視為三圓的半徑，這樣畫出的三個圓就會兩兩相交於兩點。

我們將任意△ABC 的邊$\overline{AB}$長度指定為 c，邊$\overline{BC}$長度指定為 a，邊$\overline{CA}$長度指定為 b，並將三頂點 A、B、C 指定為三圓圓心，為簡化計算，規定圓心 B(0, 0)、圓心 A(x_1, y_1)、圓心 C$(x_2, 0)$，其中$x_2 \cdot y_1 \neq 0$。

再以 A 為圓心，$a= |x_2|$為半徑畫圓 A；以 B 為圓心，$b= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + {y_1}^2}$為半徑畫圓 B；以 C 為圓心，$c= \sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2}$為半徑畫圓 C。因此，圓 A 之方程式為$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = a^2 = {x_2}^2$,圓 B 之方程式為$x^2 + y^2 = b^2 = (x_1 - x_2)^2 + {y_1}^2$，圓 C 之方程式為$(x - x_2)^2 + y^2 = c^2 = {x_1}^2 + {y_1}^2$。

四、證明 L_{AB}、L_{BC}、L_{CA} 三線共點，並在直角坐標平面上求出 P 點坐標。

由研究過程一的討論結果，我們可快推得 L_{AB}、L_{BC}、L_{CA} 的方程式為

L_{AB}：$(x - x_1)^2 - x^2 + (y - y_1)^2 - y^2 = a^2 - b^2 = {x_2}^2 - (x_1 - x_2)^2 - {y_1}^2$

L_{BC}： $x^2 - (x - x_2)^2 + y^2 - y^2 = b^2 - c^2 = (x_1 - x_2)^2 + {y_1}^2 - {x_1}^2 - {y_1}^2$

L_{CA}：$(x - x_1)^2 - (x - x_2)^2 + (y - y_1)^2 - y^2 = a^2 - c^2 = {x_2}^2 - {x_1}^2 - {y_1}^2$

經過化簡後得

$$L_{AB}：x_1x+y_1y={x_1}^2+{y_1}^2-x_1x_2 \quad -(10)$$

$$L_{BC}：x=x_2-x_1 \quad -(11)$$

$$L_{CA}：(x_1-x_2)x+y_1y={x_1}^2-{x_2}^2+{y_1}^2 \quad -(12)$$

將(11)代入(10)，

$$x_1(x_2-x_1)+y_1y={x_1}^2+{y_1}^2-x_1x_2$$
$$x_1x_2-{x_1}^2+y_1y={x_1}^2+{y_1}^2-x_1x_2$$
$$y_1y=2{x_1}^2+{y_1}^2-2x_1x_2$$
$$\mathrm{y}=y_1+\frac{2x_1(x_1-x_2)}{y_1} \quad -(13)$$

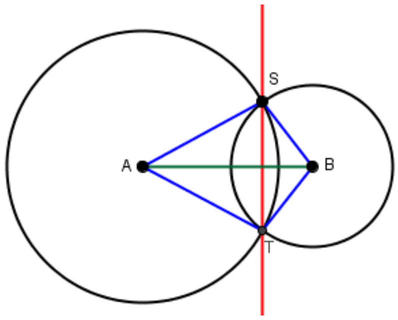
因此，L_{AB}、L_{BC}之交點為(11)、(13)所決定之點 P。
將(11)、(13)代入(12)，

$$(x_1-x_2)(x_2-x_1)+y_1\left(y_1+\frac{2x_1(x_1-x_2)}{y_1}\right)$$
$$=-{x_1}^2-{x_2}^2+2x_1x_2+{y_1}^2+2{x_1}^2-2x_1x_2$$
$$={x_1}^2-{x_2}^2+{y_2}^2$$

得知(11)、(13)所決定之點 P 亦滿足(12)。
得證 L_{AB}、L_{BC}之交點也在 L_{CA}上，故 L_{AB}、L_{BC}、L_{CA}三線交於一點，此點坐標為 $\mathrm{P}\left(x_2-x_1,\ y_1+\frac{2x_1(x_1-x_2)}{y_1}\right)$。

五、探討圖形中的圓內接四邊形

在國中第五冊數學課本第二章，討論兩圓兩交點連線和兩圓連心線段關係時提到，連接$\overline{SA}$、$\overline{SB}$ 、$\overline{TA}$、$\overline{TB}$，因為$\overline{SA}=\overline{TA}$，$\overline{SB}=\overline{TB}$，四邊形 SATB 即為箏形，如圖四。由於箏形之兩對角線互相垂直，故過任兩圓相交之兩點的直線會與兩圓之連心線段垂直，因此可推得本研究中的 $L_{AB}\perp\overline{AB}$、$L_{BC}\perp\overline{BC}$、$L_{CA}\perp\overline{CA}$。

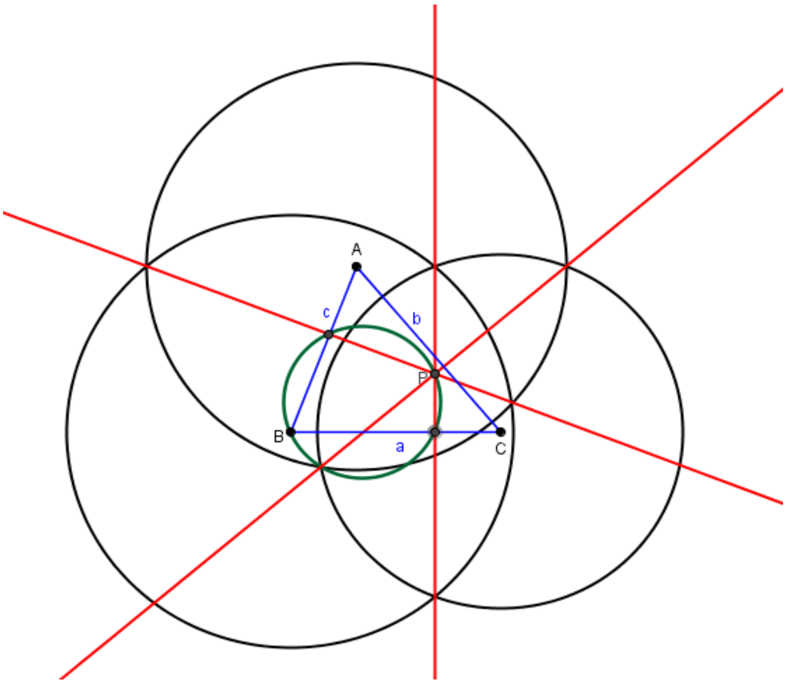


圖四

國中課本提到「若一個四邊形為圓內接四邊形，則此四邊形的對角互補」，我們也查到了它的逆定理「若一四邊形的對角互補，則此四邊形必為圓內接四邊形」，接下來我們就利用此逆定理尋找圖形中的圓內接四邊形。

