中華民國第55屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

佳作

080416

轉啊！轉啊！瘸腿鳥

學校名稱：桃園市桃園區莊敬國民小學

作者：	指導老師：
小六 高耘謙 小五 游芊騰	陳思靜

關鍵詞：閉合、不相交、路徑

摘　要

本研究探討「在一個$n\times n$的方格板上，從任意方格的中心運動到另一個與其相鄰方格的中心，每次運動必須轉彎，即任意兩次連續運動的方向垂直，最長的一條閉合、不相交的路徑要經過多少方格？」首先，探討滿足閉合、不相交的路徑的關係，利用塗色及歸納法推導可能經過的最多方格數，然後建構滿足條件路徑的解。我們成功得到最長移動路徑方格數可依n值分成四個群組，並依所建構閉合、不相交的最長路徑，區分成兩大類：螺旋狀和柱狀的移動路徑。其中，除$n=4k+2$，$k\in\mathrm{N}$柱狀的路徑在$n\geq 18$明顯變少外，其餘都可找到螺旋狀和柱狀有相同的最長路徑。本研究也延伸討論$n\times m$矩形的情形，並得到完整的結果，且設想掃地機器人能不重複打掃、掃過面積最大、自動回充電座充電的應用可能。

壹、 研究動機

在學習數學課本第六冊第六單元「怎樣解題」時，仔仔的哥哥提出了一個有趣的題目讓我們嘗試：「在一個 999×999 的方格板上，有一隻瘸腿鳥按照下列的要求運動：從任意方格的中心運動到任意一個與其相鄰方格的中心（與其有公共邊的方格），每次運動必須轉彎，即任意兩次連續運動的方向一定垂直。這隻瘸腿鳥運動形成一條不相交的路，係指其按照前述要求，經過的方格中心兩兩不同，且如果這隻瘸腿鳥到達這條路最後一個方格的中心後，可以直接運動到這條路開始時的第一個方格的中心，則稱這條不相交的路是『閉合』的。問：瘸腿鳥運動形成最長的一條閉合、不相交的路，要經過多少個方格？」

我們討論後發現：並不是想像中那麼容易解答，但似乎又有一些規律存在，題目要求運動路徑是最長的，且要怎麼求得呢？於是我們展開了研究。

貳、 研究目的

一、 探討瘸腿鳥在$n\times n$的方格板上運動，滿足閉合、不相交的運動路徑有何特殊關係存在？運動路徑所經過的方格數最大可能是多少？

二、 建構瘸腿鳥在$n\times n$的方格板上運動，滿足閉合、不相交的最長運動路徑，所經過的最大方格數。

三、 探討瘸腿鳥在$n\times n$的方格板上運動，形成滿足閉合、不相交的最長運動路徑的可能運動方式。

四、 延伸討論瘸腿鳥在$n\times m$的方格板上運動，形成滿足閉合、不相交的最長運動路徑的可能運動方式。

參、研究設備及器材

紙、筆、電腦、有格子的黑板、粉筆。

肆、研究過程

一、 符號定義：

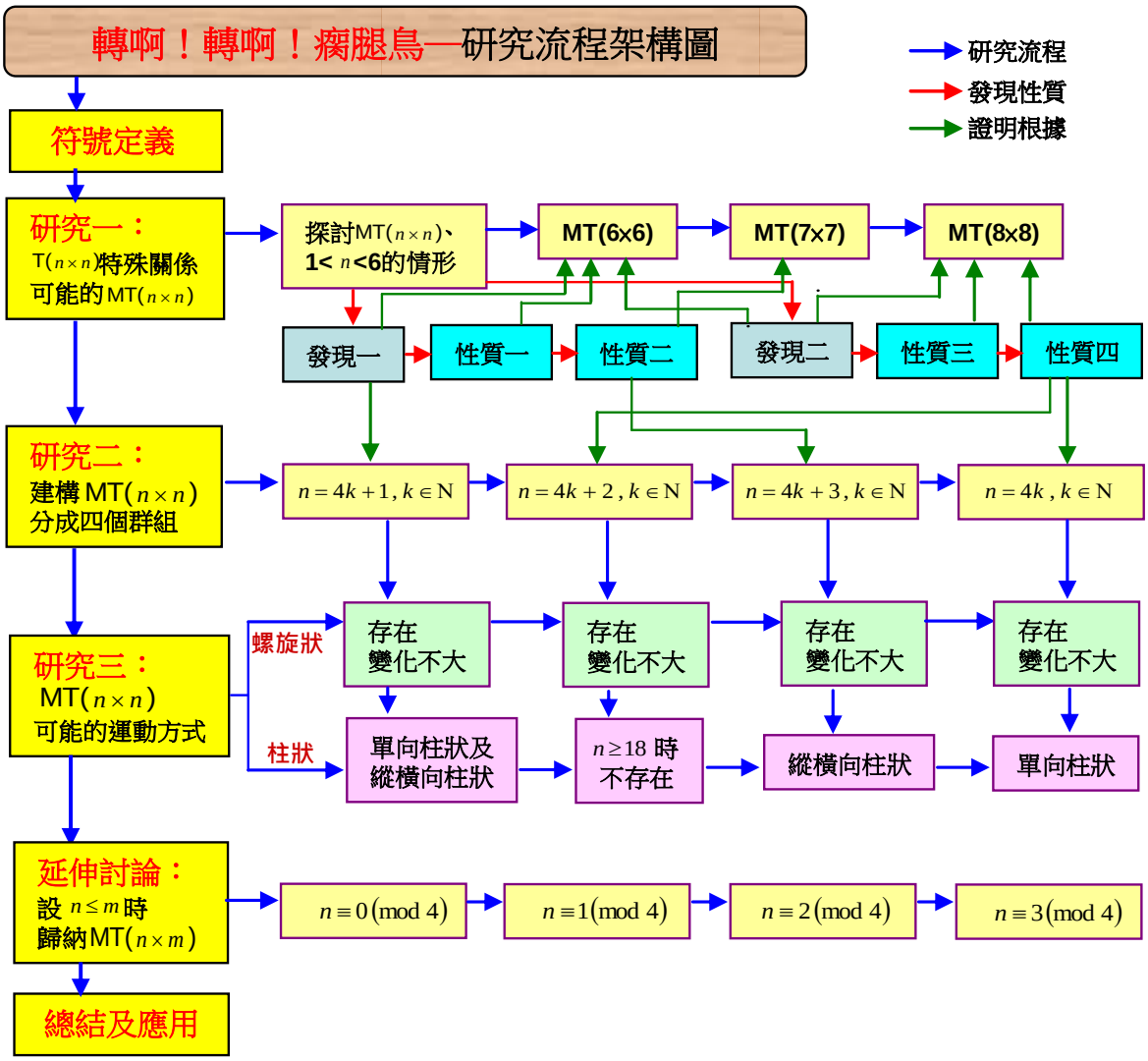
(一) T($n\times n$)：在$n\times n$的方格板上，瘸腿鳥運動形成閉合、不相交的路徑，其運動路徑所經過的方格總數。

(二) T($n\times m$)：在$n\times m$的方格板上，瘸腿鳥運動形成閉合、不相交的路徑，其運動路徑所經過的方格總數。

(三) MT($n\times n$)：在$n\times n$的方格板上，瘸腿鳥運動形成閉合、不相交的路徑，其最長運動路徑所經過的方格總數。

(四) MT($n\times m$)：在$n\times m$的方格板上，瘸腿鳥運動形成閉合、不相交的路徑，其最長運動路徑所經過的方格總數。

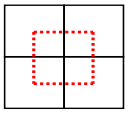
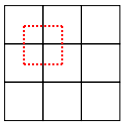
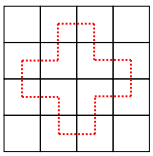
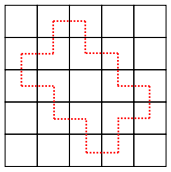
二、 研究流程圖：



三、 研究一：探討瘸腿鳥在 $n \times n$ 的方格板上運動，滿足閉合、不相交的運動路徑有何特殊關係存在？運動路徑所經過的方格數最大可能是多少？

(一) 試試看，從較小的方格板進行運動路徑觀察：紅色虛線為瘸腿鳥的行進路徑。

1. 因為範圍很小，很容易就可以把可能的情形推演完成，即使在其他情況，經過的方格數顯然都是 4 的倍數。

			
T(2×2)=4	T(3×3)=4	T(4×4)=12	T(5×5)=16

2. 發現一：**T($n\times n$)一定是 4 的倍數。**

利用塗色法，將格子分別塗上顏色：

(1) 若 $(i,j)\equiv(0,0)(\mathrm{mod}2)$，則以 (i,j) 為中心的方格被染為黃(Y)色；

(2) 若 $(i,j)\equiv(0,1)(\mathrm{mod}2)$，則以 (i,j) 為中心的方格被染為藍(B)色；

(3) 若 $(i,j)\equiv(1,0)(\mathrm{mod}2)$，則以 (i,j) 為中心的方格被染為綠(G)色；

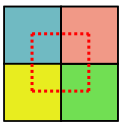
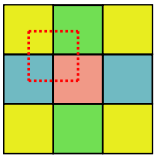
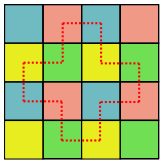
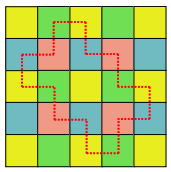
(4) 若 $(i,j)\equiv(1,1)(\mathrm{mod}2)$，則以 (i,j) 為中心的方格被染為粉紅(P)色。

經過歸納，發現瘸腿鳥運動路徑經過的顏色順序只有兩種情況，其中一種可以看成是正方向，另一種是反方向。次序表示為：

(1) Y→G→P→B→Y→G→P→B→…

(2) Y→B→P→G→Y→B→P→G→…

因為路徑是閉合的，且這條路徑每種顏色的方格數目均會一樣，所以路徑的格子數一定是 4 的倍數。由於對稱的特性，所以底下的研究只討論路徑(2)的情況。

			
T(2×2)=4	T(3×3)=4	T(4×4)=12	T(5×5)=16

3. 發現二：**除 $n=2$、MT(2×2)外，其餘 n 值的方格板，MT($n\times n$)最長路徑都不能將每個方格都走過，尤其是位於角落的方格除了 MT(2×2)及 MT(3×3)會在**

路徑上之外，其餘 n 值的方格板，若運動經過位於角落的方格，會自動形成閉合的「口字型」路徑，走過的路徑無法變成最長(最大值)。

4. 探討 MT($n \times n$)、1< n <6 的情形，建構結果如上圖(第四頁)：

(1) T(2×2)：每個顏色都只有 1 格、每一個方格都會經過，所以 MT(2×2)=4；

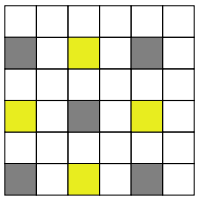
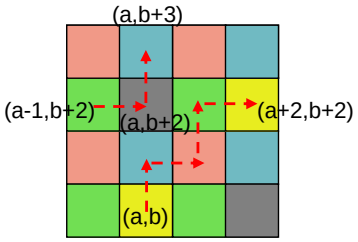
(2) T(3×3)：顏色 P 的方格只有 1 格、1×4=4，所以 MT(3×3)=4；

