中華民國第55屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

佳作

080414

0與1的邂逅

學校名稱：屏東縣屏東市仁愛國民小學

作者：	指導老師：
小六 王品智	楊旭銘
小六 何宜蓁	黃建彰
小五 柯承邑	
小五 吳柏翰	

關鍵詞：漢明碼、對偶性、轉換

摘要

本作品主要研究「Hamming 碼和序相鄰項」，利用二進位制去探討，我們取相鄰項奇偶性異同，制定一個邏輯運算，得到一個個序列稱 X(n)。本研究發現以每 4 項去觀察 X(n)，並以二位進位制表徵去得到 X(n)的快速解法，進而發現不同 n 的 X(n)值相等的規律。

本研究命 SX(n)為 1~n 的 X(n)之和，我們得到求 SX(n)的演算法。

本研究改變 X(n)邏輯，提出對偶關係稱為Y(n) ，並討論Y(n) 的演算方法及其性質。

我們也利用漢明碼序列和的奇偶性平鋪於平面並塗上顏色，當作數字圖案的座標域圖形顏色的轉換，以應用在藝術地毯。

壹、緒論

一、研究動機

學校電腦課，介紹電腦時，讓我們觀察 Youtube 的影片(參考資料 1)。

https://www.youtube.com/watch?v=ysl PYECVWzI

該影片介紹 Hamming code，即「漢明碼」。

其主要的特色有(一)可以偵錯資料的訊息是否有錯誤。

(二)可以明確地告訴你哪一個訊息是錯誤。

雖然，漢明碼傳遞的訊息只能一次告訴我們一個錯誤。但是，根據維基百科 1940 年漢明於貝爾實驗室(Bell Labs)工作，運用貝爾模型 V(Bell Model V)電腦，試圖解決偵錯的問題，開發了功能日益強大的演算法。在 1950 年，他發表了至今所稱的漢明碼，今日還使用在許多應用上(參考資料 2)。

我們的題目就是研究漢明碼的相關議題。

題目來自於 2012 年 8 月 2 日一個科學展覽研習會，授課教授提出的題目(參考資料 3)。

題目 1.1

非負整數二進位的奇偶 Hamming 和序列為 0,1,1,0,1,0,0,1,.....，對於相鄰兩數取邏輯序列運算為 0,1,0,0,0,1,0,.....

請觀察這個結構。

二、名詞定義

依照題目 1.1，我們考慮以二進位法表示非負整數 n，規定

定義 1.2

(1.3) $$n=\sum_{i=0}^{k} a_{n,i}\times 2^{i}$$ ，其中，$a_{n,k}=1$；當 $j>k$，$a_{n,j}=0$。

(1.4) $$a(n)=\sum_{i=0}^{k} a_{n,i}$$ 。

例如：$1=(1)_2$，則 $a(1)=1$。$2=(10)_2$，則 $a(2)=1$。$3=(11)_2$，則 $a(3)=2$。

$4=(100)_2$，則 $a(4)=1$。$5=(101)_2$，則 $a(5)=2$。$6=(110)_2$，則 $a(6)=2$。

$7=(111)_2$，則 $a(7)=3$。

(1.5) $$HS(n)\equiv a(n) \pmod 2$$ 。

此時，式子 1.3、式子 1.4 及式子 1.5 是依照題目 1.1 非負整數二進位的奇偶 Hamming 和序列所做的運算。

(1.6) 若 $HS(n)=HS(n-1)$ 則 $X(n)=1$，反之，若 $HS(n)\neq HS(n-1)$ 則 $X(n)=0$。

此時，式子 1.6 為 XOR 運算(參考資料 4)。

(1.7) $$SX(n)=\sum_{i=1}^{n} X(i)$$ 。

取 $0\le n\le 31$，將 $a(n)$、$HS(n)$、$X(n)$ 及 $SX(n)$ 如附錄一。此時，$X(0)$ 不存在。

取 $X(n)$ 的對偶性 $Y(n)$ 如下，我們規定

(1.8) 若 $HS(n)=HS(n-1)$ 則 $Y(n)=0$，反之，若 $HS(n)\neq HS(n-1)$ 則 $Y(n)=1$。

(1.9) $$SY(n)=\sum_{i=1}^{n} Y(i)$$ 。

三、觀察

取 $0 \le n \le 31$，如圖 1.10，發現

（一）觀察 $a(n)$：

當 $0 \le n \le 15$， $a(n)$ 數列依序為 0112 1223 1223 2334。

當 $16 \le n \le 31$，$a(n)$ 數列依序為 1223 2334 2334 3445。

當 $0 \le n \le 15$，$a(n)+1=a(n+16)$。

（二）觀察 $HS(n)$：

$HS(4k)$、$HS(4k+1)$、$HS(4k+2)$ 及 $HS(4k+3)$ 數列，分成兩類：0110 和 1001。

當 $0 \le n \le 15$， $HS(n)$ 數列依序為 0110 1001 1001 0110。

當 $16 \le n \le 31$，$HS(n)$ 數列依序為 1001 0110 0110 1001。

$HS(2^0)=HS(2^1)=HS(2^2)=HS(2^3)=HS(2^4)=HS(2^5)=1$。

當 $0 \le n \le 15$，$HS(n) \equiv (HS(n+16)+1) \pmod 2$。

本研究只會出現 $HS(n)=0$ 或 $HS(n)=1$ 兩種情形，因此將本作品命名為 0 與 1 的邂逅。

(三)觀察 $X(n)$：

沒有 $HS(-1)$，因此，不會出現 $X(0)$。

當 $1 \le n \le 15$， $X(n)$ 數列依序為 010 0010 1010 0010。

當 $16 \le n \le 31$，$X(n)$ 數列依序為 0010 0010 1010 0010。

當 $1 \le n \le 15$， $X(n)=X(n+16)$。

當 $1 \le n \le 31$，取 $n=4k$，$X(n+1)=0$，$X(n+2)=1$，$X(n+3)=0$。

取 n 依序排列 $X(n)$ 數列，$X(n)=0$ 會只出現 1 次或連續出現 3 次；

$1 \le n \le 31$，$X(n)$ 數列，只會出現 0101010 型及 0100010 型。

（四）觀察 $SX(n)$：

當 $1 \le n \le 15$，$SX(n+16)=SX(n)+5$，但，$SX(32)=SX(16)+6$。

當 $1 \le n \le 31$，$SX(4k+2)=SX(4k)+1$。

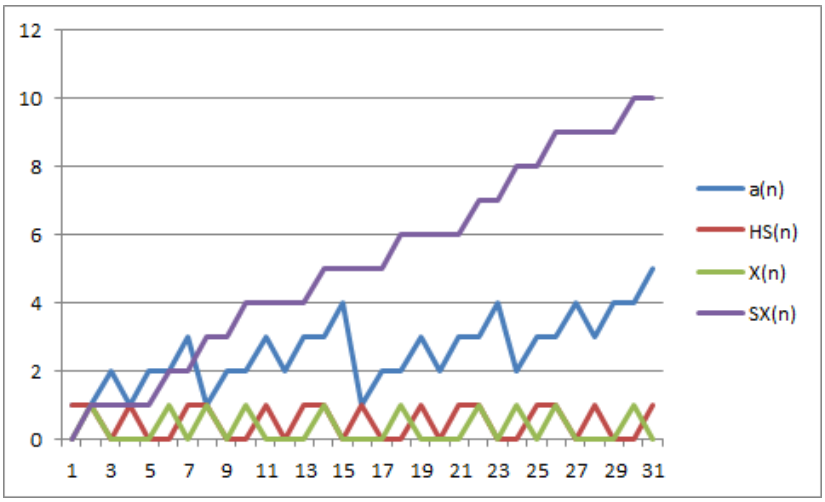

圖 1.10

四、研究設備

紙、筆、微軟 Excel 軟體

五、研究目的

(一)研究 a(n)、HS(n)、X(n)及 SX(n)的變化情形。

(二)提出研究策略，探討 X(n)的演算方法及性質。

(三)探討 X(n)數列，只會出現 0101010 型及 0100010 型的原因。

(四)尋找 SX(n)的演算方法。

(五)提出 Y(n)的演算方法並討論 Y(n)的性質。

(六)比較 X(n)數列與 Y(n)數列的相對應性質。

(七)利用區塊顏色深淺提供日常生活的應用。

貳、文獻探討

一、科展作品《0 與 1 的奇妙世界》

101 學年度**市科學展覽會，曾經有一篇科展作品「0 與 1 的奇妙世界」對題目 1.1 進行研究(參考資料 5)。其重要發現有：

(一)利用 X(n) 性質，給出求 X(n) 的演算法。

(二)發現連續 X(n) 數列只會出現兩種情形，01010 或 0100010。

(三)得到求 X(n) 級數的演算法。

(四)給出求 Y(n) 的演算法和給出求 Y(n) 級數的演算法。

二、科展作品《天使與魔鬼》

第 49 屆全國科學展覽國小組數學科的作品(參考資料 6)。其挑戰如下

題目 2.1

在無窮數列 $\{a(n)\}$，$a(0)=0$，若 n 的最大奇因數除以 4 餘數為 1，則 $a(n)=a(n-1)+1$；若 n 的最大奇因數除以 4 餘數為 3，則 $a(n)=a(n-1)-1$。此數列的首幾項為：0、1、 2、1、2、3、2、1、2、3、4、3、2、3、2、1、…。