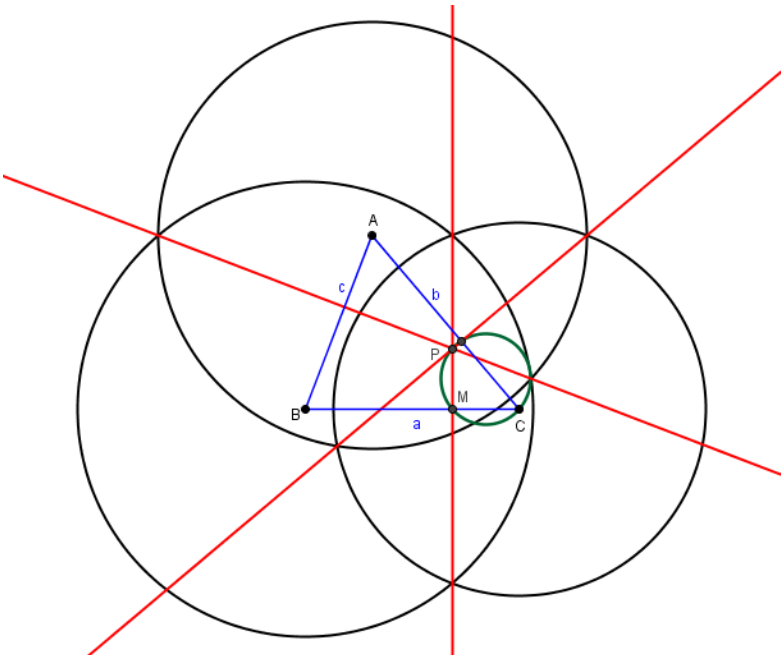
(一)在 P 點位於△ABC 內部的情況下，尋找圓內接四邊形。

在三圓兩兩相交於兩點，且 P 點在△ABC 內部的情況下，因 $L_{AB} \perp \overline{AB}$、$L_{BC} \perp \overline{BC}$、$L_{CA} \perp \overline{CA}$且「對角互補的四邊形為圓內接四邊形」，所以我們可推得直線 L_{AB}、L_{BC}、L_{CA} 中，其中任兩條直線與△ABC 兩邊之垂足會和此兩邊之共用頂點(A 點、B 點或 C 點)及 P 點共圓，如：圖五、圖六、圖七。



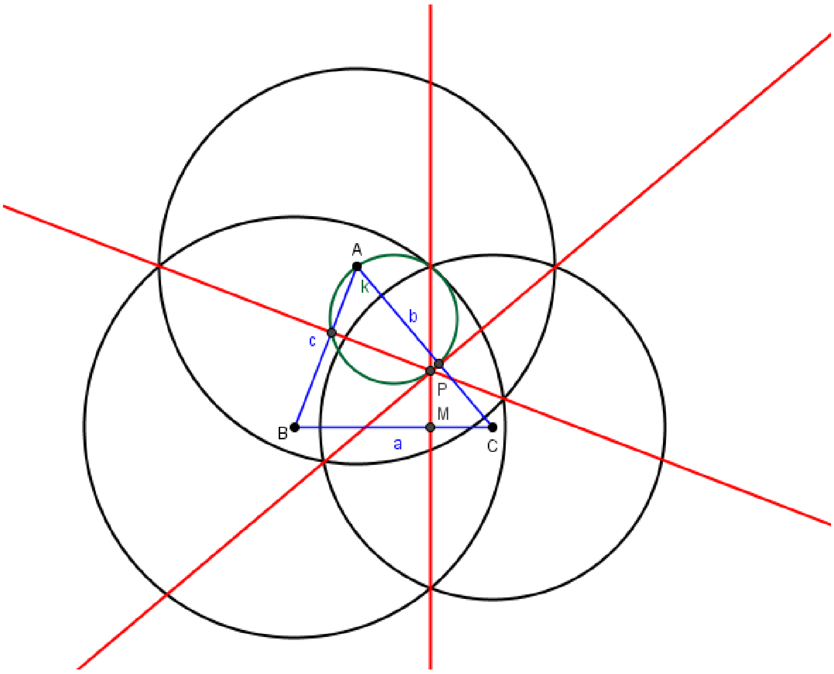
L_{AB} 和$\overline{AB}$之垂足、L_{BC} 和$\overline{BC}$之垂足、頂點 B 和 P 點共圓

圖五



L_{CA} 和$\overline{CA}$之垂足、L_{BC} 和$\overline{BC}$之垂足、頂點 C 和 P 點共圓

圖六



L_{AB}和$\overline{AB}$之垂足、L_{CA}和$\overline{CA}$之垂足、頂點 A 和 P 點共圓

圖七

【性質三】

直線 L_{AB}、L_{BC}、L_{CA} 會和△ABC 三邊互相垂直，且其中任兩條直線與△ABC 兩邊之垂足會和此兩邊之共用頂點及 P 點共圓。

六、探討三圓圓心 A、B、C 形成不同三角形時，P 點位置的改變

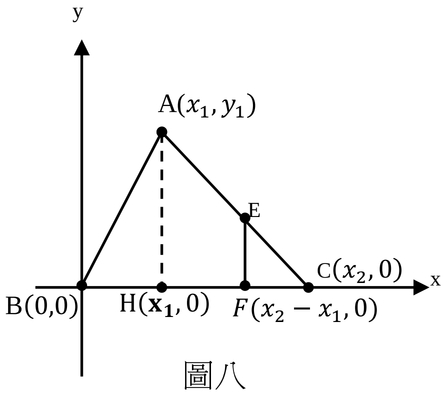
在繪圖的過程中，我們觀察到移動 A 點會讓△ABC 的形狀改變。因本研究在訂定三圓半徑的方法為該圓的半徑長是以另兩圓之圓心距為半徑，例如：圓 A 半徑為圓心 B 和圓心 C 的距離；圓 B 半徑為圓心 C 和圓心 A 的距離；圓 C 半徑為圓心 A 和圓心 B 的距離。因此，移動 A 點時，$\overline{AB}$及$\overline{AC}$長度會改變，亦即圓 B 和圓 C 之半徑會改變。

同時，我們也發現隨著三角形的不同，P 點位置也會改變。當 P 點在△ABC 的內部時，△ABC 為銳角三角形；P 點在△ABC 的外部時，△ABC 為鈍角三角形。然而，移動 P 點至三圓的交點上時，△ABC「似乎」為直角三角形，而 A、B、C、P 四點「似乎」共圓且 A、B、C、P 四點「似乎」形成一個矩形。

(一) 探討 A 點位置和 P 點在三角形內外部的關係

我們現在討論 A(x_1, y_1)、B$(0,0)$、C$(x_2, 0)$及 P$\left(x_2 - x_1,\ y_1 + \frac{2x_1(x_1-x_2)}{y_1}\right)$四點間的關係。