(3) T(4×4)：角落的方格不可能經過，所以 MT(4×4)=12；

(4) T(5×5)：顏色 P 的方格只有 4 格、4×4=16，所以 MT(5×5)=16。

5. **性質一：若方格(a,b)和(a+2,b+2)，且連接這兩個方格的路徑為運動路徑，則運動路徑不經過方格(a,b+2)。**

先依發現一的方法塗色，再將方格原先被染為黃(Y)色的方格再以黑、黃相間塗色（如圖一）。假設瘸腿鳥經過的顏色順序為 Y→B→P→G→Y…，另一方向運動路徑的顏色順序因對稱性亦同，如圖二。從方格(a,b)到(a+2,b+2)，即黃色到黃色的方格依據路徑如紅色箭頭方向運動，此時上方黑色方格(a,b+2)的路徑依顏色順序為 Y→B→P→G→Y 應為左上角的紅色箭頭方向。若形成封閉圖則從(a+2,b+2)接到(a-1,b+2)，從(a,b)接到(a,b+3)，但這四個方格的正中心點是一個凸四邊形的頂點，且路徑在這個四邊形的外部，故這兩條路一定相交。矛盾。

	
圖一	圖二

6. 考慮 T(6×6)，先依據發現一的方法塗色，再將方格原先被染為黃(Y)色的方格再以黑、黃相間塗色。根據發現二，若除了角落的方格之外其餘原先塗黃色

方格皆有運動經過。假設瘸腿鳥經過的顏色順序為 Y→B→P→G→Y…，另一方向運動路徑的顏色順序因對稱性亦同，則與角落方格相鄰的方格，依運動路徑方向顯示，應為圖三，其中(0,2))到(2,0)為(黃→黃→)。

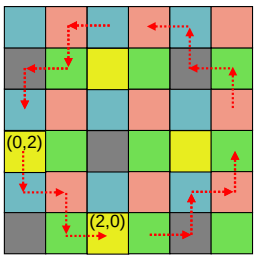
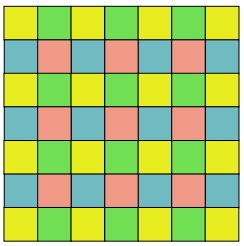
利用性質一，若有(黃→黃→)的路徑，則會有黑色方格不在路徑上。顯然，T(6×6)存在有(黃→黃→) 的路徑，此黑色方格即為(0,0)恰為角落的格子。

去除掉(0,0)角落一格黑色的方格，剩下 4 黑 4 黃，因有(0,2)到(2,0)為(黃→黃→)，若全部皆為(黑→黃→)無法成立，故一定有(黑→黑→)的路徑，所以至少有一黑及一黃的方格不在路徑上，其中除了角落的一個黑色方格無法在運動路徑上之外，仍會有一個黃色方格不在路徑上，故與除了角落的方格之外其餘原先塗黃色方格皆有運動經過，顯然矛盾。

因此，最多只有黃色和黑色、共 7 個方格在運動路徑之上，所以 MT(6×6)=4×7=28。

7. 性質二：塗色後，運動路徑上的方格若任一顏色方格的總和為奇數，則一定存在性質一的情形。

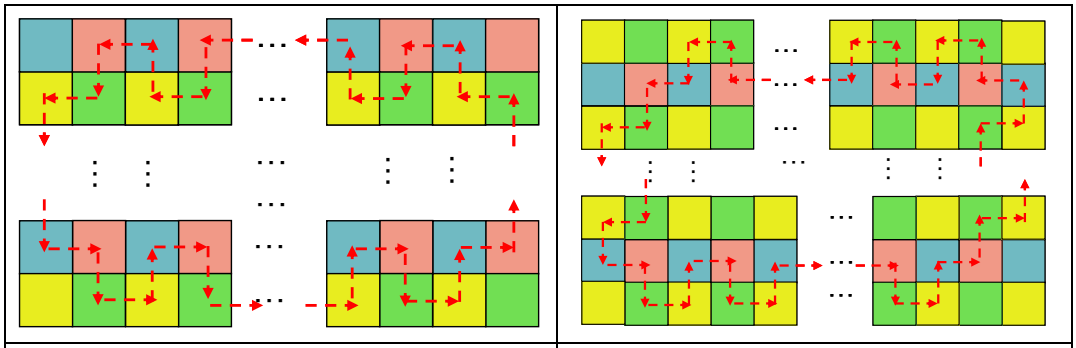
塗色後的四個顏色，運動路徑上的方格若任一顏色有奇數個相同顏色的方格，則再將該顏色的方格相間塗黑、不塗色，使原來奇數方格分成兩色的方格數為一奇一偶。因無法存在全都(黑→不塗色→)相間的情形，故一定存在性質一的情形。

	
圖三	圖四

8. 考慮 T(7×7)，塗色後 P 的方格最少，如圖四，有 9 個，根據性質二，一定存在有性質一的情形，故在移動路徑上的 P 最多只有 8 個，所以 MT(7×7)=4×8=32。

9. 性質三：**為使移動路徑最長，方格板邊上的方格要儘量出現在移動路徑之上，若 n 為偶數時，則位於角落的方格不在路徑上(如下圖左)；若 n 為奇數時，則存在兩組對角，一組對角角落的方格不在路徑上、一組有 L 形的三方格不在路徑上(如下圖右)。**

下圖建構的移動路徑是依 Y→B→P→G→Y…有規律的 4 個一組循環，若若 n 為奇數時，以右下圖上半部二列為例，若 Y、B、P、G 四個顏色為一組，則多了最右邊 Y 及 B 各一個方格，依移動路徑 Y→B→P→G→Y…如紅色箭頭方向造成左上方三格不在移動路徑上，同理右下半部亦同。由發現二可得：若 n 為偶數時，則位於角落的方格不在路徑上(如下圖左)；若 n 為奇數時，則存在兩組對角，一組對角角落的方格不在路徑上、一組有 L 形的三方格不在路徑上(如下圖右)。



n 為偶數時	n 為奇數時

10. 性質四：**當 $n>7$ 時，方格板四邊上至少有兩個方格不在移動路徑上，且移動路徑開始往內部、路徑每往內弓形繞一層轉一次彎，角落的方格皆不在移動路徑上。且角落的方格不在移動路徑上的關係依(L 形的三方格→一格角落)或(一格角落→L 形的三方格→)依次循環出現。**

若方格板四邊邊上的方格均在移動路徑上，則會形成一個封閉的迴路，

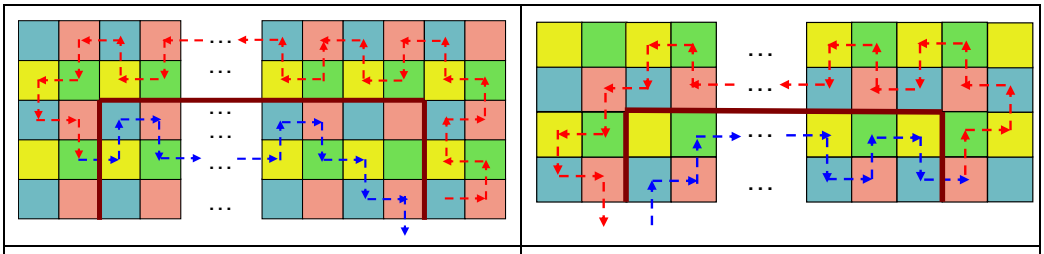
方格板內部的方格皆無行進路徑經過，無法形成最長的移動路徑，故方格板四邊邊上的方格至少有兩格不在移動路徑上，且路徑開始往內部、內部及未經過的邊上方格又形成一個比原來略小的$(n-2)\times(n-4)$或$(n-4)\times(n-4)$的方格板。此時，略小的方格板與原方格板四邊上的方格類似，只能固定往下(上)及(左)右或不在移動路徑上。依 Y→B→P→G→Y…的規律，路徑只能按藍色方向移動，如下圖所示：

(1) 若n為偶數時(如下圖左)，最外層不在移動路徑(紅色)上，只有角落的一格，往內一層移動路徑(藍色)上則有 L 形的三方格。

(2) 若n為奇數時(如下圖右)，最外層不在路徑(紅色)上，有 L 形的三方格，往內一層移動路徑(藍色)上則只有角落的一格。

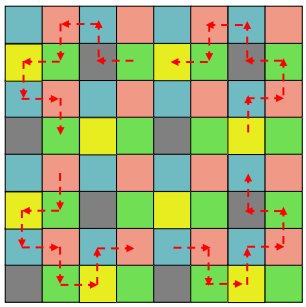
(3) 在$n\times n$的方格板上，若n為奇數時有$\frac{n+1}{2}$層，若n為偶數時有$\frac{n}{2}$層。

(4) 同理，再往內則分別依次循環出現得到性質四。



n為偶數時	n為奇數時

11. 考慮 T(8×8)，塗色後任一色皆為 16 格，再對黃色的方格相間塗黑色、不塗色。根據發現二，餘下黑色 7 格、黃色 8 格，由性質一及性質二，一定存在(黃→黃→)，此時，即為角落的黑色方格無法出現在行進的路徑之上。



(圖五)

假若除了角落的黑色方格之外，其餘的黑及黃色

方格皆在移動路徑之上，則相鄰角落的方格依移動路徑的方向僅能得到相鄰四個角落的四個紅色路徑，如圖五，此時要將四個移動路徑連同其他黑及黃色方格相連，為滿足所有黑及黃色方格皆在路徑上，則邊上的方格也要在移動路徑之上，則會得到一個封閉路徑，但此路徑卻不會經過圖形內部 4×4 的方格，矛盾。

故方格板四邊上存在至少一邊兩個方格不在移動路徑上。又因為圖形上下、左右對稱，不妨令方格板上方邊上的兩格不在移動路徑上，最內兩層根據性質四兩個角落共 6 格不在移動路徑上，所以 T(8×8)=64-4-2-6=52。

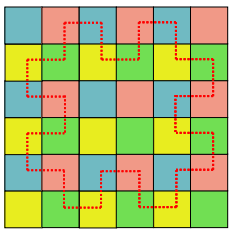
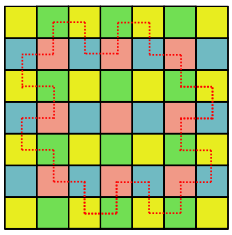
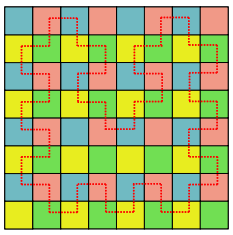
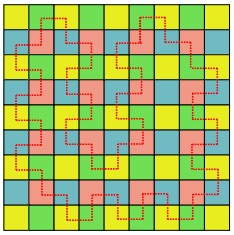
若方格板四邊上至少有兩邊各兩個方格不在移動路徑上，若是在兩個鄰邊則一定有一種相同顏色的方格，如此該顏色包含角落不在移動路徑上的一格至少有 3 個，則移動路徑最長為 T(8×8)=64-3×4=52。若只有對邊不在移動路徑上，則會形成兩個封閉迴路，矛盾。

若有一個角落的相鄰方格不在移動路徑上，即(0,1)和(1,0)。根據性質三，(0,2)、(1,1)、(2,0)不在移動路徑上，包含原先角落的(0,0)，共有原為塗黃色的共三格不在移動路徑上，則移動路徑最長為 T(8×8)=64-3×4=52。

