

中華民國第 55 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組 數學科

最佳團隊合作獎

080418

翻轉世界-12 解遊戲

學校名稱：新北市三峽區三峽國民小學

作者： 小六 黃羚芝 小六 吳宛芸 小六 張子亭	指導老師： 陳素敏 楊曜源
---	-----------------------------

關鍵詞：平面斜魔方、斜中空卡

摘要

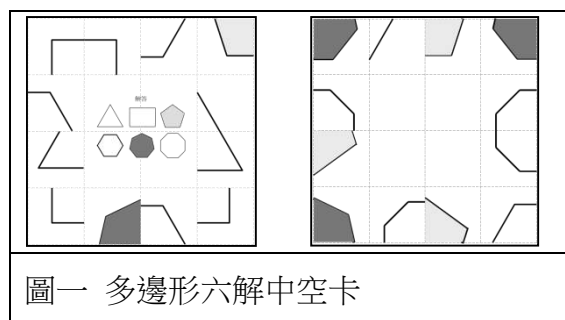
我們主要研究一個有趣的數學摺紙遊戲：透過切割 6 解中空卡創造 4 款 12 解中空卡-長方形中空卡、長方形切割中空卡、逆斜中空卡、斜中空卡。

我們是最先發明 12 解中空卡遊戲的，4 款 12 解中空卡都值得深入研究，本研究小組先選定 12 解斜中空卡作深入研究，至研究結束找到斜中空卡摺成正方形的組合數 4760 個，創作 6 解中空卡無法達成的 12 生肖、12 星座等主題 12 解斜中空卡。

我們拿 12 解斜中空卡給同學玩，同學玩到連走路都捨不得停下來，於是我們繼續創造了幾何卡、乘法卡、分數小數卡、等值分數卡、加法卡等 12 解斜中空卡，將 12 解斜中空卡應用於數學學習，進一步統計加法卡和數 4~48 的摺法共計 521 種。

壹、研究動機

玩過老師介紹的多邊形 6 解中空卡後，我們發現 24 個格子全部使用，最多可以摺出 6 個解答，解的數量只有 6 個，無法應用於日常生活中許多以 12 為單位的主題，例如：12 星座卡、12 生肖卡等，於是我們想改良 6 解中空卡發明 12 解中空卡。假設將每 1 格切割



成 2 格就有 48 格，每 4 格摺成 1 解就會有 12 解的中空卡，但這假設能成真嗎？心動不如馬上行動，翻轉世界，化不可能為可能的精神，讓假設成為真實，加油！

貳、研究目的

- 一、應用不同的切割方法創造出 12 解中空卡。
- 二、分析探討 12 解斜中空卡之特性與摺法規則。
- 三、尋找 12 解斜中空卡摺成正方形之可能組合。
- 四、創造多元 12 解斜中空卡提供給同學挑戰。
- 五、加法斜中空卡和數 4~48 的可能摺法組合。

參、研究問題

- 一、應用不同的切割方法能創造出幾款 12 解中空卡？
- 二、12 解斜中空卡有何特性與摺法規則？
- 三、同型組合四元數的同位元之數間有無規律？
- 四、12 解斜中空卡摺成正方形之可能組合？
- 五、加法斜中空卡和數 4~48 的可能摺法組合？

肆、文獻探討

全國中小學科展 6 解摺紙中空卡的相關研究有四篇-〈拼拼湊湊都是畫〉〈麥當勞的難題-轉、折、拼、湊〉〈792 魔術卡〉〈填來填去都是田〉，12 解摺紙中空卡是本研究小組的創新發明。

伍、研究設備器材

紙、色筆、美工刀、尺、電腦、印表機

陸、名詞解釋

一、12 解斜中空卡：

將 6 解中空卡左右交叉斜切割後，正反兩面共有 48 格，每 4 格等腰直角三角形摺成正方形為 1 解，恰有 12 解，因此命名為 12 解斜中空卡，簡稱斜中空卡，如圖二。

二、同型組合：

斜中空卡摺成正方形之 4 元數間的相對位置相同，稱為同型組合，例如：正面(4、5、16、17)、(10、11、22、23)；反面(28、29、40、41)、(34、35、46、47)這四組 4 元數間的相對位置相同，就稱以上四組為同型組合，編號請參考圖二。

三、基準型：

同型組合 4 元數中的第一個元數數字最小者稱為基準型，若第一個元數相同則比較第二個元數，例如：(1、5、10、20)和(1、11、16、20)第一個元數皆為 1，所以比較第二個元數，因為 $5 < 11$ ，所以(1、5、10、20)為此同型組合的基準型。

1 25	2 26	3 27	4 28	5 29	6 30	7 31	8 32
24 48	23 47					9 33	10 34
22 46	21 45					11 35	12 36
20 44	19 43	18 42	17 41	16 40	15 39	14 38	13 37

圖二 每一格右下方灰階數字代表反面編碼

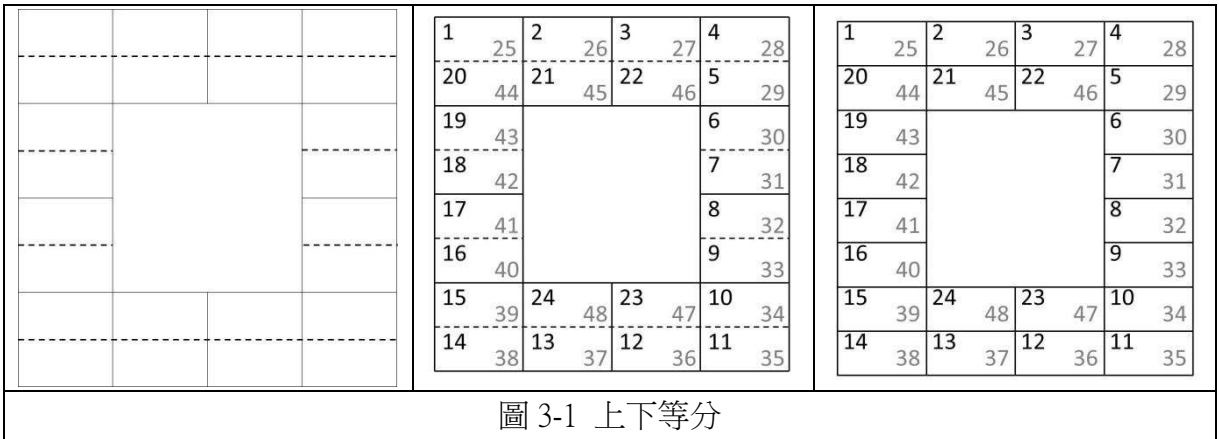
柒、研究過程和方法

一、切一切、分一分

我們嘗試用上下、左右、左右斜、右左斜、左右交叉斜、右左交叉斜、、、、方式進行等分切割，發現有些切割可以創造出 12 解中空卡，有些則不行，並且有優劣之分，茲說明如下：

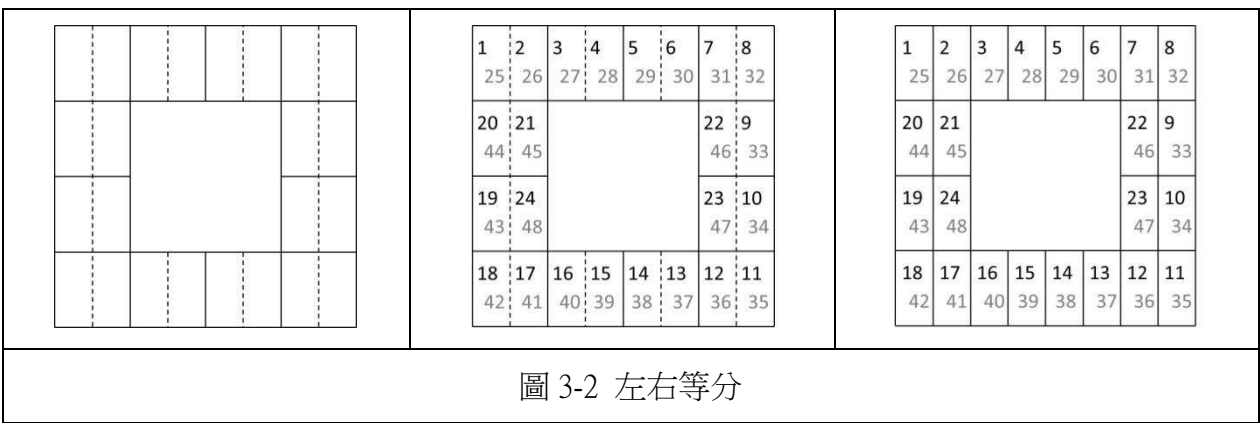
(一)上下等分

如圖 3-1 將原本的 1 格正方形以虛線上下等分後，每一格為長寬比 1：2 之長方形，4 格組成 1 解，解答呈現也為長方形，此種切割等分法使格 1、2、3、4、11、12、13、14 之組合變化數量較少，且其基本格為長方形，對稱性不如正方形佳，此卡有極大改良空間。



