中華民國第55屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

080413

聖誕樹的奇「積」~等分面積的探討

學校名稱：國立東華大學附設實驗國民小學

作者：	指導老師：
小六 楊采忻	王碩鴻
小六 林冠穎	張慧娟
小六 李昀蕎	
小六 林庭煜	
小六 曾盈瑄	

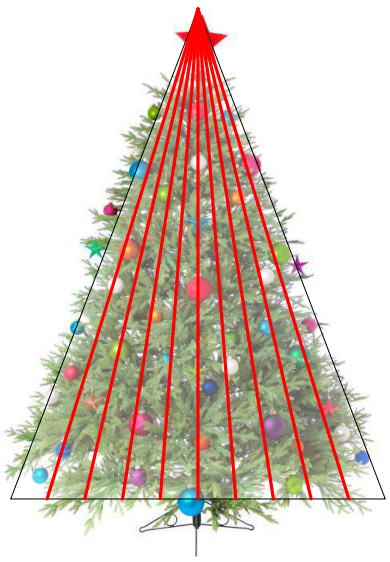
關鍵詞：數學歸納法、相似三角形、類環形區域

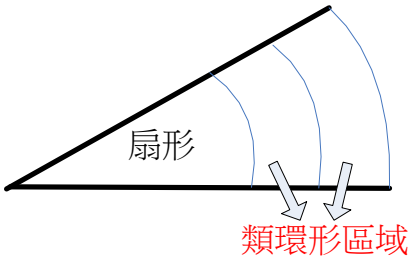
摘要

探討三角形、扇形、梯形面積 n 等分的方法，以及給定任一三角形、扇形、梯形的圖形，不需任何數據，就可以用尺規作圖的方式來解決面積任意等分的問題。

壹、研究動機

「叮叮噹！叮叮噹！鈴聲多響亮！」每年聖誕節時，學校川堂總會裝置高年級同學利用藝文課所做的三角形聖誕樹，讓同學們把祝福的話語寫在這一棵耶誕樹上。今年即將畢業的我發現，150 人的書寫空間不一，是有創意卻不公平。要怎麼分配，才能讓每個人都有均等的書寫空間呢？我們很快地找到用等底同高的方式劃分書寫畫面(圖一)，雖空間分配公平，但視覺效果卻不美觀。那還有什麼更好的方法？這問題引起我莫大的興趣，於是就找了幾位志同道合的同學共同研究討論。我們嘗試著想把各類三角形依序切割成等面積的小三角形，因此展開一系列的探討與研究。





圖一: 等底同高的三角形(左)與類環形區域(右)

貳、研究目的

找出依序切割 n 等分三角形、扇形、等腰梯形，梯形面積的方法。

叁、研究設備及器材

紙、尺、筆、圓規、電腦

肆、解釋名詞

一、指數的意義:設 a 是整數，m 是正整數，則$\overbrace{a \times a \times \ldots \times a}^{m\text{ 個}}$簡記為$a^m$。

二、平方根的意義: 當 a≥0，若b^2=a，則稱 b 是 a 的平方根；a 的平方根記作$\pm\sqrt{a}$。

三、$\sum$ 的意義:把$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$簡記為$\sum_{k=1}^{n} a_k$ 。

四、相似三角形的意義:對應角相等且對應邊成比例的兩個三角形稱為「相似三角形」。

五、類環形區域:扇形中，被弧分割成若干部分，其中非扇形的區域稱為類環形區域，(如圖一)。

伍、預備知識

一、一元二次方程式的公式解:當 a≠0 且$b^2 - 4ac \geq 0$時，一元二次方程式$ax^2 + bx + c = 0$的公式解為 x=$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$。

二、若兩個三角形相似，則三組對應邊長成比例，對應角相等。

三、數學歸納法:對於某一個與正整數有關的數學命題，只要滿足下面兩件事情:

1.驗算 n = 1 時命題成立。

2.設 n = k 時命題成立，可推得 n = k+1 時命題也成立。即能證明此命題對於所有正整數 n 都成立。

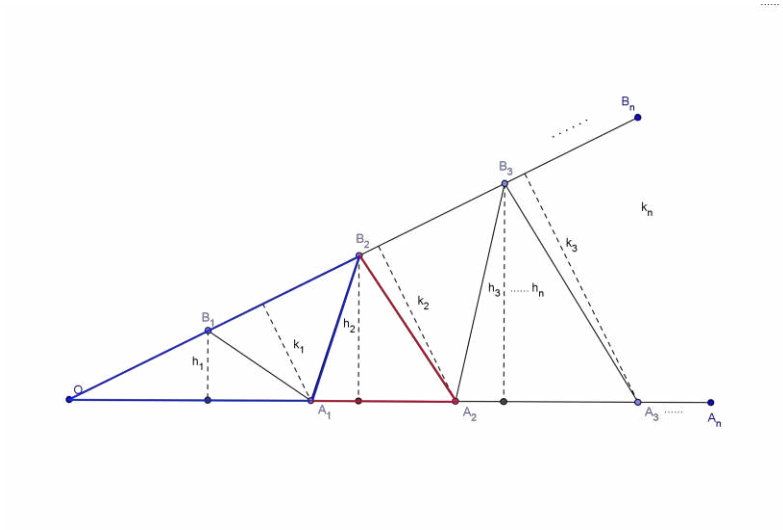
陸、研究問題、方法與過程

在開始解決問題之始，在等分面積前，我們想是否能 n 等分任意線段?在與同學討論和找尋資料後，我們發現可以用相似三角形來解決線段 n 等分的問題。於是我們開始討論是否也能循著 n 等分線段的模式來 n 等分面積。為了找出三角形依序 n 等分面積時，其中兩邊應如何找出分點的規則，我們畫了許多三角形，將結果記錄在表格中，再經由討論、整理、分析與歸納等過程，得到一些規律。

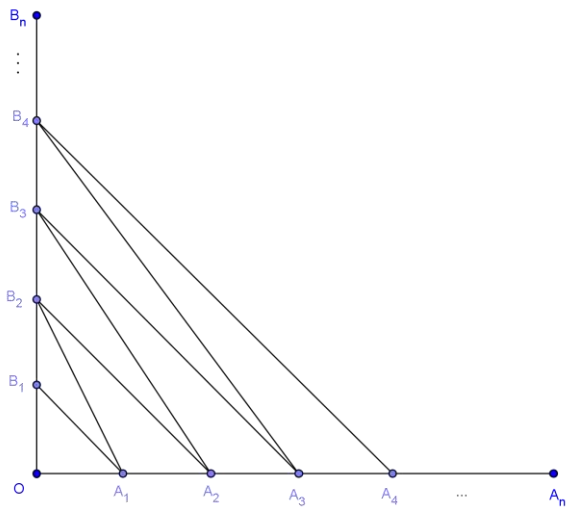
[問題一]、一個三角形如何依序切割成 n 等分相同面積的小三角形?

<過程一>: 在一個三角形的兩邊各給定一個點，連接兩點後形成原三角形內部的一個小三角形，在三角形內部如何找出與它面積相同的其他小三角形?首先討論在一個三角形中，以ΔOB_1A_1為面積基準，如何在$\overrightarrow{OA_1}$、$\overrightarrow{OB_1}$上找出A_2、B_2、A_3、B_3、…等點，依$B_1 \to A_1 \to B_2 \to A_2 \to \cdots$(直到頂點 A 或 B 為止)順序連接成小三角形，使得每一個小三角形面積都等於ΔOB_1A_1的面積。

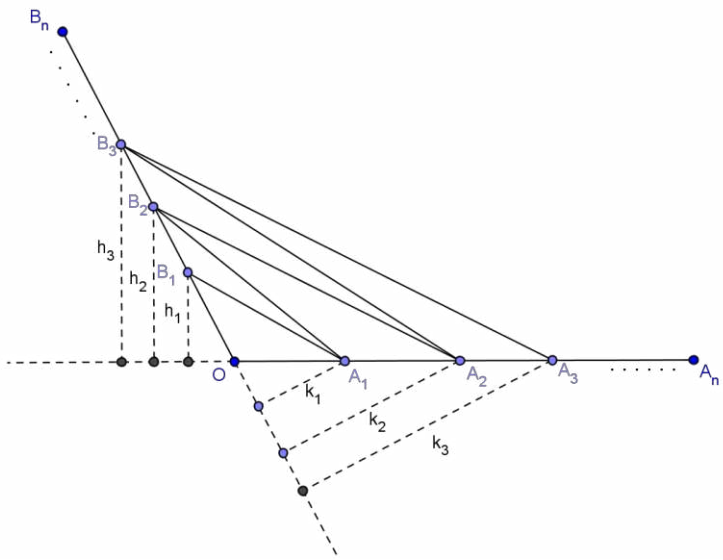
<說明一>找出$\overline{OA_1}$與$\overline{OA_n}$的關係以及$\overline{OA_1}$與$\overline{A_{n-1}A_n}$的關係，意即計算$\overline{OA_n}$=?$\overline{OA_1}$，$\overline{A_{n-1}A_n}$=?$\overline{OA_1}$。



圖二:銳角三角形



圖三:直角三角形



圖四:鈍角三角形

<方法一>:如上圖二、圖三、圖四中

先假設h_i=ΔOB_iA_i中$\overline{OA_i}$上的高，其中 $1\leq i\leq n$，(圖二中$h_i=\overline{OB_i}$)；再假設ΔOB_1A_1面積= 1(平方單位)，則ΔOB_2A_1面積=2，ΔOB_2A_2面積 $=3$

故在ΔOB_2A_1中$\frac{h_2\times\overline{OA_1}}{2}$=2

$\rightarrow\ \overline{OA_1}\times h_2=4$

$\rightarrow\quad h_2=\dfrac{4}{\overline{OA_1}}$

又在ΔOB_2A_2中$\frac{h_2\times\overline{OA_2}}{2}$=3

$\rightarrow \overline{OA_2}\times h_2=6$

$\rightarrow h_2=\dfrac{6}{\overline{OA_2}}$

推得 $\frac{4}{\overline{OA_1}}=\frac{6}{\overline{OA_2}}$ ，便可得知$\overline{OA_1}$ 和$\overline{OA_2}$的關係是 $\overline{OA_2}=\frac{3}{2}\overline{OA_1}$ ；

再計算:$\overline{OA_1}$ 和$\overline{OA_2}$的差，即 $\overline{A_1A_2}=\overline{OA_2}-\overline{OA_1}=\frac{3}{2}\overline{OA_1}-\overline{OA_1}=\frac{1}{2}\overline{OA_1}$，可得

知$\boldsymbol{\overline{A_1A_2}=\frac{1}{2}\overline{OA_1}}$

<方法二>:考慮:ΔOB_3A_2 和ΔOB_3A_3的面積，可得

$\overline{OA_2} \times h_3 = 8$

$\rightarrow\ h_3 = \frac{8}{\overline{OA_2}}$;