(a) 證明在此數列中，1 將出現無窮多次

(b) 證明在此數列中，每一個正整數將出現無窮多次。

「天使與魔鬼」作品利用二進位法，相鄰的數字奇偶性。發現給定 $2^{k-1}\le n\le 2^k$ 區間，數列 $\{a(n)\}$ 的最小值是 1，最大值為 k，且 $a(n)=a(n-1)+1$ 或 $a(n)=a(n-1)-1$，得到證明。

本研究則引用「天使與魔鬼」作品中使用二進位法的技巧，處理漢明碼和序列的問題。

參、研究過程與方法

一、表格分析

請觀察$1 \le n \le 15$的 X(n) ，如表 3.1。

表 3.1

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
X(n)		0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0

再觀察$1 \le n \le 31$的 X(n) ，如表 3.2，發現當$1 \le n \le 31$時，$X(2k-1)=0$ 。

表 3.2

n	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
X(n)		1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1
n	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31
X(n)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

簡化

	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

觀察$1 \le n \le 63$的 X(n) ，如表 3.3，發現

當$1 \le n \le 63$時，$X(4k+1)=0=X(4k+3)$ ，$X(4k+2)=1$ 。

表 3.3

n	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60
X(n)		0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
n	1	5	9	13	17	21	25	29	33	37	41	45	49	53	57	61
X(n)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
n	2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58	62
X(n)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
n	3	7	11	15	19	23	27	31	35	39	43	47	51	55	59	63
X(n)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

簡化

	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

觀察$1 \le n \le 127$的 X(n) ，如表 3.4。

表 3.4

n	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120
X(n)		1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1
n	1	9	17	25	33	41	49	57	65	73	81	89	97	105	113	121
X(n)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
n	2	10	18	26	34	42	50	58	66	74	82	90	98	106	114	122
X(n)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
n	3	11	19	27	35	43	51	59	67	75	83	91	99	107	115	123
X(n)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
n	4	12	20	28	36	44	52	60	68	76	84	92	100	108	116	124
X(n)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
n	5	13	21	29	37	45	53	61	69	77	85	93	101	109	117	125
X(n)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
n	6	14	22	30	38	46	54	62	70	78	86	94	102	110	118	126
X(n)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
n	7	15	23	31	39	47	55	63	71	79	87	95	103	111	119	127
X(n)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

簡化

	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

取$1 \le n \le 2^8 - 1$，規定

(3.1) $$n = s \times 2^4 + t \text{，其中，} 0 \le s \le 15 \text{ 且 } 0 \le t \le 15 \text{。}$$

依式子 3.1，取$1 \le n \le 2^8 - 1$的 a(n)、HS(n)、X(n)及 SX(n)如表 3.5、表 3.6、表 3.7 及表 3.8，並規定縱向為 s 行，橫向為 t 列。

表 3.5　當$1 \le n \le 2^8 - 1$的 a(n)

a(n)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	1	1	2	1	2	2	3	1	2	2	3	2	3	3	4
1	1	2	2	3	2	3	3	4	2	3	3	4	3	4	4	5
2	1	2	2	3	2	3	3	4	2	3	3	4	3	4	4	5
3	2	3	3	4	3	4	4	5	3	4	4	5	4	5	5	6
4	1	2	2	3	2	3	3	4	2	3	3	4	3	4	4	5
5	2	3	3	4	3	4	4	5	3	4	4	5	4	5	5	6
6	2	3	3	4	3	4	4	5	3	4	4	5	4	5	5	6
7	3	4	4	5	4	5	5	6	4	5	5	6	5	6	6	7
8	1	2	2	3	2	3	3	4	2	3	3	4	3	4	4	5
9	2	3	3	4	3	4	4	5	3	4	4	5	4	5	5	6
10	2	3	3	4	3	4	4	5	3	4	4	5	4	5	5	6
11	3	4	4	5	4	5	5	6	4	5	5	6	5	6	6	7
12	2	3	3	4	3	4	4	5	3	4	4	5	4	5	5	6
13	3	4	4	5	4	5	5	6	4	5	5	6	5	6	6	7
14	3	4	4	5	4	5	5	6	4	5	5	6	5	6	6	7
15	4	5	5	6	5	6	6	7	5	6	6	7	6	7	7	8

表 3.6　當$1 \le n \le 2^8 - 1$的 HS(n)

HS(n)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0
1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1
2	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1
3	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0
4	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1
5	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0
6	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0
7	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1
8	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1
9	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0
10	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0
11	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1
12	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0
13	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1
14	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1
15	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0

表 3.7　當 $1 \le n \le 2^8 - 1$ 的 X(n)

X(n)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0		0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

表 3.8　當 $1 \le n \le 2^8 - 1$ 的 SX(n)

SX(n)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0		5	11	16	21	26	32	37	43	48	54	59	64	69	75	80
1	0	5	11	16	21	26	32	37	43	48	54	59	64	69	75	80
2	1	6	12	17	22	27	33	38	44	49	55	60	65	70	76	81
3	1	6	12	17	22	27	33	38	44	49	55	60	65	70	76	81
4	1	6	12	17	22	27	33	38	44	49	55	60	65	70	76	81
5	1	6	12	17	22	27	33	38	44	49	55	60	65	70	76	81
6	2	7	13	18	23	28	34	39	45	50	56	61	66	71	77	82
7	2	7	13	18	23	28	34	39	45	50	56	61	66	71	77	82
8	3	8	14	19	24	29	35	40	46	51	57	62	67	72	78	83
9	3	8	14	19	24	29	35	40	46	51	57	62	67	72	78	83
10	4	9	15	20	25	30	36	41	47	52	58	63	68	73	79	84
11	4	9	15	20	25	30	36	41	47	52	58	63	68	73	79	84
12	4	9	15	20	25	30	36	41	47	52	58	63	68	73	79	84
13	4	9	15	20	25	30	36	41	47	52	58	63	68	73	79	84
14	5	10	16	21	26	31	37	42	48	53	59	64	69	74	80	85
15	5	10	16	21	26	31	37	42	48	53	59	64	69	74	80	85

