中華民國第55屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

佳作

080412

偶然中有必然——怎樣才公平？

學校名稱：臺中市烏日區九德國民小學

作者：	指導老師：
小六 卓鈺善	卓樹樣
小六 張晨芳	黃彩美

關鍵詞：約瑟夫問題、循環、約瑟夫定理

摘要

本研究發現 n 個人的約瑟夫問題，反覆淘汰留下來的第 m 個人，m＝1～lcm(n,n-1,……,k) 時，倒數第 k 個淘汰的編號 f(n,m,k) 會循環，其循環節長度是 lcm(n,n-1,……,k)；又找出 f(n,m,k) 的遞迴公式，再以該公式使用 Excel 推算 n＝1～16，m＝1～lcm(n,n-1,……,2) 時，發現人數不變時，每個編號倒數第 k (k＝n～1) 個淘汰的機會都相同；據此提出並證明「約瑟夫定理」：人數 n 人，反覆淘汰留下來的第 m 個人，取 m＝1～lcm(n,n-1,……,2) 時，每個編號倒數第 k 個淘汰的機會都相同。

壹、研究動機

在《數學奇趣錄》（談祥柏，1991）書中，看見〈偶然中有必然〉這篇文章介紹一個「圓周計數」問題，內容概述如下：漢鐘離等八仙一起祝賀西王母 8 萬歲大壽，王母娘娘想招待他們，按禮節應讓八仙之首先入席，但誰是八仙之首？這個問題讓王母娘娘十分為難。玉皇香案吏想了一個公平合理的辦法：請八仙圍一個圓圈，由王母娘娘擲 2 顆骰子，再按照擲出的點數從第一個人開始數起，依次數到擲出的點數時，這個人就淘汰；再從淘汰者的下一個人數起，這樣周而復始，最後留下的人就是八仙之首。王母娘娘點頭同意，但是觀世音菩薩認為呂洞賓有不少缺點，不能讓他當八仙之首，於是請玉皇香案吏把呂洞賓安排在第二個位置，結果不管骰子擲出幾點，他都當不成八仙之首。

如此神奇的結果引發研究動機，上網搜尋得知一般稱它為約瑟夫問題，演算法大師 Donlad E. Knuth 曾詳細闡述（陳衍文，1991，頁 9-20），張廷仰、胡豐榮與許天維（2001）曾探討環狀重排序列的性質。歷屆科學展覽也有許多作品（楊皓琮、翁郁婷，1999；簡民惠，2000；林豐正、詹朱聰、林裕翔、簡子為，2003；林千雅、陳珉儒、邱晨熙、梁育棻，2004；戴于珽，2004；段凱文、梁廷宇、羅子瑞、黃蛟晟，2004；林奕丞、洪嘉蔓、陳昊廷、徐東葦，2005；鄒慶叡、劉志豪、林己豪、劉欣宜，2005；葉佩雯，2005，2006a，2006b，2007）改變汰留規則後，再找出計算幸運位置的公式。國外學者（Ledah Casburn & Tuyet-Linh Phan,2001; Paul Yiu,2003,2012）在類似八仙之首問題中骰子點數可變的條件下，提出倒數第 1 個淘汰編號會循環、最幸運位置 (the best chance of survival) 和不幸運位置

(no-luck position) 等觀點，不過都未探討每個編號倒數第 k 個淘汰機會是否公平的問題。於是我們本著創新存疑的科學精神，探究每個編號倒數第 k 個淘汰機會公平的條件是否存在？而數學課學過的表格、最小公倍數及除法就是解決此問題的知識基礎。

貳、研究目的

一、探討約瑟夫問題中，最不幸運位置存在的情形。

二、探討約瑟夫問題中，倒數第 k 個淘汰編號的循環情形。

三、探討約瑟夫問題中，每個編號倒數第 k 個淘汰機會的公平性。

參、研究設備及器材

電腦、筆、紙、磁鐵板、圍棋。

肆、研究過程與方法

一、文獻探討

(一) 約瑟夫問題簡介

n 個人圍成一圈，編爲 1 到 n 號，然後反覆淘汰掉留下來的第 m 個人（簡稱：報 1～m 汰 m），直到最後 1 個人淘汰，則一開始要站在什麼位置才是最後淘汰的人？舉例說明如下：n＝8，m＝2 的汰留過程如圖 1，淘汰的順序是 2、4、6、8、3、7、5、1 號，最後淘汰的是 1 號。