$\overline{OA_3} \times h_3 = 10$

$\rightarrow\ h_3 = \frac{10}{\overline{OA_3}}$

推得 $\frac{8}{\overline{OA_2}} = \frac{10}{\overline{OA_3}}$ ，得知$\overline{OA_2}$ 和$\overline{OA_3}$的關係 ，$\overline{OA_3} = \frac{5}{4}\overline{OA_2} = \frac{5}{4} \times \frac{3}{2}\overline{OA_1} = \frac{3}{2} \times \frac{5}{4}\overline{OA_1}$

再計算$\overline{OA_2}$和$\overline{OA_3}$的差，即$\overline{A_2A_3} = \overline{OA_3} - \overline{OA_2} = \frac{5}{4}\overline{OA_2} - \overline{OA_2} = \frac{1}{4}\overline{OA_2} = \frac{1}{4} \times$

$\frac{3}{2}\overline{OA_1} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4}\overline{OA_1}$

<方法三>:考慮ΔOB_4A_3和ΔOB_4A_4的面積，可得

$\overline{OA_3} \times h_4 = 12$

$\rightarrow\ h_4 = \frac{12}{\overline{OA_3}}$

$\overline{OA_4} \times h_4 = 14$

$\rightarrow\ h_4 = \frac{14}{\overline{OA_4}}$

推得 $\frac{12}{\overline{OA_3}} = \frac{14}{\overline{OA_4}}$ ，得知$\overline{OA_3}$和$\overline{OA_4}$的關係，$\overline{OA_4} = \frac{7}{6}\overline{OA_3} = \frac{7}{6} \times \left(\frac{3}{2} \times \frac{5}{4}\overline{OA_1}\right) = \frac{3}{2} \times$

$\frac{5}{4} \times \frac{7}{6}\overline{OA_1}$

再計算$\overline{OA_3}$和$\overline{OA_4}$差，即$\overline{A_3A_4} = \overline{OA_4} - \overline{OA_3} = \frac{7}{6}\overline{OA_3} - \overline{OA_3} = \frac{1}{6}\overline{OA_3} = \frac{1}{6} \times \frac{3}{2} \times$

$\frac{5}{4}\overline{OA_1} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6}\overline{OA_1}$

<方法四>

(1)經由上述方法可知當 n=2，3，4 時，下列的關係式成立:

$$\overline{OA_2} = \frac{3}{2}\overline{OA_1}$$

$$\overline{OA_3} = \frac{3}{2} \times \frac{5}{4}\overline{OA_1}$$

$$\overline{OA_4} = \frac{3}{2} \times \frac{5}{4} \times \frac{7}{6}\overline{OA_1}$$

(2)設 n=k 時，關係式成立即

$\overline{OA_k}=\frac{3}{2}\times\frac{5}{4}\times\frac{7}{6}\times\ldots\times\frac{2k-1}{2k-2}\overline{OA_1}$成立

則 n=k+1 時，考慮$\Delta OB_{k+1}A_k$ 和$\Delta OB_{k+1}A_{k+1}$的面積，可得

$$\frac{h_{k+1}\times\overline{OA_k}}{2}=2k$$

$$\rightarrow h_{k+1}\times\overline{OA_k}=4k$$

$$\rightarrow\ h_{k+1}=\frac{4k}{\overline{OA_k}}\ ,$$

$$\frac{h_{k+1}\times\overline{OA_{k+1}}}{2}=2k+1$$

$$\rightarrow\overline{OA_{k+1}}\times h_{k+1}=4k+2$$

$$\rightarrow\ h_{k+1}=\frac{4k+2}{\overline{OA_{k+1}}}$$

推得$\frac{4k}{\overline{OA_k}}=\frac{4k+2}{\overline{OA_{k+1}}}$ ，得知$\overline{OA_{k+1}}$和$\overline{OA_k}$的關係，

$$\overline{OA_{k+1}}=\frac{2k+1}{2k}\overline{OA_k}=\frac{2k+1}{2k}\times(\frac{3}{2}\times\frac{5}{4}\times\frac{7}{6}\times\ldots\times\frac{2k-1}{2k-2}\overline{OA_1})$$

$\overline{OA_{k+1}}=\frac{3}{2}\times\frac{5}{4}\times\frac{7}{6}\times\ldots\times\frac{2k-1}{2k-2}\times\frac{2k+1}{2k}\overline{OA_1}=\frac{3}{2}\times\frac{5}{4}\times\frac{7}{6}\times\ldots\times\frac{2k-1}{2k-2}\times\frac{2(k+1)-1}{2(k+1)-2}\overline{OA_1}$也成立。

由數學歸納法得知，對於正整數 n，n≥ 2，$\overline{OA_n}=\frac{3}{2}\times\frac{5}{4}\times\frac{7}{6}\times\ldots\times\frac{2n-1}{2n-2}\overline{OA_1}$均成立，

另外也可推得

$$\overline{A_1A_2}=\overline{OA_2}-\overline{OA_1}=\frac{1}{2}\overline{OA_1}$$

$$\overline{A_2A_3}=\overline{OA_3}-\overline{OA_2}=\frac{1}{4}\overline{OA_2}=\frac{1}{4}\times\frac{3}{2}\overline{OA_1}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\overline{OA_1}$$

$$\overline{A_3A_4}=\overline{OA_4}-\overline{OA_3}=\frac{1}{6}\overline{OA_3}=\frac{1}{6}\times\frac{3}{2}\times\frac{5}{4}\overline{OA_1}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\overline{OA_1}$$

設$\overline{A_{n-1}A_n}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{2n-3}{2n-2}\overline{OA_1}$成立

則$\overline{A_nA_{n+1}}=\overline{OA_{n+1}}-\overline{OA_n}$=$\frac{1}{2n}\times\overline{OA_n}=\frac{1}{2n}\times(\frac{3}{2}\times\frac{5}{4}\times\frac{7}{6}\times\ldots\times\frac{2n-1}{2n-2})\overline{OA_1}$

=$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{2n-3}{2n-2}\times\frac{2n-1}{2n}\overline{OA_1}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{2n-3}{2n-2}\times\frac{2(n+1)-3}{2(n+1)-2}\overline{OA_1}$也成立。由數學歸納法得知，對於正整數 n，n≥ 2，$\overline{A_{n-1}A_n}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{2n-3}{2n-2}\overline{OA_1}$均成立。

<過程二>找出$\overline{OB_1}$與$\overline{OB_n}$的關係以及$\overline{OB_1}$與$\overline{B_{n-1}B_n}$的關係，意即計算$\overline{OB_n}=?\overline{OB_1}$，

$\overline{B_{n-1}B_n}=?\overline{OB_1}$。

<方法一>先假設k_i=ΔOB_iA_i中$\overline{OB_i}$上的高，其中 $1\leq i\leq n$，(圖二中$k_i=\overline{OA_i}$)，再假設

ΔOB_1A_1面積 $=1$(平方單位)，則ΔOB_2A_1面積 =2，可得

$$\frac{k_1\times\overline{OB_1}}{2}=1$$

$$\rightarrow k_1\times\overline{OB_1}=2$$

$$\rightarrow k_1=\frac{2}{\overline{OB_1}}$$

$$\frac{k_1\times\overline{OB_2}}{2}=2$$

$$\rightarrow k_1\times\overline{OB_2}=4$$

$$\rightarrow k_1=\frac{4}{\overline{OB_2}}$$

推得$\frac{2}{\overline{OB_1}}=\frac{4}{\overline{OB_2}}$

$$\rightarrow 2\overline{OB_2}=4\overline{OB_1}$$

$$\rightarrow \overline{OB_2}=2\overline{OB_1}$$

再計算:$\overline{OB_1}$和$\overline{OB_2}$的差，可得$\overline{B_1B_2}$=$\overline{OB_2}-\overline{OB_1}=2\overline{OB_1}-\overline{OB_1}=\overline{OB_1}$

<方法二>

考慮ΔOB_2A_2 和ΔOB_3A_2的面積，可得

$$\frac{k_2\times\overline{OB_2}}{2}=3$$

$$\rightarrow k_2\times\overline{OB_2}=6$$

$$\rightarrow k_2=\frac{6}{\overline{OB_2}}$$

$$\frac{k_2\times\overline{OB_3}}{2}=4$$

$$\rightarrow k_2\times\overline{OB_3}=8$$

$$\rightarrow k_2=\frac{8}{\overline{OB_3}}$$

$$\frac{6}{\overline{OB_2}}=\frac{8}{\overline{OB_3}}$$

$\rightarrow 6\overline{OB_3} = 8\overline{OB_2}$

$\rightarrow \overline{OB_3} = \frac{4}{3}\overline{OB_2} = \frac{4}{3} \times \frac{2}{1}\overline{OB_1} = \frac{2}{1} \times \frac{4}{3}\overline{OB_1}$

再計算:$\overline{OB_2}$和$\overline{OB_3}$的差，可得$\overline{B_2B_3} = \overline{OB_3} - \overline{OB_2} = \frac{4}{3}\overline{OB_2} - \overline{OB_2} = \frac{1}{3}\overline{OB_2} = \frac{1}{3} \times 2\overline{OB_1} =$

$\frac{2}{3}\overline{OB_1}$

<方法三>

考慮ΔOB_3A_3 和ΔOB_4A_3面積，可得

$$\frac{k_3 \times \overline{OB_3}}{2} = 5$$

$$\rightarrow k_3 \times \overline{OB_3} = 10$$

$$\rightarrow k_3 = \frac{10}{\overline{OB_3}}$$

$$\frac{k_3 \times \overline{OB_4}}{2} = 6$$

$$\rightarrow k_3 \times \overline{OB_4} = 12$$

$$\rightarrow k_3 = \frac{12}{\overline{OB_4}}$$

$$\frac{10}{\overline{OB_3}} = \frac{12}{\overline{OB_4}}$$

$$\rightarrow 10\overline{OB_4} = 12\overline{OB_3}$$

$\rightarrow \overline{OB_4} = \frac{6}{5}\overline{OB_3} = \frac{6}{5} \times (\frac{2}{1} \times \frac{4}{3}\overline{OB_1}) = \frac{2}{1} \times \frac{4}{3} \times \frac{6}{5}\overline{OB_1}$

再計算:$\overline{OB_3}$和$\overline{OB_4}$的差，可得$\overline{B_3B_4} = \overline{OB_4} - \overline{OB_3} = \frac{6}{5}\overline{OB_3} - \overline{OB_3} = \frac{1}{5}\overline{OB_3}$

$$= \frac{1}{5} \times \left(\frac{4}{3} \times 2\overline{OB_1}\right) = \frac{4}{5} \times \frac{2}{3}\overline{OB_1}$$

<方法四>

(1)經由上述方法可知當 n=2，3，4 時，下列的關係式成立

$$\overline{OB_2} = 2\overline{OB_1}$$

$$\overline{OB_3} = \frac{4}{3}\overline{OB_2} = \frac{2}{1} \times \frac{4}{3}\overline{OB_1}$$

$$\overline{OB_4} = \frac{6}{5}\overline{OB_3} = \frac{2}{1} \times \frac{4}{3} \times \frac{6}{5}\overline{OB_1}$$

(2)設 n=m 時，關係式成立，即$\overline{OB_m}=\frac{2}{1}\times\frac{4}{3}\times\frac{6}{5}\times\ldots\times\frac{2m-2}{2m-3}\overline{OB_1}$成立