由表 3.7 發現

事實 3.9（等值性）

當 $1 \le n \le 2^8 - 1$ 時，若 $n \ne m \times 16$，則 $X(n) = X(n + 16t)$，

其中，$\forall\ m \in N$，$t \in N \cup \{0\}$。

二、策略

考慮 $1 \le n \le 32$，將 X(n) 表示如圖 3.10，得到

策略分析 3.11

(一)因 $n = \sum_{i=0}^{k} a_{n,i} \times 2^i$，$a(n) = \sum_{i=0}^{k} a_{n,i}$，

$HS(n) \equiv a(n) \mod 2$，同時，

X(n) 由 HS(n−1) 及 HS(n) 決定。考慮以二進位法，研究 a(n)、HS(n) 及 X(n) 數值表現。

(二)依事實 3.9，若 $n \ne m \times 16$，則 $X(n) = X(n + 16t)$，

考慮以 16 為一個週期討論 X(n) 數值。

(三)考慮 $X(8) = X(24) = 1 \ne 0 = X(16)$。

討論 X(n) 的數值，可以以 16 為一個週期，但不宜以 8 為週期討論。

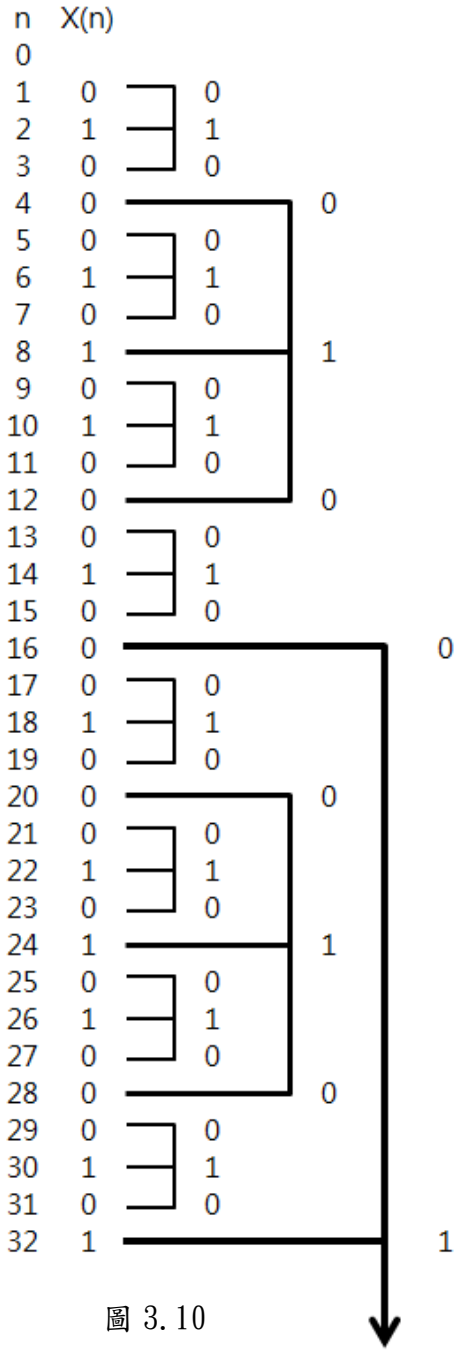

圖 3.10

(四)給定自然數 n 經過有限次除以 4，得到餘數是 1、2 及 3。

(五)觀察表 3.7，得到 $X(4k+1)=0$， $X(4k+2)=1$， $X(4k+3)=0$。考慮以 4 為一週期討論。

(六)再觀察表 3.7 及圖 8.1 思考 $HS(4k-1)$ 及 $HS(4k)$ 的變化，

同時考慮， $HS(4k-1)=a(4k-1) \pmod 2$， $HS(4k) \quad =(a(4k) \mod 2)$。

可以從 $a(4k-1)$ 與 $a(4k)$ 的奇偶性變化，得到 $X(4k)$ 數值。

(七)考慮給定自然數 n ，均可表示成 $n=(4m+k)\times 4^u$ ，其中，m 及 u 均為非負整數。

(八)分別計算：情況一： $X((4m+1)\times 4^u)$ 的數值。

情況二： $X((4m+2)\times 4^u)$ 的數值

情況三： $X((4m+3)\times 4^u)$ 的數值

(九)依定義 1.2， $HS(n)\equiv a(n) \pmod 2$，同時， $X(n)$ 由 $HS(n-1)$ 及 $HS(n)$ 決定。本研究利用自然數 n 的奇偶性，決定 $X(n)$ 的數值。

三、研究過程

(一)尋找 $X(4k+1)$ 、 $X(4k+2)$ 及 $X(4k+3)$

(二)自然數 n 分類的探討

(三) $X(n)$ 的一般式及其演算方法

(四)討論 $SX(n)$ 級數和的演算方法

(五)研究 $X(n)$ 的對偶關係 $Y(n)$

(六)平面上，給定第 s 列第 t 行， $n=s\times 2^k+t$ ，將 $HS(n)$ 的數值轉換成顏色，當作藝術地毯的應用。

肆、研究結果

一、尋找 $X(4k+1)$ 、 $X(4k+2)$ 及 $X(4k+3)$

考慮 2^k 以二進位法表示，只有在 2^k 位置是 1，其他位置都是數值 0。

2^k-1 以二進位法表示，在 2^0 位置至是 2^{k-1} 的位置都是 1，其他位置都是數值 0。得到

性質 4.1

$a(2^k)=1$，$\forall\ k\in N\cup\{0\}$。

性質 4.2

$a(2^k-1)=k$，$\forall\ k\in N\cup\{0\}$。

以二進位法表示，假設，$n=4k=(***...***00)_2$，則

$$n=4k+1=(***...***01)_2,$$

$$n=4k+2=(***...***10)_2,$$

$$n=4k+3=(***...***11)_2。$$

得到

性質 4.3

規定 $a(4k)=s$，則 $a(4k+1)=s+1$，$a(4k+2)=s+1$，$a(4k+3)=s+2$。$\forall\ k\in N\cup\{0\}$。

性質 4.4

取 4 個連續非負整數，分別除以 4，得到餘數分別為 0、1、2 及 3，則 HS(n) 數列分為兩類，1001 和 0110。

【證明】

依性質 4.3，設 $a(4k)=s$，則 $a(4k+1)=s+1$，$a(4k+2)=s+1$，$a(4k+3)=s+2$。

當 $a(4k)=s$ 為奇數，則 $s+1$ 為偶數，$s+2$ 為奇數，此時，HS(n) 數列為 1001。

當 $a(4k)=s$ 為偶數，則 $s+1$ 為奇數，$s+2$ 為偶數，此時，HS(n) 數列為 0110。　　Q.E.D.

性質 4.5

當 $n=4k$ 時， $X(n+1)=0$ ， $X(n+2)=1$ ， $X(n+3)=0$ 。

【證明】

第一種證明方法：

依性質 4.3，當 $n=4k$ 時， $HS(n)$ 數列分為兩類，0110 和 1001。得證。

第二種證明方法，如表 4.6 及以二進位法分別表示：設 $n=4k=(******00)_2$， 規定 $a(4k)=s$。

$n+1=4k+1=(******01)_2$，則 $a(4k+1)=s+1$， $HS(4k+1)\neq HS(4k)$， $X(n+1)=0$ 。

$n+2=4k+2=(******10)_2$，則 $a(4k+2)=s+1$， $HS(4k+2)=HS(4k+1)$， $X(n+2)=1$ 。

$n+3=4k+3=(******11)_2$，則 $a(4k+3)=s+2$， $HS(4k+3)\neq HS(4k+2)$， $X(n+3)=0$ 。

Q.E.D.

將性質 4.5 整理成為表 4.6。

表 4.6

自然數 n	$n=4k$	$n=4k+1$	$n=4k+2$	$n=4k+3$
二進位表示法	$(******00)_2$	$(******01)_2$	$(******10)_2$	$(******11)_2$
$a(n)$	$a(4k)=s$	$a(4k+1)=s+1$	$a(4k+2)=s+1$	$a(4k+3)=s+2$
$HS(n)$	$s \pmod 2$	$s+1 \pmod 2$	$s+1 \pmod 2$	$s+2 \pmod 2$
$X(n)$		0	1	0

二、自然數 n 分類的探討

給定自然數 n，我們除以 4，會得到餘數是 0、1、2、3；若餘數是 0，再除以 4，也會得到餘數是 0、1、2、3；如此反覆除以 4，給定自然數 n，可以分成 3 類。

即

性質 4.7

給定自然數 n， $n=(4m+k)\times 4^u$ ， m、u 均為任意的非負整數，同時， $k=1$ 、 $k=2$ 或 $k=3$ 。

三、 X(n) 的一般式

依據性質 4.7，我們將討論 X(n) 的一般式。

請觀察 $n=4$、8 或 12　二進位表示法、a(n)、HS(n) 及 X(n)，如表 4.8。

再觀察 $n=16$、32 或 48 二進位表示法、a(n)、HS(n) 及 X(n)，如表 4.9。

表 4.8

n	二進位法	a(n)	HS(n)	X(n)
…				
3	11	2	0	
4	100	1	1	0
…				
7	111	3	1	
8	1000	1	1	1
…				
11	1011	3	1	
12	1100	2	0	0