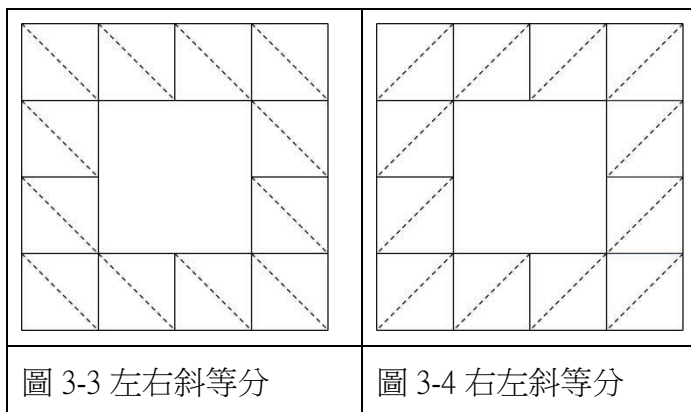
(二)左右等分

如圖 3-2 將原本的 1 格正方形以虛線左右等分後，每一格為長寬比 2：1 之長方形，4 格組成 1 解，解答呈現也為長方形，此種切割等分法使格 1、8、9、10、11、18、19、20 之組合變化數量較少，且其基本格為長方形，對稱性不如正方形佳，此卡與上下等分卡極為相似，若將基本格改良成正方形，兩卡可合而為一，修正成長方形 12 解中空卡。



(三) 左右斜等分

如圖 3-3 將原本的 1 格正方形以虛線左右斜切割後，每一格變成為等腰直角三角形，兩格組成一個平行四邊形，兩個平行四邊形無法組成正方形，此切割方式較不適宜。

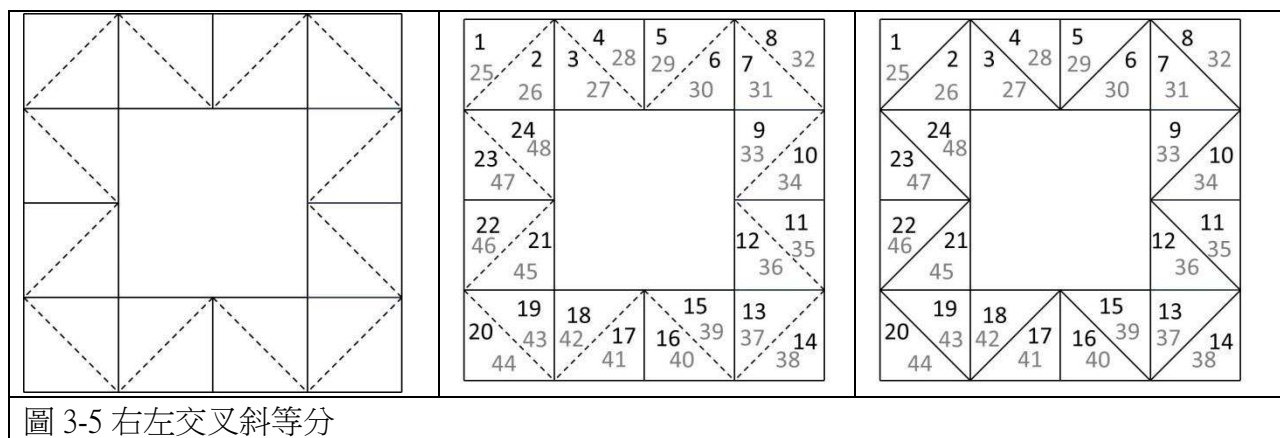


(四) 右左斜等分

右左斜等分如圖 3-4 與左右斜等分相似，兩者斜的方向相對稱，將原本的 1 格正方形以虛線右左斜切割後，每一格變成為等腰直角三角形，兩格組成一個平行四邊形，兩個平行四邊形無法組成正方形，此切割方式也不適宜。

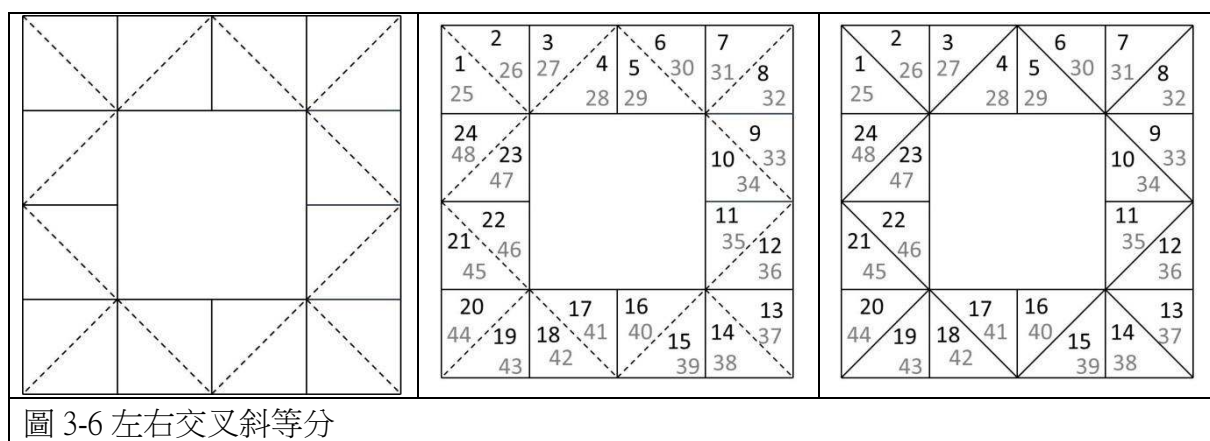
(五) 右左交叉斜等分

如圖 3-5 將原本的 1 格正方形以虛線右左交叉斜切割後，每一格變成為等腰直角三角形，其中格 1、8、14、20 位於 4 個角落雖可透過翻轉與其他格組成正方形，但與左右交叉斜相較下較無規律，故此切割法成立，但不是首選。因其為右左交叉斜等分且格 1、2 由下而上切割，所以命名為逆斜中空卡。



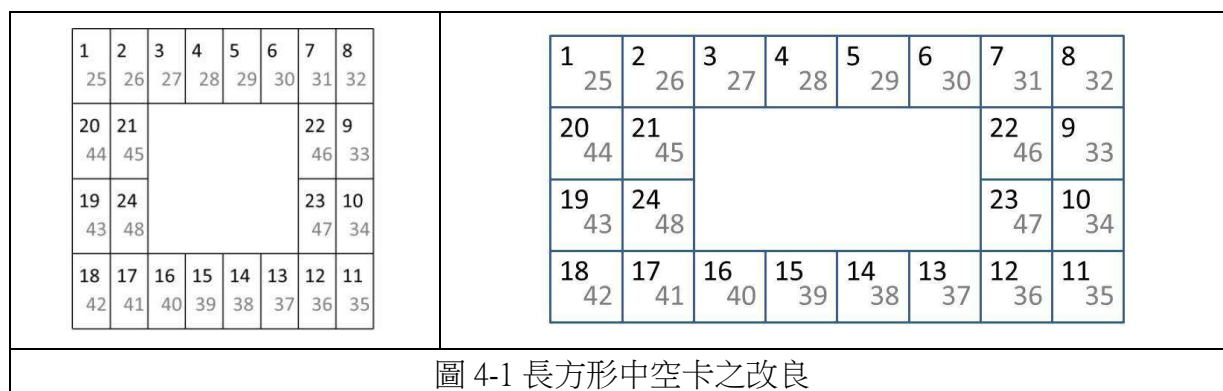
(六) 左右交叉斜等分

如圖 3-6 將原本的 1 格正方形以虛線左右交叉斜切割後，每一格也是變成為等腰直角三角形，因其為左右交叉斜等分且格 1、2 由上而下切割，所以命名為斜中空卡，本研究將針對斜中空卡做深入研究。

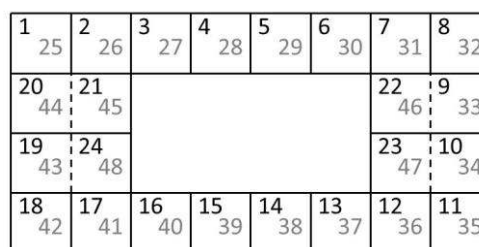


二、改良變形

上下等分和左右等分後，中空卡之基本格為長方形，長方形之對稱性不如正方形佳，若將長方形改良成正方形應該會更好，將想法付諸行動如圖 4-1，基本格修正成正方形後，中空卡變成了長方形，上下等分和左右等分變成了同一款，因改良變形後外觀為長方形，所以將此卡命名為**長方形中空卡**。