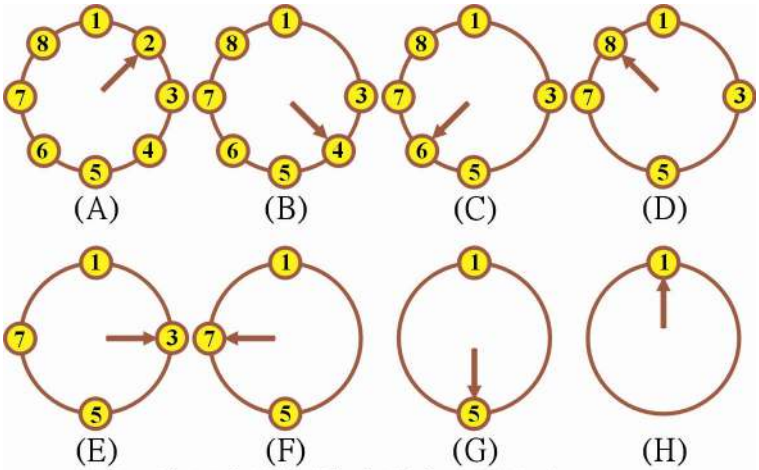

圖1 約瑟夫問題汰留過程說明圖n=8,m=2

(二) 定義符號

1. n：表示一開始的人數。

2. m：表示反覆報數的上限，即報 1～m。

3. f(n,m,k)：表示 n 個人，反覆報 1～m 汰 m 時，倒數第 k 個淘汰的位置或編號。例如：在圖 1 中，f(8,2,8)＝2、f(8,2,1)＝1。

4. m mod n：表示 m 除以 n 的餘數。

(三) 定義名詞

在約瑟夫問題中，定義下列名詞：

1. 幸運位置:倒數第 1 個淘汰的編號,稱爲幸運位置;本研究中的符號是 f(n,m,1)。
2. 最幸運位置：當 m 改變後，倒數第 1 個淘汰的編號中，出現最多次的編號，稱爲最幸運位置。
3. 不幸運位置：當 m 改變後，從未出現在幸運位置的編號，稱爲不幸運位置。
4. 最不幸運位置：當 m 改變後，若只剩一個不幸運位置，稱其爲最不幸運位置。
5. 幸運位置的循環節長度：當 n 不變，m 爲 1～p（p 是足夠大的數），如果 f(n,1,1)～f(n,p,1)中，某些編號依序不斷的循環出現，則這些編號的個數稱爲幸運位置的循環節長度。

以 n＝2、3、8，m＝1～18 的幸運位置資料，如表 1，說明如下：

1. 人數 2 人時，幸運位置以編號 2,1 依序不斷的循環出現，所以幸運位置的循環節長度是 2，此外，每個編號倒數第 1 個淘汰的機會都是 $\frac{1}{2}$ 。
2. 人數 3 人時，幸運位置以編號 3,3,2,2,1,1 依序不斷的循環出現，所以幸運位置的循環節長度是 6，此外，每個編號倒數第 1 個淘汰的機會都是 $\frac{1}{3}$ 。
3. 人數 8 人，當 m＝1～18 時，幸運位置沒有產生循環，而 7 號是最幸運位置；當 m＝1～7 時，2 號和 5 號是不幸運位置；如果取 m＝1～12 時，2 號是最不幸運位置。

表 1：n＝2、3、8，m＝1～18 的幸運位置

f(n,m,1) m / n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
2	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
3	3	3	2	2	1	1	3	3	2	2	1	1	3	3	2	2	1	1
8	8	1	7	6	3	1	4	4	8	7	4	5	7	7	4	3	7	7