表 4.9

n	二進位法	a(n)	HS(n)	X(n)
…				
15	1111	4	0	
16	10000	1	1	0
…				
31	11111	5	1	
32	100000	1	1	1
…				
47	101111	5	1	
48	110000	2	0	0

規定 $4m+1=(***)_2$，$a(4m+1)=s$，且 $\forall\ u\in N$ 發現

$(4m+1)\times 4^u=(***0100.....00)_2$，$2^0$ 位置至 2^{2u-1} 位置都是 0，2^{2u} 位置是 1，2^{2u+1} 位置是 0；

$(4m+1)\times 4^u-1=(***0011.....11)_2$，$2^0$ 位置至 2^{2u-1} 位置都是 1，2^{2u} 位置和 2^{2u+1} 位置是 0；

得到

(4.10)　$a((4m+1)\times 4^u)=s$，　$a((4m+1)\times 4^u)-1=s+2u-1$。

$(4m+2)\times 4^u=(***1000.....00)_2$，$2^0$ 位置至 2^{2u} 位置都是 0，2^{2u+1} 位置是 1；

$(4m+2)\times 4^u-1=(***0111.....11)_2$，$2^0$ 位置至 2^{2u} 位置都是 1，2^{2u+1} 位置是 0；得到

(4.11)　$a((4m+2)\times 4^u)=s$，　$a((4m+2)\times 4^u)-1=s+2u$。

$(4m+3)\times 4^u=(***1100.....00)_2$，$2^0$ 位置至 2^{2u-1} 位置都是 0，2^{2u} 位置和 2^{2u+1} 位置是 1；

$(4m+1)\times 4^u-1=(***1011.....11)_2$，$2^0$ 位置至 2^{2u-1} 位置都是 1，2^{2u} 位置是 0，2^{2u+1} 位置是 1。

得到

(4.12)　$a((4m+3)\times 4^u)=s+1$，$a((4m+3)\times 4^u)-1=s+2u$。

考慮性質 4.5、式子 4.10、式子 4.11 及式子 4.12，得到

性質 4.13

$HS((4m+1)\times 4^u-1)\neq HS((4m+1)\times 4^u$ ； $X((4m+1)\times 4^u)=0$ ，其中，m 、u 為非負整數。

$HS((4m+2)\times 4^u-1)=HS((4m+2)\times 4^u$ ； $X((4m+2)\times 4^u)=1$ ，其中，m 、u 為非負整數。

$HS((4m+3)\times 4^u-1)\neq HS((4m+3)\times 4^u$ ； $X((4m+3)\times 4^u)=0$ ，其中，m 、u 為非負整數。

規定 $a(4m+1)=s$ ，綜合上述敘述，如表 4.14。

表 4.14

	情況一	情況二	情況三
n	$n=(4m+1)\times 4^u$	$n=(4m+2)\times 4^u$	$n=(4m+3)\times 4^u$
二進位	$n=(***0100.....00)_2$ ， $n-1=(***0011.....11)_2$	$n=(***1000.....00)_2$ ， $n-1=(***0111.....11)_2$	$n=(***1100.....00)_2$ ， $n-1=(***1011.....11)_2$ 。
a(n)	$a((4m+1)\times 4^u)=s$ ， $a((4m+1)\times 4^u)=s+2u-1$ 。	$a((4m+2)\times 4^u)=s$ $a((4m+2)\times 4^u)=s+2u$	$a((4m+3)\times 4^u)=s+1$ ， $a((4m+2)\times 4^u)=s+2u$
HS(n)	$HS(n)\neq HS(n-1)$	$HS(n)=HS(n-1)$	$HS(n)\neq HS(n-1)$
X(n)	0	1	0

四、 X(n) 的演算方法

演算方法 4.15

給定自然數 n ，計算 X(n) 的演算方法

步驟一：給定自然數 n ，得到 $n=4q_0+r_0$ ， $0\le r_0\le 3$ 。

若 $1\le r_0\le 3$ ，則依據性質 7.1，得到 X(n) 數值。

若 $r_0=0$ ，則下一步驟。

步驟二：若 $r_i=0$ ，則取 $q_i=4q_{i+1}+r_{i+1}$ ， $0\le r_{i+1}\le 3$ 。

步驟三：若 $1\le r_{i+1}\le 3$ ，則依據性質 9.2，得到 X(n) 數值。

若 $r_{i+1}=0$ ，則下一步驟。

步驟四：再將商 q_{i+1} 當作被除數，重覆步驟二，一直除以 4，直到商為 0。

此時，餘數為 1、2 或 3，依性質 9.2，得到 X(n) 數值。

五、 X(n) 的簡潔演算方法

我們可以利用自然數的奇偶性討論的簡潔的 X(n) 演算方法。

情況一：設 n 為奇數，且 $a(n)=s$，則 $a(n-1)=s-1$。此時，

$$HS(n)\neq HS(n-1)\text{，}X(n)=0\text{。}$$

情況二：設 n 為偶數，且 $n=(2m-1)\times 2^{2u}$，$2u>0$，規定 $a(n)=s$，則

$$a(n-1)=s+2u-1=a(n)+2u-1\text{，}$$

$$HS(n-1)\neq HS(n)\text{，}X(n)=0\text{。}$$

情況三：設 n 為偶數，且 $n=(2m-1)\times 2^{2u-1}$，$2u-1>0$，規定 $a(n)=s$，則

$$a(n-1)=s+2u-2=a(n)+2u-2\text{，}$$

$$HS(n-1)=HS(n)\text{，}X(n)=1\text{。}$$

得到

演算方法 4.16

給定自然數 n，計算 X(n) 的演算方法

步驟一：將 n 依二進位法表示，$n=\sum_{i=0}^{k}a_{n,i}\times 2^{i}$，其中，$a_{n,k}=1$；當 $i>k$，$a_{n,i}=0$。

步驟二：取 $n=\sum_{i=0}^{k}a_{n,i}\times 2^{i}$ 中，由右往左搜尋，第 1 個出現數字 1 的位置為 2^{t}。

若 t 為奇數，則 $X(n)=1$；若 t 為偶數，則 $X(n)=0$。

取 $n=\sum_{i=0}^{k}a_{n,i}\times 2^{i}$，由右往左搜尋，第 1 個出現數字 1 的位置為 2^{t}，快速尋找 X(n)，如表 4.17。

表 4.17

情況	t 為奇數，$t=2u-1>0$	t 為偶數，$t=2u\geq 0$
二進位法	$n=(***1000...000)_2$， $n-1=(***0111...111)_2$， 比較後，相差 $2u-2$ 個 1。	$n=(***1000...00)_2$， $n-1=(***0111...11)_2$， 比較後，相差 $2u-1$ 個 1。
a(n) 關係	$a(n-1)=a(n)+2u-2$	$a(n-1)=a(n)+2u-1$
HS(n) 關係	$HS(n-1)=HS(n)$	$HS(n-1)\neq HS(n)$
X(n)	1	0

六、 SX(n) 級數和的演算方法

討論 SX(n) 級數和的演算方法，得到

演算方法 14.18（ SX(n) 級數和的演算方法）

步驟一：取自然數 n，另外設一個記數的指標 $i\in N\cup\{0\}$。

步驟二：將 n 除以 4 得到 $n=4n_0+r_0$，其中，$1\leq r_0\leq 3$。

若 $n_0\geq 1$，則繼續下一步，否則，跳至步驟五，計算 SX(n) 的級數和。

步驟三：將 n_{i-1} 除以 4 得到 $n_{i-1}=4n_i+r_i$，d 其中，$1\leq r_i\leq 3$。

同時規定，當 $r_i=2$，則 $d_i=1$；否則，$d_i=0$。

若 $n_i\geq 1$，則繼續下一步，否則，當 $n_k=0$，跳至步驟五，計算 SX(n) 的級數和。

步驟四：將指標 i 加上 1，並且跳回步驟二。

步驟五：計算 SX(n) 的級數和。

$$SX(n)=\sum_{i=0}^{k}(n_i+d_i)\text{ 。}$$

【證明】

1. 給定一個自然數 n，必然可以被有限次的被 4 除，直到商為 0 為止。

2. 依性質 9.4，$X((4m+1)\times 4^u=0$，$X((4m+2)\times 4^u=1$，$X((4m+3)\times 4^u=0$。 Q.E.D.