長方形中空卡格 1、8、9、10、11、18、19、20 之組合變化數量較少，我們思考如何增加格 1、8、9、10、11、18、19、20 組成正方形之組合數，如圖 4-2 從兩條虛線處剪開，即可增加格 1、8、9、10、11、18、19、20 組成正方形之組合數，此卡命名為**長方形切割中空卡**。



三、各款中空卡創作

(一) 長方形中空卡

雖然長方形中空卡格 1、8、9、10、11、18、19、20 之組合變化數量較少，但只要用心

思考，其變化亦非常多，值得深入研究，本研究以每 4 格摺成一個正方形，48 格皆使用共有 12 解為原則，先設計一種長方形中空卡，如圖 5-1，12 解以數字 1~12 表示，即要將 4 格數字相同者摺在一起成為正方形。

7	7	6	6	10	8	8	10	3	2	11	11	12	12	2	3		
9	1					1	9	3	2					2	3		
9	1					1	9	5	4					4	5	1	1
7	8	8	7	10	10	6	6	5	4	12	12	11	11	4	5	1	1

正面
反面
解答形式

圖 5-1 長方形中空卡

(二) 長方形切割中空卡

長方形切割中空卡是從長方形中空卡改革而來，將格 19、20 與格 21、24 中間和格 9、10 與格 22、23 中間分別割開後，格 1、8、9、10、11、18、19、20 之組合變化數量增加了，故長方形切割中空卡組成田字型的組合變化會比長方形中空卡更多，此中空卡更值得深入研究，本研究一樣先設計一種長方形切割中空卡作為研究開端(圖 5-2)。

12	5	4	1	6	11	11	6	3	3	12	10	8	8	10	2		
1	11					11	1	7	3					10	7		
5	12					9	4	7	9					2	7	1	1
5	1	4	4	6	5	12	6	3	9	8	8	10	9	2	2	1	1

正面
反面
解答形式

圖 5-2 長方形切割中空卡

(三) 逆斜中空卡

3	6	8	1	1	9	4	3	10	12	12	10	11	2	2	9		
12	9					7	5	10	11					2	4		
6	8					7	5	10	11					6	12		
3	8	8	1	1	7	7	3	5	4	11	5	4	2	6	9		

正面
反面
解答形式
旋轉 45 度

圖 5-3 逆斜中空卡

逆斜中空卡因為其格 1、8、14、20 獨立位於 4 個角落，所以與斜中空卡相較之下較無規律，但其摺成正方形之組合數量亦非常可觀，也值得深入研究，本研究因時間關係只先設計一種逆斜中空卡(圖 5-3)。

(四) 斜中空卡

斜中空卡是本研究選定深入探討的 12 解中空卡。

四、斜中空卡

我們期望能盡可能的找到斜中空卡 4 格等腰直角三角形摺成一個有意義正方形解的數量，如此便可很容易設計出很多種斜中空卡，可是要如何做才能快速找到呢？老師建議我們先了解斜中空卡的特性再來想辦法，說明斜中空卡之特色如下：

(一)對稱性

斜中空卡為線對稱圖形，有四條對稱軸 X、Y、Z、W，

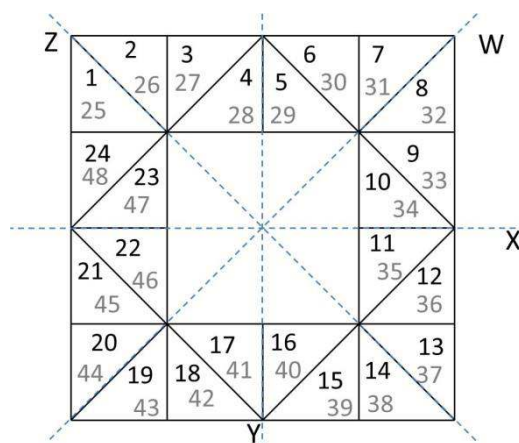
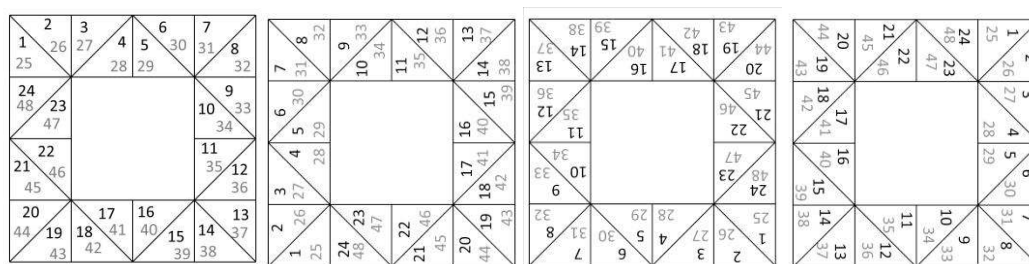


圖 6-1 斜中空卡之線對稱性

格 1 之對稱格為格 2、8、14、20；格 2 之對稱格為格 1、7、13、19；格 3 之對稱格為格 6、12、18、24；格 4 之對稱格為格 5、11、17、23(圖 6-1)。斜中空卡也是旋轉對稱圖形，透過旋轉又可得格 1 與格 7、13、19 對稱，格 2 與格 8、14、20 對稱，格 3 與格 9、15、21 對稱；格 4 與格 10、16、22 對稱(圖 6-2)。



原圖 向左旋轉 90 度 向左旋轉 180 度 向左旋轉 270 度

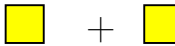
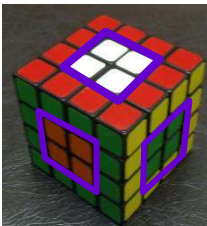
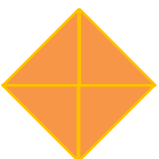
圖 6-2 斜中空卡之旋轉對稱性

(二) 格 1、2、3、4 讚!

為了有效率地尋找斜中空卡有意義正方形解的可能摺法，本研究發現應用斜中空卡的對稱性，只要先找到格 1、2、3、4 的摺法組合，便可應用其對稱性找到許多與之對稱的摺法組

合。

但要如何才能仔細地找到格 1、2、3、4 的摺法組合呢?這真是個令人傷腦筋的問題，靈感來了，4 階魔術方塊組六面中心的方法是先轉成兩直線或橫線，再將兩直線或橫線組成大正方形(圖七);而斜中空卡摺成正方形的方法可以先將兩格小等腰直角三角形摺成大等腰直角三角形，再用兩個大等腰直角三角形合在一起變成正方形(圖八)，所以已將問題先縮小至可以與格 1、2、3、4 摺成大等腰直角三角形的命題討論。

步驟一  +  =  兩格轉成一直線 步驟二  +  =  兩直線轉成正方形中心	
圖七 四階魔術方塊組六面中心的方法	
步驟一  +  =  兩格小等腰直角三角形翻轉摺成大等腰直角三角形 步驟二  +  =  兩個大等腰直角三角形翻轉摺成正方形 圖八 斜中空卡摺成正方形的方法	

命題 1：取斜中空卡其中 2 格摺成大等腰直角三角形的組合用 (x, y) 代表，其中 $x > y$ 例：

格 1 與格 4 組合成大等腰直角三角形用 $(1, 4)$ 表示。

命題 2：正反面相差 24 必不能摺成大等腰直角三角形，例： $(1, 25)$ 、 $(2, 26)$ ……，因正反面相差 24 為其正對面。

命題 3：格 1 可與正面除格 2 以外之偶數摺成大等腰直角三角形。

命題 4：格 1 可與反面除格 25 以外之奇數摺成大等腰直角三角形。

命題 5：格 2 可與正面除格 1 以外之奇數摺成大等腰直角三角形。

命題 6：格 2 可與反面除格 26 以外之偶數摺成大等腰直角三角形。

命題 7：格 3 可與正面除格 4 以外之偶數摺成大等腰直角三角形。

命題 8：格 3 可與反面除格 27 以外之奇數摺成大等腰直角三角形。

命題 9：格 4 可與正面除格 3 以外之奇數摺成大等腰直角三角形。

命題 10：格 4 可與反面除格 28 以外之偶數摺成大等腰直角三角形。

應用以上命題先尋找斜中空卡格 1、2、3、4 組成大等腰直角三角形的可能組合後，再與其他兩格組合成正方形。

命題 11：取斜中空卡其中 4 格摺成正方形的組合用 (x, y, z, w) 代表，其中 $x > y > z > w$

例：格 1、4、5、10 組成正方形用 $(1, 4, 5, 10)$ 表示。

確定斜中空卡格 1、2、3、4 的摺法規則和特色後，我們開始依照上述的命題尋找包含格 1、2、3、4 摺成正方形的組合，這真是個大工程，我們花了 6 個多月的時間，一開始數量就十分驚人，但到了後期還會偶爾發現幾個新的，直至研究結束我們共找到有格 1、2、3、4 摺成正方形的組合數量是 1437 個。