根據三圓圓心坐標的假設，L_{AB} 方程式亦可寫為$y=\left(\frac{y_1}{x_1}\right)x$、$L_{BC}$ 方程式亦可寫為$y=0$、L_{CA} 方程式亦可寫為$y=\frac{y_1}{x_1-x_2}(x-x_2)$。令 $E\left(x_2-x_1,\frac{y_1x_1}{x_2-x_1}\right)$為在 L_{CA} 上一點，$F(x_2-x_1,0)$為介於 B、C 兩點間一點，如圖八。



圖八

從圖中，我們發現當 P 的 y 坐標，在 0 與 $\frac{y_1x_1}{x_2-x_1}$之間時，P 在△ABC 內。

即當$0<\ y_1+\frac{2x_1(x_1-x_2)}{y_1}<\frac{y_1x_1}{x_2-x_1}$時，P 在△ABC 內。

(1) 解$0<\ y_1+\frac{2x_1(x_1-x_2)}{y_1}$，求出$y_1$的範圍。

設$y_1>0$，${y_1}^2+2x_1(x_1-x_2)>0$，$\therefore {y_1}^2>2x_1(x_2-x_1)$

若$x_2>x_1$，則$y_1>\sqrt{2x_1(x_2-x_1)}$ —(14)

(2) 解$y_1+\frac{2x_1(x_1-x_2)}{y_1}<\frac{y_1x_1}{x_2-x_1}$

設$y_1>0$，得${y_1}^2+2x_1(x_1-x_2)<\frac{{y_1}^2x_1}{x_2-x_1}$

$${y_1}^2-\frac{{y_1}^2x_1}{x_2-x_1}<2x_1(x_1-x_2)$$

$$\left(\frac{x_2-2x_1}{x_2-x_1}\right){y_1}^2<2x_1(x_2-x_1) \text{—(15)}$$

若$x_2-2x_1<0$，$x_2-x_1>0$，即$x_1<x_2<2x_1$，則(15)式恆成立。

若$x_2-2x_1>0$，$x_2-x_1>0$，則${y_1}^2<\frac{2x_1(x_2-x_1)^2}{x_2-2x_1}=[2x_1(x_2-x_1)]\left(\frac{x_2-x_1}{x_2-2x_1}\right)$

$\therefore y_1<\sqrt{\frac{2x_1(x_2-x_1)^2}{x_2-2x_1}}=\sqrt{2x_1(x_2-x_1)}\left(\sqrt{\frac{x_2-x_1}{x_2-2x_1}}\right)$—(16)

由(14)式和(16)式得知，當$x_2>x_1>0$且$y_1>0$時，

若$\sqrt{2x_1(x_2-x_1)}<y_1<\sqrt{2x_1(x_2-x_1)}\left(\sqrt{\frac{x_2-x_1}{x_2-2x_1}}\right)$時，P 點會在△ABC 內部。

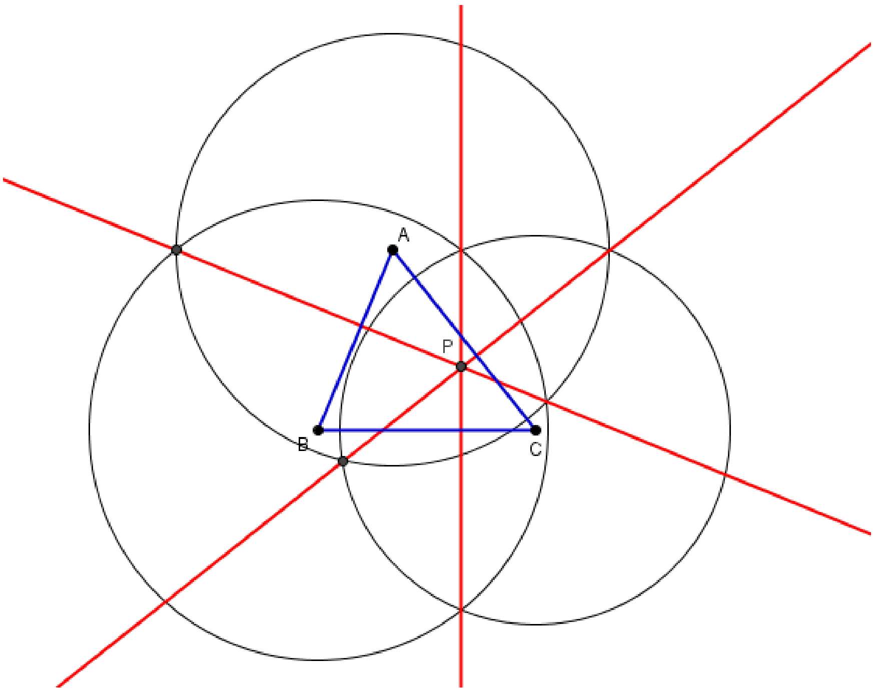
因此，我們知道若固定x_1，x_2且滿足$x_2 > x_1$，則y_1滿足上述不等式時，P 點在△ABC 內部，否則 P 點在△ABC 外部。圖九及圖十分別繪出 P 點在△ABC 內部及△ABC 外部情形。

此外，當△ABC 為直角三角形，∠A 為直角時，假設$\overline{AH}$為 A 點到$\overline{BC}$的距離，因$\overline{AH}^2 = \overline{BH} \times \overline{CH}$，得$\overline{AH}^2 = x_1(x_2 - x_1)$，$\overline{AH} = \sqrt{x_1(x_2 - x_1)}$。

故當x_1、x_2不變時，A 點 y 坐標$y_1 > \overline{AH}$時，△ABC 為銳角三角形。因此，當$y_1 > \sqrt{2x_1(x_2 - x_1)} > \sqrt{x_1(x_2 - x_1)}$，即 P 在△ABC 內部時，△ABC 為銳角三角形。