由表 3.8，發現

性質 14.19

$5 \le SX(n+2^4) - SX(n) \le 6$。

七、 X(n) 的對偶關係 Y(n)

接著，讓我們研究 X(n) 的對偶關係 Y(n)

讓我們考慮定義 1.2，式子 1.8，若 $HS(n-1) = HS(n)$ 則 $Y(n) = 0$；

若 $HS(n-1) \ne HS(n)$ 則 $Y(n) = 1$。

式子 1.9， $SY(n) = \sum_{i=1}^{n} Y(i)$。

規定，$n = s \times 2^4 + t$。$0 \le s \le 15$ 且 $0 \le t \le 15$，縱向為第 s 行，橫向為第 t 列。

得到表 4.20 及表 4.21。

表 4.20　Y(n)

Y(n)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0		1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

表 4.21　SY(n)

SY(n)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0		11	21	32	43	54	64	75	85	96	106	117	128	139	149	160
1	1	12	22	33	44	55	65	76	86	97	107	118	129	140	150	161
2	1	12	22	33	44	55	65	76	86	97	107	118	129	140	150	161
3	2	13	23	34	45	56	66	77	87	98	108	119	130	141	151	162
4	3	14	24	35	46	57	67	78	88	99	109	120	131	142	152	163
5	4	15	25	36	47	58	68	79	89	100	110	121	132	143	153	164
6	4	15	25	36	47	58	68	79	89	100	110	121	132	143	153	164
7	5	16	26	37	48	59	69	80	90	101	111	122	133	144	154	165
8	5	16	26	37	48	59	69	80	90	101	111	122	133	144	154	165
9	6	17	27	38	49	60	70	81	91	102	112	123	134	145	155	166
10	6	17	27	38	49	60	70	81	91	102	112	123	134	145	155	166
11	7	18	28	39	50	61	71	82	92	103	113	124	135	146	156	167
12	8	19	29	40	51	62	72	83	93	104	114	125	136	147	157	168
13	9	20	30	41	52	63	73	84	94	105	115	126	137	148	158	169
14	9	20	30	41	52	63	73	84	94	105	115	126	137	148	158	169
15	10	21	31	42	53	64	74	85	95	106	116	127	138	149	159	170

考慮定義 1.2，比較式子 1.6 及式子 1.8，得到

性質 4.22

$Y(n) = 1 - X(n)$。

規定 $a(4m+1)=s$，得到表 4.23。

表 4.23

	情況一	情況二	情況三
n	$n=(4m+1)\times 4^u$	$n=(4m+2)\times 4^u$	$n=(4m+3)\times 4^u$
二進位	$n=(***0100.....00)_2$， $n-1=(***0011.....11)_2$	$n=(***1000.....00)_2$， $n-1=(***0111.....11)_2$	$n=(***1100.....00)_2$， $n-1=(***1011.....11)_2$。
a(n)	$a((4m+1)\times 4^u)=s$， $a((4m+1)\times 4^u)=s+2u-1$。	$a((4m+2)\times 4^u)=s$ $a((4m+2)\times 4^u)=s+2u$	$a((4m+3)\times 4^u)=s+1$， $a((4m+2)\times 4^u)=s+2u$
HS(n)	$HS(n)\neq HS(n-1)$	$HS(n)=HS(n-1)$	$HS(n)\neq HS(n-1)$
Y(n)	1	0	1

我們利用自然數的奇偶性討論的簡潔的 $Y(n)$ 演算方法。

情況一：設 n 為奇數，且 $a(n)=s$，則 $a(n-1)=s-1$。此時，

$$HS(n)\neq HS(n-1)\text{，}Y(n)=1\text{。}$$

情況二：設 n 為偶數，且 $n=(2m-1)\times 2^{2u}$，$2u>0$，規定 $a(n)=s$，則

$$a(n-1)=s+2u-1=a(n)+2u-1\text{，}$$

$$HS(n-1)\neq HS(n)\text{，}Y(n)=1\text{。}$$

情況三：設 n 為偶數，且 $n=(2m-1)\times 2^{2u-1}$，$2u-1>0$，規定 $a(n)=s$，則

$$a(n-1)=s+2u-2=a(n)+2u-2\text{，}$$

$$HS(n-1)=HS(n)\text{，}Y(n)=0\text{。}$$

得到

演算方法 4.24 （尋找 $Y(n)$ 數值）

步驟一：給定自然數 n，將 n 以二進位法表示。

步驟二：取 $n=\sum_{i=0}^{k}a_{n,i}\times 2^i$ 中，由右往左搜尋，第 1 個出現數字 1 的位置為 2^t。

若 t 為奇數，則 $Y(n)=0$；若 t 為偶數，則 $Y(n)=1$。

取 $n=\sum_{i=0}^{k} a_{n,i}\times 2^{i}$，由右往左搜尋，第 1 個出現數字 1 的位置為 2^{t}，快速尋找 X(n)，如表 4.25。

表 4.25

情況	t 為奇數，$t=2u-1>0$	t 為偶數，$t=2u\geq 0$
二進位法	$n=(***100...00)_2$， $n-1=(***011...11)_2$， 比較後，相差 $2u-2$ 個 1。	$n=(***1000...00)_2$， $n-1=(***0111...11)_2$， 比較後，相差 $2u-1$ 個 1。
a(n) 關係	$a(n-1)=a(n)+2u-2$	$a(n-1)=a(n)+2u-1$
HS(n) 關係	$HS(n-1)=HS(n)$	$HS(n-1)\neq HS(n)$
Y(n)	0	1

依性質 4.22，$Y(n)=1-X(n)$，及表 4.23，本研究提出兩種計算 SY(n) 方法。

演算方法 4.26（計算 SY(n) 數值）

方法一

步驟一：計算 SX(n) 數值。

步驟二：$SY(n)=n-SX(n)$。

方法二

步驟一：取自然數 n，另外設一個記數的指標 $i\in N\cup\{0\}$。

步驟二：將 n 除以 4 得到 $n=4n_0+r_0$，其中，$1\leq r_0\leq 3$。

若 $n_0\geq 1$，則繼續下一步，否則，跳至步驟五，計算 SY(n) 的級數和。

步驟三：將 n_{i-1} 除以 4 得到 $n_{i-1}=4n_i+r_i$，d 其中，$1\leq r_i\leq 3$。

同時規定，當 $r_i=1$ 或 $r_i=2$ 則 $d_i=1$；

當 $r_i=3$ 則 $d_i=2$。

若 $n_i\geq 1$，則繼續下一步，否則，當 $n_k=0$，跳至步驟五，計算 SY(n) 級數和。

步驟四：將指標 i 加上 1，並且跳回步驟二。

步驟五：計算 SY(n) 的級數和。 $SY(n)=\sum_{i=0}^{k}(2n_i+d_i)$。

由表 4.21，得到

事實 4.27

$10 \le SY(n+2^4) - SY(n) \le 11$。

綜合上面所敘，本研究的 $X(n)$ 與 $Y(n)$ 的對偶性如附錄二。

伍、研究討論

在這個部份，我們將討論奇偶性、$HS(n)$ 對偶關係、點等值性及漢明碼的應用。

一、奇偶性

考慮定義 1.2，以二進位法表示自然數 n，$n = \sum_{i=0}^{k} a_{n,i} \times 2^i$，$a(n) = \sum_{i=0}^{k} a_{n,i}$，$HS(n) \equiv a(n) \pmod 2$。

得到

性質 5.1

當 k 是奇數時，$HS(2^k - 1) = 1$；此時，$X(2^k) = 1$，$Y(2^k) = 0$。

當 k 是偶數時，$HS(2^k - 1) = 0$；此時，$X(2^k) = 0$，$Y(2^k) = 1$。

【證明】

當 k 是奇數時，$HS(2^k) = 1 = HS(2^k - 1)$，則 $X(2^k) = 1$。

當 k 是偶數時，$HS(2^k) = 1 \ne 0 = HS(2^k - 1)$，則 $X(2^k) = 0$。

再利用性質 4.22，$Y(n) = 1 - X(n)$ 得證。 Q.E.D.