(三) 旋轉規則

找到斜中空卡格 1、2、3、4 摺成正方形的組合後，我們透過斜中空卡的對稱性尋找斜中空卡 4 格摺成正方形的可能組合，一開始我們透過實際操作斜中空卡寫出同型組合，發現同型組合數量可能為 4、8 或 16 個。

命題 12：斜中空卡每一個可摺成正方形的 4 個元數組合，經一般旋轉和對稱旋轉轉換後，旋轉的數量有 3 種可能 16、8、4 個，最多有 16 個組合可摺成正方形；最少有 4 個組合。

令人興奮的是，面對這些平凡無奇的數字，當我們寫到快一百組時有了不平凡的發現：

命題 13：同型組合四元數間的同位元之數形成公差為 6 的等差數列。

例 1. 以 $(1, 4, 5, 10)$ 為例，請參考圖二之編號。

從表 1 可觀察出，正面/反面，一般旋轉/對稱旋轉的 4 個同型 4 元數，其同位元之數形成等差(公差為 6)，正面為 1~24 的循環，所以 22 加 6 後循環回到 4，反面則為 25~48 的循環，46 加 6 後回到 28，見表 1 中黃、綠底數。

表 1. 與 $(1, 4, 5, 10)$ 同型的 16 個 4 元數組合

	正面	反面
一般 旋轉	$(1, 4, 5, 10)$	$(25, 28, 29, 34)$
	$(7, 10, 11, 16)$	$(31, 34, 35, 40)$
	$(13, 16, 17, 22)$	$(37, 40, 41, 46)$
	$(19, 22, 23, 4)$	$(43, 46, 47, 28)$

對稱 旋轉	(4, 5, 8, 23)	(28, 29, 32, 47)
	(10, 11, 14, 5)	(34, 35, 38, 29)
	(16, 17, 20, 11)	(40, 41, 44, 35)
	(22, 23, 2, 17)	(46, 47, 26, 41)

命題 14：斜中空卡摺成正方形的同型數量有三種可能：4 個、8 個、16 個，請參考例 1~3。

例 2: 以(1, 4, 17, 20)為例，它恰有 8 個同型的 4 元數組合，因其對稱旋轉與一般旋轉相同。

表 2. 與(1, 4, 17, 20)同型的 8 個 4 元數組合

	正面	反面
一般 旋轉	(1, 4, 17, 20)	(25, 28, 41, 44)
	(7, 10, 23, 2)	(31, 34, 47, 26)
	(13, 16, 5, 8)	(37, 40, 29, 32)
	(19, 22, 11, 14)	(43, 46, 35, 38)

例 3: 以(1, 8, 13, 20)為例，它恰有 4 個同型的 4 元數組合，正面兩個，反面兩個。

表 3. 與(1, 8, 13, 20)同型的 4 個 4 元數組合

	正面	反面
一般 旋轉	(1, 8, 13, 20)	(25, 32, 37, 44)
	(7, 14, 19, 2)	(31, 38, 43, 26)
	(13, 20, 1, 8)重複	

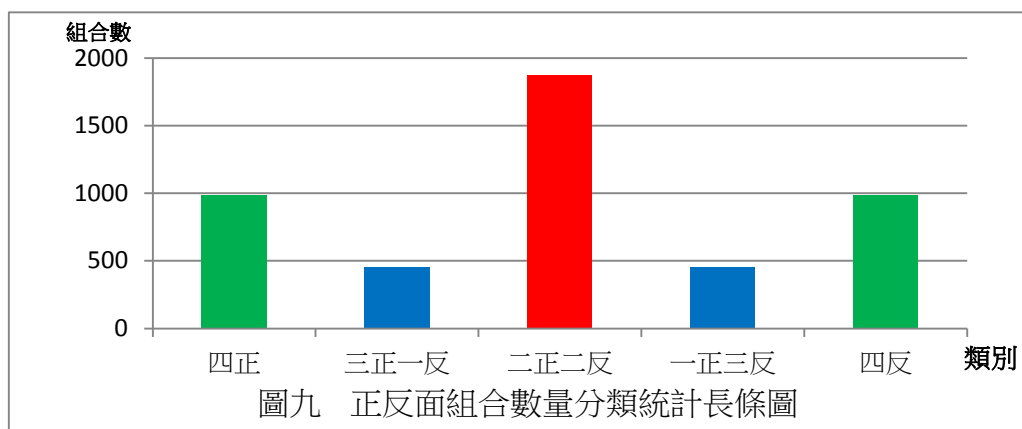
透過斜中空卡的對稱性尋找摺成正方形的可能組合，直至研究結束我們共找到 4760 種組合，請參考附件一 斜中空卡基準型與其同型數量統計表。

(四)斜中空卡的創作與應用

將總組合數 4760 種分成 5 類，如表 4，觀察多數人玩斜中空卡的經驗發現：三正一反和一正三反的難度高於二正二反；二正二反的難度高於四正和四反，其中數量最多的是二正二反 1872 個，其次是四正與四反都是 988 個，數量最少的是三正一反和一正三反，數量都為 456 個，請參考圖九。

表 4. 正反面組合數量分類表

類別	四正	三正一反	二正二反	一正三反	四反	合計
組合數	988	456	1872	456	988	4760



要如何設計各種不同難度的 12 解斜中空卡呢?要設計一張 12 解斜中空卡，必須從這 5 類選 12 組使其恰能填滿 48 格，從恰能填滿 48 格的條件來思考：

條件 1：正面(編號 1~24)需占 24 格，反面(編號 25~48)需占 24 格

條件 2：編號 1~48 不可重複

由於組合的方法太多，所以我們決定先縮小問題的範圍，先考量必定會滿足條件一的可能情形，將四正四反搭配成第一類；兩正兩反為第二類；三正一反和一正三反配成第三類，如此無論選定哪一類正反面使用的格子數量均會相同，由 3 類不同正反組合中，任取 6 個組成一張斜中空卡，由圖九可以得知此 3 類的數量均不小於 6，故可重複選取，如下表 5 共有 28 種組合方法。

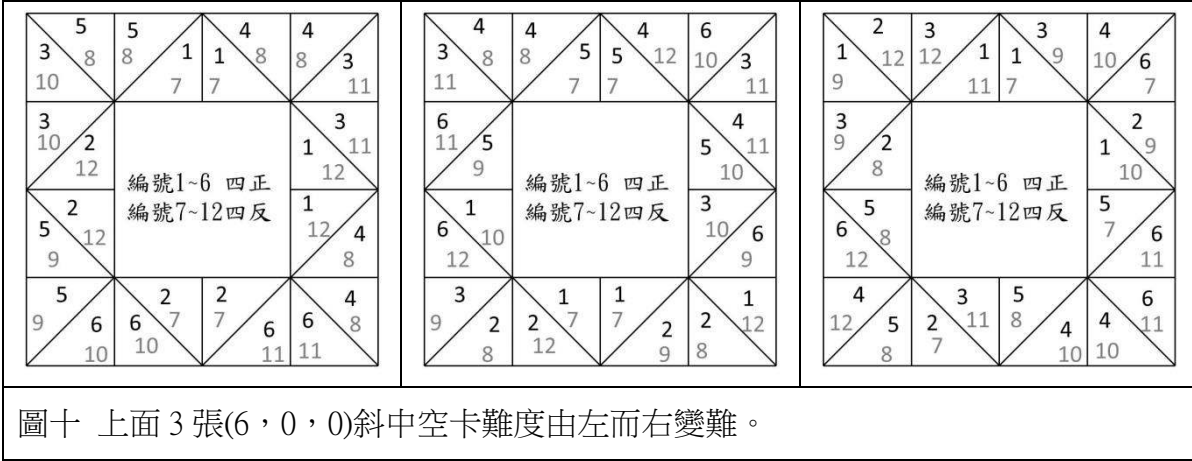
表 5 3 類任取 6 個可重複選取組成一張斜中空卡的 28 種組合方法

四正四反的數量(組)	兩正兩反與三正一反和一正三反的配對數量	組合方法(種)
6		1
5	(1, 0)(0, 1)	2
4	(2, 0)(1, 1)(0, 2)	3
3	(3, 0)(2, 1)(1, 2)(0, 3)	4
2	(4, 0)(3, 1)(2, 2)(1, 3)(0, 4)	5
1	(5, 0)(4, 1)(3, 2)(2, 3)(1, 4)(0, 5)	6
0	(6, 0)(5, 1)(4, 2)(3, 3)(2, 4)(1, 5)(0, 6)	7
總計		28