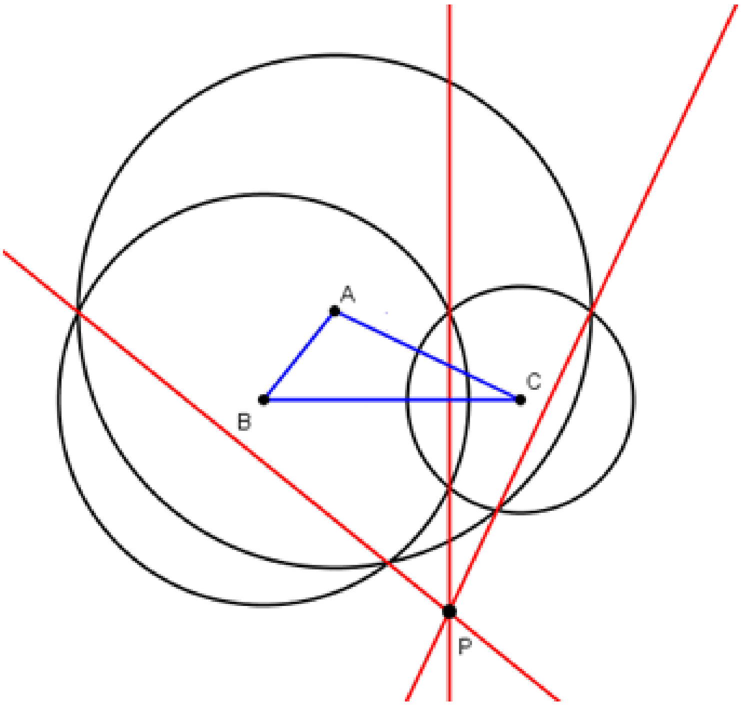
而當$y_1 < \overline{AH}$時，△ABC 為鈍角三角形，因此，當$y_1 < \sqrt{x_1(x_2 - x_1)} < \sqrt{2x_1(x_2 - x_1)}$時，P 點在△ABC 外部。

但須注意的是△ABC 為銳角三角形，且$\sqrt{x_1(x_2 - x_1)} < y_1 < \sqrt{2x_1(x_2 - x_1)}$時，P 點仍在△ABC 外部，如圖十一。



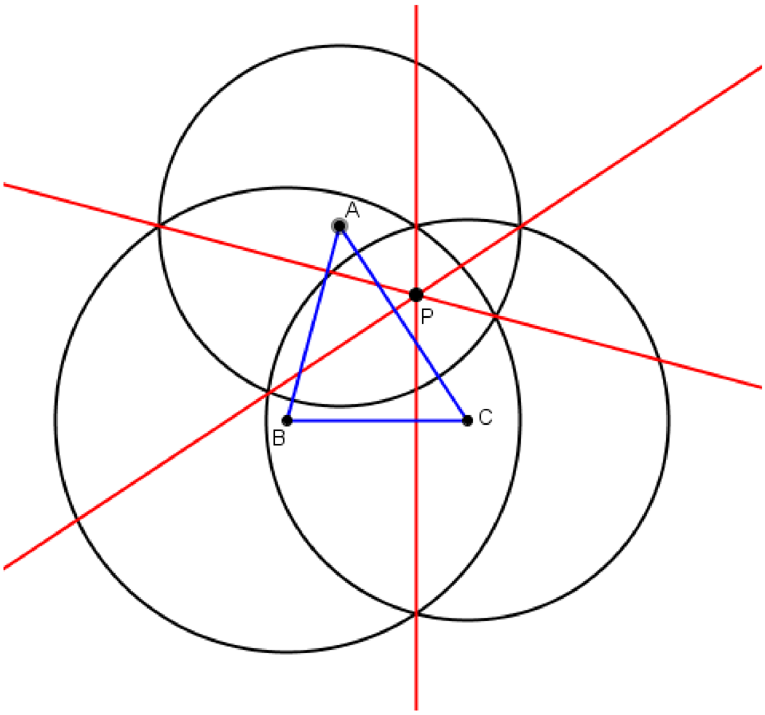
P 點在▵ABC 內部時，△ABC 為銳角三角形

圖九



P 點在▵ABC 外部時，△ABC 為鈍角三角形

圖十



△ABC 為銳角三角形，但 P 點在△ABC 外部

圖十一

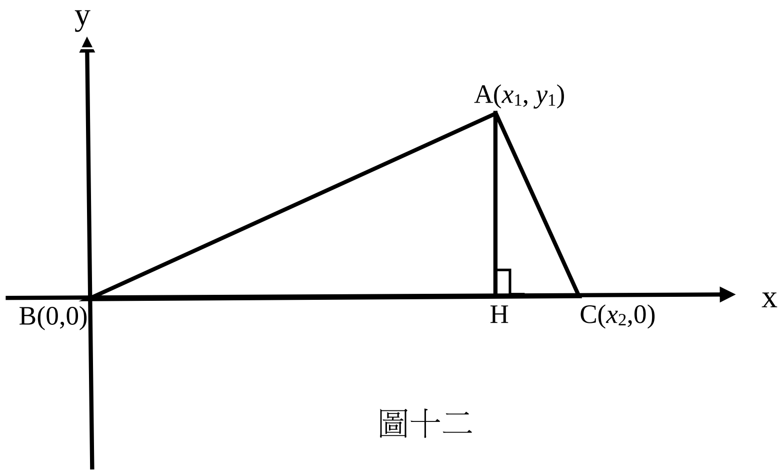
(二)　探討若 A、B、C、P 四點共圓時，P 點的位置

因為 A、B、C、P 四點共圓，設此圓圓心為 U(x, y)，故$\overline{UA}=\overline{UB}=\overline{UC}=\overline{UP}$。我們可得

$$x^2+y^2=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2 \text{ —(17)}$$
$$x^2+y^2=(x-x_2)^2+y^2 \text{ —(18)}$$
$$x^2+y^2=[x-(x_2-x_1)]^2+\left[y-\left(y_1+\frac{2x_1(x_1-x_2)}{y_1}\right)\right]^2 \text{ —(19)}$$

由(17)得$y=\frac{1}{2}\left(y_1+\frac{x_1(x_1-x_2)}{y_1}\right)$，由(18)得$x=\frac{x_2}{2}$。將$x=\frac{x_2}{2}$，$y=\frac{1}{2}\left(y_1+\frac{x_1(x_1-x_2)}{y_1}\right)$代入(19)，經化簡後得到${y_1}^2=-x_1(x_1-x_2)=x_1(x_2-x_1)$—(20)。

回到直角坐標系來看，如圖十二，我們發現 $\overline{AH}=|y_1|$，$\overline{CH}=|x_2-x_1|$，$\overline{BH}=|x_1|$。



圖十二

從(20)可推出$\overline{BH}:\overline{AH}=\overline{AH}:\overline{CH}$，且∠AHB = ∠CHA = 90°，得△AHB~△CHA。故∠BAC = ∠BAH + ∠CAH = 90°，得證△ABC 為直角三角形。