(四) 發現的疑問

從表 1 中，我們發現下列疑問，這些都是文獻中未曾探討的問題。

1. 爲什麼會出現不幸運位置？

2. 當 m 可改變的範圍足夠大時，最幸運的位置仍然存在嗎？

3. 在幸運位置的循環節中，每個編號出現的機會都相同嗎？

4. 人數相同時，每個編號倒數第 k 個淘汰的機會有可能相同嗎？

(五) 相關研究摘要並與本研究比較

表 2：歷屆科展有關之作品

作者	作品名稱	汰留規則	研究摘要
楊皓琮、翁郁婷（1999）	公主如何救王子	報 1～m 汰 m	以列舉數據來歸納 f(n,m,1) 的推算公式，並探討 f(n,m,1) 和 f(n,m,2) 的關係。
簡民惠（2000）	天生贏家的奧秘——『傳遞問題』之研究與探討	報 1～m 汰 1	電腦窮舉及數學歸納法證明倒數第 1 個淘汰編號的遞迴公式。
林豐正等人（2003）	九死一生	報 1～m 留 m 報 1～2a 汰 1～a	用電腦窮舉，並找出倒數第 k 個淘汰編號的遞迴公式。
林千雅等人（2004）	公主的抉擇—數的規律	報 1～m 汰 m	以列舉數據推導 f(n,m,1)的遞迴關係式。
戴于珽（2004）	我要活下去	報 1～m 留 m 報 1～2a 汰 1～a	找出倒數第 1 個淘汰編號的遞迴公式。
段凱文等人（2004）	王位繼承人	報 1～m 留 y y≦m	列舉數據後整理分類，歸納倒數第 1 個淘汰編號的推算公式。
林奕丞等人（2005）	探索俄羅斯遊戲法則之奧秘	報 1～m 汰 y y≦m	列舉數據，歸納倒數第 k 個淘汰編號推算公式。
葉佩雯（2005）	老師無法解決的難題	報 1～a+b 汰 1～a	列舉數據，分析歸納倒數第 1 個淘汰編號推算公式。
鄒慶叡等人（2005）	魔數	報 1～2 汰 1	列舉數據，推算倒數第 k 張撲克牌的數字。
葉佩雯（2006a）	約瑟夫數列	報 1～a+b 汰 1～a	列舉數據，歸納推論倒數第 k 個淘汰編號計算公式。
葉佩雯（2006b）	約瑟夫數列的最後一章	報 1～a+b 汰 1～a	列舉數據，歸納證明、電腦模擬倒數第 k 個淘汰編號計算公式。
葉佩雯（2007）	約瑟夫問題	報 1～a+b 汰 1～a	由約瑟夫問題推展至酋長問題，即指定某編號爲酋長，酋長不能被殺，殺到酋長時就停止，求剩下多少個？

歷屆科展有關之作品整理如表 2，而國外學者新的研究方向與本研究比較

如表 3。

表 3：國外學者新的研究方向與本研究比較			
作者	篇名	內容摘要	本研究創見
Ledah Casburn 與 Tuyet-Linh Phan(2001)	The Orthogonal Josephus Problem.	報1～m 汰 m，提出倒數第1個淘汰編號會循環出現。	報1～m 汰 m，在 m 值可改變的條件下，提出倒數第 k 個淘汰的編號會循環出現。
Paul Yiu (2003,2012)	The Josephus problem and its generalization.	報1～m 汰 m，提出最幸運位置和不幸運位置的觀點。	報1～m 汰 m，在 m 值可改變的條件下，提出每個編號倒數第 k 個淘汰機會公平的條件。

當 m 值可改變時，將表 2 和表 3 中的各種汰留規則討論比較，結果整理成表 4，發現只有報 1～m 汰 m 的汰留規則，每個編號倒數第 1 個淘汰的機會有可能相同，所以本研究只探討這種汰留規則。

表 4：當 m 值可改變時討論比較各種汰留規則				
編號	汰留規則	每回淘汰人數	每個編號倒數第 1 個淘汰的機會是否相同	最後一個的淘汰規則
1	報1～m 汰 m	1	可能相同	不變
2	報1～m 汰 1	1	不相同	不變
3	報1～m 留 m	m－1	不相同	會變（m＞2時）
4	報1～m 汰 y (y≦m)	1	不相同（y＜m 時）	不變
5	報1～m 留 y (y≦m)	m－1	不相同	不變
6	報1～a+b 汰1～a	a	不相同	會變（a＞1時）