則當 n=m+1 時，考慮ΔOB_mA_m 和$\Delta OB_{m+1}A_m$的面積，可得

$$\frac{k_m\times\overline{OB_m}}{2}=2m-1$$

$$\rightarrow k_m\times\overline{OB_m}=4m-2$$

$$\rightarrow k_m=\frac{4m-2}{\overline{OB_m}}$$

$$\frac{k_m\times\overline{OB_{m+1}}}{2}=2m$$

$$\rightarrow k_m\times\overline{OB_{m+1}}=4m$$

$$\rightarrow k_m=\frac{4m}{\overline{OB_{m+1}}}$$

推得$\frac{4m-2}{\overline{OB_m}}=\frac{4m}{\overline{OB_{m+1}}}$

$$\rightarrow(4m-2)\overline{OB_{m+1}}=4m\overline{OB_m}$$

$\rightarrow\overline{OB_{m+1}}=\frac{2m}{2m-1}\overline{OB_m}=\frac{2m}{2m-1}\times(\frac{2}{1}\times\frac{4}{3}\times\frac{6}{5}\times\ldots\times\frac{2m-2}{2m-3}\overline{OB_1})$，

所以 $\overline{OB_{m+1}}=\frac{2}{1}\times\frac{4}{3}\times\frac{6}{5}\times\ldots\times\frac{2m-2}{2m-3}\times\frac{2m}{2m-1}\overline{OB_1}=\frac{2}{1}\times\frac{4}{3}\times\frac{6}{5}\times\ldots\times\frac{2m-2}{2m-3}\times\frac{2(m+1)-2}{2(m+1)-3}\overline{OB_1}$

也成立，由數學歸納法得知，對於正整數 n，n≥ 2，$\overline{OB_n}=\frac{2}{1}\times\frac{4}{3}\times\frac{6}{5}\times\ldots\times\frac{2n-2}{2n-3}\overline{OB_1}$均成立，另外也可推得

$$\overline{B_1B_2}=\overline{OB_2}-\overline{OB_1}=\overline{OB_1}$$

$$\overline{B_2B_3}=\overline{OB_3}-\overline{OB_2}=\frac{1}{3}\overline{OB_2}=\frac{1}{3}\times2\overline{OB_1}=\frac{2}{3}\overline{OB_1}$$

$$\overline{B_3B_4}=\overline{OB_4}-\overline{OB_3}=\frac{1}{5}\overline{OB_3}=\frac{1}{5}\times(\frac{4}{3}\times2\overline{OB_1})=\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\overline{OB_1}$$

設$\overline{B_nB_{n+1}}=\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\ldots\times\frac{2n-2}{2n-1}\overline{OB_1}$成立

則$\overline{B_{n+1}B_{n+2}}=\overline{OB_{n+2}}-\overline{OB_{n+1}}=\frac{1}{2n+1}\times\overline{OB_{n+1}}=\frac{1}{2n+1}\times(\frac{2}{1}\times\frac{4}{3}\times\frac{6}{5}\times\ldots\times\frac{2n}{2n-1}\overline{OB_1})$

$=\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\ldots\times\frac{2n-2}{2n-1}\times\frac{2n}{2n+1}\overline{OB_1}=\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\ldots\times\frac{2(n+1)-4}{2(n+1)-3}\times\frac{2(n+1)-2}{2(n+1)-1}\overline{OB_1}$也成立。由數學歸納法得知，對於正整數 n，n≥ 2，$\overline{B_nB_{n+1}}=\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\ldots\times\frac{2n-2}{2n-1}\overline{OB_1}$均成立。

<小結>

根據上述過程與方法，我們可以歸納得到下列四個關係式，即

$\overline{OA_n}=\frac{3}{2}\times\frac{5}{4}\times\cdots\times\frac{2n-1}{2n-2}\overline{OA_1}$, $n\geq 2$ …… ①

$\overline{A_{n-1}A_n}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{2n-3}{2n-2}\overline{OA_1}$, $n\geq 2$ ……②

$\overline{OB_n}=\frac{2}{1}\times\frac{4}{3}\times\frac{6}{5}\times\cdots\times\frac{2n-2}{2n-3}\overline{OB_1}$, $n\geq 2$ ……③

$\begin{cases}\overline{B_1B_2}=\overline{OB_1}\\ \overline{B_nB_{n+1}}=\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\ldots\times\frac{2n-2}{2n-1}\overline{OB_1}\,,n\geq 2\end{cases}$ ……④

<過程三>給定任一三角形，如何依序 n 等分成面積相同的小三角形。

<說明一>當我們決定要將一個三角形面積幾等分後，首先要決定$\overline{OA_n}$、$\overline{OB_n}$會被分成幾段

<方法一>當三角形面積被分成 n 等分時，$\overline{OA_n}$會被分成 i 段，$\overline{OB_n}$會被分成 j 段，整理成下表

表一:三角形邊長被分割數:

n	i	j
1	1	1
2	2	1
3	2	2
4	3	2
5	3	3
6	4	3
7	4	4
8	5	4
9	5	5
⋮	⋮	⋮

依照上表歸納出下列的結果

$\begin{cases}\text{(i) } n=\text{奇數時，}i=j=\frac{n+1}{2}\text{；例: } n=5\text{ 時，}i=j=\frac{5+1}{2}=3\\ \text{(ii) } n=\text{偶數時，}i=\frac{n}{2}+1\text{，}j=\frac{n}{2}\text{；例: } n=6\text{ 時 } i=\frac{6}{2}+1=4\text{，}j=\frac{6}{2}=3\end{cases}$

<方法二>已知一三角形$\overline{OA}$、$\overline{OB}$ 長度，利用式子①、③，求出$\overline{OA_1}$與$\overline{OB_1}$ 。再依此類推找出$\overline{OA_i}$、$\overline{OB_j}$ 與$\overline{OA_1}$與$\overline{OB_1}$的關係，我們便可在三角形兩邊分別找出 A_i、B_j 等點。然後依$B_1\rightarrow A_1\rightarrow B_2\rightarrow A_2\rightarrow\cdots$(直到頂點 A 或 B 為止)順序連接成小三角形

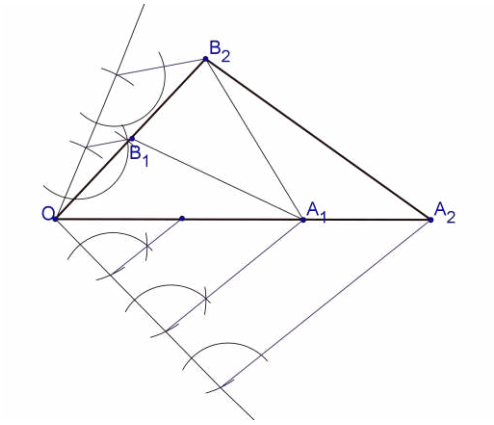
<小結>:一個三角形面積分成 n 等分的作法步驟說明如下:

(1)利用表一求出 i,j 值，即將$\overline{OA}$分成 i 段，$\overline{OB}$分成 j 段，也就是 n 決定後， i，j也隨之跟著決定。即在$\overline{OA}$邊上找出 A_1，A_2，A_3，A_4， … A_i等點，$\overline{OB}$邊上找出 B_1，B_2，B_3，B_4， … B_j 等點。

(2)利用上述結論中的①、③可得知 $\overline{OA_i} = \frac{3}{2}\times\frac{5}{4}\times\frac{7}{6}\times\ldots\times\frac{2i-1}{2i-2}\overline{OA_1}$，$\overline{OB_j} = \frac{2}{1}\times\frac{4}{3}\times\frac{6}{5}\times\ldots\times\frac{2j-2}{2j-3}\overline{OB_1}$ ，亦即知道比例後，便可根據平行線截比例線段在$\overline{OA}$上作圖得出 $\overline{OA_1}$ ，以及在$\overline{OB}$上作圖得出 $\overline{OB_1}$。

(3)接下來依式子①、③，按比例依序點出B_2、A_2、B_3、A_3、 … 、A_i、B_j等點之後，依序連接各點就可以得到三角形面積 n 等分。

例:如下圖，如何把ΔOA_2B_2面積依序切割成等面積的三個小三角形。



圖五:三等分三角形

作法:①$\overline{OA_2}$會被分成2 段，$\overline{OB_2}$會被分成 2段

②由$\overline{OA_i} = \frac{3}{2}\times\frac{5}{4}\times\frac{7}{6}\times\ldots\times\frac{2i-1}{2i-2}\overline{OA_1}$ 推得 $\overline{OA_2} = \frac{3}{2}\overline{OA_1}$，即$\overline{OA_1}=\frac{2}{3}\overline{OA_2}$

及 $\overline{OB_j} = \frac{2}{1}\times\frac{4}{3}\times\frac{6}{5}\times\ldots\times\frac{2j-2}{2j-3}\overline{OB_1}$ 推得 $\overline{OB_2} = 2\overline{OB_1}$，即$\overline{OB_1}=\frac{1}{2}\overline{OB_2}$

③在$\overline{OA_2}$上，將$\overline{OA_2}$三等分(利用平行線截比例線段作圖)，第二等分處即為點A_1

在$\overline{OB_2}$上，將$\overline{OB_2}$二等分，中點即為B_1

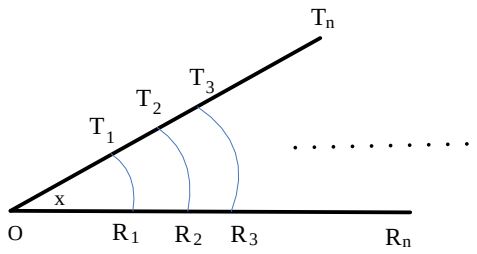
④把B_1連到A_1，再從A_1連到B_2就可以得到面積相等的三個小三角形。

[問題二]、一個扇形如何 n 等分成相同面積的扇形與類環形區域?