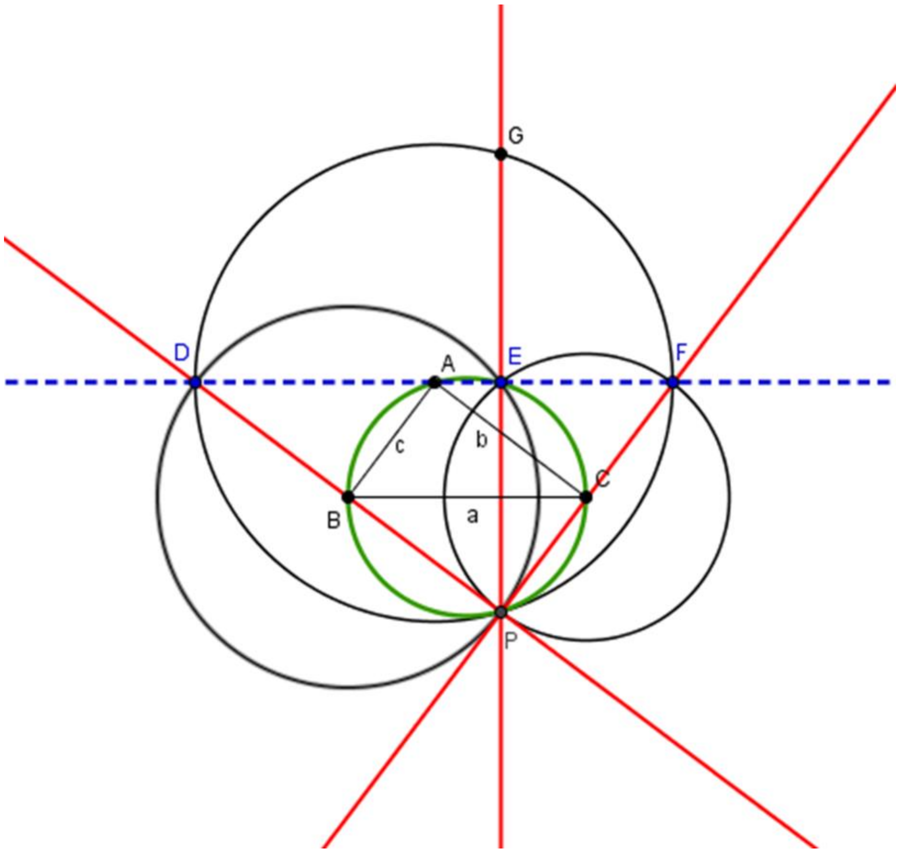
在推導出△ABC 為直角三角形後，因 A、B、C、P 四點共圓，故$\overline{BC}$為圓 U 之直徑，圓心 U 之坐標為$\left(\frac{x_2}{2}, 0\right)$。

接下來，我們想知道$\overline{AP}$中點$\left(\frac{x_2}{2}, y_1+\frac{x_1(x_1-x_2)}{y_1}\right)$是否也是圓心 U。將(20)代入可得

$$y_1+\frac{x_1(x_1-x_2)}{y_1}=y_1+\frac{-{y_1}^2}{y_1}=y_1-y_1=0$$

得到$\overline{AP}$中點亦為圓心 U，故$\overline{AP}$也是圓 O 之直徑。因為$\overline{AP}$和$\overline{BC}$均為直徑，所以四邊形 ACPB 為長方形。

最後要找出 P 點的位置，將${y_1}^2=-x_1(x_1-x_2)$代入 P$\left(x_2-x_1,\ y_1+\frac{2x_1(x_1-x_2)}{y_1}\right)$，可化簡 P 坐標為$(x_2-x_1, -y_1)$。再將 P$(x_2-x_1, -y_1)$代入圓 B 之方程式$x^2+y^2=b^2$，得到$(x_2-x_1)^2+(-y_1)^2=(x_1-x_2)^2+{y_1}^2$，因此可知 P 點在圓 B 上。同理可證得 P 點亦在圓 A 及圓 C 上，如圖十三。



圖十三

此外，我們還證明出 D、E、F 三點恰好在同一直線上。

【證明二】

因點 P、D、G、F 共圓，$\angle GPF + \angle GPD = 90^\circ$，又$\angle GPF = \frac{1}{2}\widehat{GF}$，$\angle DPG = \frac{1}{2}\widehat{DG}$。

$\angle DEF = \widehat{DGF} = \widehat{GF} + \widehat{GD} = 2(\angle GPF + \angle DPG) = 2 \times 90^\circ = 180^\circ$

故 D、E、F 三點共線。

【性質四】

三圓圓心 A、B、C 和三共弦之直線交點 P 四點共圓時，△ABC 為直角三角形，且 P 點恰好在三圓的共同交點上，而 A、B、C、P 四點形成一矩形。圖形中，D、E、F 三點共線。

七、討論利用 A 點移動，將三角形形狀改變時，對 P 點的影響

從研究過程六中，我們發現在研究過程三的假設條件下，P 點位置會隨著 A 點位置的不同而改變。我們先在繪圖軟體上操作，把 B 點和 C 點固定，我們觀察到讓 A 點垂直移動，此時圓 B 及圓 C 半徑亦會改變，P 點只在圓 B 和圓 C 的共弦上上下移動；若將 A 點往水平方向移動，此時圓 B 及圓 C 半徑亦會改變，發現 P 點移動軌跡「似乎」是一拋物線。但若三圓半徑是固定的數值，則無論 A 點是垂直移動或是水平移動，P 點僅會在圓 B 和圓 C 的共弦上移動。因此以下我們只針對研究過程三的假設條件下作討論。

(一) 當 A 點垂直移動，發現 P 點只在圓 B 和圓 C 的共弦上上下移動

因 A 點為垂直移動，故設動點 A 坐標為(x_1,s)，P 坐標為$(x,y)=\left(x_2-x_1,s+\frac{2x_1(x_1-x_2)}{s}\right)$。

$\because y=s+\frac{2x_1(x_1-x_2)}{s}$，當 s 增加(減少)時，$y$ 亦隨著 s 增加(減少)，但不是成常數的比例增加(減少)。因 P 的 x 坐標，x_2-x_1，不變，故當 A 點垂直移動時，P 點只在圓 B 和圓 C 的共弦上上下移動。

(二) 當 A 點水平移動，發現 P 點移動軌跡恰為一拋物線。

因 A 點為水平移動，故設動點 A 坐標為(t, y_1)，P 坐標為$(x,y)=\left(x_2-t,y_1+\frac{2t(t-x_2)}{y_1}\right)$