二、探討最不幸運位置存在的情形

當約瑟夫問題的人數不變時，每一個 m 值可以決定一個幸運位置，本研究採用下列遞迴公式（資料來源：維基百科及網路文章），來推算幸運位置，進而探討最不幸運位置：

$$f(n,m,1) = (f(n-1,m,1) + m) \bmod n \qquad \text{（公式 1）}$$

其中 $f(1,m,1) = 0$（即第一個位置編號爲 0）。

在報 1～m 汰 m 的規則下，我們取 n＝1～30 爲例，在 Excel 中將原編號 1～n 的 n 個人依序重新編爲 0～n－1 號，再使用公式 1，並改變 m 值列出幸運位置，直到每個編號都出現在幸運位置爲止；最後把每個幸運位置的編號加 1 轉換成原編號，得到的結果如附錄一，再整理出最不幸運位置，如表 5。

表 5：n＝1～30 的最不幸運位置										
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m		1	1～4	1～5	1～4	1～9	1～10	1～18	1～41	1～18
最不幸運位置		1	1	3	2	2	1	2	4	2
n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
m	1～39	1～25	1～22	1～46	1～61	1～44	1～55	1～91	1～54	1～85
最不幸運位置	4	4	7	3	3	5	14	13	8	14
n	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
m	1～73	1～61	1～66	1～84	1～64	1～84	1～168	1～118	1～104	1～152
最不幸運位置	18	4	5	19	10	11	10	13	25	2

根據附錄一和表 5 討論發現：

(一) 人數 1 人時，沒有最不幸運位置。

(二) 最不幸運位置與人數間沒有明顯的關係。

(三) 最不幸運位置存在時，幸運位置都沒有形成循環；幸運位置產生循環時，最不幸運位置就不存在。

(四) n＝1～30，只要 m 的範圍夠大，最不幸運位置就不存在。

根據 Ledah Casburn 與 Tuyet-Linh Phan (2001) 的研究結果可發現：不論人數多少，幸運位置一定會產生循環。我們設想：不論人數多少，倒數第 k 個淘汰編號會形成循環嗎？於是我們接著探討倒數第 k 個淘汰編號的循環情形。

三、探討倒數第 k 個淘汰編號的循環情形

當 m 可改變的範圍夠大時，討論 f(n,m,k) 的循環情形如下：

(一) 人數 2 人時，m 從 1 開始逐次增加 1，並依下列規則推算 f(2,m,2)，結果如表 6：

1. 當 m mod 2＝1，則 f(2,m,2)＝1。
2. 當 m mod 2＝0，則 f(2,m,2)＝2。

表 6：n＝2，倒數第 k 個淘汰編號的推算方式																				
m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
m mod 2	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
f(2,m,2)	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
f(2,m,1)	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
討論：																				

1. 當 m 可改變的範圍夠大時，f(2,m,2) 依編號 1、2 循環，其循環節長度爲 2。

2. 留下的 1 人就是 f(2,m,1)，依編號 2、1 循環，其循環節長度也是 2。

(二) 人數 3 人時，m 從 1 開始逐次增加 1，並依下列規則推算 f(3,m,3)，結果如表 7：

1.當 m mod 3＝1，則 f(3,m,3)＝1。

2.當 m mod 3＝2，則 f(3,m,3)＝2。

3.當 m mod 3＝0，則 f(3,m,3)＝3。

表 7：n＝3，倒數第 k 個淘汰編號的推算方式

m		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
m mod 3		1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
f(3,m,3)		1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2
留下的編號	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1
m mod 2		1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
f(3,m,2)		2	1	1	3	3	2	2	1	1	3	3	2	2	1	1	3	3	2	2	1
f(3,m,1)		3	3	2	2	1	1	3	3	2	2	1	1	3	3	2	2	1	1	3	3

討論：

1. 當 m 可改變的範圍夠大時，f(3,m,3) 依原編號 1、2、3 循環，其循環節長度爲 3。
2. 留下的 2 人，從 f(3,m,3) 的下一個編號起，重新編爲 1～2 號後再淘汰 1 人，此時第 2 次編號依原編號循環，其循環節長度爲 3。
3. 根據表 6 可知：f(3,m,2) 會依新編號 1、2 循環，其循環節長度爲 2。所以 f(3,m,2) 會依原編號循環，其循環節長度是 lcm(3,2)＝6。
4. 留下的 1 人就是 f(3,m,1)，會依新編號 2、1 循環，其循環節長度也是 2。所以 f(3,m,1) 會依原編號循環，其循環節長度是 lcm(3,2)＝6。