綜合以上的推證，故得 MT(8×8)= 52。

12. 考慮 T(9×9)，塗色後 P 的格子最少，共有 16 個，故 MT(9×9)=4×16=64。

13. 探討 MT($n\times n$)，$6\le n\le 9$，建構如下圖：

			
MT(6×6)=28	MT(7×7)=32	MT(8×8)=52	MT(9×9)=64

(二) 討論 T($n\times n$)，$6\le n\le 9$ 後，發現 MT($n\times n$)的規律和 n(mod 4) 有關。猜測最小

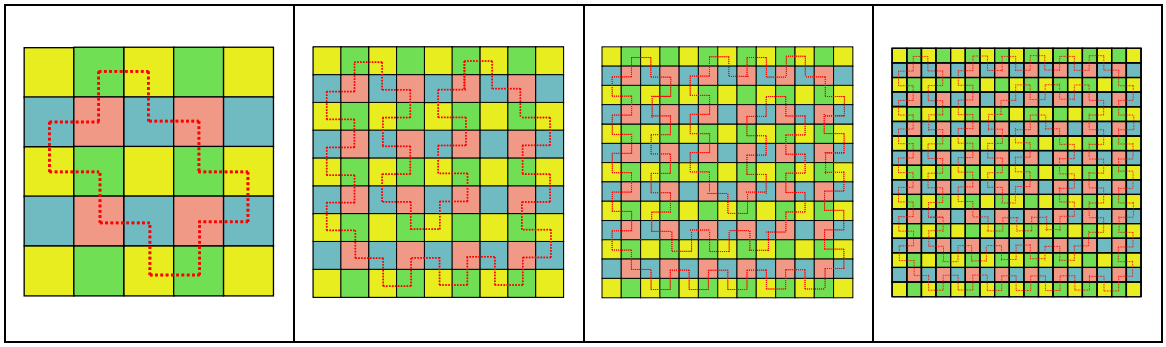
的上界可能為$(n-1)^2$附近的值，但需是 4 的倍數，（以下 N 為自然數）。

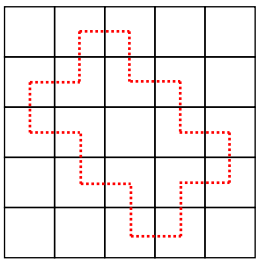
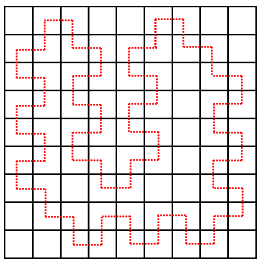
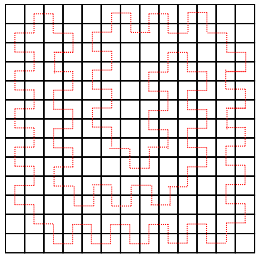
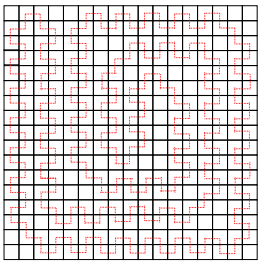
1. $n=4k+1, k\in \mathrm{N}$ ， $\mathrm{MT}(n\times n)=(n-1)^2$ ；
2. $n=4k+2, k\geq 2, k\in \mathrm{N}$ ， $\mathrm{MT}(n\times n)=(n-1)^2-1$ ；
3. $n=4k+3, k\geq 1, k\in \mathrm{N}$ ， $\mathrm{MT}(n\times n)=(n-1)^2-4$ ；
4. $n=4k, k\in \mathrm{N}$ ， $\mathrm{MT}(n\times n)=(n-1)^2+3$ 。

二、研究二：**建構瘸腿鳥在$n\times n$的方格板上運動，滿足閉合、不相交的最長運動路徑，所經過的最大方格數。**

(一) 結果一： $n=4k+1, k\in \mathrm{N}$ ， $\mathrm{MT}(n\times n)=(n-1)^2$

1. 先依據發現一的方法塗色，但塗色後粉紅(P)色的格子最少，根據發現一：**T($n\times n$)一定是 4 的倍數，且路徑上每種顏色的方格數目均會一樣**。因圖形有$n=4k+1$列(行)，每 2 列(行)會有粉紅(P)色的格子，扣除最後一列(行)，有$\frac{n-1}{2}=2k$列(行)會有粉紅(P)色的格子，粉紅(P)色的格子有$(2k)^2$個，故得到可能的最大值為$\mathrm{T}(n\times n)=4\times(2k)^2=4\times\left(2\times\left(\frac{n-1}{4}\right)\right)^2=(n-1)^2$ 。
2. 建構$\mathrm{MT}(n\times n)=(n-1)^2$如下：

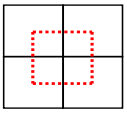
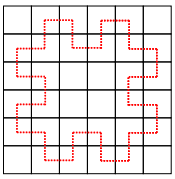


			
MT(5×5)=16	MT(9×9)=64	MT(13×13)=144	MT(17×17)=256

3. 由 1,2 可得當 $n=4k+1, k\in \mathrm{N}$ 時， $\mathrm{MT}(n\times n)=(n-1)^2$ 。

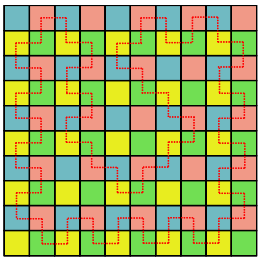
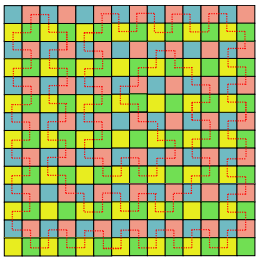
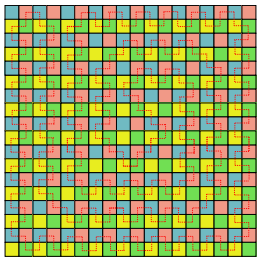
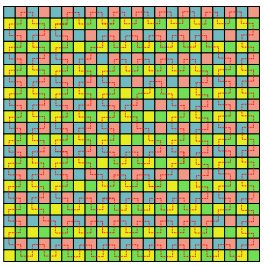
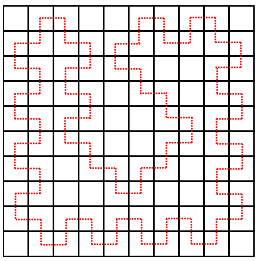
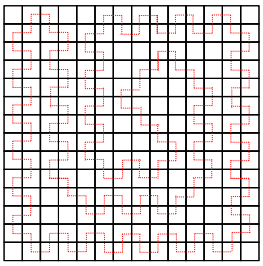
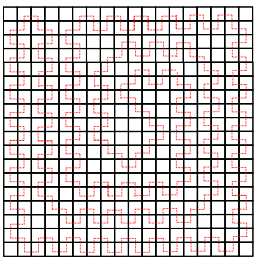
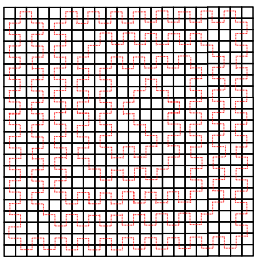
(二) 結果二：$\mathrm{MT}(2\times 2)=4, \mathrm{MT}(6\times 6)=28$，$n=4k+2, k\geq 2, k\in \mathrm{N}$，$\mathrm{MT}(n\times n)=(n-1)^2-1$

1. 研究一已證明並建構 $\mathrm{MT}(2\times 2)=4, \mathrm{MT}(6\times 6)=28$ 。

	
MT(2×2)=4	MT(6×6)=28

2. 先依據發現一的方法塗色，塗色後四個顏色的格子一樣多，當 $k\geq 2, k\in \mathrm{N}$ 可仿照研究一中 T(8×8)的證明逐一分析，亦可利用性質四(一格角落→L 形的三方格→) 。故以從外而內兩層為一單位，只需扣除必不在路徑的任一顏色格子的 4 倍即可，每兩層會有兩格(最內一層有一格)同色的格子不在路徑上，當 $n=4k+2$ 共有 $2k+1$ 層，可得必不在路徑上的有 $4(2k+1)$ 個格子，故可能的最大值為 $\mathrm{T}(n\times n)=n^2-4(2k+1)=n^2-4\left(2\times\frac{n-2}{4}+1\right)=(n-1)^2-1$ 。

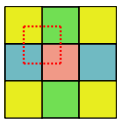
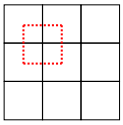
3. 建構 $\mathrm{MT}(n\times n)=(n-1)^2-1$ 如下：

			
			
MT(10×10)=80	MT(14×14)=168	MT(18×18)=288	MT(22×22)=440

4. 由 1,2,3，當 $n=4k+2,\ k\in\mathrm{N}$，除 $\mathrm{MT}(2\times2)=4, \mathrm{MT}(2\times2)=28$ 外，可得 $\mathrm{MT}(n\times n)=(n-1)^2-1$。

(三) 結果三：$\mathrm{MT}(3\times3)=4$，$n=4k+3, k\geq1, k\in\mathrm{N}$，$\mathrm{MT}(n\times n)=(n-1)^2-4$

1. 研究一已證明並建構 $\mathrm{MT}(3\times3)=4$。

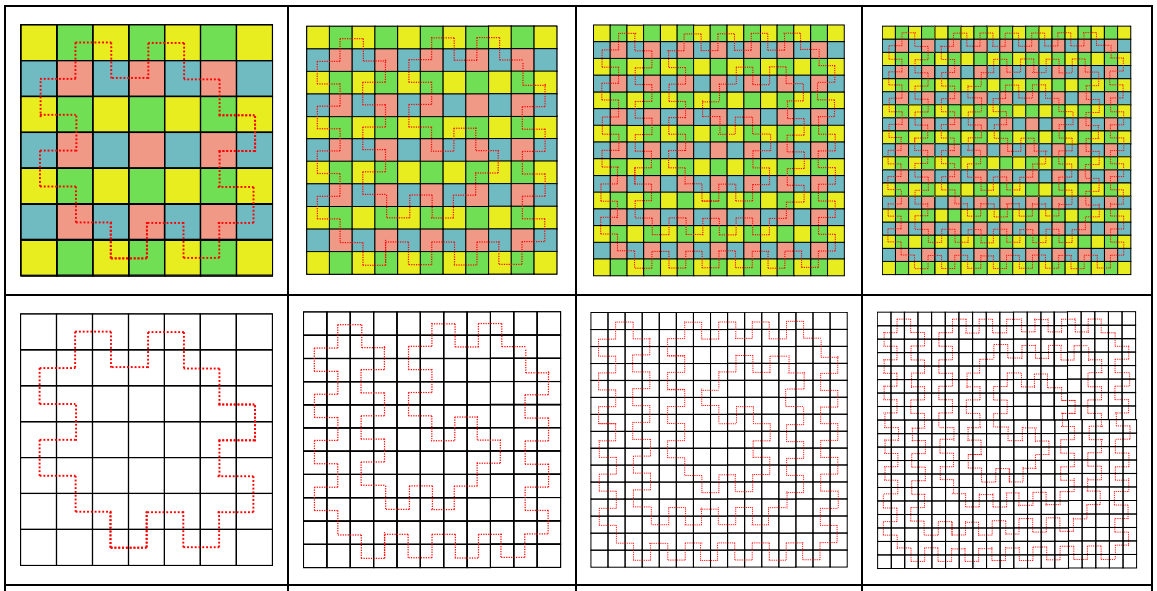
	
MT(3×3)=4	

2. 先依據發現一的方法塗色，塗色後粉紅(P)色的格子最少，因圖形有 $n=4k+3$ 列(行)，每 2 列(行)會有粉紅(P)色的格子，扣除最後一列(行)，故有 $\frac{n-1}{2}=2k+1$ 列(行)會有粉紅(P)色的格子，故粉紅(P)色的格子有 $(2k+1)^2$ 個，而 $(2k+1)^2$ 為奇數，根據性質二：**塗色後，運動路徑上的方格若任一顏色方格的總和為奇數，則一定存在性質一的情形。**故在路徑上的粉紅(P)色的格子最多只有