<過程一> 找出$\overline{OR_1}$與$\overline{OR_n}$的關係與$\overline{OR_1}$與$\overline{R_{n-1}R_n}$ 的關係，意即計算$\overline{OR_n}$=?$\overline{OR_1}$，

$\overline{R_{n-1}R_n}$ =?$\overline{OR_1}$。

<說明一>如圖六，設扇形圓心角度數= X，且每一個類環形區域的面積都等於扇形 OR_1T_1的面積；並且假設扇形面積在 n 等分之後，以頂點 O 開始的第一個扇形在$\overline{OA}$上的頂點是 R_1，在$\overline{OB}$上的頂點是 T_1；第一個類環形區域在$\overline{OA}$上的二個頂點分別是R_1、R_2，在$\overline{OB}$上的二個頂點分別是T_1、T_2，第二個類環形區域在$\overline{OA}$上的頂點分別是R_2、R_3，在$\overline{OB}$上的頂點分別是T_2、T_3；…；第(n-1)個類環形區域在$\overline{OA}$上的頂點分別是R_{n-1}、R_n，在$\overline{OB}$上的頂點分別是T_{n-1}、T_n。又$\overline{OR_i}$ = $\overline{OT_i}$，其中 $1 \le i \le n$。第 n 個線段是$\overline{R_{n-1}R_n}$，$\overline{OR_n}$長表示點 O 到點R_n的長度



圖六:等分扇形

<方法一>首先，我們求出邊上各線段之間的比例

扇形 OR_1T_1面積= $\frac{X\times\overline{OR_1}\times\overline{OR_1}\times\pi}{360}$

類環形區域$R_1T_1T_2R_2$面積=扇形OR_1T_1面積=扇形OR_2T_2面積-扇形OR_1T_1面積

$\rightarrow \frac{X\times\overline{OR_1}\times\overline{OR_1}\times\pi}{360} = \frac{x\times\overline{OR_2}\times\overline{OR_2}\times\pi}{360} - \frac{X\times\overline{OR_1}\times\overline{OR_1}\times\pi}{360}$

$\rightarrow \overline{OR_1}\times\overline{OR_1} = \overline{OR_2}\times\overline{OR_2} - \overline{OR_1}\times\overline{OR_1}$

$\rightarrow \overline{OR_1}^2 = \overline{OR_2}^2 - \overline{OR_1}^2$

$\rightarrow \overline{OR_2}^2 = 2\overline{OR_1}^2$

$\rightarrow \overline{OR_2} = \sqrt{2}\,\overline{OR_1}$

<方法二>考慮扇形OR_1T_1面積等於類環形區域$R_2T_2T_3R_3$面積，也等於扇形OR_3T_3面積與扇形OR_2T_2面積差，即

$$\frac{X\times\overline{OR_1}\times\overline{OR_1}\times\pi}{360}=\frac{x\times\overline{OR_3}\times\overline{OR_3}\times\pi}{360}-\frac{x\times\overline{OR_2}\times\overline{OR_2}\times\pi}{360}$$

$\rightarrow \overline{OR_1}\times\overline{OR_1}=\overline{OR_3}\times\overline{OR_3}-\overline{OR_2}\times\overline{OR_2}$

$\rightarrow \overline{OR_1}^2=\overline{OR_3}^2-\overline{OR_2}^2$

$\rightarrow \overline{OR_1}^2+\overline{OR_2}^2=\overline{OR_3}^2$

$\rightarrow \overline{OR_1}^2+2\overline{OR_1}^2=\overline{OR_3}^2$

$\rightarrow 3\overline{OR_1}^2=\overline{OR_3}^2$

$\rightarrow \overline{OR_3}=\sqrt{3}\,\overline{OR_1}$

<方法三>(1)經由上述方法知當 n=2,3 時，下列關係式$\overline{OR_2}=\sqrt{2}\,\overline{OR_1}$，$\overline{OR_3}=\sqrt{3}\,\overline{OR_1}$成立 (2)

設 n=k 時，關係式成立，意即 $\overline{OR_k}=\sqrt{k}\,\overline{OR_1}$

則 n=k+1 時，以扇形$OR_{k+1}T_{k+1}$面積與扇形OR_kT_k面積差驗證，可得

$$\frac{X\times\overline{OR_1}\times\overline{OR_1}\times\pi}{360}=\frac{x\times\overline{OR_{k+1}}\times\overline{OR_{k+1}}\times\pi}{360}-\frac{x\times\overline{OR_k}\times\overline{OR_k}\times\pi}{360}$$

$\rightarrow \overline{OR_1}\times\overline{OR_1}=\overline{OR_{k+1}}\times\overline{OR_{k+1}}-\overline{OR_k}\times\overline{OR_k}$

$\rightarrow \overline{OR_1}^2=\overline{OR_{k+1}}^2-\overline{OR_k}^2=\overline{OR_{k+1}}^2-(\sqrt{k}\,\overline{OR_1})^2$

$\rightarrow (k+1)\overline{OR_1}^2=\overline{OR_{k+1}}^2$

$\rightarrow \overline{OR_{k+1}}=\sqrt{k+1}\,\overline{OR_1}$ 也成立

由數學歸納法得知，對於任意正整數 n，式子⑤成立，即

$\overline{OR_n}=\sqrt{n}\,\overline{OR_1}$ ……⑤

將第 n 段減掉第(n-1)段，即$\overline{OR_n}-\overline{OR_{n-1}}=\sqrt{n}\,\overline{OR_1}-\sqrt{n-1}\,\overline{OR_1}=\overline{R_{n-1}R_n}$

得出結果為: $\overline{R_{n-1}R_n}=(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})\,\overline{OR_1}$ ……⑥

<過程二>給定任一扇形，如何依序 n 等分成面積相同的扇形與類環形區域

<方法> (1)當給定一個扇形的邊長，也就是知道$\overline{OR_n}$，依照式子⑤求出$\overline{OR_1}$，我們便可以找出點R_1。(2)依此類推求出$\overline{OR_2}$，$\overline{OR_3}$ ...。(3)以 O 點為圓心, $\overline{OR_i}(1\leq i\leq n)$為半徑依序畫弧，和扇形兩邊的交點，便可依序切割成 n 個相同面積的扇形與類環形區域。

例: 如何把一個扇形面積依序分割成等面積的三等個區域。

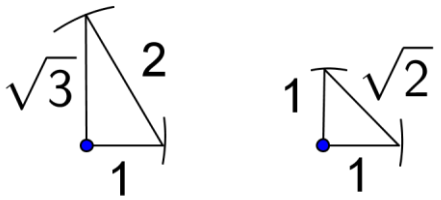
作法: 給定任意一扇形，則$\overline{OR_3}$就是扇形的邊長

(1) 作$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$兩線段(如圖七)。

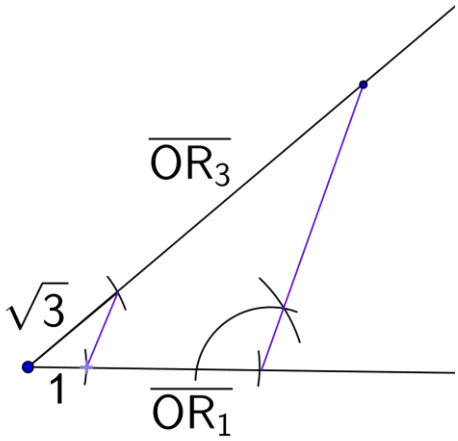
(2) 作$\overline{OR_1}$長的線段(如圖八)

(3) 作$\overline{OR_2}$長的線段(如圖九)

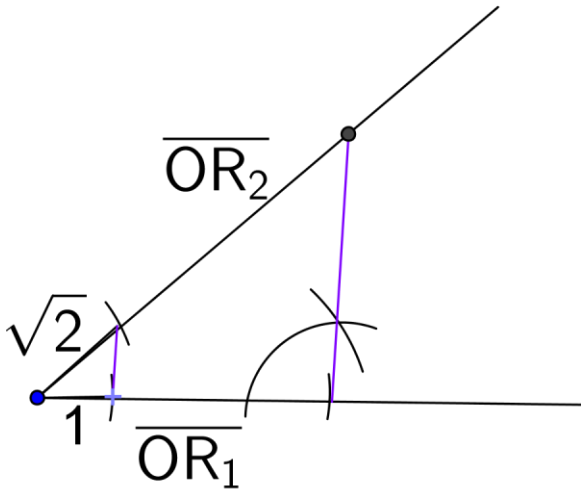
(4) 以 O 為圓心，分別以$\overline{OR_1}$長，$\overline{OR_2}$長為半徑畫弧，交扇形的兩邊各有兩點，則此兩弧將扇形面積分割成等面積的三個區域(如圖十)。



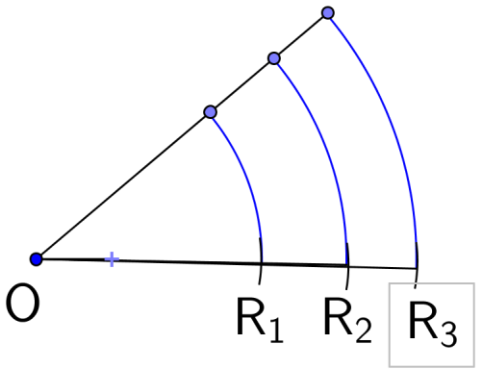
圖七:三等分扇形面積說明 1



圖八:三等分扇形面積說明 2



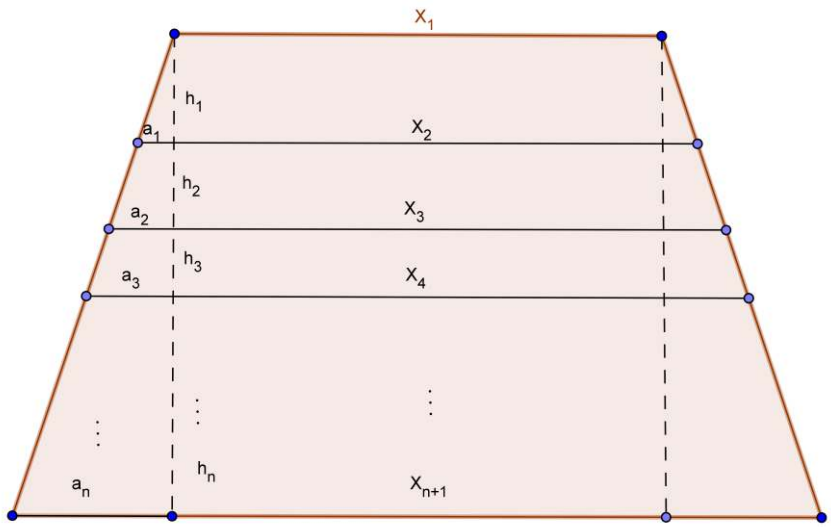
圖九:三等分扇形面積說明 3



圖十:三等分扇形面積說明 4

[問題三]、一個等腰梯形如何 n 等分成相同面積的小等腰梯形?