命題 15：用(x, y, z)代表選定(四正四反的數量，兩正兩反的數量，三正一反和一正三反的數量)的組合方法。

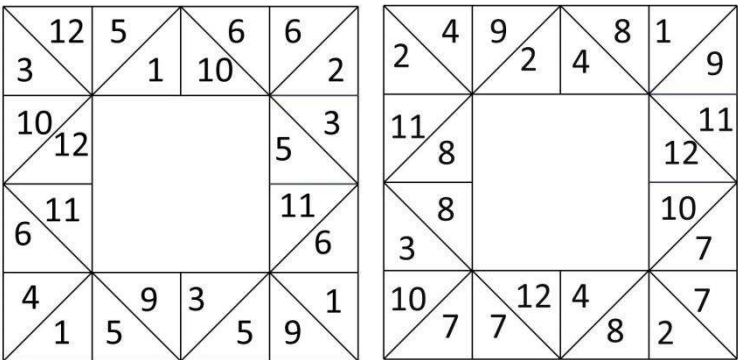
上面 28 種組合方法設計出來的斜中空卡難度皆不同，一般而言(6, 0, 0)的組合方法是最簡單的，混雜 3 類組合的方法比較有挑戰性，例如：(2, 2, 2)、(1, 2, 3)……另外，一樣

的組合方法，選取可摺成正方成的組合不同亦會影響 12 解斜中空卡的難度，以(6，0，0)的組合方法為例，四正四反各有 988 組，假設每一個四正皆可以與四反的 988 個配對，如此便有 $988 \times 988 = 976144$ 種配對，從 976144 種配對選取 6 組的方法數也非常多，製作出的 12 解斜中空卡的難度也都不相同，當然要能製作成 12 解斜中空卡還必須滿足條件二，以下為 3 張不同難度之(6，0，0)組合方法的斜中空卡，選取的可摺成正方成的組合 4 格越分散難度越高。



圖十 上面 3 張(6，0，0)斜中空卡難度由左而右變難。

雖然透過參考 4760 種組合要設計一張 12 解斜中空卡不再那麼困難了，但若最後剩下的 4 格無法摺成正方形，則必須回到上一步驟重新選取，因此設計斜中空卡最大的困難是選定的 6 組配對常無法滿足條件二，這過程中經歷無數次的失敗，面



圖十一 (2，2，2) 混雜 3 類組合的斜中空卡

對失敗的解決之道是往前修正，皇天不負苦心人，我們成功了，1 張、2 張、3 張、、、、作品源源不絕，例如：圖十一為(2，2，2) 混雜 3 類組合的不同難度的斜中空卡。分析

表 6 (2，2，2)斜中空卡之難度分析表(編號請參考圖十一)

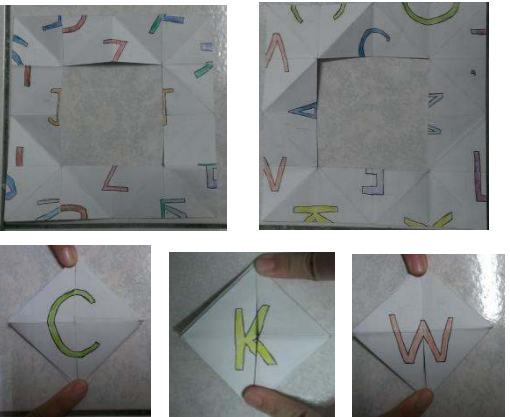
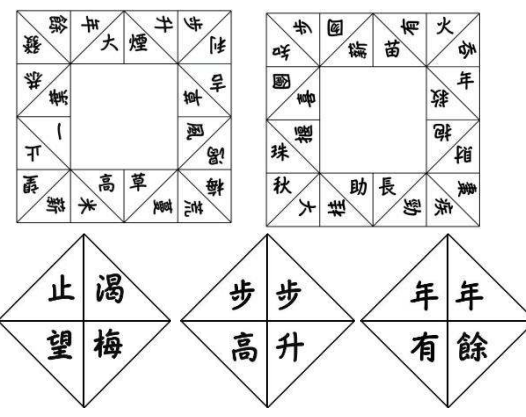
類別	四正四反	二正二反	三正一反和三反一正
編號	5、6、7、8	9、10、11、12	1、2、3、4
難度	較易	普通	較難

要設計包含 3 類組合之不同難度 12 解斜中空卡應該把握什麼原則呢?因三正一反和三反一正的組合數量最少的，所以先從這兩類開始著手設計，並且盡量避開格 1 的對稱格 2、7、

8、13、14、19、20，因格 1 的對稱格與其他格摺成正方形的機率最大，接著填入四正和四反的組合，最後才考慮二正二反的組合，因其組合數量最多所以最後考慮。

我們將設計好的斜中空卡提供給同學玩，沒想到他們玩得好認真喔!連走路的时间都捨不得浪費，隔壁班的同學看到了也來詢問：「可不可以給我們玩玩看?」同學熱烈的反應讓我們好開心喔!

接著我們回到初衷創造了 12 生肖、12 星座斜中空卡……，和許多不同主題的 12 解斜中空卡，例如：成語、英文字母斜中空卡，如圖十二。

12 星座斜中空卡： 	12 生肖斜中空卡： 
英文字母斜中空卡 	成語卡斜中空卡 

圖十二 多元的斜中空卡

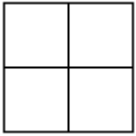
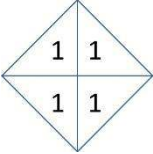
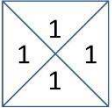
捌、研究討論

一、6 解中空卡與 12 解斜中空卡之比較

6 解中空卡有趣、好玩，可惜解的數量太少應用受到限制，例如：認識數字只能認識 1~6，若是 12 解一次便可認識到 12，較符合學習的需求；另外，以認識平面圖形而言，12 解也較 6 解能滿足使用者的需求，因平面圖形有正方形、長方形、三角形、圓形、平行四邊形、梯形、

菱形、箏形、橢圓形、五邊形、六邊形、心形、、、、6 解實在太少了；於日常生活中許多以 12 為單位的主題也只有 12 解斜中空卡可以滿足需求，整理 6 解與 12 解之異同如表 7。

表 7 6 解中空卡與 12 解斜中空卡之比較表

名稱	解的數量	基本單位	解的形式	變化	應用
6 解中空卡	6 個			較 12 解少	1.適合用於 6 解的主題 2.無法應用於日常生活中許多以 12 為單位的主題。
12 解斜中空卡	12 個		 或 	較 6 解多	1.能應用於日常生活中許多以 12 為單位的主題，例如： 12 星座卡 12 生肖卡 12 節慶卡 2.解的數量是 6 解的 2 倍，應用的範圍較為廣泛多元，舉凡解 ≤ 12 的主題皆可應用。

二、5 類選取 12 個的組合討論

在研究過程中因 12 解斜中空卡的組合方法非常多，為簡化問題所以將 5 類配對成 3 類以確保能滿足條件一：正、反面各需占 24 格，但四正與四反、三正一反與一正三反不能單獨存在嗎？

假設選取四正 a 組、三正一反 b 組、二正二反 c 組、一正三反 d 組、四反 e 組，則下面聯立方程式 a、b、c、d、e 之非負整數解皆能滿足條件一，其解共有 86 組，請參考表 8。

$$\begin{cases} a+b+c+d+e=12 \\ 4a+3b+2c+d=24 \\ b+2c+3d+4e=24 \end{cases}$$

表 8. 12 解斜中空卡之可能組合方法

編號	a	b	c	d	e	編號	a	b	c	d	e	編號	a	b	c	d	e	編號	a	b	c	d	e	編號	a	b	c	d	e
1	0	0	12	0	0	19	0	8	0	0	4	37	1	6	0	2	3	55	2	4	2	0	4	73	4	0	1	6	1
2	0	1	10	1	0	20	1	0	9	2	0	38	1	6	1	0	4	56	2	5	0	1	4	74	4	0	2	4	2
3	0	2	8	2	0	21	1	0	10	0	1	39	2	0	6	4	0	57	3	0	3	6	0	75	4	0	3	2	3