$(2k+1)^2-1$個，故可能的最大值為

$$\mathrm{T}(n\times n)=4\times\left((2k+1)^2-1\right)=4\times\left(\left(2\times\frac{n-3}{4}+1\right)^2-1\right)=(n-1)^2-4\text{ 。}$$

3. 建構$\mathrm{MT}(n\times n)=(n-1)^2-4$如下：



MT(7×7)=32	MT(11×11)=96	MT(15×15)=192	MT(19×19)=320

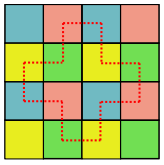
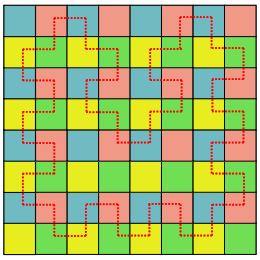
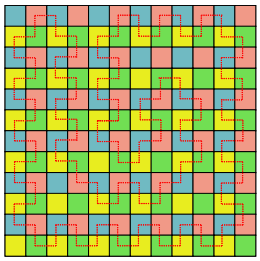
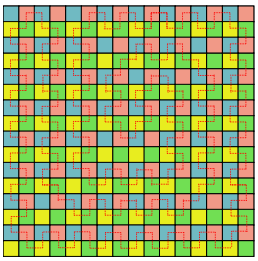
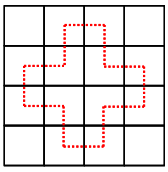
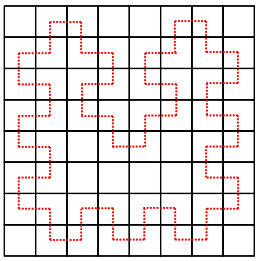
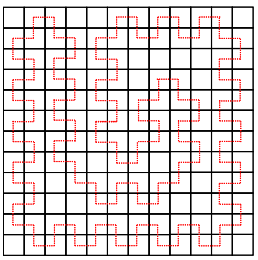
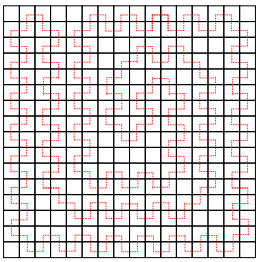
4. 由 1,2,3，可得當$n=4k+3,k\in\mathrm{N}$時，除$\mathrm{MT}(3\times3)=4$外，$\mathrm{MT}(n\times n)=(n-1)^2-4$ 。

(四) 結果四：$n=4k,k\in\mathrm{N}$，$\mathrm{MT}(n\times n)=(n-1)^2+3$

1. 可仿照研究一中 T(8×8)的證明逐一分析，亦可利用性質四 (一格角落→L 形的三方格→) 。故以從外而內兩層為一單位，只需扣除必不在路徑的任一顏色格子的 4 倍即可，每兩層會產生兩格(最內一層皆在路徑上)同色的格子不在路徑上，$n=4k$時共有$2k$層，扣除最內一層，可得必不在路徑上的有$4(2k-1)$個格子，故可能的最大值為

$$\mathrm{T}(n\times n)=n^2-4(2k-1)=n^2-4\left(2\times\frac{n}{4}-1\right)=n^2-2n+4=(n-1)^2+3\text{ 。}$$

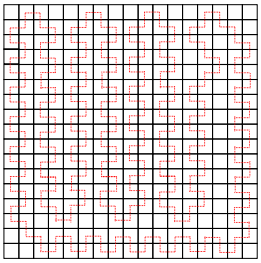
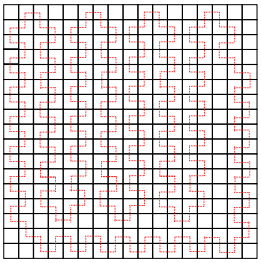
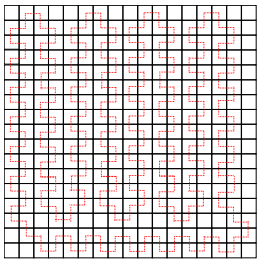
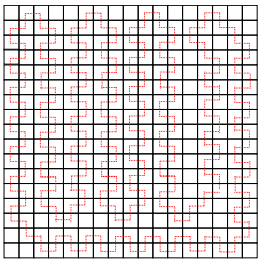
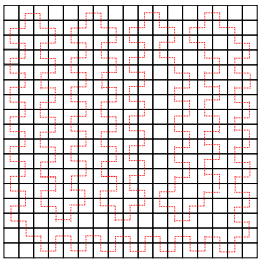
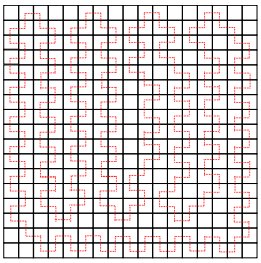
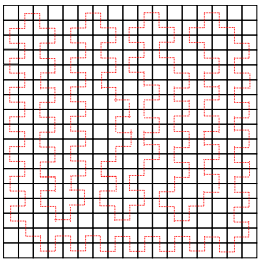
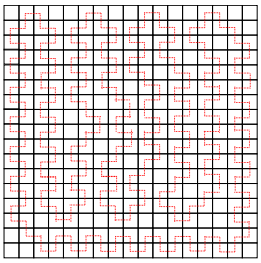
2. 建構$\mathrm{MT}(n\times n)=(n-1)^2+3$如下：

			
			
MT(4×4)=12	MT(8×8)=52	MT(12×12)=124	MT(16×16)=228

3. 由 1,2，可得 $n=4k\,,\,k\in\mathrm{N}$ ， $\mathrm{MT}(n\times n)=(n-1)^2+3$ 。

四、 研究三：**探討瘸腿鳥在 $n\times n$ 的方格板上運動，形成滿足閉合、不相交的最長運動路徑的可能運動方式。**

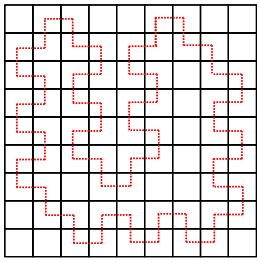
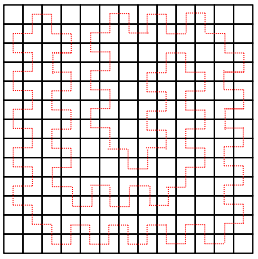
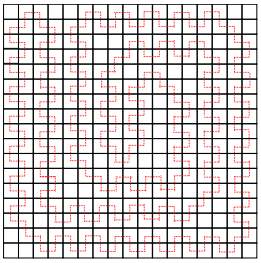
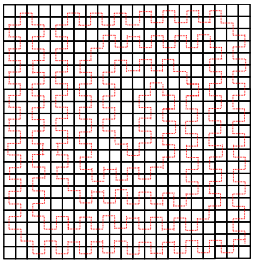
(一) 經過歸納，大致可分為兩大類：一類是螺旋狀的、一類是柱狀的。這裡左右上下對稱的都視為相同，有些細部的小變化並不影響移動路徑的方格數，因此並未加以細分，在這裡仍歸納為同一類。如下圖：柱狀 MT(17×17)=256，雖然有些細部的小變化，但在這視為一大類，螺旋狀的亦同。

(二) $n=4k+1, k\geq 2, k\in \mathrm{N}$ ， $\mathrm{MT}(n\times m)=(n-1)^2$

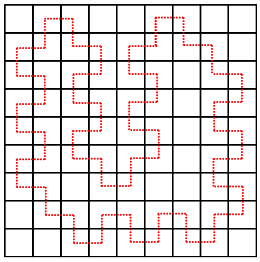
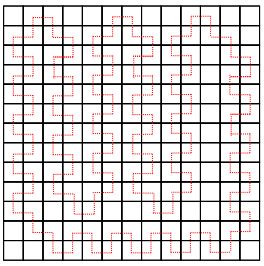
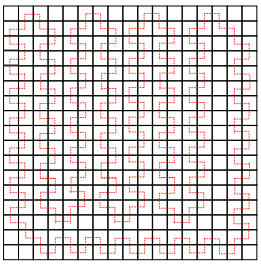
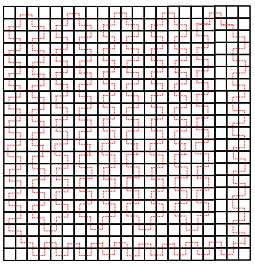
1. 大致可區分為兩大類：一類是螺旋狀的、一類是柱狀的。

2. $n=4k+1, k\geq 2, k\in \mathrm{N}$ ， $\mathrm{MT}(n\times n)=(n-1)^2$ 螺旋狀的路徑，螺旋狀的變化不大，由最外層向內如帶狀螺旋繞入方格板內部。

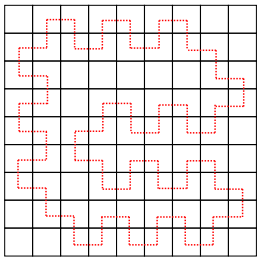
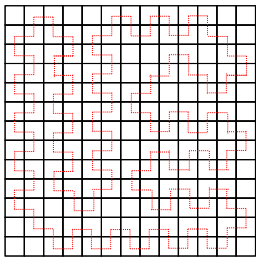
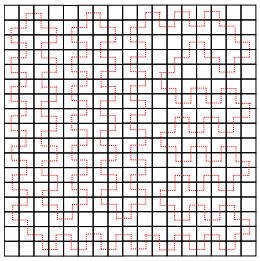
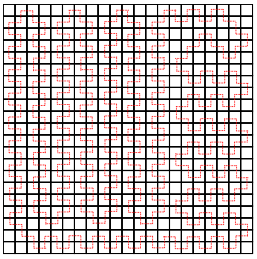
			
MT(9×9)=64	MT(13×13)=144	MT(17×17)=256	MT(21×21)=400

3. $n=4k+1, k\geq 2, k\in \mathrm{N}$ ， $\mathrm{MT}(n\times n)=(n-1)^2$ 柱狀的路徑。

(1) 由方格板的一邊為基礎的帶狀，再由靠內部的一側路徑發展出數條柱狀的路徑。

			
MT(9×9)=64	MT(13×13)=144	MT(17×17)=256	MT(21×21)=400

(2) 下圖是最右側 $n\times 7$ (縱x橫)的方格板發展出橫向的小柱狀，可發展出橫向的小柱狀的方格版的範圍為 $n\times(4\mathrm{r}+3), 4r+3\leq n, r\in \mathrm{N}$ ，如此皆可得到 $\mathrm{MT}(n\times n)=(n-1)^2$ 。

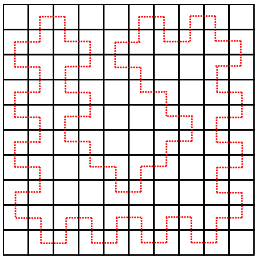
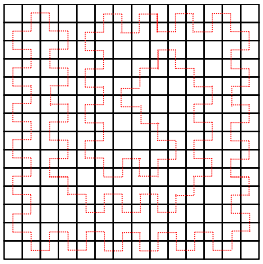
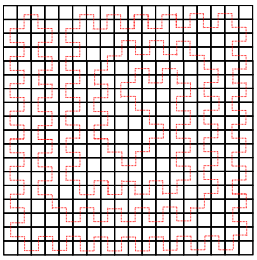
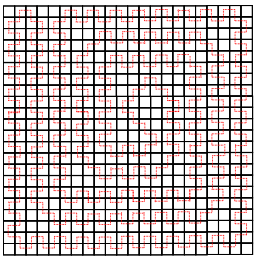
			