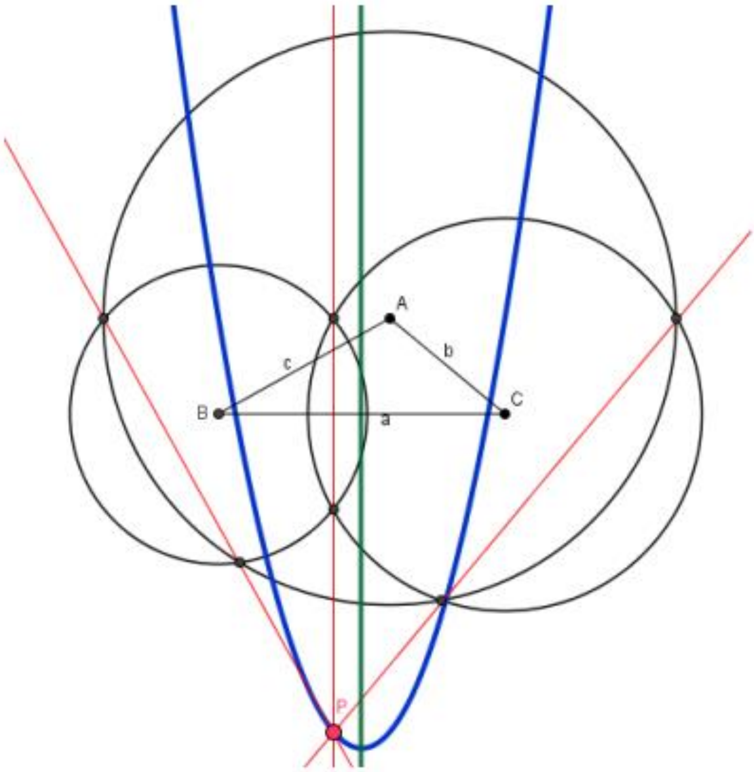
$x=x_2-t$，則 $t=x_2-x$ 代入

$$
\begin{aligned}
y&=y_1+\frac{2t(t-x_2)}{y_1}\\
&=y_1+\frac{2(x_2-x)(-x)}{y_1}\\
&=y_1+\frac{-2x_2}{y_1}x+\frac{2x^2}{y_1}\\
&=\frac{2}{y_1}\left(x^2-x_2x+\frac{{x_2}^2}{4}\right)+y_1-\frac{{x_2}^2}{2y_1}\\
&=\frac{2}{y_1}\left(x-\frac{x_2}{2}\right)^2+\left(y_1-\frac{{x_2}^2}{2y_1}\right)\quad，y_1\neq 0
\end{aligned}
$$

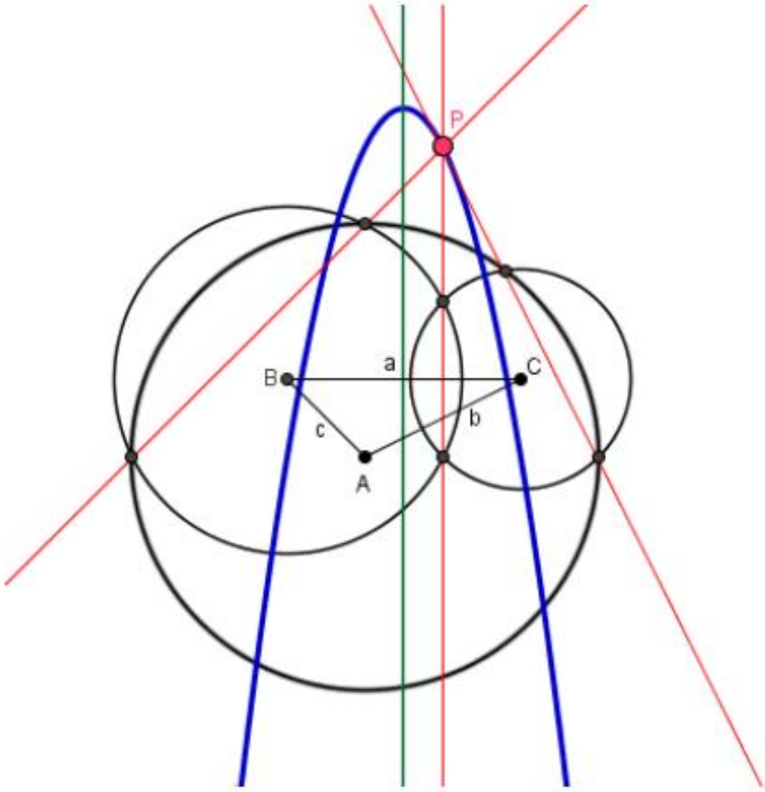
得證 P 點之移動軌跡為拋物線，如圖十四、圖十五，且此拋物線之頂點為$\left(\frac{x_2}{2},y_1-\frac{{x_2}^2}{2y_1}\right)$，$y_1\neq 0$，對稱軸方程式為$y=\frac{x_2}{2}$ 。

【性質五】

當 A 點垂直移動時，P 點只在圓 B 和圓 C 的共弦上上下移動；當 A 點水平移動時，P 點的移動軌跡恰為一拋物線。



當$y_1 > 0$時，拋物線開口向上
圖十四



當$y_1 < 0$時，拋物線開口向下
圖十五

八、探究固定 B 點和 C 點，P 點當成動點移動時，對 A 點的影響

(一) 討論 P 點水平移動時，A 點移動軌跡

因為發現當 A 點水平移動時，因圓 B 及圓 C 的半徑改變，P 點移動的軌跡可以形成一特殊的圖形－拋物線，進而我們想知道，若拋開三角形，只討論 A(x_1, y_1)、B$(0,0)$、C$(x_2, 0)$及 P$\left(x_2 - x_1,\ y_1 + \frac{2x_1(x_1-x_2)}{y_1}\right)$四點的關係。若換成 P 點水平移動時，A 點會不會也形成一特殊的圖形？以下是我們的證明：

當 P 點水平移動時，y 坐標固定。得

$$y_1 + \frac{2x_1(x_1 - x_2)}{y_1} = k$$

$${y_1}^2 + 2x_1(x_1 - x_2) = y_1 k$$

$${y_1}^2 - y_1 k = -2x_1(x_1 - x_2)$$

$${y_1}^2 - y_1 k + \frac{k^2}{4} = -2x_1(x_1 - x_2) + \frac{k^2}{4}$$

$$\left(y_1 - \frac{k}{2}\right)^2 = -2x_1(x_1 - x_2) + \frac{k^2}{4} \geq 0$$

由此可知 A 點移動之軌跡為

$$\left(y - \frac{k}{2}\right)^2 = -2x(x - x_2) + \frac{k^2}{4}$$

$$= -2\left(x^2 - x \cdot x_2 + \frac{{x_2}^2}{4}\right) + \boldsymbol{\frac{k^2}{4}} + \frac{2{x_2}^2}{4}$$

$$= -2\left(x - \frac{x_2}{2}\right)^2 + \frac{k^2 + 2{x_2}^2}{4}$$

經移項後得，

$$\left(y - \frac{k}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{x_2}{2}\right)^2 = \frac{k^2 + 2{x_2}^2}{4}$$