依據性質 4.5，當 $n = 4k$ 時，$X(n+1) = 0$，$X(n+3) = 0$。得到

性質 5.2

$X(2k-1) = 0$，其中，k 為自然數。

也就是說，兩個連續非負整數n、$n+1$，不會同時出現$X(n)=1$且$X(n+1)=1$的情形。

得到

性質 5.3

數列$X(n)$，兩個數值是 1 之間至少有 1 個數值是 0 所隔開。

性質 5.4

兩個連續非負整數n、$n+1$，且k為非負整數，則$0 \le (X(n))^k + (X(n+1))^k \le 1$，

$$X(n) \times X(n+1) = 0。$$

性質 5.5

數列$X(n)$，只出現 0100010 與 0101010 兩種片段。

【證明】

第一部分，依性質 5.3，數列$X(n)$中，不會連續出現兩個數值是 1 的情形。

第二部分，4 個非負連續整數，依性質 5.2，$X(4k+2)=1$。連續 4 個非負連續整數的數列$X(n)$，至少出現 1 次$X(n)=1$。因此，數列$X(n)$不會出現連續 4 個(含)以上的 0。

第三部分，考慮$n=(4m+k)\times 4^u$時，且$1 \le k \le 3$，m和t為非負整數時，則

$$X((4m+1)\times 4^u) = 0 = X((4m+3)\times 4^u)，\ X((4m+2)\times 4^u) = 1。$$

此時，$X(n)$數值 0 會連續出現 3 次，但數值 0 不會只連續出現 2 次。 Q.E.D.

二、等值性

由定義 2.1，式子 2.4，得到

性質 5.6

若$HS(n)$和$HS(n-1)$的奇偶性變化量與$HS(m)$和$HS(m-1)$的奇偶性變化量相同，則$X(n)=X(m)$。

【證明】

分四種情形討論

$HS(n)=1$ 且 $HS(n-1)=1$，依題意，則 $HS(m)=1$ 且 $HS(m-1)=1$，得到 $X(n)=1=X(m)$。

$HS(n)=1$ 且 $HS(n-1)=0$，依題意，則 $HS(m)=1$ 且 $HS(m-1)=0$，得到 $X(n)=0=X(m)$。

$HS(n)=0$ 且 $HS(n-1)=1$，依題意，則 $HS(m)=0$ 且 $HS(m-1)=1$，得到 $X(n)=0=X(m)$。

$HS(n)=0$ 且 $HS(n-1)=0$，依題意，則 $HS(m)=0$ 且 $HS(m-1)=0$，得到 $X(n)=1=X(m)$。

Q.E.D.

請考慮表 3.2，當 $1\le n\le 31$ 時，$X(2k-1)=0$。

表 3.4，當 $1\le n\le 2^8-1$ 時，若 $n\ne m\times 16$，則 $X(n)=X(n+16t)$。得到

性質 5.7(點等值性)

設自然數 u 和非負整數 t，則 $X(2^{u-1})=X(2^{u-1}+t\times 2^u)$

【證明】

規定 $a(2^{u-1})=1$，且 $a(2^{u-1}-1)=u-1$，$a(t)=v$，則

(12.1)　$a(t\times 2^u)=v$，且 $a(2^{u-1}+t\times 2^u)=1+v$，$a(2^{u-1}+t\times 2^u-1)=u+v-1$。得知

$a(2^{u-1}-1)=u-1$ 和 $a(2^{u-1})=1$，同時，$a(2^{u-1}+t\times 2^u-1)=u+v$ 和 $a(2^{u-1}+t\times 2^u-1)=u+v-1$。

奇偶性變化為 $HS(2^{u-1}-1)=u-1 \pmod 2$ 和 $HS(2^{u-1})=1$；

$HS(2^{u-1}+t\times 2^u-1)=(u+v) \pmod 2$；和

$HS(2^{u-1}+t\times 2^u)=(u+v-1) \pmod 2$。

$HS(2^{u-1}-1)$ 和 $HS(2^{u-1})$ 奇偶性變化與 $HS(2^{u-1}+t\times 2^u-1)$ 和 $HS(2^{u-1}+t\times 2^u)$ 奇偶性變化相同。

得到 $X(2^{u-1})=X(2^{u-1}+t\times 2^u)$。　Q.E.D.

三、HS(n) 的對偶性

考慮定義 2.1，式子 1.8，$HS(n) = a(n) \mod 2$。

當 m 是非負整數，且 $0 \le s \le 63$，$0 \le t \le 15$，取 $n = s \times 2^4 + t$，取 $HS(n) = 0$ 為白色，$HS(n) = 1$ 為黃色，則表 3.6 可以塗成圖 5.8。

若取 $n = s \times 2^6 + t$，且 $0 \le s \le 63$，$0 \le t \le 63$，$HS(n) = 0$ 為白色，$HS(n) = 1$ 為黃色，可塗成圖 5.9。

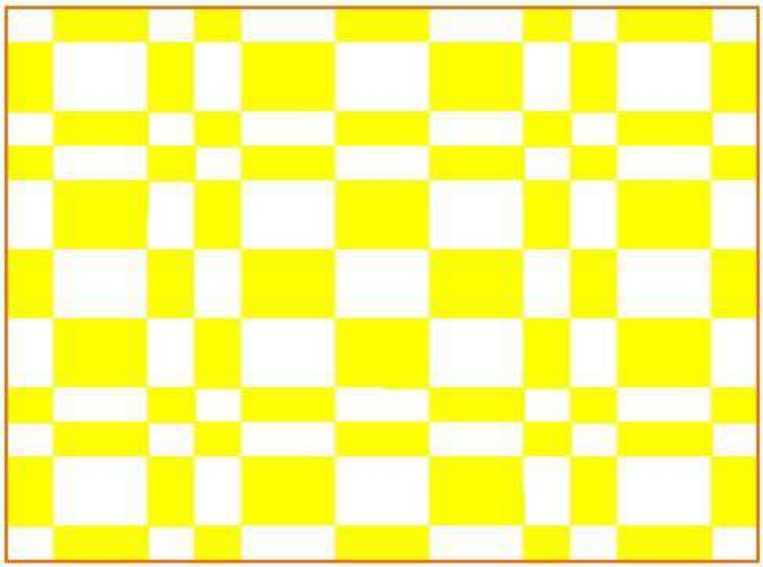

圖 5.8

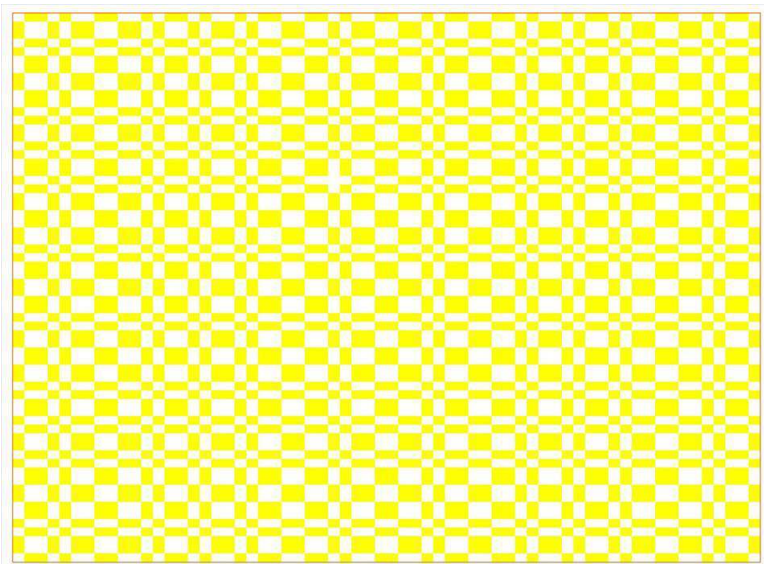

圖 5.9

我們有興趣的是給定第 m 列第 k 行是白色？還是黃色？

考慮 $0 \le n \le 15$，以二進位表示如圖 5.10 及圖 5.11。

圖 5.10，取 $0 \le n \le 15$，以二進位表示，$HS(n)=0$ 為白色，$HS(n)=1$ 為黃色。相對應是圖 5.11，分成 A、B、C 及 D。