註：綠色格子內的編號爲 f(3,m,2)。

(三) 人數 4 人時，m 從 1 開始逐次增加 1，並依下列規則推算 f(4,m,4)，結果如表 8：

1.當 m mod 4＝1，則 f(4,m,4)＝1。

2.當 m mod 4＝2，則 f(4,m,4)＝2。

3.當 m mod 4＝3，則 f(4,m,4)＝3。

4.當 m mod 4＝0，則 f(4,m,4)＝4。

表 8：n＝4，倒數第 k 個淘汰編號的推算方式

m		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
m mod 4		1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0
f(4,m,4)		1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
留下的編號	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
m mod 3		1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
f(4,m,3)		2	4	2	1	3	1	4	2	4	3	1	3	2	4	2	1	3	1	4	2
留下的編號	1	3	1	4	2	4	3	1	3	2	4	2	1	3	1	4	2	4	3	1	3
	2	4	3	1	3	2	4	2	1	3	1	4	2	4	3	1	3	2	4	2	1
f(4,m,2)		3	3	4	3	4	4	1	1	2	1	2	2	3	3	4	3	4	4	1	1
f(4,m,1)		4	1	1	2	2	3	2	3	3	4	4	1	4	1	1	2	2	3	2	3

討論：

1. 當 m 可改變的範圍夠大時，f(4,m,4) 依原編號 1、2、3、4 循環，其循環節長度爲 4。
2. 留下的 3 人，從 f(4,m,4) 的下一個編號起，重新編爲 1～3 號後再淘汰 1 人，此時第 2 次編號依原編號循環，其循環節長度爲 4。
3. 根據表 7 可知：f(4,m,3) 會依第 2 次編號 1、2、3 循環，其循環節長度爲 3。所以 f(4,m,3) 會依原編號循環，其循環節長度是 lcm(4,3)＝12。
4. 留下的 2 人，從 f(4,m,3) 的下一個編號起，重新編爲 1～2 號後再淘汰 1 人，此時第 3 次編號依原編號循環，其循環節長度爲 lcm(4,3)＝12。
5. 根據表 6 可知：f(4,m,2) 會依第 3 次編號 1、2 循環，其循環節長度爲 2。所以 f(4,m,2) 會依原編號循環，其循環節長度是 lcm(4,3,2)＝12。
6. 留下的 1 人就是 f(4,m,1)，會依第 3 次編號 2、1 循環，其循環節長度也是 2。所以 f(4,m,1) 會依原編號循環，其循環節長度是 lcm(4,3,2)＝12。

註：藍色格子內的編號爲 f(4,m,3)，綠色格子內的編號爲 f(4,m,2)。

(四) 根據 2～4 人的結果，歸納淘汰流程圖如圖 2，並探討 f(n,m,k) 的循環情形如下：

1.當 m 可改變的範圍夠大時，f(n,m,n) 依原編號 1～n 循環，其循環節長度爲 n。

2.剩餘 n-1 人，從 f(n,m,n) 的下一個編號起，重新編爲 1～n-1 號，此時第 2 次編號依原編號循環，其循環節長度爲 n。

3.但是 f(n,m,n-1) 會依第 2 次編號 1～n-1 循環，其循環節長度爲 n-1，所以 f(n,m,n-1)