<過程一> 找出p_n與x_1，a_1間的關係



圖十一:等分等腰梯形面積

<說明一>如上圖，假設一個等腰梯形可分為 n 個等面積的小等腰梯形，由上而下可以有第 1，第 2，…，第 n 個小等腰梯形，其中h_i = 第 i 個小等腰梯形的高 ，$1 \le i \le n$，

H= $h_1 + h_2 + h_3 + \cdots + h_n$=原等腰梯形的高，

a_i =第 i 個小等腰梯形下底兩旁的三角形的底邊長，其中 $1 \le i \le n$， x_1 = 第一個小等腰梯形的上底，

x_i = 第 $i-1$ 個小等腰梯形的下底也同時是第 i 個小等腰梯形的上底，其中 $1 \le i \le n$，

x_{n+1} = 第 n 個小等腰梯形的下底

<方法一>考慮面積 n 等分後的等面積小等腰梯形之第 1 個、及第 1 到第 2 個小等腰梯形面積和，得知相似三角形中，相同的角度，對應邊長的比值相同

$\rightarrow \frac{h_1}{a_1} = \frac{h_1+h_2}{a_2}$;

設 $\frac{a_2}{a_1} = \frac{h_1+h_2}{h_1} = p_2$，即$a_2$=$a_1 \times p_2$，$h_1 + h_2$=$h_1 \times p_2$

因為第一個小等腰梯形面積的 2 倍=第 1 與第 2 個小等腰梯形面積和

所以$2(x_1 + x_1 + 2a_1) \times h_1 = (x_1 + x_1 + 2a_2)(h_1 + h_2)$

$\rightarrow\ 2(2x_1 + 2a_1) \times h_1 = (2x_1 + 2a_2)(h_1 p_2)$

$\rightarrow\ 2x_1+2a_1=(x_1+a_2)p_2$

$\rightarrow\ 2x_1+2a_1=(x_1+a_1p_2)\times p_2$

$\rightarrow\ 2x_1+2a_1=x_1\,p_2+a_1{p_2}^2$

$\rightarrow\ a_1{p_2}^2+x_1p_2-2(x_1+a_1)=0$，因為$p_2$為正數

所以 $p_2=\frac{-x_1+\sqrt{{x_1}^2+8a_1(x_1+a_1)}}{2a_1}=\frac{-x_1+\sqrt{{x_1}^2+4\times2\times a_1(x_1+a_1)}}{2a_1}$

<方法二>考慮面積 n 等分後的等面積小等腰梯形之第 1 個、及第 1 到第 3 個小等腰梯形面積和，得知相似三角形中，相同的角度，對應邊長的比值相同

$\rightarrow\ \frac{h_1}{a_1}=\frac{h_1+h_2+h_3}{a_3}$，設$\frac{a_3}{a_1}=\frac{h_1+h_2+h_3}{h_1}=p_3$，即$a_3=a_1\times p_3$，$h_1+h_2+h_3=h_1\times p_3$

因為第一個小等腰梯形面積的 3 倍=第 1 到第 3 個小等腰梯形面積和

所以$3(x_1+x_1+2a_1)\times h_1=(x_1+x_1+2a_3)(h_1+h_2+h_3)$

$\rightarrow 3(2x_1+2a_1)\times h_1=(2x_1+2a_3)(h_1p_3)$

$\rightarrow 3(x_1+a_1)=(x_1+a_3)\times p_3$

$\rightarrow\ 3(x_1+a_1)=(x_1+a_1p_3)\times p_3$

$\rightarrow\ a_1{p_3}^2+x_1p_3-\ 3(x_1+a_1)=0$，因為$p_3$為正數，所以

$$p_3=\frac{-x_1+\sqrt{{x_1}^2+12a_1(x_1+a_1)}}{2a_1}=\frac{-x_1+\sqrt{{x_1}^2+4\times3\times a_1(x_1+a_1)}}{2a_1}$$

<方法三>(1)經由上述方法知當 n=2,3 時，滿足$p_2=\frac{-x_1+\sqrt{{x_1}^2+4\times2\times a_1(x_1+a_1)}}{2a_1}$，$p_3=\frac{-x_1+\sqrt{{x_1}^2+4\times3\times a_1(x_1+a_1)}}{2a_1}$。(2)設 n=k 時滿足 $P_k=\frac{-x_1+\sqrt{{x_1}^2+4ka_1(x_1+a_1)}}{2a_1}$

則 n=k+1 時，考慮面積 n 等分後的等面積小等腰梯形之第 1 個、及第 1 到第(k+1)個小等腰梯形面積和，得知相似三角形中，相同的角度，對應邊長的比值相同

$\rightarrow\frac{h_1}{a_1}=\frac{h_1+h_2+\cdots+h_{k+1}}{a_{k+1}}$，設 $\frac{a_{k+1}}{a_1}=\frac{h_1+h_2+\cdots+h_{k+1}}{h_1}=p_{k+1}$，即$a_{k+1}=a_1\times p_{k+1}$，

$h_1+h_2+\cdots+h_{k+1}=h_1\times p_{k+1}$

因為第 1 個小等腰梯形面積的(k+1)倍=第 1 到第(k+1)個小等腰梯形面積和

所以 $(k+1)(x_1+x_1+2a_1)\times h_1=(x_1+x_1+2a_{k+1})(h_1+h_2+\cdots+h_{k+1})$

$\rightarrow\ (k+1)(2x_1+2a_1)\times h_1=(2x_1+2a_{k+1})\times h_1p_{k+1}$

$\rightarrow\ (k+1)(x_1+a_1)=(x_1+a_{k+1})\times p_{k+1}$

$\rightarrow\ (k+1)(x_1+a_1)=(x_1+a_1p_{k+1})\times p_{k+1}$

$\rightarrow\ a_1{p_{k+1}}^2+x_1p_{k+1}-\ (k+1)(x_1+a_1)=0$，因為$p_{k+1}$為正數

所以$p_{k+1}=\frac{-x_1+\sqrt{{x_1}^2+4a_1(k+1)(x_1+a_1)}}{2a_1}$

由數學歸納法得知，對於任一正整數 n，$P_n=\frac{-x_1+\sqrt{{x_1}^2+4na_1(x_1+a_1)}}{2a_1}$成立。

<方法四>由前述知P_n滿足方程式$a_1{p_n}^2+x_1p_n-\ n(x_1+a_1)=0$，其解為

$P_n=\frac{-x_1+\sqrt{{x_1}^2+4na_1(x_1+a_1)}}{2a_1}$ ……⑦

又$P_n=\frac{a_n}{a_1}$ ，故上式可以改寫為

$2a_n=-x_1+\sqrt{{x_1}^2+4na_1(x_1+a_1)}$ ，由於 a_n 與x_1已知，所以可求出 a_1 。

又當a_1與x_1已知時，代入$P_n=\frac{-x_1+\sqrt{{x_1}^2+4na_1(x_1+a_1)}}{2a_1}$中，便求出$P_n$，又$P_n$為梯形高度的比值，由此就可求得$h_1$、$h_2$、⋯、$h_n$，再依序在原等腰梯形上的高畫弧與高交於(n-1)個點，過這些交點，再作底邊的平行線，即可得到面積 n 等分的小等腰梯形。

例: 如何把一等腰梯形面積依序分割成等面積的三個小等腰梯形。

解:假設一個等腰梯形，x_1為 2，x_4為 10，n 為 3，h 為 12

將$(x_4-x_1)\div 2$可算出a_3，亦即$a_3=(10\text{-}2)\div 2=4$

又$P_n=\frac{-x_1+\sqrt{{x_1}^2+4na_1(x_1+a_1)}}{2a_1}$ 且 $P_n=\frac{a_n}{a_1}$ ，故$2a_n=-x_1+\sqrt{{x_1}^2+4na_1(x_1+a_1)}$ ，由於 a_n (此處$a_n=a_3$) 與x_1已知，便可解出 a_1 。將上述a_3與x_1的值代入式子得

$2\cdot 4=-2+\sqrt{2^2+4\cdot 3a_1(2+a_1)}$ 化簡後，得${a_1}^2+2a_1-8=0$，也就是$(a_1+1)^2=9$。

所以 $a_1+1=3$ 或$a_1+1=-3$ (不合)，由於 a_1為正值，因此可得到 $a_1=2$。因為

$\frac{a_3}{a_1}=\frac{h_1+h_2+h_3}{h_1}=p_3$，又$\frac{a_3}{a_1}=\frac{4}{2}=2$ 所以$h_1+h_2+h_3=2h_1$，也就是$h_1=6$

作圖畫出h_1，過交點作底邊平行線，則可畫出第一個小等腰梯形

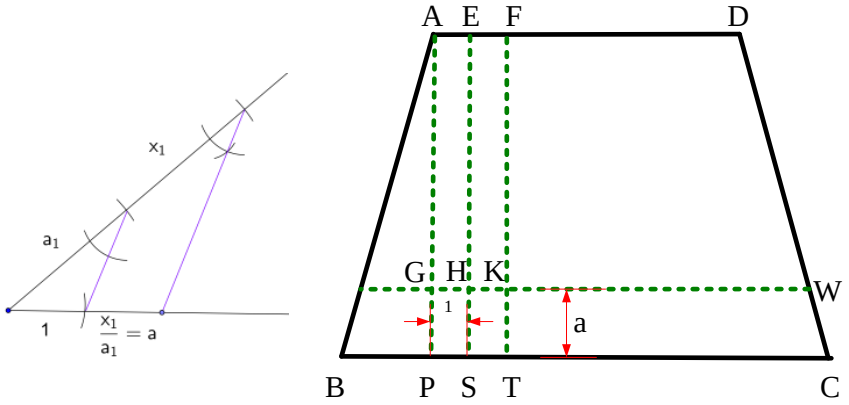
接著計算$p_2=\frac{-2+\sqrt{2^2+4\cdot 2\cdot 2\cdot(2+2)}}{2\cdot 2}$得到$p_2=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ ，由於$\frac{h_1+h_2}{h_1}=p_2$，故$h_2=3\sqrt{17}-9$，

作圖畫出h_2，過交點作底邊平行線，即完成三等分等腰梯形的面積。

[問題四]、如何透過尺規作圖就能找出 n 等分等腰梯形面積的P_n值?

<過程一>

在[問題三]的<方法四>中，我們利用算式可找出 n 等分等腰梯形面積解法，但算出來的高常常不是整數，發現其值要以尺規作圖方式完成的過程相當繁雜，事實上，我們利用尺規作圖，便可直接畫出代表P_n的線段，方法如下:



圖十二: 等腰梯形作圖 1

<作法>:(如圖十二)

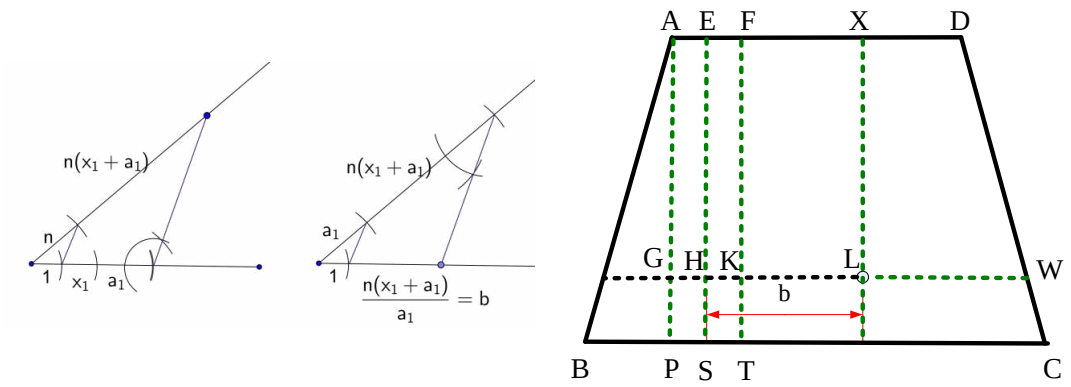
步驟一: 過等腰梯形 ABCD 的頂點 A，作出垂直於$\overline{BC}$的線，並交$\overline{BC}$於點 P。

步驟二: 在$\overline{AP}$線段上取點 G，使得$\overline{GP}$=a，其中 a=$\frac{x_1}{a_1}$。又過點 G，作一條平行於$\overline{BC}$的線段$\overline{GW}$。

步驟三: 在$\overline{GW}$上 G 點右側取一點 H，使得$\overline{GH}$=1，過點 H，作一條平行於$\overline{AP}$的線段$\overline{ES}$。