MT(9×9)=64	MT(13×13)=144	MT(17×17)=256	MT(21×21)=400

4. 不論是螺旋狀或柱狀都可以走出 $n=4k+1, k\geq 2, k\in \mathrm{N}$ ， $\mathrm{MT}(n\times n)=(n-1)^2$ 的路徑。其中，當 MT(9×9)=64 螺旋狀或柱狀運動路徑並無差別。

(三) $n=4k+2, k\geq 2, k\in \mathrm{N}$ ， $\mathrm{MT}(n\times n)=(n-1)^2-1$ 。

1. 只有螺旋狀的一大類。

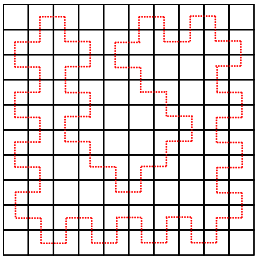
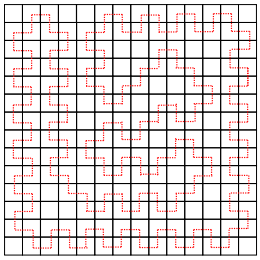
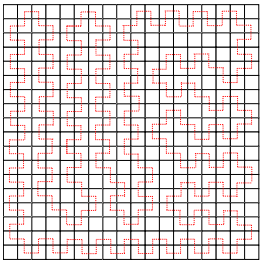
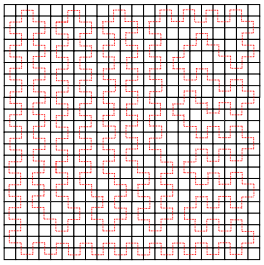
2. $n=4k+2, k\geq 2, k\in \mathrm{N}$ ， $\mathrm{MT}(n\times n)=(n-1)^2-1$ ，螺旋狀的路徑螺旋狀的變化不大，由最外層向內如帶狀螺旋繞入方格板內部。

			
MT(10×10)=80	MT(14×14)=168	MT(18×18)=288	MT(22×22)=440

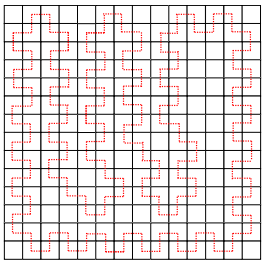
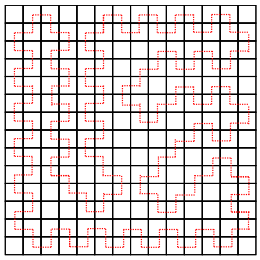
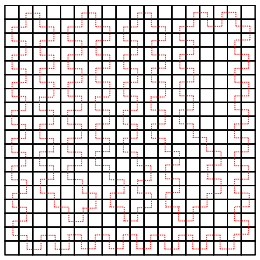
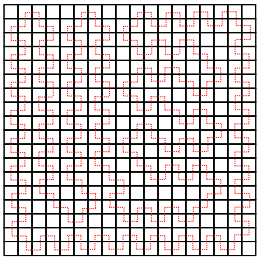
3. $n=4k+2, k\geq 2, k\in \mathrm{N}$ ，的柱狀的路徑，只有單方向的柱狀，在此情形無法得到較大的柱狀運動路徑。

(1) 當 $3\geq k\geq 2, k\in \mathrm{N}$ 時， $\mathrm{MT}(n\times n)=(n-1)^2-1$ ，在 MT(10×10)=80 因方格板尚小螺旋狀或柱狀並差別，下圖的 MT(14×14)=168 的運動路徑亦因方格板較小有一點柱狀和螺旋狀的混合，在更大的方格板中柱狀的運動路徑都無法達到

最大。當 $n=4k+2, k\geq 4, k\in \mathrm{N}$ 時，$\mathrm{T}(n\times n)=(n-1)^2-5$，最右側 $n\times 8$ 的方格板發展出橫向的小柱狀，此路徑為目前找到最大的柱狀路徑之一。

			
MT(10×10)=80	MT(14×14)=168	T(18×18)=284	T(22×22)=436

(2) $n=4k+2, k\geq 4, k\in \mathrm{N}$，比較其他的柱狀的路徑都不比 $\mathrm{T}(n\times n)=(n-1)^2-5$ 大，以 T(18×18)為例，若無部份的方格板發展出橫向的小柱狀，路徑上的格子則會變少；在下圖的 T(14×14)，有些運動路徑雖部份的方格板發展出橫向的小柱狀，仍無法達到最大路徑。

			
T(14×14)=164	T(14×14)=164	T(18×18)=280	T(18×18)=284

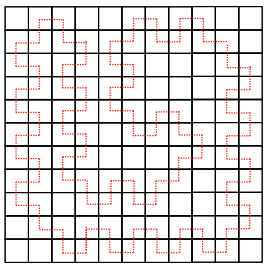
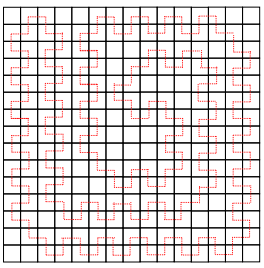
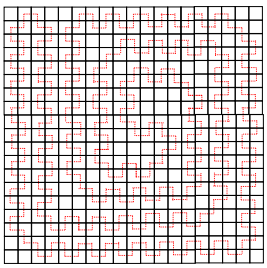
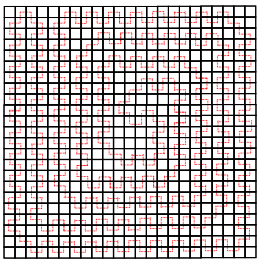
4. 螺旋狀才可以走出 $n=4k+2, k\geq 4, k\in \mathrm{N}$，$\mathrm{MT}(n\times n)=(n-1)^2-1$ 的路徑。

(四) $n=4k+3, k\geq 2, k\in \mathrm{N}$，$\mathrm{MT}(n\times n)=(n-1)^2-4$。

1. 大致可分為兩大類：一類是螺旋的、一類是柱狀的。

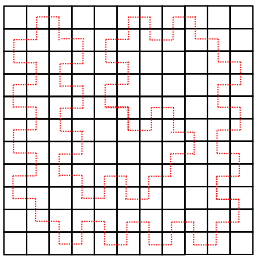
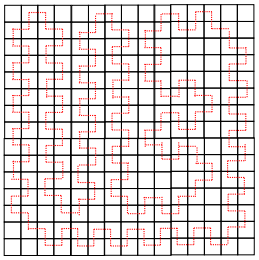
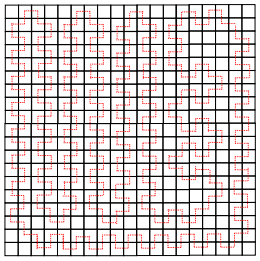
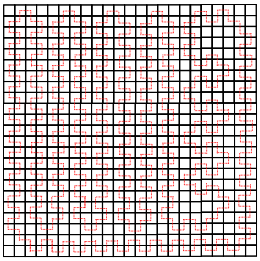
2. $n=4k+3, k\geq 2, k\in \mathrm{N}$，$\mathrm{MT}(n\times n)=(n-1)^2-4$ 螺旋狀的路徑，螺旋狀的路徑螺

旋狀的變化不大，由最外層向內如帶狀螺旋繞入方格板內部。

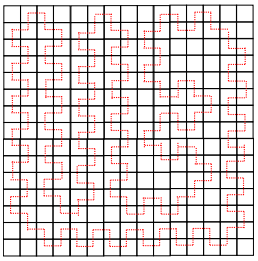
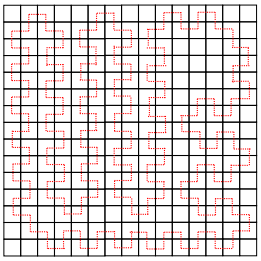
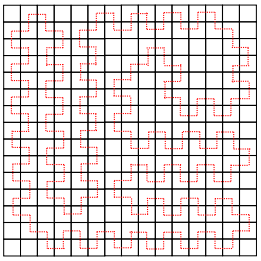
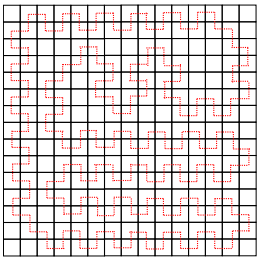
			
MT(11×11)=96	MT(15×15)=192	MT(19×19)=320	MT(23×23)=480

3. $n=4k+3, k\geq 2, k\in \mathrm{N}$ ， $\mathrm{MT}(n\times n)=(n-1)^2-4$ 柱狀的路徑，如 $n=4k+1$ 或 $n=4k, k\in \mathrm{N}$ 只有單方向的柱狀在此情形無法得到最大的運動路徑。

(1)由方格板的一邊為基礎的帶狀，再由靠內部的一側路徑發展出數條柱狀的路徑，下圖是較右側$n\times 5$的方格板再發展出橫向的小柱狀。

			
MT(11×11)=96	MT(15×15)=192	MT(19×19)=320	MT(23×23)=480

(2)下圖是$\mathrm{MT}(n\times n)=(n-1)^2-4$方格板中的$n\times(4r+1), 4r+1<n, r\in \mathrm{N}$的方格板再發展出橫向的小柱狀的情形，當 $r\geq 2$時，橫向的柱狀中會再發展出 $r-1$個縱向更小的柱狀。

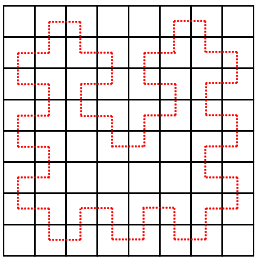
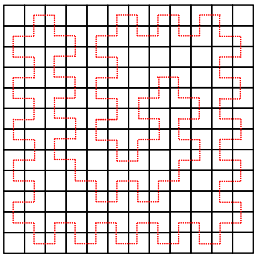
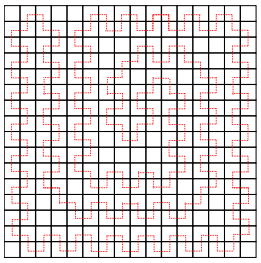
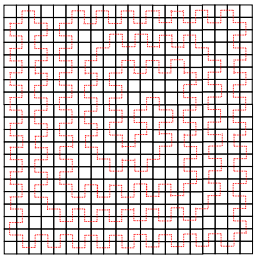
			
MT(15×15)=192	MT(15×15)=192	MT(15×15)=192	MT(15×15)=192

4. 不論是螺旋狀或柱狀都可以走出 $n=4k+3, k\geq 2, k\in \mathrm{N}$，$\mathrm{MT}(n\times n)=(n-1)^2-4$ 的路徑。其中，當 MT(11×11)=96 螺旋狀或柱狀並無差別。