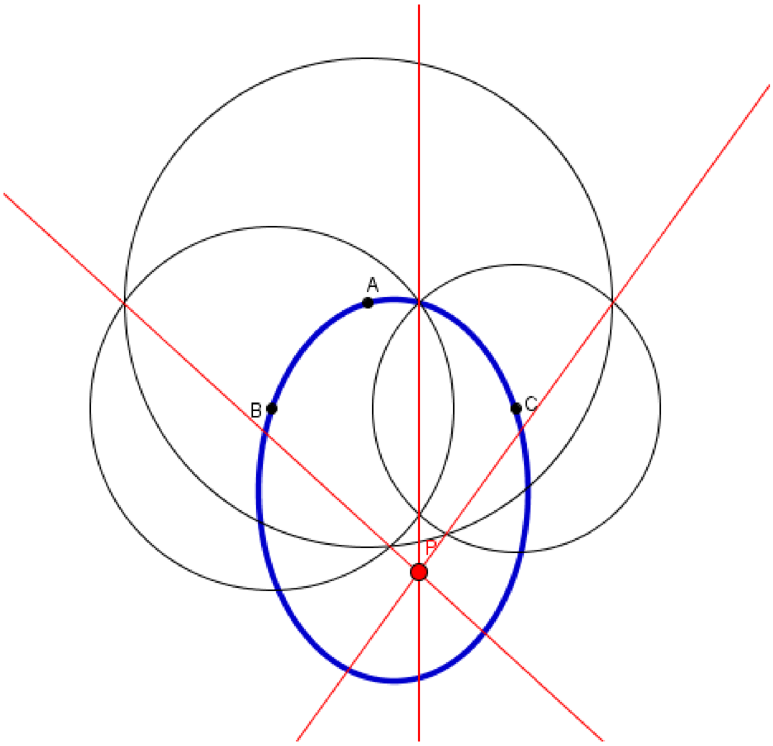
等號兩邊同除以$\frac{k^2 + {x_2}^2}{4}$，得$\frac{\left(x - \frac{x_2}{2}\right)^2}{\frac{k^2 + 2{x_2}^2}{8}} + \frac{\left(y - \frac{k}{2}\right)^2}{\frac{k^2 + 2{x_2}^2}{4}} = 1$

此為橢圓之標準式。

而此橢圓的中心為$\left(\frac{x_2}{2}, \frac{k}{2}\right)$，長軸在$\overline{BC}$中垂線上，長軸長為$\sqrt{k^2 + 2x^2}$，短軸長為$\frac{\sqrt{2k^2 + 4x^2}}{2}$。

【性質六】

當 P 點水平移動時，A 點移動軌跡形成一橢圓，如圖十六。



當 P 點水平移動時，A 點移動軌跡形成一橢圓

圖十六

(二) 討論 P 點水平移動的限制

在討論 P 點水平移動時，我們發現 A 點移動軌跡為

$\left(y-\frac{k}{2}\right)^2=-2\left(x_1-\frac{x_2}{2}\right)^2+\frac{k^2+2{x_2}^2}{4}\geq 0$，即 $\frac{x_2}{2}-\sqrt{\frac{2{x_2}^2+k^2}{8}}\leq x_1\leq\frac{x_2}{2}+\sqrt{\frac{2{x_2}^2+k^2}{8}}$。

若x_1不在此範圍內，則 A 點不存在。若 A 點範圍被限制，則 P 點水平移動的範圍也會被限制。因此，我們想藉由這樣的推論去找出 P 點移動的範圍是否也可形成一個特殊的圖形。

由七之(一)得 P 坐標(x_2-x_1,k)，因為

$$\frac{x_2}{2}-\sqrt{\frac{2{x_2}^2+k^2}{8}}\leq x_1\leq\frac{x_2}{2}+\sqrt{\frac{2{x_2}^2+k^2}{8}}$$

所以

$$\frac{x_2}{2}-\sqrt{\frac{2{x_2}^2+k^2}{8}}\leq x_2-x_1\leq\frac{x_2}{2}+\sqrt{\frac{2{x_2}^2+k^2}{8}}$$

$$\frac{x_2}{2}-\sqrt{\frac{2{x_2}^2+y^2}{8}}\leq x\leq\frac{x_2}{2}+\sqrt{\frac{2{x_2}^2+y^2}{8}}$$

$$\left(x-\frac{x_2}{2}\right)^2\leq\frac{2{x_2}^2+y^2}{8}=\frac{{x_2}^2}{4}+\frac{y^2}{8}$$

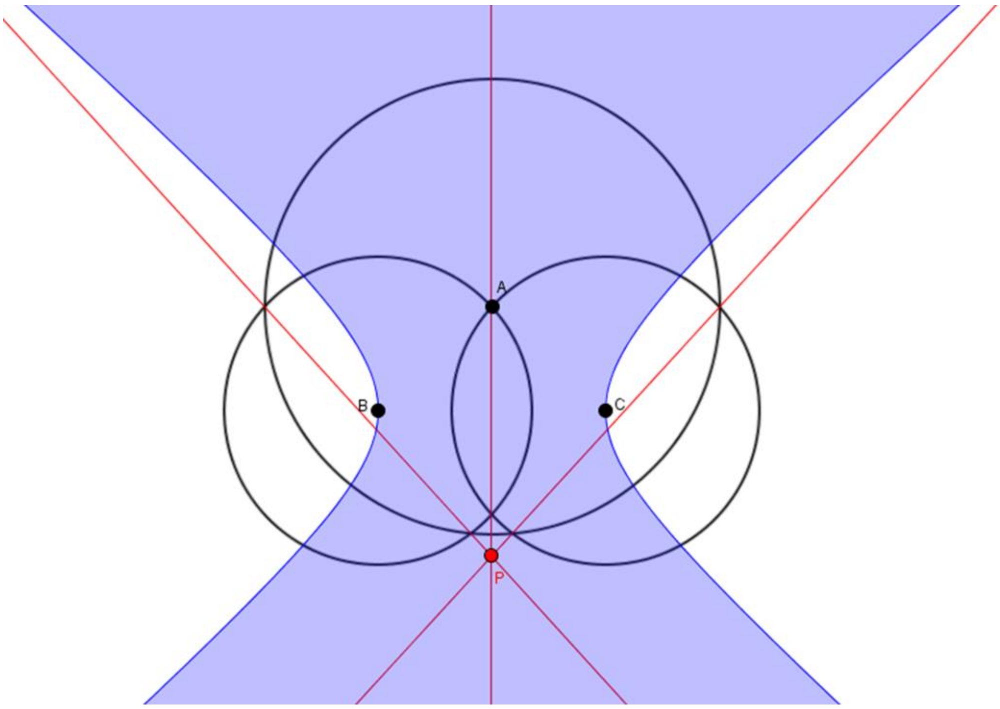
$$\left(x-\frac{x_2}{2}\right)^2-\frac{y^2}{8}\le\frac{x_2{}^2}{4}$$

$$\frac{\left(x-\frac{x_2}{2}\right)^2}{\frac{x_2{}^2}{4}}-\frac{y^2}{2x_2{}^2}\le 1$$