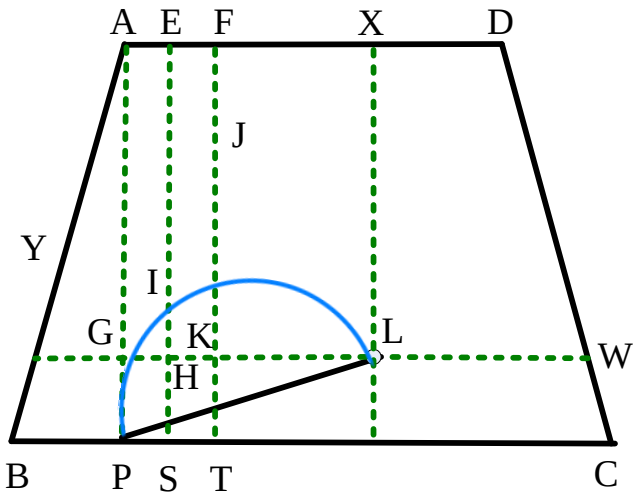
步驟四:在$\overline{GW}$上點 H 的右側再取一點 K，使得$\overline{HK}$=$\overline{GH}$=1，過點 K，作一條平行$\overline{ES}$的線段$\overline{FT}$。

步驟五: 在$\overline{GW}$上點 H 的右側取一點 L，使得$\overline{HL}$=b，其中 b=$\frac{n(x_1+a_1)}{a_1}$且過點 L 作$\overleftrightarrow{XL}\perp\overline{GW}$。(如圖十三)

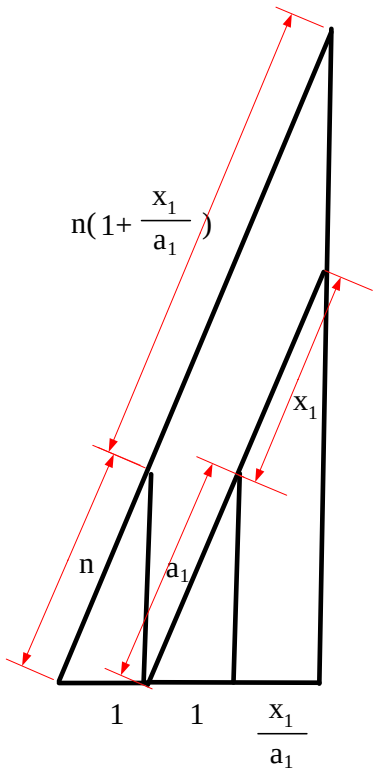


圖十三: 梯形作圖 2

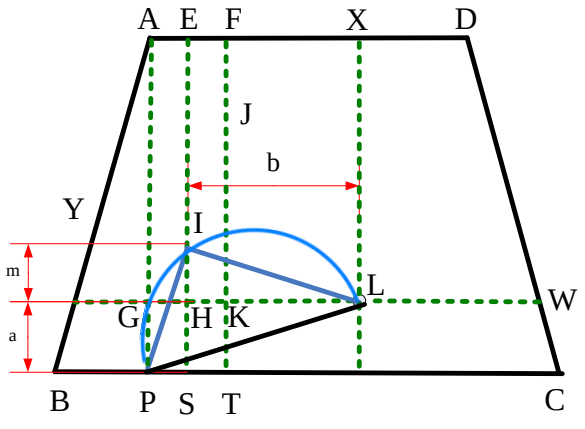
步驟六: 連接$\overline{PL}$，以$\overline{PL}$為直徑畫半圓交$\overline{ES}$於 I 點(如圖十四)。則$\overline{IH}$即為P_n。(註:此處的 a, b 為方程式 $a_1{p_n}^2 + x_1p_n - n(x_1 + a_1) = 0$ 中設 a=$\frac{x_1}{a_1}$; b=$\frac{n(x_1+a_1)}{a_1}$的值；另外亦可由圖十五作法中，同時畫出長度為 a, b 的兩線段。)



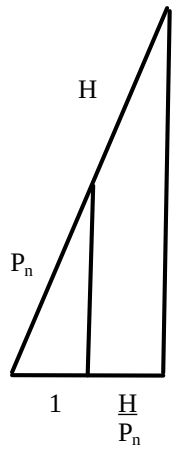
圖十四: 等腰梯形作圖 3



圖十五:作圖說明 4



圖十六: 等腰梯形作圖說明 1



圖十七: 等腰梯形作圖說明 2

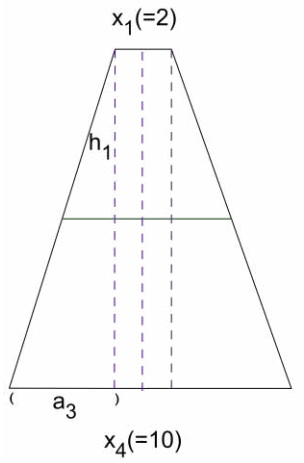
<說明>: 連接$\overline{IL}$，$\overline{IP}$(如圖十六)

假設$\overline{IH}=m$。因為∠LIP=∠IHL=∠ISP=90°，又∠LIH+∠PIH=∠LIH+∠ILH=90°，所以∠PIH=∠ILH。因此△LIH~△IPS

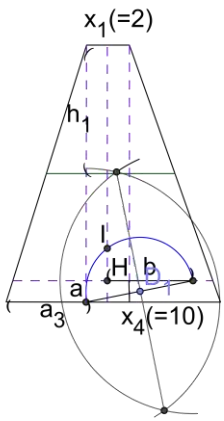
→ $\frac{\overline{LH}}{\overline{IH}}=\frac{\overline{IS}}{\overline{PS}}$，所以 b/m=(m+a)/1，得出$m^2+am-b=0$，可知$\overline{IH}$長就是研究[問題三]$P_n$值的解。得到$P_n$後，再進一步由(圖十七)的作圖可求得 H/P_n，此處 $H/P_n=h_1$。

<討論>: 我們延續研究[問題三]的例子，說明如何以作圖方式找到P_2值。亦即假設一個等腰梯形，x_1為 2，x_4為 10，n 為 3，h 為 12，在研究[問題三]的例題中，我們畫出h_1=6(如圖十八)，接著我們雖然可以依照P_n的通式算出$p_2=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$，但是遇到這樣的數字讓我們很難用尺規直接畫在原等腰梯形的高的線段上來等分其面積。因此我們以另一種作圖方式求出三等分的高。方法如下

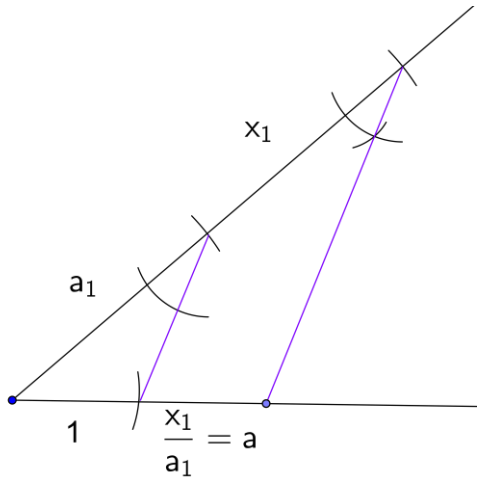
在圖十八中，在 h 的右側，我們作間隔各為 1 且平行於 h 的兩線段。又在 h 與梯形底邊交點 P 處(如圖十九)，往上在長度為 a 處作一平行底邊的線段交上述兩線段中的第一條線於點 H，在此線段上由點 H 向右取長度 b 可找到一點 L 使得$\overline{HL}$=b。其中的 a,b 的值為 a=$\frac{x_1}{a_1}$ 、 b=$\frac{n(x_1+a_1)}{a_1}$(如圖二十、二十一)；我們可以找出$\overline{IH}$滿足 $a_1{p_n}^2+x_1p_n-n(x_1+a_1)=0$。$\overline{IH}$此即為$p_2$(如圖二十、二十一、十九)，又因為$h_1+h_2$=$h_1P_2$，所以可以求出$h_1+h_2$的長度(如圖二十二)。再將$h_1+h_2$的長度畫在原等腰梯形的高的線段 h 上即可求出$h_2$，如此便可完成三等分等腰梯形面積(如圖二十三)。



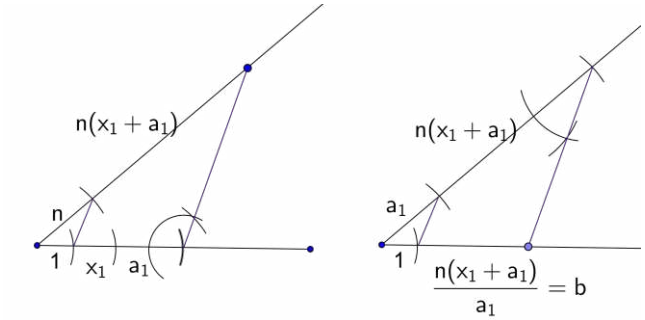
圖十八:三等分等腰梯形面積作圖說明 1



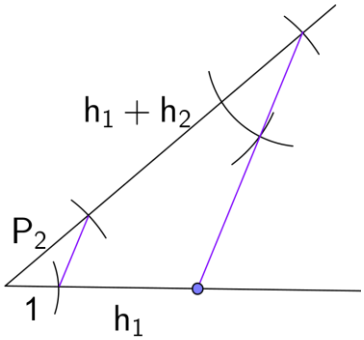
圖十九:三等分等腰梯形面積作圖說明 4(p_2所代表的線段$\overline{IH}$)



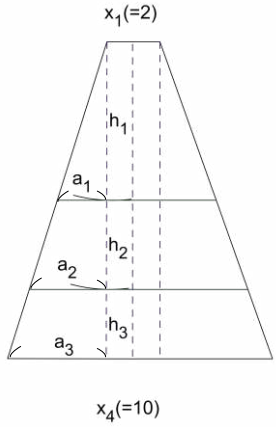
圖二十:三等分等腰梯形面積作圖說明 2(長度 a 的求法)



圖二十一:三等分等腰梯形面積作圖說明 3(長度 b 的求法)



圖二十二:三等分等腰梯形面積作圖說明 5(長度$h_1 + h_2$的求法)

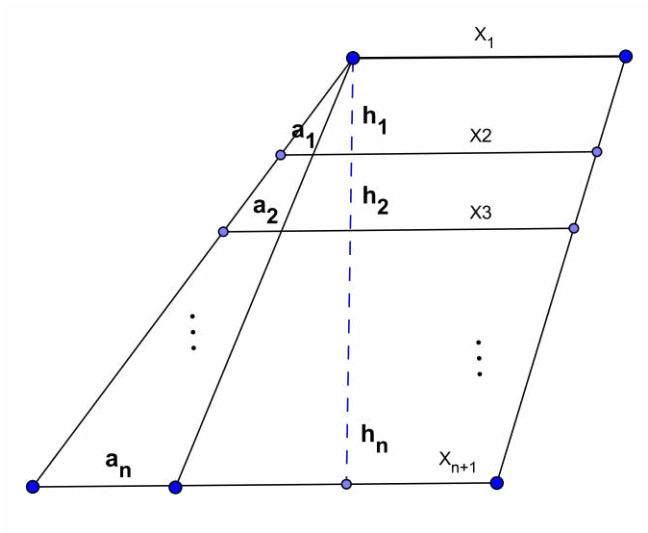


圖二十三:三等分等腰梯形面積作圖說明 6

在這個例子當中，我們延續研究[問題三]完成三等分等腰梯形的面積。如果一開始不知道h_1

的值，那又該如何作圖呢?因為$P_n=\frac{-x_1+\sqrt{x_1{}^2+4na_1(x_1+a_1)}}{2a_1}$ 且 $P_n=\frac{a_n}{a_1}$ ，所以$2a_n=-x_1+\sqrt{x_1{}^2+4na_1(x_1+a_1)}$ ，由於 a_n（此處$a_n=a_3$）與x_1已知，所以我們只要作圖解出 $2a_n=-x_1+\sqrt{x_1{}^2+4na_1(x_1+a_1)}$就可解出 a_1，意即$(2a_n+x_1)^2=x_1{}^2+4na_1(x_1+a_1)$ →$4a_n{}^2+4a_nx_1=4na_1x_1+4na_1{}^2$，化簡後，$a_1{}^2+x_1a_1-\frac{a_n{}^2+a_nx_1}{n}=0$ 這個式子的圖解方法其實就如同研究[問題四]例子的解法，可得到a_1的線段長，於此便可得到P_3，接著就如同例子中的解法，將此等腰梯形面積三等分。

[問題五]、一個梯形如何 n 等分成相同面積的小梯形?