發現

相鄰區域：A 和 B、A 和 C、B 和 C 及 B 和 D 相對位置是顏色互相對換。

對角區域：A 和 C、B 和 D 相對位置的顏色是相同。

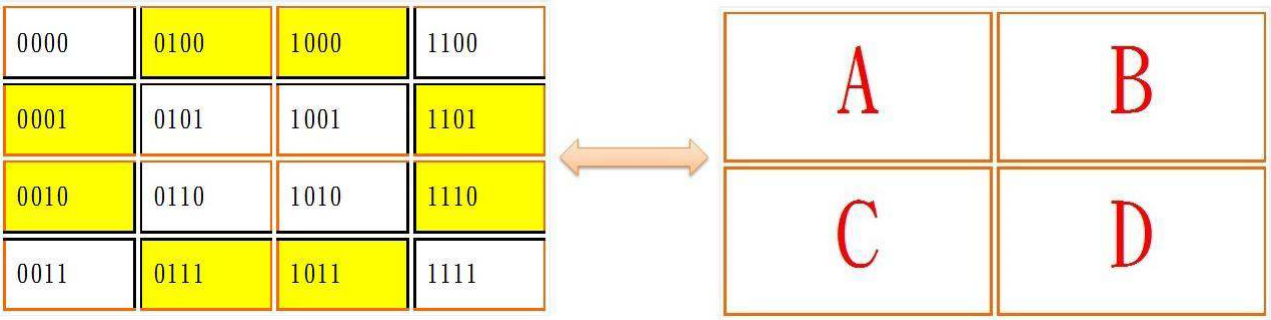

圖 5.10　　圖 5.11

此時，圖 5.10 的白色區域 $HS(n)=0=u$ 和黃色區域 $HS(n)=1=v$。即，

(5.12)　$$u=(1-v) \pmod 2 。$$

如此，圖 5.11，相鄰區域：A 和 B、A 和 C、B 和 C 及 B 和 D 相對位置是對偶。

我們總共有 4 種方法尋找座標 (s,t) 呈現的顏色。如附件照片，面試時說明。

經過討論，採用二進位法提出說明。規定

(5.13)　$$P_{2^0}=[0] 。$$

(5.14)　$$Q_{2^0}=[1] 。$$

(5.15)
$$P_{2^{k+1}} = \begin{bmatrix} P_{2^k} & Q_{2^k} \\ Q_{2^k} & P_{2^k} \end{bmatrix}。$$

(5.16)
$$Q_{2^{k+1}} = \begin{bmatrix} Q_{2^k} & P_{2^k} \\ P_{2^k} & Q_{2^k} \end{bmatrix}。$$

方便研究，規定

定義 5.17

以 HS(n)＝0 呈現白色，HS(n)＝1 為黃色所塗滿的平面稱為漢明碼序列和平面。其座標 (s,t) 的顏色是白色時，規定 HSC(s,t)＝0 ；座標 (s,t) 的顏色是黃色時，規定 HSC(s,t)＝1。

舉例

在漢明碼序列和平面， HSC(23,17) 數值為何?

步驟一:(23，17)在 P_{2^5} 的 D 區域 P_{2^4} ；

步驟二:(7，1)在 P_{2^4} 的 A 區域 P_{2^3} ；

步驟三:(7，1)在 P_{2^3} 的 C 區域 Q_{2^2} ；

步驟四:(3，1)在 Q_{2^2} 的 C 區域 P_{2^1} ；

步驟五:(1，1)在 P_{2^1} 的 A 區域 P_{2^0} ＝[0]。

將上面五個步驟整理如表 5.18。

表 5.18

23	=	(	1	0	1	1	1	$)_2$
17	=	(	1	0	0	0	1	$)_2$
XOR	=		0	0	1	1	0	→ 0
		P_{2^5}	P_{2^4}	P_{2^3}	Q_{2^2}	P_{2^1}	P_{2^0}	$P_{2^0}=[0]$

我們也可以將表 5.18 轉換成表 5.19

表 5.19

23	=	(	1	0	1	1	1	$)_2$	0
17	=	(	1	0	0	0	1	$)_2$	0
XOR	=		0	0	1	1	0	0	0
		P_{2^5}	P_{2^4}	P_{2^3}	Q_{2^2}	P_{2^1}	P_{2^0}	$P_{2^0}=[0]$	

請注意表 5.19，發現

$$a(23)=4 \text{ ， } a(17)=2 \text{ ， } (a(23)+a(17)=(4+2)\equiv 0(\bmod\ 2) \text{ 。}$$

得到

演算方法 5.20

在漢明碼序列和平面， $HSC(s,t)\equiv(a(s)+a(t))\bmod\ 2$ 。

性質 5.21

$HSC(s,t)=HSC(t,s))$ 。

性質 5.22

$HSC(s,s)=0$ 。

考慮進位的問題，我們也發現等值性的特性，如圖 5.22 及圖 5.23。

	2^{k+3}	2^{k+2}	2^{k+1}	2^k				
		1	0	*	*	*	*	*
+)				1	□	□	□	□
			1	◎	◎	◎	◎	◎
-			1	0	0	0	0	0
		1	0	◎	◎	◎	◎	◎

圖 5.22

圖 5.23

得到

性質 5.24

設 $3\times 2^{k+2} > i \geq 2\times 2^{k+2} > 2^{k+2} > j$，則 $HSC(i+2^{x}-2^{k+2}, j) = HSC(i, j)$，其中，$x \geq k+3$。

陸、應用

設計另外一種塗滿平面的方式，規定自然數 n 以 l 進位表示，得到

定義 6.1

(6.2) $$n = \sum_{i=0}^{k} al_{n,i} \times l^{i}$$ ，其中，$al_{n,k} \geq 1$；當 $j > k$，$al_{n,j} = 0$。

(6.3) $$al(n) = \sum_{i=0}^{k} al_{n,i}$$ 。

(6.4) $$HL(n) \equiv al(n) \pmod{l}$$ 。

給定第 i 列第 j 行，稱為座標 (i, j)，我們將座標 (i, j) 以不同的 HL(n) 數值塗在平面上，進行顏色的數值轉換，將得到一些漂亮的圖案。

圖 6.5 係 81*81 的 H3(n) 圖形。

圖 6.6 係 16*16 的 H4(n) 圖形。

圖 6.7 係 25*25 的 H5(n) 圖形。

圖 6.8 係 36*36 的 H6(n) 圖形。

提供藝術地毯之用。

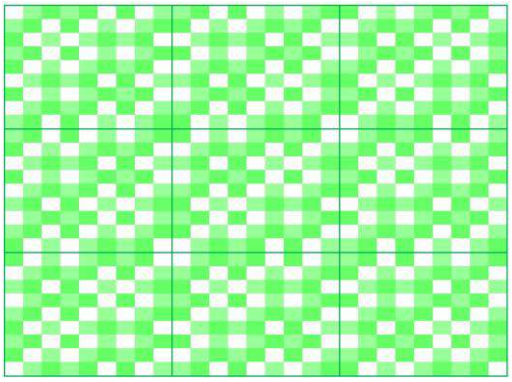

圖 6.5

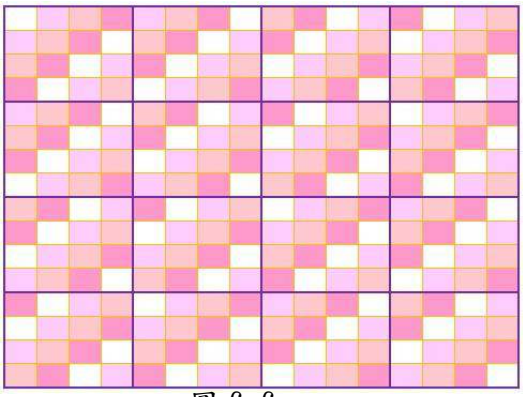

圖 6.6

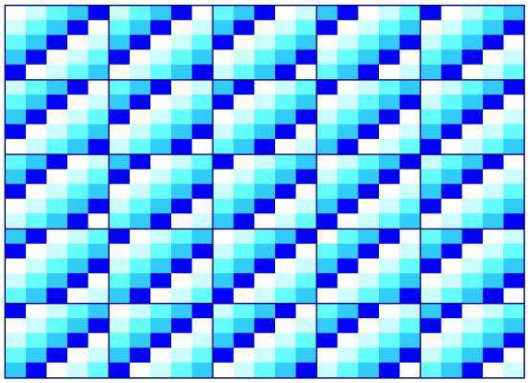

圖 6.7

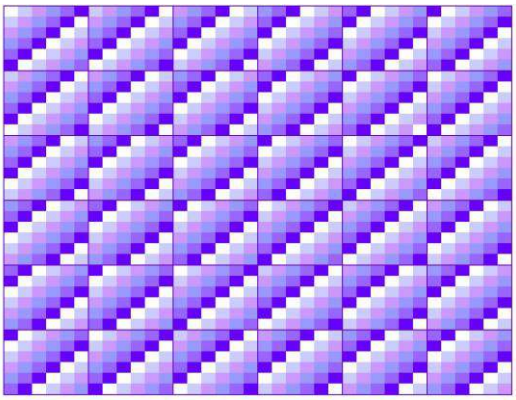

圖 6.8

考慮在十進位，第 s 列第 t 行的座標 (s,t) 在以 l 進位鋪成的平面呈現甚麼顏色?