4	0	2	9	0	1	22	1	1	7	3	0	40	2	0	7	2	1	58	3	0	4	4	1	76	4	0	4	0	4
5	0	3	6	3	0	23	1	1	8	1	1	41	2	0	8	0	2	59	3	0	5	2	2	77	4	1	0	5	2
6	0	3	7	1	1	24	1	2	5	4	0	42	2	1	4	5	0	60	3	0	6	0	3	78	4	1	1	3	3
7	0	4	4	4	0	25	1	2	6	2	1	43	2	1	5	3	1	61	3	1	1	7	0	79	4	1	2	1	4
8	0	4	5	2	1	26	1	2	7	0	2	44	2	1	6	1	2	62	3	1	2	5	1	80	4	2	0	2	4
9	0	4	6	0	2	27	1	3	3	5	0	45	2	2	2	6	0	63	3	1	3	3	2	81	4	2	1	0	5
10	0	5	2	5	0	28	1	3	4	3	1	46	2	2	3	4	1	64	3	1	4	1	3	82	5	0	0	4	3
11	0	5	3	3	1	29	1	3	5	1	2	47	2	2	4	2	2	65	3	2	0	6	1	83	5	0	1	2	4
12	0	5	4	1	2	30	1	4	1	6	0	48	2	2	5	0	3	66	3	2	1	4	2	84	5	0	2	0	5
13	0	6	0	6	0	31	1	4	2	4	1	49	2	3	0	7	0	67	3	2	2	2	3	85	5	1	0	1	5
14	0	6	1	4	1	32	1	4	3	2	2	50	2	3	1	5	1	68	3	2	3	0	4	86	6	0	0	0	6
15	0	6	2	2	2	33	1	4	4	0	3	51	2	3	2	3	2	69	3	3	0	3	3						
16	0	6	3	0	3	34	1	5	0	5	1	52	2	3	3	1	3	70	3	3	1	1	4						
17	0	7	0	3	2	35	1	5	1	3	2	53	2	4	0	4	2	71	3	4	0	0	5						
18	0	7	1	1	3	36	1	5	2	1	3	54	2	4	1	2	3	72	4	0	0	8	0						

三、斜中空卡組合數量分析

(一)4760 個組合數量分析

直至研究結束，我們共找到斜中空卡摺成正方形的組合數為 4760 個，其中包含格 1、2、3、4 的基準型有 318 個，與基準型同型且合格 1、2、3、4 的數量有 1437 個，基準型有 318 個，其中四元數中第一元數為 1 者有 267 個，第一元數為 2 者有 0 個，第一元數為 3 者有 44 個，第一元數為 4 者有 7 個，請參考表 9。

表 9. 基準型的第一元數分析表

格	1	2	3	4	合計
數量	267	0	44	7	318

為什麼基準型四元數中第一元數為 2 數量是 0 個呢?因為格 1、2、7、8、13、14、19、20 為對稱格，所以合格 2 的組合其同型組合必合格 1，基準型之定義為第一個元數數字最小者，基準型不會有格 2 乃屬正確。

另一個值得討論的問題是第一元數為 4 者只有 7 個，因格 4 與格 1 必能組成等腰直角三角形，所以第一元數為 1 的基準型裡有 43 個的二元數皆為 4，所以第一元數為 4 的這 7 個組合是包含格 4 但不合格 1 的組合。

由以上推論，發現格 1、2、3、4 中格 1 的對稱格最容易與其他格組成正方形。

(二) 同型數量與四元數的正反組合關係

斜中空卡摺成正方形的同型數量會因四元數的分布位置不同而數量不同，四元數的正反組合與其同型數量關係如下：

1. 四正和四反：同型數量有三種可能：4 個、8 個、16 個。
2. 三正一反和一正三反：同型數量必為 16 個。
3. 二正二反：同型數量有兩種可能：8 個、16 個。

四、EXCEL 的應用

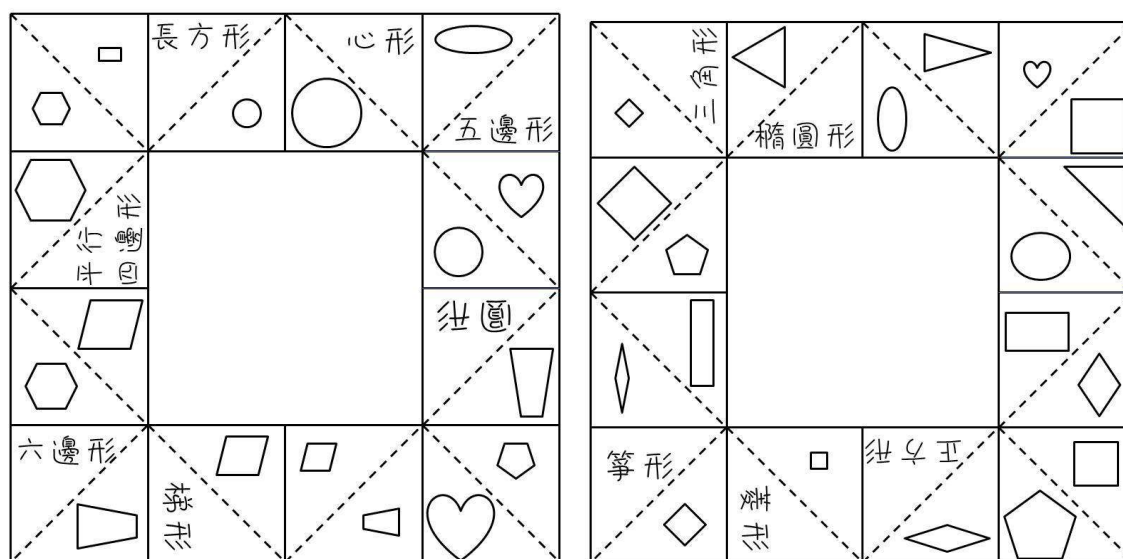
發現同型四元數間成等差數列，正面為 1~24 的循環，反面為 25~48 的循環，這對我們的研究有很大的助益，因為若要用手寫出 318 個基準型的所有同型組合必須花費很多時間，但若將這件事應用 EXCEL 的加總和函數功能來處理就快速許多，加總使用=B1+6 的相似設定，另外，正面使用 IF 函數為 =IF(B12>24,B12-24,B12)；反面使用 IF 函數為 =IF(C11>48,C11-24,C11) 相似設定。

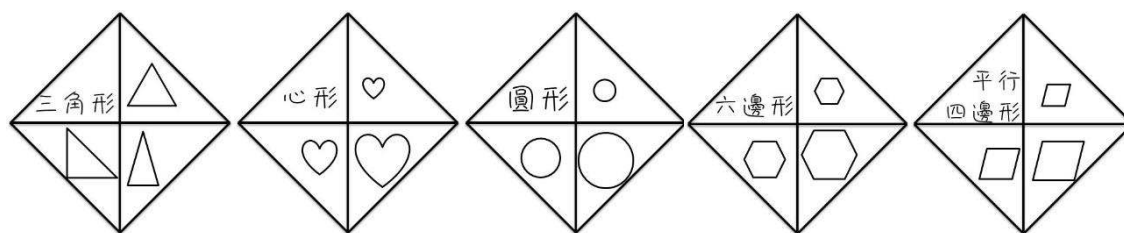
另外，我們也應用 EXCEL 來繪製統計長條圖和折線圖。

五、數學學習的應用

同學對於斜中空卡表現出欲罷不能的學習態度令我們十分感動，我們是否應該將研究的成果好好應用來幫助同學學習數學呢？答案是肯定的，所以我們開始回憶以前學過的數學知識，於是加法卡、乘法卡、分數小數卡、等值分數卡、幾何卡紛紛出籠了，分別介紹如下：