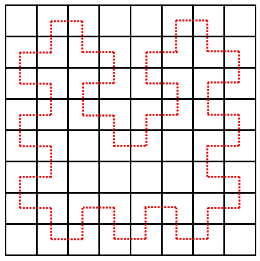
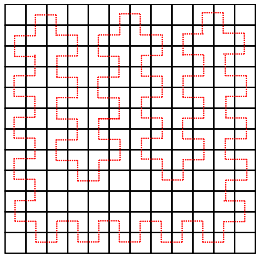
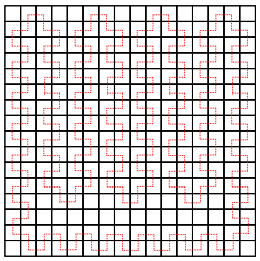
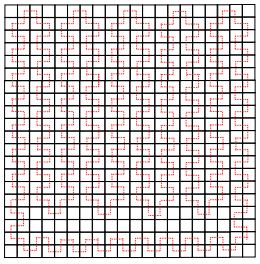
(五) $n=4k, k\geq 2, k\in \mathrm{N}$ ， $\mathrm{MT}(n\times n)=(n-1)^2+3$ 。

1. 大致可分為兩大類：一類是螺旋的、一類是柱狀的。

2. $n=4k, k\geq 2, k\in \mathrm{N}$ ， $\mathrm{MT}(n\times n)=(n-1)^2+3$ 螺旋狀的路徑，螺旋狀的路徑螺旋狀的變化不大，由最外層向內如帶狀繞入方格板內部。

			
MT(8×8)=52	MT(12×12)=124	MT(16×16)=228	MT(20×20)=364

3. $n=4k, k\geq 2, k\in \mathrm{N}$ ， $\mathrm{MT}(n\times n)=(n-1)^2+3$ 柱狀的路徑，由方格板的一邊為基礎的帶狀，再由靠內部的一側路徑發展出數條柱狀的路徑，且只有單方向的柱狀可以形成最大運動路徑。

			
MT(8×8)=52	MT(12×12)=124	MT(16×16)=228	MT(20×20)=364

4. 不論是螺旋狀或柱狀都可以走出 $n=4k$, $k\geq 2$, $k\in \mathrm{N}$ ，$\mathrm{MT}(n\times n)=(n-1)^2+3$ 的路徑。其中，當 MT(8×8)=52 螺旋狀或柱狀並無差別。

(六) 除了 $n=4k+2$, $k\in \mathrm{N}$ 柱狀的的路徑在 $n\geq 18$ 明顯變少，其餘都可以找到螺旋狀和柱狀的相同最大運動路徑格子數。

(七) 螺旋狀的路徑變化不大，都是由最外層向內如帶狀繞入方格板內部，且都存在最大運動路徑。

(八) 柱狀的路徑在 $n=4k+1$, $k\in \mathrm{N}$ 有單向及縱橫向的柱狀可以形成最大運動路徑；$n=4k+3$, $k\in \mathrm{N}$ 為縱橫向的柱狀可以形成最大運動路徑；$n=4k$, $k\in \mathrm{N}$ 時，單向柱狀可以形成最大運動路徑；而在 $n=4k+2$, $k\in \mathrm{N}$ ，$n\geq 18$ 時，無柱狀最大運動路徑。

伍、研究結果

一、 發現一：T($n\times n$)一定是 4 的倍數。

將格子分別塗上顏色：

(1) 若 $(i,j)\equiv(0,0)(\mathrm{mod}2)$ ，則以 (i,j) 為中心的方格被染為黃(Y)色；

(2) 若 $(i,j)\equiv(0,1)(\mathrm{mod}2)$ ，則以 (i,j) 為中心的方格被染為藍(B)色；

(3) 若 $(i,j)\equiv(1,0)(\mathrm{mod}2)$ ，則以 (i,j) 為中心的方格被染為綠(G)色；

(4) 若 $(i, j) \equiv (1,1)(\mathrm{mod}\,2)$，則以 (i, j) 為中心的方格染被為粉紅(P)色。

經過歸納，發現瘸腿鳥運動路徑經過的顏色順序只有兩種情況，其中一種可以看成是正方向，另一種是反方向。次序表示為：

(1) Y→G→P→B→Y→G→P→B→…

(2) Y→B→P→G→Y→B→P→G→…

二、 發現二：除 $n=2$、MT(2×2)外，其餘 n 值的方格板，MT($n \times n$)最長路徑都不能將每個方格都走過，尤其是位於角落的方格除了 MT(2×2)及 MT(3×3)會在路徑上之外，其餘 n 值的方格板，若運動經過位於角落的方格，會自動形成閉合的「口字型」路徑，走過的路徑無法變成最長(最大值)。

三、 性質一：若方格(a,b)和(a+2,b+2)，且連接這兩個方格的路徑為運動路徑，則運動路徑不經過方格(a,b+2)。

四、 性質二：塗色後，運動路徑上的方格若任一顏色方格的總和為奇數，則一定存在性質一的情形。

五、 性質三：為使移動路徑最長，方格板邊上的方格要儘量出現在移動路徑之上，若 n 為偶數時，則位於角落的方格不在路徑上；若 n 為奇數時，則存在兩組對角，一組對角角落的方格不在路徑上、一組有 L 形的三方格不在路徑上。

六、 性質四：當 $n>7$ 時，方格板四邊上至少有兩個方格不在移動路徑上，且移動路徑開始往內部、路徑每往內弓形繞一層轉一次彎，角落的方格皆不在移動路徑上。角落的方格不在移動路徑上的關係依(L 形的三方格→一格角落)或(一格角落→L 形的三方格→)依次循環出現。

七、 結果一～結果四：

歸納結果	n 值範圍，$k \in \mathrm{N} \cup 0$	$\mathrm{MT}(n \times n)$	例外情形
結果一	$n = 4k + 1$	$(n-1)^2$	無
結果二	$n = 4k + 2$	$(n-1)^2 - 1$	$\mathrm{MT}(2 \times 2) = 4, \mathrm{MT}(6 \times 6) = 28$
結果三	$n = 4k + 3$	$(n-1)^2 - 4$	$\mathrm{MT}(3 \times 3) = 4,$
結果四	$n = 4k$	$(n-1)^2 + 3$	無

八、 閉合、不相交的最長移動路徑大致可區分為兩大類，其中一類是螺旋的、一類是柱狀的。在本研究裡左右、上下對稱的都視為相同，一些細部的小變化並不影響移動路徑經過的方格數者，不予細分，仍歸納為同一類。

九、 除了 $n = 4k + 2$，$k \in \mathrm{N}$ 柱狀的的路徑在 $n \geq 18$ 後明顯變少，其餘都可以找到螺旋狀和柱狀的相同路徑格子數。

十、 螺旋狀的路徑變化不大，都是由最外層向內如帶狀繞入方格板內部，且都存在最大運動路徑。柱狀的路徑在 $n = 4k + 1$，$k \in \mathrm{N}$ 有單向及縱橫向的柱狀可以形成最大運動路徑； $n = 4k + 3$，$k \in \mathrm{N}$ 為縱橫向的柱狀可以形成最大運動路徑；$n = 4k$，$k \in \mathrm{N}$ 時，單向柱狀可以形成最大運動路徑；而在 $n = 4k + 2$，$k \in \mathrm{N}$，$n \geq 18$ 時，無柱狀最大運動路徑。

陸、討論與結論

一、 $\mathrm{MT}(n \times n)$ 在 n 為奇數時，證明利用塗色法明顯容易得多，但偶數部份的證明卻較難。其實不論 n 為奇數或偶數，都有性質三和性質四的規律，只是 n 為奇數很容易運用塗色法清楚地證出。

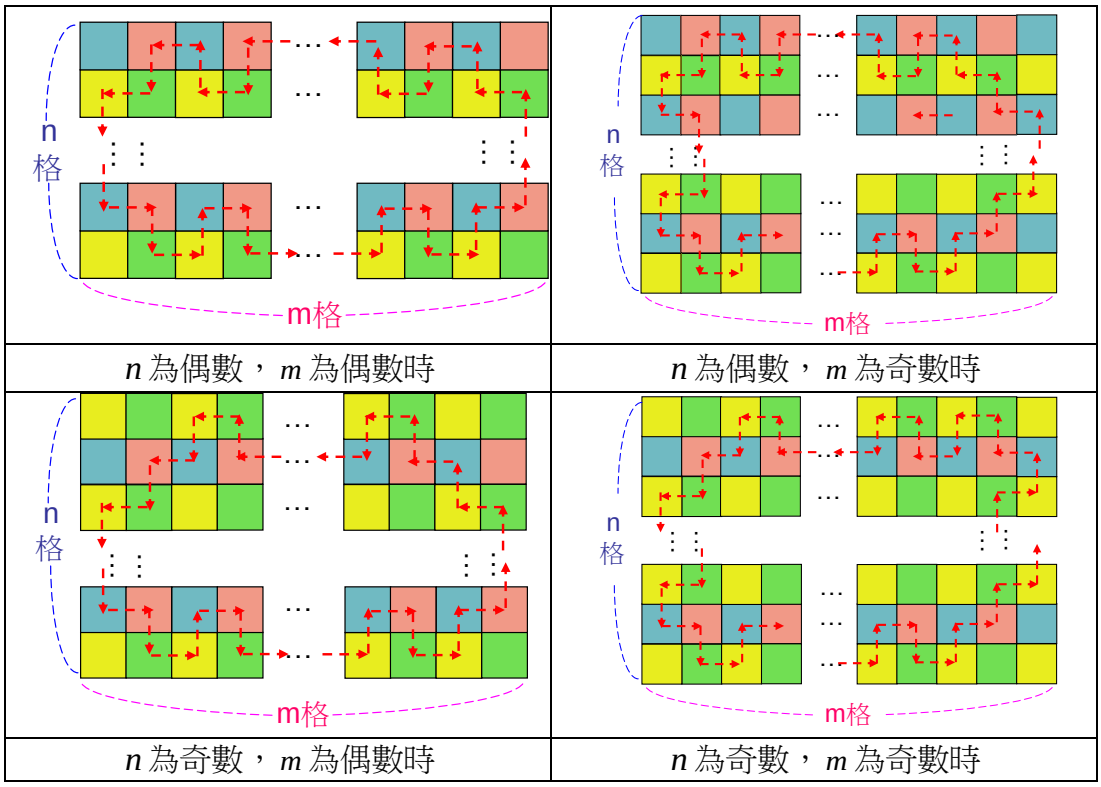
二、 不論n為何，$\mathrm{MT}(n\times n)$大約為$(n-1)^2$，且一定是 4 的倍數。但受限於n是否為 4 的倍數，在$n=4k$ 時略大，在$n=4k+3$ 時略小。

三、 若要求路徑不需封閉，$\mathrm{MT}(n\times n)$值會變得如何?因圖形不封閉故按照路次序不需回到起始點，只需中間路徑按照：Y→G→P→B→Y→G→P→B→… 或 Y→B→P→G→Y→B→P→G→…。故路徑不會一定是 4 的倍數，所以不封閉的$\mathrm{MT}(n\times n)$至少比封閉的情形還大，這又是一個有趣又值得研究的問題。

四、 目前的研究是討論正方形$n\times n$的情形，若是延伸討論瘸腿鳥在$n\times m$的方格板上運動，形成滿足閉合、不相交的最長運動路徑的可能運動方式，則結果又會是如何?以下是一些延伸的討論結果。

(一) 矩形$n\times m$的情形更複雜、更難證明，根據正方形$n\times n$的結論，歸納出找到的最長移動路徑。

(二) 在矩形$n\times m$時，<u>性質三</u>依n、m為偶數或奇數，位於角落的方格不在路徑上的情形如下：



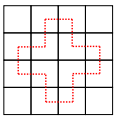
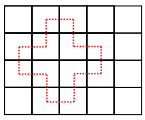
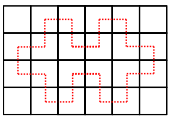
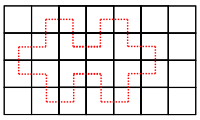
n為偶數，m為偶數時	n為偶數，m為奇數時
n為奇數，m為偶數時	n為奇數，m為奇數時