模仿我們提出一個演算方法，即

演算方法 6.9

在十進位，第 s 列第 t 行的座標 (s,t) 在以 l 進位鋪成的平面，顏色的編號 HSCl(s,t) ，即

$$HSCl(s,t) \equiv HSCl(al(s)+al(t)\ )\ (\mathrm{mod}\ \ l)$$

性質 6.10

$HSCl(s,t) \equiv 2al(s)\ \ (\mathrm{mod}\ \ l)$ 。 $HSCl(s,t) \equiv HSCl(t,s)$ 。

柒、結論

本研究係針對漢明碼序列和提出討論，其應用在於無線通訊過程的訊號檢查。重要的發現

數列數值： $X((4m+1)\times 4^u)=0$， $X((4m+2)\times 4^u)=1$， $X((4m+3)\times 4^u)=0$。

$Y((4m+1)\times 4^u)=1$，$Y((4m+2)\times 4^u)=0$，$Y((4m+3)\times 4^u)=1$。

快捷找法：以二進位法表示，右往左搜尋，第 1 個出現數字 1 的位置為 2^t，再由 t 值的奇偶性判斷 $X(n)$ 值和 $Y(n)$ 值。

相鄰數值：$0\le (X(n))^k+(X(n+1))^k\le 1$，且 $X(n)\times X(n+1)=0$。

$1\le (Y(n))^k+(Y(n+1))^k\le 2$，且 $0\le Y(n)\times Y(n+1)\le 1$。

數列表現： $X(n)$ 值只出現 0100010 與 0101010 兩種片段。

$Y(n)$ 值只出現 1011101 與 1010101 兩種片段。

等值性 ：自然數 u 和非負整數 t， $X(2^{u-1})=X(2^{u-1}+t\times 2^u)$；$Y(2^{u-1})=Y(2^{u-1}+t\times 2^u)$。

對偶性 ： 在漢明碼序列和平面，

$HSC(s,t)\equiv (a(s)+a(t))\bmod 2$。

$HSC(s,t)=HSC(t,s))$。 $HSC(s,s)=0$。

設 $3\times 2^{k+2}>i\ge 2\times 2^{k+2}>2^{k+2}>j$，則 $HSC(i+2^x-2^{k+2},j)=HSC(i,j)$。

轉換: 我們將座標 (i,j) 以不同的 $HL(n)$ 數值塗在平面上，進行顏色的數值轉換，將得到一些漂亮的圖案，可提供藝術地毯的繪圖。

參考資料

1. https://www.youtube.com/watch?v=ys1PYECVWzI（2015 年 1 月 20）
2 zh.wikipedia.org/wiki/%E6%B1%89%E6%98%8E%E7%A0%81(2015 年 1 月 23 日)
3. 2012 年 8 月 2 日科學教師科學展覽研習會，未出版。
4. msdn.microsoft.com/zh-tw/library/csw1x2a6(v=vs.80).aspx(2015 年 1 月 30 日)
5. 陳麗雯，0 與 1 的奇妙世界，101 學年度※※市中小學科學展覽會，國中數學科，未出版。
6 顏嘉佑，天使與魔鬼，第 49 屆全國科學展覽會，國小數學科，台灣科學教育館，2009 年。

附錄一、$0 \le n \le 31$ 的 a(n)、HS(n)、X(n) 及 SX(n)

附錄表 1

n	以二進位法表示					a(n)	HS(n)	X(n)	SX(n)
	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0				
0					0	0	0		
1					1	1	1	0	0
2				1	0	1	1	1	1
3				1	1	2	0	0	1
4			1	0	0	1	1	0	1
5			1	0	1	2	0	0	1
6			1	1	0	2	0	1	2
7			1	1	1	3	1	0	2
8		1	0	0	0	1	1	1	3
9		1	0	0	1	2	0	0	3
10		1	0	1	0	2	0	1	4
11		1	0	1	1	3	1	0	4
12		1	1	0	0	2	0	0	4
13		1	1	0	1	3	1	0	4
14		1	1	1	0	3	1	1	5
15		1	1	1	1	4	0	0	5
16	1	0	0	0	0	1	1	0	5
17	1	0	0	0	1	2	0	0	5
18	1	0	0	1	0	2	0	1	6
19	1	0	0	1	1	3	1	0	6
20	1	0	1	0	0	2	0	0	6
21	1	0	1	0	1	3	1	0	6
22	1	0	1	1	0	3	1	1	7
23	1	0	1	1	1	4	0	0	7
24	1	1	0	0	0	2	0	1	8
25	1	1	0	0	1	3	1	0	8
26	1	1	0	1	0	3	1	1	9
27	1	1	0	1	1	4	0	0	9
28	1	1	1	0	0	3	1	0	9
29	1	1	1	0	1	4	0	0	9
30	1	1	1	1	0	4	0	1	10
31	1	1	1	1	1	5	1	0	10

附錄二、 X(n) 與 Y(n) 的對偶性

本研究所討論的 X(n) 與 Y(n) ，其比較如附錄表 2。

附錄表 2

項目	X(n)	Y(n)
邏輯運算	若 $HS(n)=HS(n-1)$ 則 $X(n)=1$ ， 若 $HS(n)\neq HS(n-1)$ 則 $X(n)=0$ 。	若 $HS(n)=HS(n-1)$ 則 $Y(n)=0$ ， 若 $HS(n)\neq HS(n-1)$ 則 $Y(n)=1$ 。
數值	$X((4m+1)\times 4^u)=0$ ， $X((4m+2)\times 4^u)=1$ ， $X((4m+3)\times 4^u)=0$ 。	$Y((4m+1)\times 4^u)=1$ ， $Y((4m+2)\times 4^u)=0$ ， $Y((4m+3)\times 4^u)=1$ 。
快捷找法	給定自然數 n ，將 n 以二進位法表示。由右往左搜尋，第 1 個出現數字 1 的位置為 2^t 。 若 t 為奇數，則 $X(n)=1$ ； 若 t 為偶數，則 $X(n)=0$ 。	給定自然數 n ，將 n 以二進位法表示。由右往左搜尋，第 1 個出現數字 1 的位置為 2^t 。 若 t 為奇數，則 $Y(n)=0$ ； 若 t 為偶數，則 $Y(n)=1$ 。
奇偶問題	$X(n)=1-Y(n)$	$Y(n)=1-X(n)$
相鄰兩個整數	$0\le (X(n))^k+(X(n+1))^k\le 1$ $X(n)\times X(n+1)=0$	$1\le (Y(n))^k+(Y(n+1))^k\le 2$ $0\le Y(n)\times Y(n+1)\le 1$
數列表現	出現 0100010 與 0101010 兩種片段	出現 1011101 與 1010101 兩種片段
不變量	自然數 u 和非負整數 t ， $X(2^{u-1})=X(2^{u-1}+t\times 2^u)$ 。	自然數 u 和非負整數 t ， $Y(2^{u-1})=Y(2^{u-1}+t\times 2^u)$ 。
級數和	給定一個自然數 n ，必然可以被有限次的被 4 除，直到商為 0 為止。 可得到 X(n) 及 SX(n) 。	給定一個自然數 n ，必然可以被有限次的被 4 除，直到商為 0 為止。 可得到 Y(n) 及 SY(n) 。

【評語】080414

本作品主要利用二進位制研究漢明碼和序列相鄰項，並針對一系列發現做了完整說明。另外，利用漢明碼序列和的奇偶性和一些發現做了很好的應用，如藝術地毯的繪圖，相當有趣。