圖二十四:梯形一

<說明>完成等腰梯形面積等分後，我們聯想到如何將上述方法應用在一般梯形的等分面積上。

如上圖，假設一個梯形由上而下分成 n 個等面積的小梯形，由上而下依序可以有第 1，第 2，…，第 n 個梯形，其中$h_i=$第 i 個梯形的高 ，$1\le i\le n$，H= $h_1+h_2+h_3+\cdots+h_n$，$x_1=$第一個梯形的上底，$x_i=$第 $i-1$ 個梯形的下底同時也是第 i 個梯形的上底，其中 $1\le i\le n$，$x_{n+1}=$第 n 個梯形的下底。

<方法一>我們先過上底中的一頂點作平行另一腰的線段，得出一個大的平行四邊形以及一個大三角形， a_i=第 i 個梯形左邊三角形的底邊，其中 $1\le i\le n$。運用[問題三]式子中的

$\frac{a_n}{a_1}=\frac{h_1+h_2+\cdots+h_n}{h_1}=P_n$，且$P_n=\frac{-x_1+\sqrt{x_1{}^2+4na_1(x_1+a_1)}}{2a_1}$，但由於[問題三]的各小等腰梯形中左右各有一個直角三角形，也就是會有兩個直角三角形底邊，但在一般梯形中作完平行線後，只會有一個三角形的底邊，因此我們可以利用[問題三]的結果，但將$2a_1$ 替換成a_1，來求出P_n的值。也就是$P_n=\frac{-x_1+\sqrt{x_1{}^2+4na_1(x_1+a_1)}}{2a_1}=\frac{-x_1+\sqrt{x_1{}^2+(2a_1)n(2x_1+(2a_1))}}{(2a_1)}$，替換後得到

$P_n=\frac{-x_1+\sqrt{x_1{}^2+na_1(2x_1+a_1)}}{a_1}$。又 $P_n=\frac{a_n}{a_1}$ ，因此$a_n=-x_1+\sqrt{x_1{}^2+na_1(2x_1+a_1)}$ ，

$\rightarrow (a_n+x_1)^2=x_1{}^2+na_1(2x_1+a_1)$

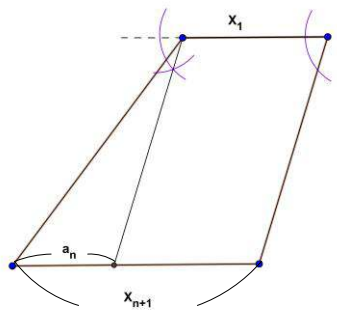
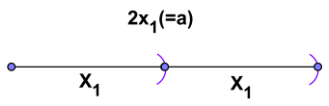
$\rightarrow a_n{}^2+2a_nx_1+x_1{}^2=x_1{}^2+2na_1x_1+na_1{}^2$

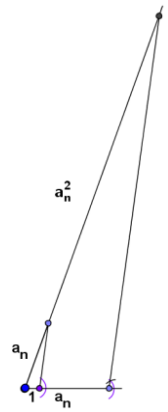
$\rightarrow na_1{}^2+2nx_1a_1-(a_n{}^2+2a_nx_1)=0$

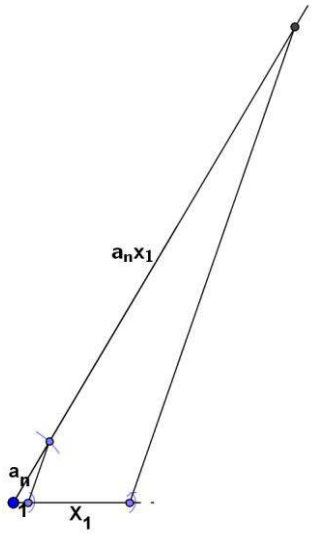
$\rightarrow a_1{}^2+2x_1a_1-\frac{a_n{}^2+2a_nx_1}{n}=0$，於是我們可以利用[問題四]的作圖方式，解出$a_1$。

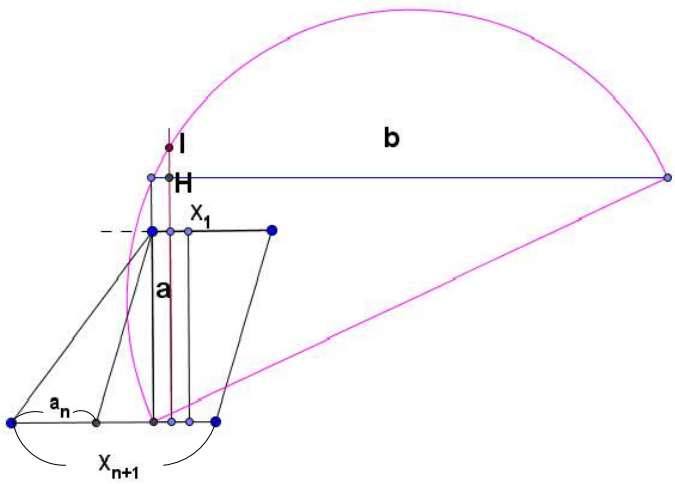
<方法二>我們利用[問題四]的作圖方法可求得a_1、P_n後，進一步可求得各梯形的高度，最後求得 n 等分面積的梯形。今將步驟說明如下表

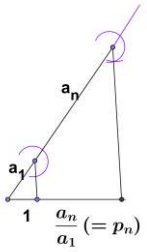
表二: n 等分梯形面積

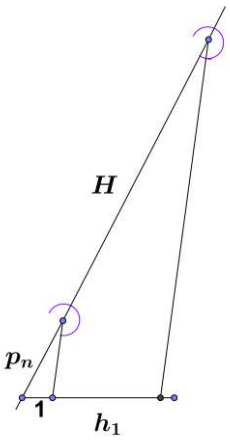
n 等分梯形面積步驟	梯形面積三等分	
步驟 1.求a_1以推得p_n (已知: x_1，x_n，H，a_n $p_n=\frac{a_n}{a_1}$) 說明: a_1的作圖求法 1.令$b=\frac{a_n{}^2+2a_nx_1}{n}$， 已知: a=$2x_1$ ，a_n，n	 1.作平行線成一平行四邊形	 2.作長度 a

<table>
<tr>
<td rowspan="2">2.求
$a_1{}^2+2x_1a_1-\frac{a_n{}^2+2a_nx_1}{n}=0$
的解a_1</td>
<td> 

3.作長度$a_n{}^2$</td>
<td> 

4.作長度a_nx_1</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2"> 

5.作出a_1</td>
</tr>
<tr>
<td>步驟 2.由p_n求得h_1
$p_n=\frac{a_n}{a_1}=\frac{H}{h_1}$</td>
<td> 

6.作出p_n</td>
<td> 

7.求得h_1</td>
</tr>
</table>

步驟 3.由h_1及 p_2得到h_2，以此類推由h_{i-1}及p_i得到h_i 。求得各小梯形高即可得解 (已知:

$$p_2 = \frac{h_1 + h_2}{h_1}$$

$$p_i = \frac{h_1 + h_2 + \cdots + h_i}{h_1}$$)

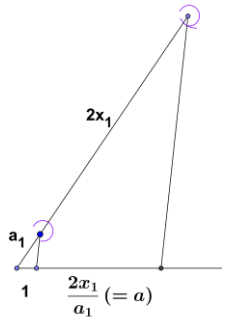
說明:

p_i的作圖求法

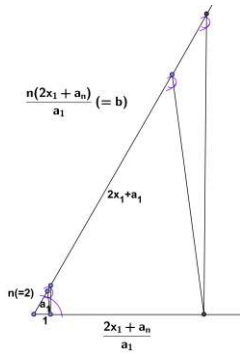
1.令$a = \frac{2x_1}{a_1}$(已知: x_1，a_1)

2.令 $b = \frac{n(2x_1 + a_1)}{a_1}$ (已知: x_1，a_1，n)

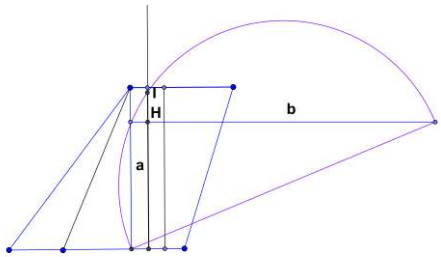
3.求$a_1 {p_i}^2 + 2x_1 p_i - i(2x_1 + a_1) = 0$的解$p_i$



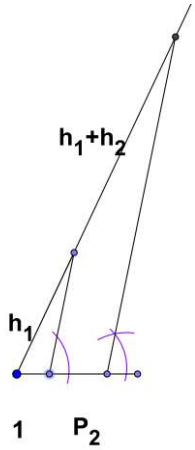
8.作出 a



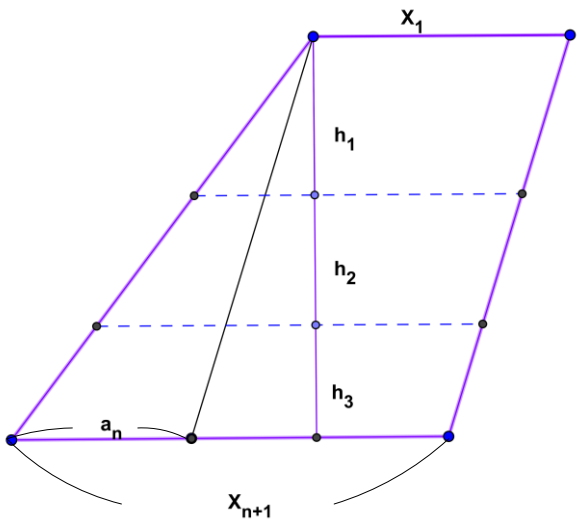
9.作出 b



10.作出p_2



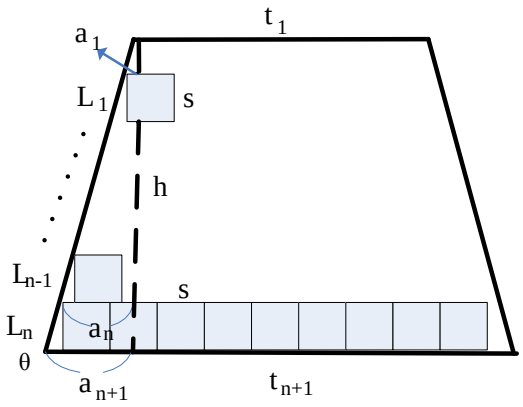
11.作出$h_1 + h_2$



12.完成三等分梯形面積

[問題六]、如何以可書寫國字的相同大小正方形為基準來 n 等分一個等腰梯形?