(三) 在矩形 $n\times m$ 時，性質四的性質仍然存在，角落的方格不在移動路徑上的關係依(L 形的三方格→一格角落)或(一格角落→L 形的三方格→)依次循環出現。

(四) 設 $n\le m$，歸納出找到 MT($n\times m$)如下：

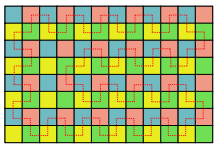
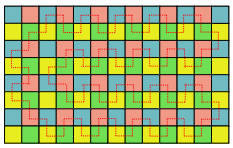
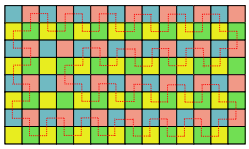
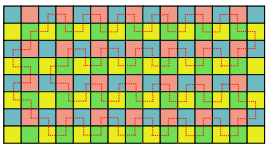
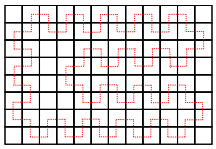
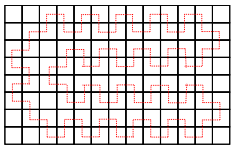
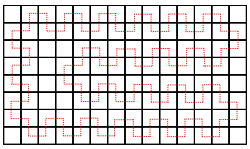
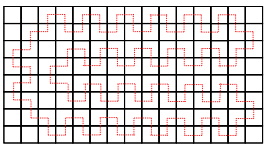
1. 若 $n\equiv 0 \pmod 4$ 時：

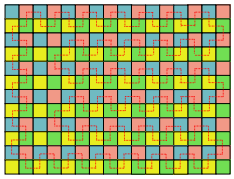
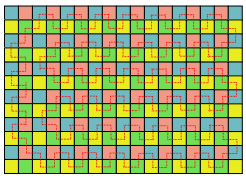
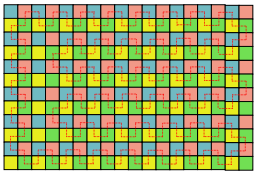
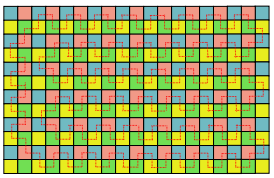
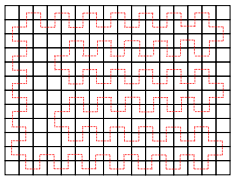
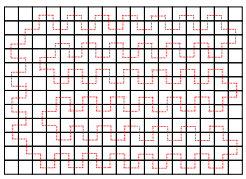
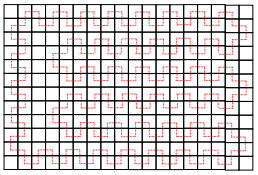
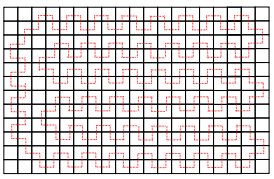
(1) $n=4$ 時，$\mathrm{MT}(n\times m)=4\left(\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor\times 2-1\right)$。

$m\equiv 0 \pmod 4$	$m\equiv 1 \pmod 4$	$m\equiv 2 \pmod 4$	$m\equiv 3 \pmod 4$
			
MT(4×4)=12	MT(4×5)=12	MT(4×6)=20	MT(4×7)=20

(2) $n>4$ 時，若 $m\equiv 0,2 \pmod 4$, $\mathrm{MT}(n\times m)=n(m-2)+4$。

(3) $n>4$ 時，若 $m\equiv 1,3 \pmod 4$, $\mathrm{MT}(n\times m)=n(m-1)-4$。

$m\equiv 0 \pmod 4$	$m\equiv 1 \pmod 4$	$m\equiv 2 \pmod 4$	$m\equiv 3 \pmod 4$
			
			
MT(8×12)=84	MT(8×13)=92	MT(8×14)=100	MT(8×15)=108

$m\equiv 0\pmod 4$	$m\equiv 1\pmod 4$	$m\equiv 2\pmod 4$	$m\equiv 3\pmod 4$
			
			
MT(12×16)=172	MT(12×17)=188	MT(12×18)=196	MT(12×19)=212

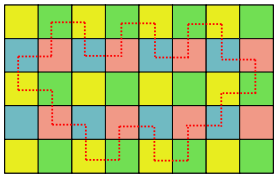
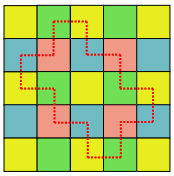
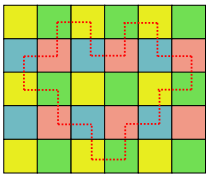
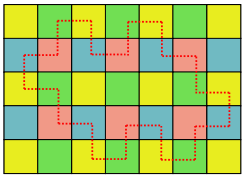
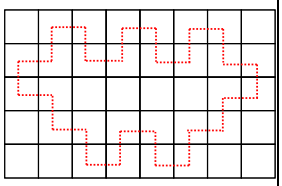
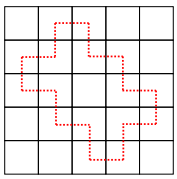
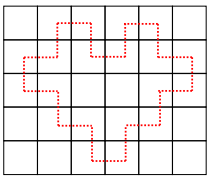
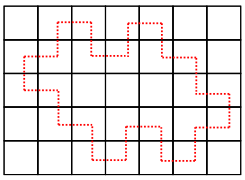
(4) 綜合以上：若 $m\equiv 0,2\pmod 4$, $\mathrm{MT}(n\times m)=n(m-2)+4$ 。

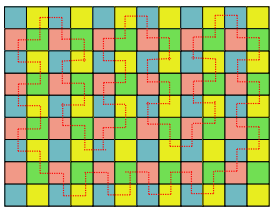
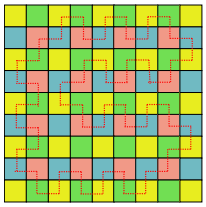
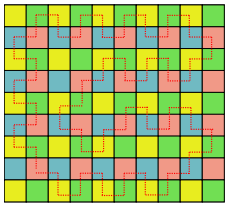
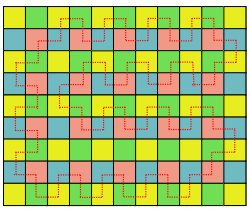
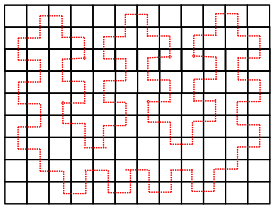
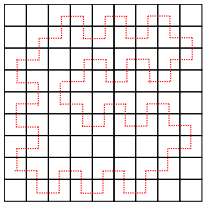
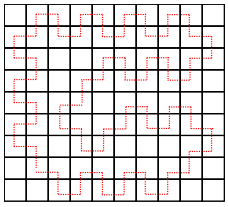
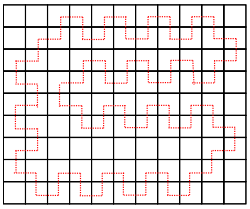
若 $m\equiv 1,3\pmod 4$, $\mathrm{MT}(n\times m)=n(m-1)-4$ 。

2. 若 $n\equiv 1\pmod 4$ 時：

(1) 若 $m\equiv 0\pmod 4$, $\mathrm{MT}(n\times m)=(n-1)m-4$ 。

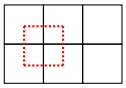
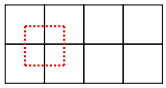
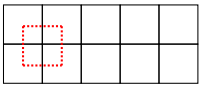
(2) 若 $m\equiv 1,2,3\pmod 4$, $\mathrm{MT}(n\times m)=(n-1)(m-1)$ 。

$m\equiv 0\pmod 4$	$m\equiv 1\pmod 4$	$m\equiv 2\pmod 4$	$m\equiv 3\pmod 4$
			
			
MT(5×8)=28	MT(5×5)=16	MT(5×6)=20	MT(5×7)=24

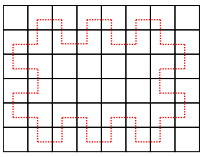
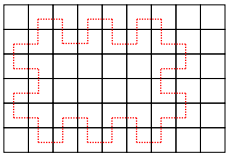
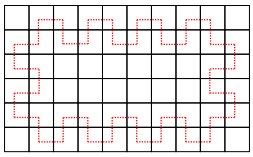
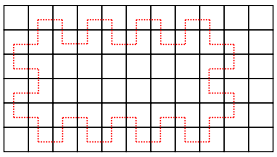
$m\equiv 0\pmod 4$	$m\equiv 1\pmod 4$	$m\equiv 2\pmod 4$	$m\equiv 3\pmod 4$
			
			
MT(9×12)=92	MT(9×9)=64	MT(9×10)=72	MT(9×11)=80

3. 若$n\equiv 2\pmod 4$時：

(1) $n=2$時，$\mathrm{MT}(n\times m)=4$。

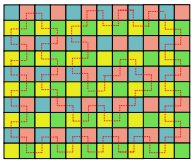
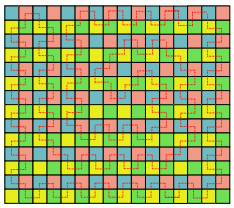
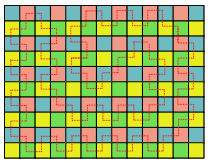
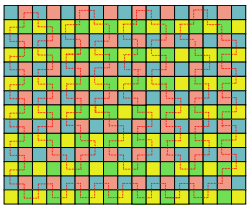
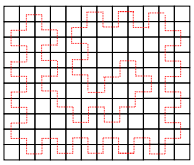
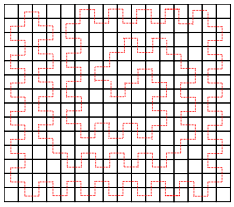
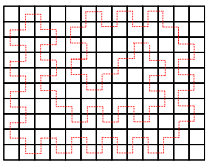
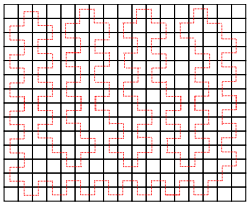
$m\equiv 0\pmod 4$	$m\equiv 1\pmod 4$	$m\equiv 2\pmod 4$	$m\equiv 3\pmod 4$
			
MT(2×4)=4	MT(2×5)=4	MT(2×6)=4	MT(2×7)=4

(2) $n=6$時，$\mathrm{MT}(n\times m)=(n-2)\times\left(\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor\times 2+1\right)$。

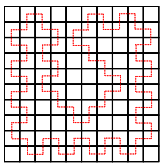
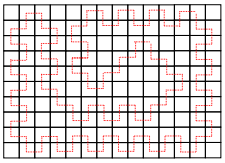
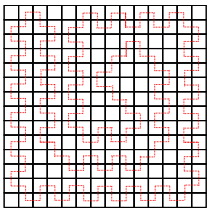
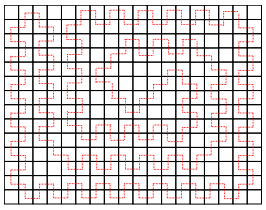
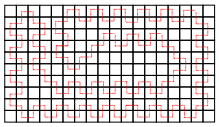
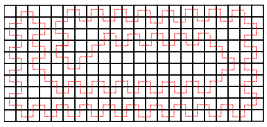
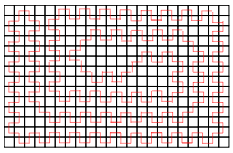
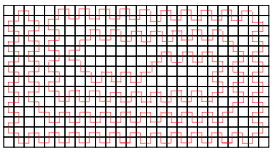
$m\equiv 0\pmod 4$	$m\equiv 1\pmod 4$	$m\equiv 2\pmod 4$	$m\equiv 3\pmod 4$
			