(一)幾何卡





圖十三 幾何卡

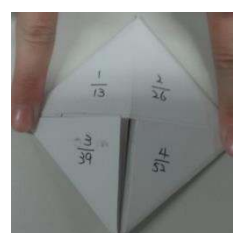
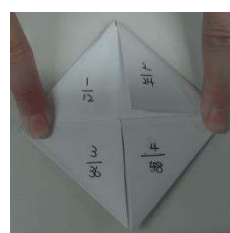
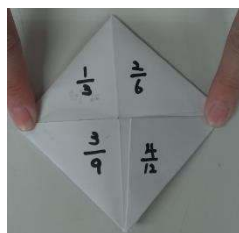
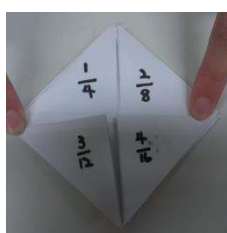
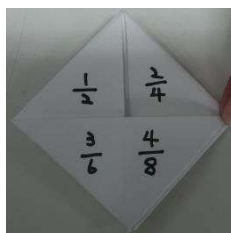
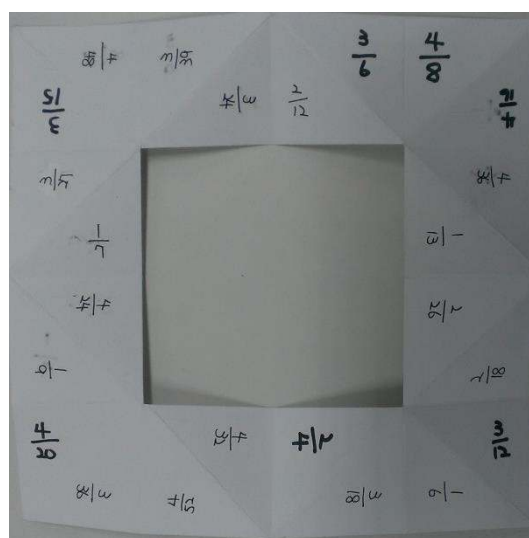
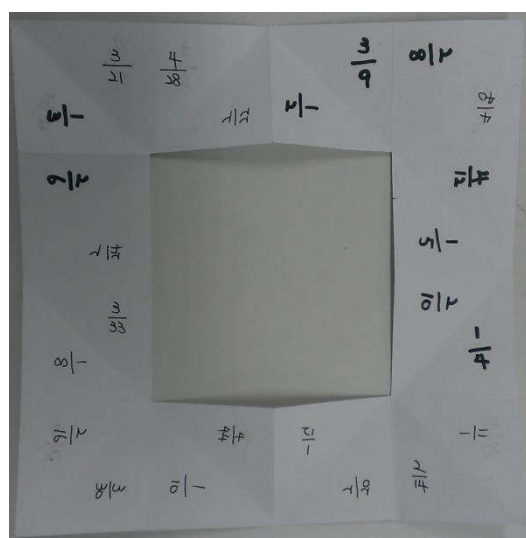
1.遊戲介紹：幾何卡是用圖形分類的概念設計的，包含 12 種圖形:正方形、長方形、三角形、圓形、平行四邊形、梯形、菱形、箏形、橢圓形、五邊形、六邊形、心形，把同一類的圖形 4 格摺在一起成為正方形即過關。

2.遊戲方法：將幾何圖名稱格與大小不同的形狀格摺在一起成為正方形即過關。

(二)等值分數卡

1.遊戲介紹：等值分數卡(圖十四)可以用來練習並精熟等值分數的學習，建議你先做好等值分數分類再開始進行挑戰喔！

2.遊戲方法：本卡 48 格內容分別為 $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{6}$ $\frac{4}{8}$ 、 $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{6}$ $\frac{3}{9}$ $\frac{4}{12}$ 、 $\frac{1}{4}$ $\frac{2}{8}$ $\frac{3}{12}$ $\frac{4}{16}$ 、 $\frac{1}{5}$ $\frac{2}{10}$ $\frac{3}{15}$ $\frac{4}{20}$ 、 $\frac{1}{6}$ $\frac{2}{12}$ $\frac{3}{18}$ $\frac{4}{24}$ 、 $\frac{1}{8}$ $\frac{2}{16}$ $\frac{3}{24}$ $\frac{4}{32}$ ，將 4 格等值分數摺在一起成為正方形即過一關，共有 12 關喔!加油!



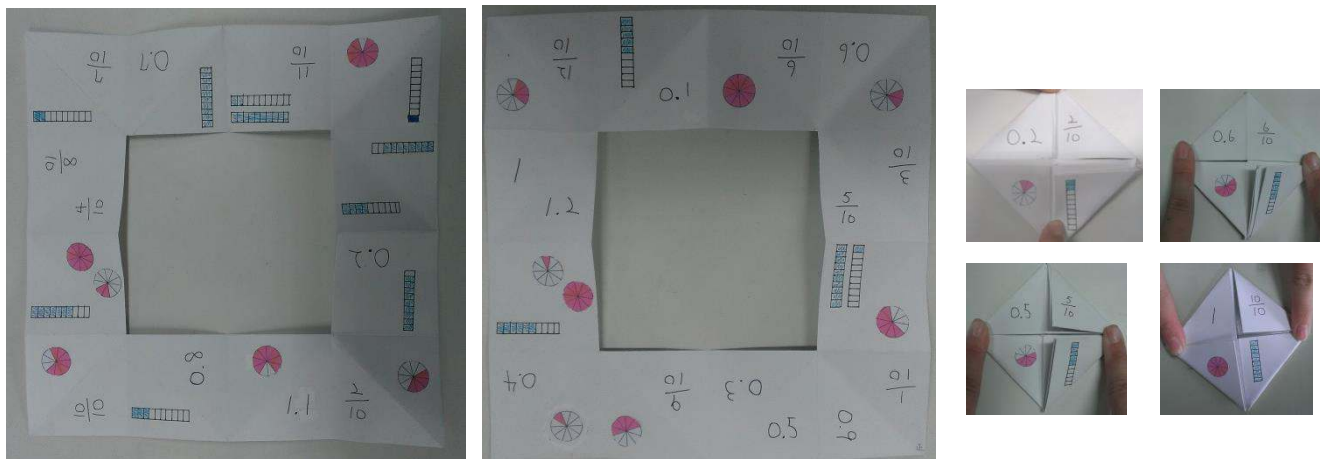
圖十四 等值分數卡

(三)分數小數卡

1.遊戲介紹：小數的學習是從圖像表徵和分數連結引入，此卡用兩種圖像表徵和分數小數等值作為設計的理念(圖十五)。

2.遊戲方法：本卡 48 格內容分別為 $\frac{1}{10}$ 、 $\frac{2}{10}$ 、 $\frac{3}{10}$ 、 $\frac{4}{10}$ 、 $\dots$ 、 $\frac{12}{10}$ ；0.1、0.2、0.3、0.4、0.5、 $\dots$ 、

1、1.1、1.2 和圓形、長方形切割後所占之量的圖像表徵，將 4 格等值之量摺在一起成為正方形即過一關，共有 12 關喔!加油!



圖十五 分數小數卡

(四)乘法卡

1.遊戲介紹：乘法卡是以兩數相乘等積的想法設計而成，除了可以幫助同學精熟乘法外，還可以讓同學了解哪幾組數是乘法好朋友。

2.遊戲方法：將等值的4格摺在一起成為正方形即過關(圖十六)。

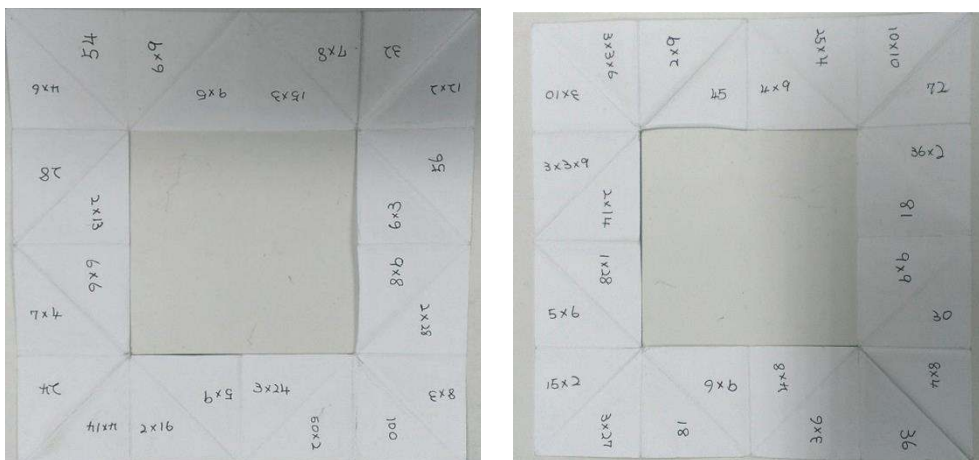


圖 16-1 乘法卡

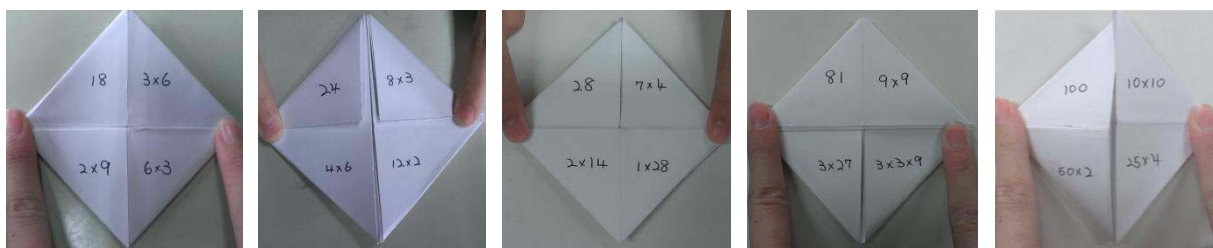


圖 16-2 乘法卡解答範例

(五)加法卡(圖十七)