<說明>等分等腰梯形、三角形及扇形面積後，我們遇到一個問題:有同學說這樣分法不太公平，因為每個等面積區域不一定有一樣可以完整容納正方形格子數量的書寫空間，所以我們試著以相同正方形格子為單位來平分可以容納一樣多正方形格子數的書寫空間。已知 t_1, t_{n+1},總高 h 及 s



圖二十五:等腰梯形分割成正方形

假設L_i為第 i 層的方塊數，其中 $1\le i\le n$ ，n 為總共可以容下幾層方塊的層數，h 為等腰梯形的高， s 為正方形方塊的邊長。(如圖二十五)

將等腰梯形上底的左端作高，沿著每一層排列的方塊上緣畫線皆能與此高相交，過此交點畫的直線平行於下底接於原等腰梯形兩腰的邊可形成直角三角形的斜邊，a_{i+1}為第 i 層對應的直角三角形的底邊，a_1為第一層的直角三角形中高度為 s，且平行底邊的線段(如圖二十五)，又$a_{n+1}=(t_{n+1}-t_1)/2$。在相似三角形中，對應邊的邊長比值相等→ $a_{n+1}/h= a_n/(h-s)$，所以我們可以求得a_{n+1}的值，依此類推可求得a_{i+1}，即$a_{n+1}/h= a_{i+1}/(h-(n-i)s)$，其中 i 為正整數，另外由$a_{n+1}/h= a_1/(h-ns)$可求得$a_1$(註若 h=ns，則$a_1=0$)。每一層的底邊的長度為 $2a_{i+1}+t_1$，而每一層的方塊數則為$L_i=\left[\frac{2a_{i+1}+t_1}{s}\right]$，另外總層數 $n=\left[\frac{h}{s}\right]$且滿足 $2a_1+t_1\ge s$(註:[ ]表高斯符號)，若不能滿足 $2a_1+t_1\ge s$ 則逐次向下選取，直到滿足 $2a_1+t_1\ge s$ 為止，如此方塊數總和為$\sum_{i=1}^{n} L_i$ 。最後將此方塊數總和除以學生數即為每人可分得的可寫國字正方形個數。

例:假設$t_1=50$，$t_{n+1}=200$，總高 h=100，及 s=5，我們先確定 n 為多少，因為 $n=\left[\frac{100}{5}\right]=20$、h=ns(100=20× 5)，得到$a_1=0$ 且a_1滿足 $2a_1+t_1\ge s(0+50\ge 5)$，故可以確認此梯形可分成 20 層，

接下來我們計算各層方塊數，如下表

表三:梯形各層方塊數

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_{i+1}	3.75	7.5	11.25	15	18.75	22.5	26.25	30	33.75	37.5
L_i	11	13	14	16	17	19	20	22	23	25

i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a_{i+1}	41.25	45	48.75	52.5	56.25	60	63.75	67.5	71.25	75
L_i	26	28	29	31	32	34	35	37	38	40

得到總方塊數為 510，假設學生數為 30 人，則每人可分得 17 塊。

柒、研究結果

我們將我們的研究統整如下表。

表四:研究問題、發現與主要的使用性質或方法

問題	發現	主要使用性質或方法
n 等分三角形面積	$\overline{OA_n}=\frac{3}{2}\times\frac{5}{4}\times\cdots\times\frac{2n-1}{2n-2}\overline{OA_1}$, $n\geq 2$ $\overline{A_{n-1}A_n}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{2n-3}{2n-2}\overline{OA_1}$, $n\geq 2$ $\overline{OB_n}=\frac{2}{1}\times\frac{4}{3}\times\frac{6}{5}\times\cdots\times\frac{2n-2}{2n-3}\overline{OB_1}$, $n\geq 2$ $\begin{cases}\overline{B_1B_2}=\overline{OB_1}\\ \overline{B_nB_{n+1}}=\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\ldots\times\frac{2n-2}{2n-1}\overline{OB_1}, n\geq 2\end{cases}$	1.三角形等高時，面積與邊長成比例的關係 2.數學歸納法 3.等量公理
n 等分扇形面積	$\overline{OR_n}=\sqrt{n}\,\overline{OR_1}$ $\overline{R_{n-1}R_n}=(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})\,\overline{OR_1}$	1.扇形面積 2.數學歸納法 3.等量公理
n 等分等腰梯形面積	$p_n=\frac{-x_1+\sqrt{{x_1}^2+4na_1(x_1+a_1)}}{2a_1}$	1.相似三角形中，對應相同的邊長比值相等 2.數學歸納法 3.一元二次方程式的公式解

問題	發現	主要使用性質或方法
作圖找出 n 等分相同面積的等腰梯形中的p_n值	等腰梯形p_n值的作圖法	相似三角形的對應邊長比值相等
n 等分梯形面積	$P_n = \frac{-x_1 + \sqrt{{x_1}^2 + na_1(2x_1 + a_1)}}{a_1}$	1.相似三角形中，對應相同的邊長比值相等 2.數學歸納法 3.一元二次方程式的公式解
作圖找出 n 等分相同面積的梯形中的p_n值	等腰梯形p_n值的作圖法	相似三角形的對應邊長比值相等
一個等腰梯形內可放置的方塊數	$\sum_{i=1}^{n} L_i$ ，其中$L_i=\left[\frac{2a_{i+1}+t_1}{s}\right]$ (註:[ ]表高斯符號)	分割成子問題後解決

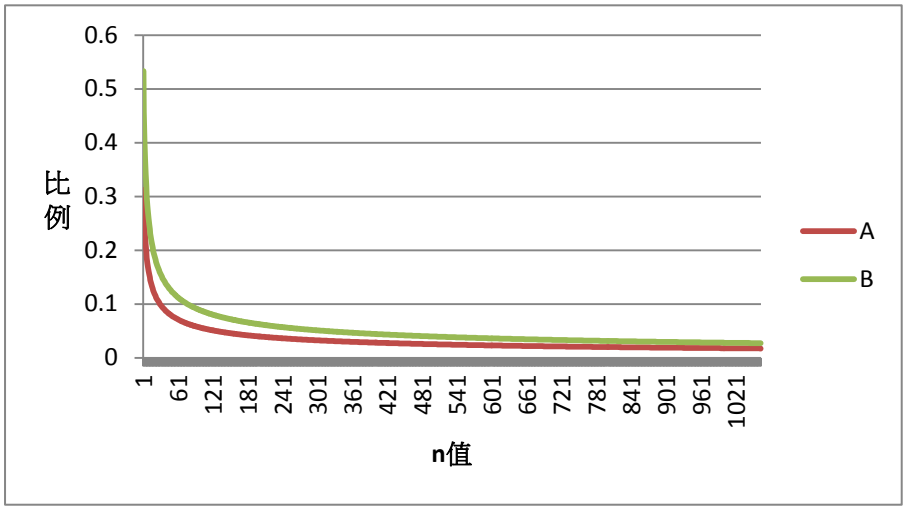
捌、討論

一、在研究[問題一]中，利用 EXCEL 的函數功能與我們找出的公式，探討第(n-1)個邊長與第 n 個邊比例的變化。我們依據找出來的式子$\overline{A_nA_{n-1}}= \frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{2n-3}{2n-2}\overline{OA_1}$ 及$\overline{B_nB_{n-1}}=\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\ldots\times\frac{2n-2}{2n-1}\overline{OB_1}$ 畫出圖二十五，其中橫軸為 n 值，縱軸的比例為第 n 個線段與第一個線段的比，所以曲線 A 為$\overline{A_nA_{n-1}}$與$\overline{OA_1}$的比值，曲線 B 為$\overline{B_nB_{n-1}}$與$\overline{OB_1}$的比值。我們發現曲線變化是先急遽下降後，開始緩降。

由②、④的式子中知道，若依照本研究的方法等分三角形面積時，邊上的各線段長度變化與三角形角度無關，與 n 的大小有關；本方法同時適用銳角、直角及鈍角三角形。

二、研究[問題二]中⑥的式子知道，若依照本研究的方法等分扇形面積時，扇形邊上的各線段長度變化與角度無關，與 n 的大小有關。

三、研究[問題六]中的L_i依照不同給定的值，會有不同的數字，沒有規律可循，因此我們利用電腦 excel 軟體幫忙處理繁複的計算以求得各層的值。



圖二十五: 線段比例圖

玖、研究心得與感想

一、學習了許多新的知識：尺規作圖、一元二次方程式公式解。我們也發現：只要有條理、有系統，有耐心按部就班的推理，就是解決問題的最佳方法。

二、統整所學:從這一次的研究過程中，我們找出 n 等分三角形、扇形及梯形面積的方法，並且能用作圖的方式來等分面積。我們利用”相似三角形中，對應邊長的比值相同”這一個概念解決了本篇研究的大部分問題，在繁複的計算過程中，上學期課程中學到的等量公理也幫了我們很大的忙。

三、團隊合作：在研究期間，我們也領悟到同心協力是一起完成這次的探究活動的重要因素。在解題時，常常會有跟其他同學意見不合的時候，慢慢的我們學到了如何接納與自己不同的意見及與同學互相討論，最後成功解題。

四、意外收穫:在超過半年的研討中，我們曾遇到許多的瓶頸，卻讓我們學得尋找資料的能力。和家人討論時，他們總是熱心的協助提供解決問題的方法。我們因數學加深了與家人的感情，這是當初所意想不到的。

五、未來研究問題:本篇研究探討了三角形、扇形及梯形面積任意等分的求法，未來我們希望延伸到更多不同形狀面積任意等分的方法。

拾、參考資料及其他

一、國小數學康軒版第十一冊 列式與等量公理

二、國中數學南一第三冊(p.179)

三、國中數學翰林第三冊(p.60-61 頁)

四、實用數學辭典 九鼎出版社

五、普通高級中學數學第二冊 數列與級數 三民出版社

【評語】080413

從三角形聖誕樹使用平面的平分問題，引發如何等分面積的探討，值得肯定。但有關如何將圖形面積等分的問題已被探討了很多，期待作者再接再厲，朝向新問題的嘗試與探究。