若等號成立時，P 點移動的邊界會形成一中心為$\left(\frac{x_2}{2},0\right)$的雙曲線，如圖十七。

【性質七】

當 P 點水平移動時，P 點移動範圍會被限制，其移動範圍之邊界是中心坐標為$\left(\frac{x_2}{2},0\right)$的雙曲線。



當 P 點水平移動時，其移動之邊界為雙曲線

圖十七

伍、 結論與未來展望

一、 研究結論

經由上述研究過程我們發現：

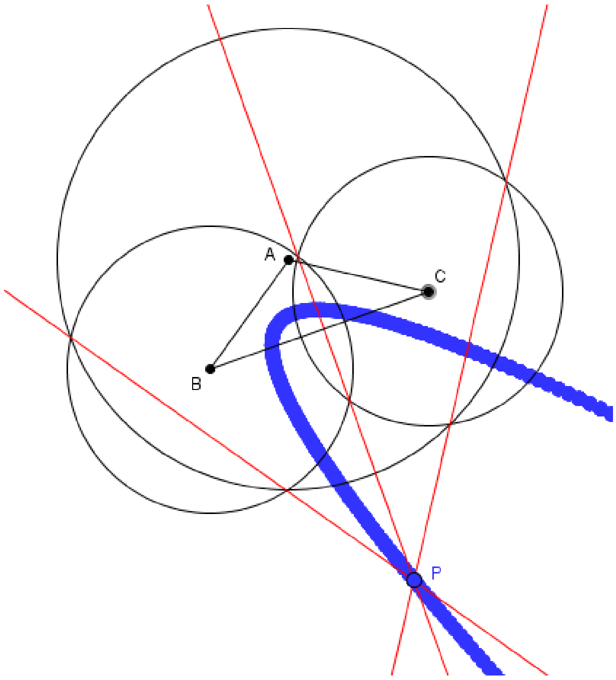
1. 任意兩兩相交的三圓，其交點所形成的三條共弦會相交於一點 P。
2. 因兩圓相交於兩點所構成的直線和兩圓連心線段垂直，故我們也在三圓兩兩相交於兩點的情況中，找到了 P 點分別和三圓心共圓的圓內接四邊形
3. 在研究過程三的條件假設下，三圓圓心 A、B、C 形成不同三角形時，我們找到了 A 點位置和 P 點在三角形內、外部的關係。

4. 在研究過程三的條件假設下，三圓圓心 A、B、C 和三直線交點 P 四點共圓時，$\triangle$ABC 為直角三角形，且 P 點恰好在三圓的共同交點上，而 A、B、C、P 四點形成一矩形。
5. 接著我們只單純討論 $A(x_1, y_1)$、$B(0,0)$、$C(x_2, 0)$及 $P\left(x_2 - x_1,\ y_1 + \frac{2x_1(x_1 - x_2)}{y_1}\right)$ 四點的關係。固定 B 點和 C 點，移動 A 點，發現當 A 點垂直移動時，P 點只在圓 B 和圓 C 的共弦上上下移動；當 A 點水平移動時，P 點的移動軌跡恰為一拋物線。
6. 接著換成 P 點當作動點時，發現 P 點水平移動，A 點移動的軌跡會形成一橢圓。
7. 我們發現當 P 點水平移動時，P 點移動範圍會被限制，並討論出 P 點移動之邊界是中心為坐標$(\frac{x_2}{2}, 0)$的雙曲線。

二、 應用與展望

(一)數學上

1. 本研究探討的是 A 點移動與 P 點之間的關係或是 P 點移動和 A 點之間的關係，我們也想過若是換成是 C 點移動，那 P 點移動的軌跡又是如何。經由討論後發現，因 B 點和 C 點是固定在 x 軸上，A 點移動的方式是平行$\overline{BC}$邊或是垂直$\overline{BC}$邊移動。因此我們猜想若將坐標軸旋轉，變成 A 點和 B 點固定在 x 軸上，將 C 點平行$\overline{AB}$邊或是垂直$\overline{AB}$移動邊，應該也可以有同【性質七】、【性質八】、【性質九】的結果。圖二十是我們用 GGB 繪圖軟體畫出 C 點平行$\overline{AB}$邊移動的結果，發現 P 點移動軌跡也是一條拋物線。



C 點平行$\overline{AB}$邊移動，P 點軌跡亦是一條拋物線

圖十八

2. 因本研究都是討論平面上的情況，對於擴展到空間上，我們也很有興趣，將圓擴展至球，可以討論三球兩兩相交於一平面，各平面又兩兩相交於一線，未來也可以探討這三直線是否也會相交於同一點，而這交點和三球球心是不是也有一些特殊有趣的性質。

(二)生活上

我們利用了在課本上所學到的圓的性質作為本次研究的主題，在研究過程中，對於圓的部分性質有了更深一層的認識，在尋找資料的過程中也發現，本研究主題中三圓圓心 A 點、B 點、C 點及三直線交點 P 之間的關係，和近年來頗受關注的行動定位技術應用在智慧型機器人輪椅 RFID 室內定位規劃中的線性位置線法相關。因此，我們也「猜測」本研究結果或許可應用在改善室內掃地機器人在無線網路環境下進行定位服務的定位技術，因為我們找到了固定 B、C 兩點，只移動 A 點時，P 點移動的軌跡。

除此之外，我們也學習到如何將電腦繪圖中發現的結果，利用所學知識做更嚴謹的證明。更從這次研究過程中培養了尋找資料的能力、分工合作的方法與求知驗證的精神，相信這次的研究經驗能為我們未來的求學之路帶來深遠正面的影響。

陸、 參考資料

一、洪有情(2015)。國中數學教科書第五冊(2 版)。**第二章圓**。新北市：康軒文教事業。

二、國立臺灣師範大學科學教育中心(1997)。**高級中學基礎數學第三冊**。台北市：國立編譯館。

三、楊維哲(2008)。**楊維哲教授的數學講堂－基礎平面幾何**。台北市：五南。

四、楊維哲(2008)。**楊維哲教授的數學講堂－基礎坐標幾何**。台北市：五南。

五、百度百科。http://baike.baidu.com/view/4458772.htm
線上檢索日期：2016 年 1 月 30 日

六、黃英哲(2009)。**智慧型機器人輪椅 RFID 室內定位規劃**。元智大學老人福祉科技研究中心。http://web.nchu.edu.tw/pweb/users/wtsay/lesson/11680.pdf。

七、GeoGobra 使用說明。https://app.geogebra.org/help/docuzh_TW.pdf
線上檢索日期：2015 年 10 月 12 日

【評語】030401

探討以三角形的三頂點為圓心，三對邊的長度為半徑畫圓，所得出的三圓的交弦的共點性質。並討論此點在其中一個頂點變動時的軌跡。針對所設定的變動規則給出了完整的解答。能藉由觀察圖形的變化發現規則，並能針對觀察到的規律給出完整的論證，十分難得。比較可惜的是，內容稍嫌單薄了些。藉由座標化計算方式的輔助，應該可以分析更一般化的問題：對於怎樣的圓半徑的設定（不侷限於以對邊長為半徑），我們可以保持三個交弦相交的性質？如果能給出一個更一般化的條件，作品看起來會更完美。