MT(6×8)=36	MT(6×9)=36	MT(6×10)=44	MT(6×11)=44

(3) $n \geq 10$時，若$m \equiv 0 \pmod 4$，$\mathrm{MT}(n \times m) = (n-2)m + 4$。

(4) $n \geq 10$時，若$m \equiv 1 \pmod 4$，$\mathrm{MT}(n \times m) = (n-1)(m-1)$。

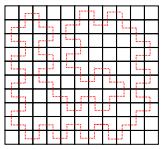
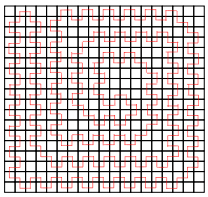
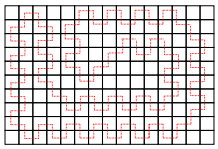
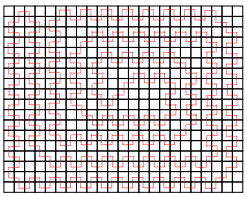
$m \equiv 0 \pmod 4$，$\mathrm{MT}(n \times m) = (n-2)m + 4$		$m \equiv 1 \pmod 4$，$\mathrm{MT}(n \times m) = (n-1)(m-1)$	
			
			
MT(10×12)=100	MT(14×16)=196	MT(10×13)=108	MT(14×17)=208

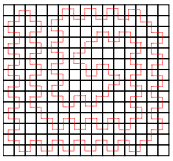
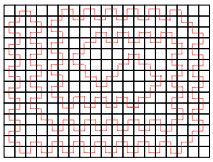
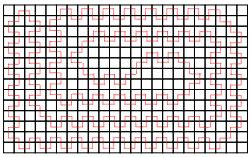
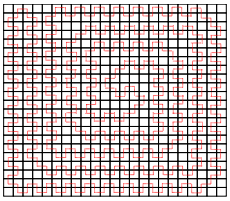
(5) $n \geq 10$時，若$m \equiv 2 \pmod 4$，$\begin{cases} n+4 \geq m, & \mathrm{MT}(n \times m) = (n-1)(m-1) - 1 \\ n+4 < m, & \mathrm{MT}(n \times m) = (n-2)m + 4 \end{cases}$。

$m \equiv 2 \pmod 4, n+4 \geq m$, $\mathrm{MT}(n \times m) = (n-1)(m-1) - 1$			
			
MT(10×10)=80	MT(10×14)=116	T(14×14)=168	MT(14×18)=220
$m \equiv 2 \pmod 4, n+4 < m$, $\mathrm{MT}(n \times m) = (n-2)m + 4$			
			
MT(10×18)=148	MT(10×22)=180	MT(14×22)=268	MT(14×26)=316

(6) $n \geq 10$時，若$m \equiv 3 \pmod 4$，

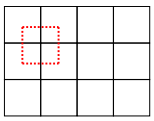
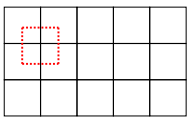
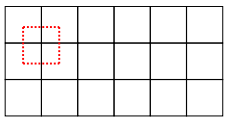
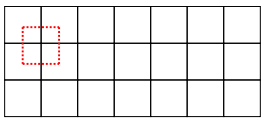
$$\begin{cases} n \equiv 2 \pmod 8, & n+1=m, \quad \mathrm{MT}(n \times m)=(n-1)(m-1)-2 \\ & n+1<m, \quad \mathrm{MT}(n \times m)=(n-2)m+4 \\ n \equiv 6 \pmod 8, & \mathrm{MT}(n \times m)=(n-2)m \end{cases}$$ 。

$m \equiv 3 \pmod 4$ 且 $n \equiv 2 \pmod 8$			
$n+1=m$, $\mathrm{MT}(n \times m)=(n-1)(m-1)-2$		$n+1<m$, $\mathrm{MT}(n \times m)=(n\text{-}2)m+4$	
			
MT(10×11)=88	MT(18×19)=304	MT(10×15)=124	MT(18×23)=372

$m \equiv 3 \pmod 4$ 且 $n \equiv 6 \pmod 8$, $\mathrm{MT}(n \times m)=(n\text{-}2)m$			
			
MT(14×15)=180	MT(14×19)=228	MT(14×23)=276	MT(22×23)=460

4. 若$n \equiv 3 \pmod 4$時：

(1) $n=3$時，$\mathrm{MT}(n \times m)=4$。

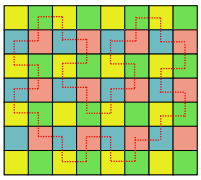
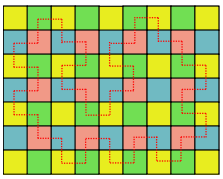
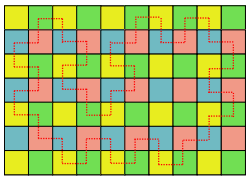
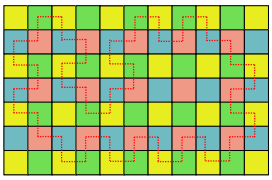
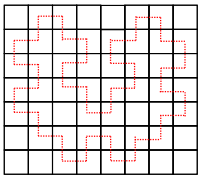
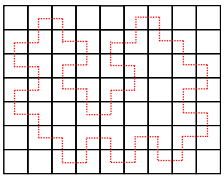
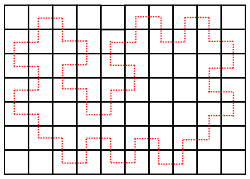
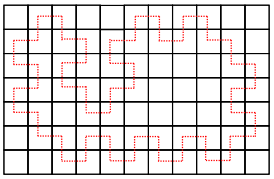
$m \equiv 0 \pmod 4$	$m \equiv 1 \pmod 4$	$m \equiv 2 \pmod 4$	$m \equiv 3 \pmod 4$
			
MT(3×4)=4	MT(3×5)=4	MT(3×6)=4	MT(3×7)=4

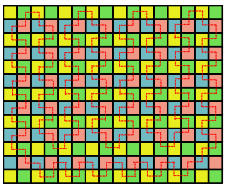
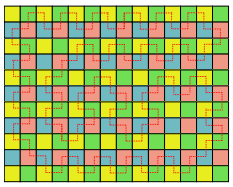
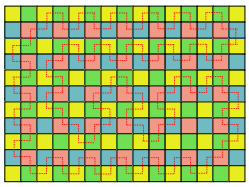
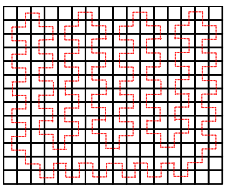
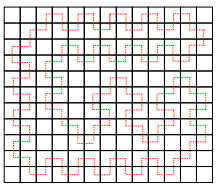
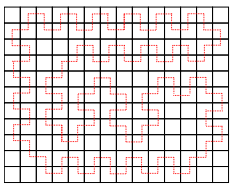
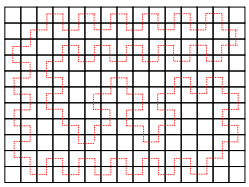
(2) 若 $m \equiv 0 \pmod 4$ ， $\mathrm{MT}(n \times m) = (n-1)m - 4$ 。

(3) 若 $m \equiv 1 \pmod 4$ ， $\mathrm{MT}(n \times m) = (n-1)(m-1)$ 。

(4) 若 $m \equiv 2 \pmod 4$ ， $\mathrm{MT}(n \times m) = (n-1)(m-1) - 2$ 。

(5) 若 $m \equiv 3 \pmod 4$ ， $\mathrm{MT}(n \times m) = (n-1)(m-1) - 4$ 。

$m \equiv 0 \pmod 4$	$m \equiv 1 \pmod 4$	$m \equiv 2 \pmod 4$	$m \equiv 3 \pmod 4$
			
			
MT(7×8)=44	MT(7×9)=48	MT(7×10)=52	MT(7×11)=56

$m \equiv 0 \pmod 4$	$m \equiv 1 \pmod 4$	$m \equiv 2 \pmod 4$	$m \equiv 3 \pmod 4$
			
			
MT(11×16)=156	MT(11×13)=120	MT(11×14)=128	MT(11×15)=136

(二) 總結 $n \le m$，$\mathrm{MT}(n \times m)$：

1. $\mathrm{MT}(2 \times m) = 4$，$\mathrm{MT}(3 \times m) = 4$， $\mathrm{MT}(6 \times m) = 4 \times \left(\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \times 2 + 1 \right)$。

2. 其他情況： $4 \le n \le m$ 且 $n \ne 6$

$\mathrm{MT}(n \times m)$	$m \equiv 0 \pmod 4$	$m \equiv 1 \pmod 4$	$m \equiv 2 \pmod 4$	$m \equiv 3 \pmod 4$
$n \equiv 0 \pmod 4$	$n(m-2)+4$	$n(m-1)-4$	$n(m-2)+4$	$n(m-1)-4$
$n \equiv 1 \pmod 4$	$(n-1)m-4$	$(n-1)(m-1)$	$(n-1)(m-1)$	$(n-1)(m-1)$
$n \equiv 2 \pmod 4$	$(n-2)m+4$	$(n-1)(m-1)$	註一	註二
$n \equiv 3 \pmod 4$	$(n-1)m-4$	$(n-1)(m-1)$	$(n-1)(m-1)-2$	$(n-1)(m-1)-4$

註一： $\begin{cases} n+4 \ge m, & \mathrm{MT}(n \times m) = (n-1)(m-1)-1 \\ n+4 < m, & \mathrm{MT}(n \times m) = (n-2)m+4 \end{cases}$

註二： $\begin{cases} n \equiv 2 \pmod 8, & n+1 = m, \quad \mathrm{MT}(n \times m) = (n-1)(m-1)-2 \\ & n+1 < m, \quad \mathrm{MT}(n \times m) = (n-2)m+4 \\ n \equiv 6 \pmod 8, & \mathrm{MT}(n \times m) = (n-2)m \end{cases}$

3. 特別的是在 $n = m$ 時，$\mathrm{MT}(n \times m)$ 的歸納公式與 $\mathrm{MT}(n \times n)$ 時相同，但 $n \times m$ 長方形中若當 $n \ge m$ 時並不能適用上表的公式，可知在 $\mathrm{MT}(n \times m)$ 長方形中較短邊決定最大移動路徑的運動方式，$n \equiv 2 \pmod 4$ 時的歸納公式複雜，完整證明有待再進一步研究。

五、 生活應用：市面上的掃地機器人，都是直線掃地，直到遇到障礙才會轉彎，所以被掃到的部份很有限，但若在機器人的程式上調整為單位路徑即轉彎，且掃過的地方不重覆，最後會回到原來的充電座，可以達到最大的打掃面積。或可利用來設計遊樂園區遊覽參觀路線及景點設施的安排。

柒、參考資料

1. 第 50 屆(2009 年)國際數學奧林匹克預選題 C6。
2. 國小數學第十二冊 — 康軒出版社。

【評語】080416

利用書本的延伸問題做為研究題材，是活用課本內容的好方法，其精神值得鼓勵。他們先就低階的方格為例子，並以模四的方式來討論，是很關鍵的觀察。其推廣到一般情況的結果相當簡潔，是個不錯的研究。