1.遊戲介紹：加法卡變化多元，包含同一數摺在一起、數的合成與分解遊戲，是一張具有挑戰性的卡喔！

2.遊戲方法：玩法一：將相同數字摺成正方形，共有 12 組解。

玩法二：4 格摺成正方形的和數可以為 4~48。直至研究結束，我們摺出來 521 種

組合，將和數與組合數整理成表 10，並繪製成折線圖，請參考圖十八。

圖十七 加法卡有兩種玩法，其一是將相同數字組在一起有 12 解，其二是 4 格組在一起和數可以為 4~48。		和數 4 和數 5 和數 10 和數 22

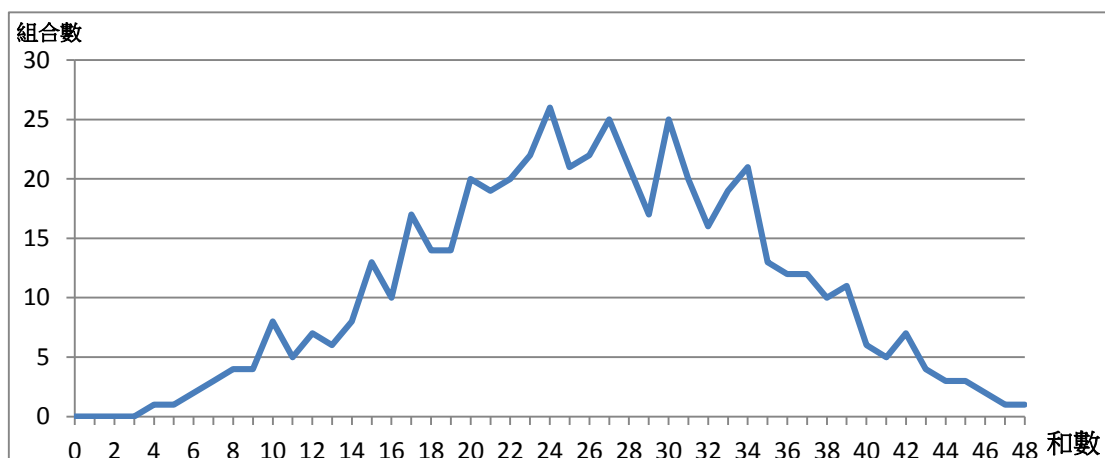
表 10. 和數與組合數之數量

和數	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
組合數	1	1	2	3	4	4	8	5	7	6	8	13	10	17	14
和數	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
組合數	14	20	19	20	22	26	21	22	25	21	17	25	20	16	19
和數	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
組合數	21	13	12	12	10	11	6	5	7	4	3	3	2	1	1

由圖十八可以發現斜中空加法卡的和數愈小或愈大，則其組合數量愈少，和數接近中數，其組合數量較多，舉例說明：和數 4 只有 1 組組合(1.1.1.1)、和數 48 也只有 1 組組合(12.12.12.12)；和數 26 有 22 組組合：(4.4.8.10) (2.6.6.12) (2.2.4.8) (4.7.7.8) (2.7.8.9) (4.4.9.9) (3.4.9.10) (2.7.7.10)

(1.6.7.12)(1.7.7.11)(3.3.9.11)(3.3.8.12)(4.5.7.10) (3.5.6.12) (4.6.6.10) (1.3.11.11)

(2.4.8.12)(3.4.8.11)(2.5.7.12)(2.5.9.10)(2.3.9.12)(4.4.7.11)，詳細資料請考附件二 加法斜中空卡和數 4~48 摺法組合表。



圖十八 和數與組合數量關係圖

玖、研究結果

一、本研究透過切割 6 解中空卡發明了 12 解中空卡-長方形中空卡、長方形切割中空卡、逆斜中空卡、斜中空卡等四款 12 解中空卡遊戲。

二、斜中空卡之特色

(一)斜中空卡為線對稱圖形，有四條對稱軸 X、Y、Z、W，格 1 之對稱格為格 2、8、14、20；格 2 之對稱格為格 1、7、13、19 對應；格 3 之對稱格為格 6、12、18、24 對應；格 4 之對稱格為格 5、11、17、23 對應。

(二)斜中空卡也是旋轉對稱圖形，透過旋轉又可得格 1 與格 7、13、19 相對稱，格 2 與格 8、14、20 相對稱，格 3 與格 9、15、21 相對稱；格 4 與格 10、16、22 相對稱。

(三)格 1、2、3、4 摺成大等腰直角三角形之命題：

命題 1：取斜中空卡其中 2 格摺成大等腰直角三角形的組合用 (x, y) 代表，其中 $x > y$

例：格 1 與格 4 組合成大等腰直角三角形用 $(1, 4)$ 表示。

命題 2：正反面相差 24 必不能摺成大等腰直角三角形，例： $(1, 25)$ 、 $(2, 26)$ ……，因正反面相差 24 為其正對面。

命題 3：格 1 可與正面除格 2 以外之偶數摺成大等腰直角三角形。

命題 4：格 1 可與反面除格 25 以外之奇數摺成大等腰直角三角形。

命題 5：格 2 可與正面除格 1 以外之奇數摺成大等腰直角三角形。

命題 6：格 2 可與反面除格 26 以外之偶數摺成大等腰直角三角形。

命題 7：格 3 可與正面除格 4 以外之偶數摺成大等腰直角三角形。

命題 8：格 3 可與反面除格 27 以外之奇數摺成大等腰直角三角形。

命題 9：格 4 可與正面除格 3 以外之奇數摺成大等腰直角三角形。

命題 10：格 4 可與反面除格 28 以外之偶數摺成大等腰直角三角形。

(四)斜中空卡取 4 格摺成正方形之命題

命題 11：取斜中空卡其中 4 格摺成正方形的組合用 (x, y, z, w) 代表，其中 $x > y > z > w$ 例：格 1、4、5、10 組成正方形用 $(1, 4, 5, 10)$ 表示。

命題 12：斜中空卡每一個可摺成正方形的 4 個元數組合，經一般旋轉和對稱旋轉轉換後，同型數量有 3 種可能 16、8、4 個，最多有 16 個組合；最少有 4 個組合。

命題 13：同型組合四元數間的同位元之數形成公差為 6 的等差數列。

三、直至研究結束，我們找到斜中空卡摺成正方形的組合數為 4760 個，包含格 1、2、3、4 的基準型有 318 個，含格 1、2、3、4 的同型數量有 1437 個。

四、斜中空卡三正一反和一正三反的難度高於二正二反，二正二反的難度高於四正和四反，其中數量最多的是二正二反 1872 個，其次是四正與四反都是 988 個，數量最少的是三正一反和一正三反，數量都為 456 個。

五、斜中空卡摺成正方形的同型數量會因四元數的分布位置不同而數量不同，四正和四反同型數量有 4、8、16 個三種可能；三正一反和一正三反同型數量必為 16 個；二正二反同型數量有 8、16 個兩種可能。

六、設計包含 3 類組合的 12 解斜中空卡之原則：

(一)開始盡量先避開格 1 的相對應格 2、7、8、13、14、19、20；

(二)先填三正一反和三反一正的組合，最後才考慮二正二反的組合；

八、發揮化不可能為可能的精神讓假設成為真實，成功翻轉改良 6 解中空卡，創造日常生活中許多以 12 為單位的斜中空卡，例如：12 星座斜中空卡、12 生肖斜中空卡等。

九、同學對於斜中空卡表現出欲罷不能的學習態度令我們十分感動，所以繼續創造了幾何卡、乘法卡、分數小數卡、等值分數卡、加法卡等，應用斜中空卡於數學學習。

十、直至研究結束，我們摺出加法卡的 521 種組合，和數愈小或愈大，其組合數量較少，較中間的和數，其組合數量較多。

拾、未來發展

一、探討逆斜中空卡、長方形中空卡、長方形切割中空卡之特性與摺法規則。

二、創造多元逆斜中空卡、長方形中空卡、長方形切割中空卡。

三、窮盡斜中空卡之所有可能的組合。

拾壹、參考資料

一、六解摺紙卡參考資料

(一)全國中小學科展第 31 屆初小組數學科第一名作品〈拼拼湊湊都是畫〉。

(二)全國中小學科展第 32 屆高小組數學科第一名作品〈麥當勞的難題-轉、折、拼、湊〉。

(三)全國中小學科展第 41 屆初小組數學科第一名作品〈792 魔術卡〉。

(四)全國中小學科展第 47 屆國小組作品數學科佳作作品〈填來填去都是田〉。

二、其他參考資料

(一)五下數學課本線對稱圖形。南一書局。

(二)五下數學課本統計圖形。南一書局。

(三)國中數學第四冊等差數列。康軒出版社。

【評語】 080418

從遊戲出發，透過數學探究，進而創造更多引人入勝的遊戲組合，值得肯定。其團員對於探究專題的細節均熟悉理解，並能深刻互相討論，深具團隊精神。