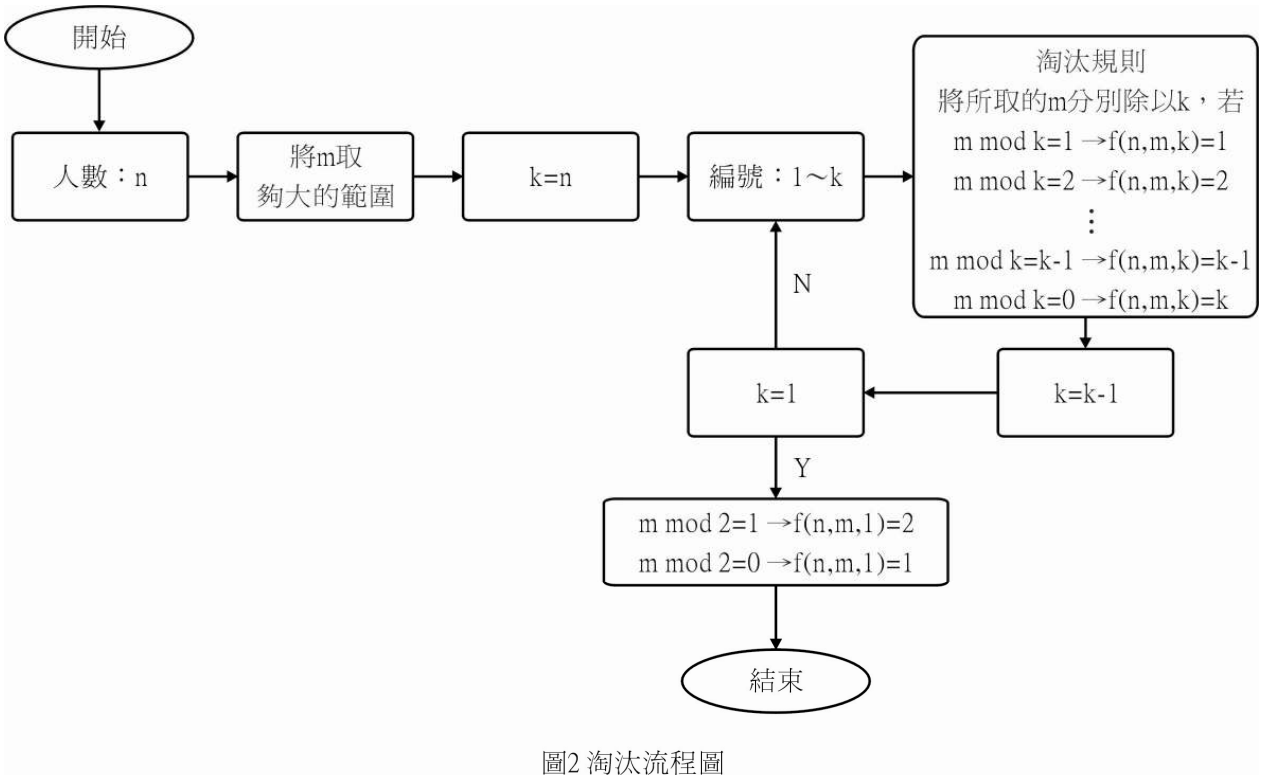

圖2 淘汰流程圖

會依原編號循環，其循環節長度是 lcm(n,n-1)。

4.剩餘 n-2 人，從 f(n,m,n-1) 的下一個編號起，重新編爲 1～n-2 號，此時第 3 次編號依原編號循環，其循環節長度爲 lcm(n,n-1)。

5.而 f(n,m,n-2) 會依第 3 次編號 1～n-2 循環，其循環節長度爲 n-2，所以 f(n,m,n-2) 會依原編號循環，其循環節長度是 lcm(n,n-1,n-2)。

6.依此類推，f(n,m,k) 會依原編號循環，其循環節長度是 lcm(n,n-1,……,k)。

7.當淘汰 n-2 人，留下 2 人時，從 f(n,m,3) 的下一個編號起，重新編爲 1～2 號，則第 n-1 次編號會依原編號循環，其循環節長度爲 lcm(n,n-1,……,3)。

8.f(n,m,2) 會依第 n-1 次編號 1、2 循環，其循環節長度爲 2。所以 f(n,m,2) 會依原編號循環，其循環節長度是 lcm(n,n-1,……,2)。

9.此時剩下 1 人爲 f(n,m,1)，會依第 n-1 次編號 2、1 循環，其循環節長度爲 2。所以 f(n,m,1) 會依原編號循環，其循環節長度是 lcm(n,n-1,……,2)。

(五) 討論

因爲 f(n,m,k) 的循環節長度爲 lcm(n,n-1,……,k)，所以當 m 可改變的範圍是 1～lcm(n,n-1,……,k) 時，f(n,m,k) 就會產生循環。令 j＝1～lcm(n,n-1,……,k)，則

(lcm(n,n-1,……,k)+j) mod k＝j mod k

由此可知 m＝lcm(n,n-1,……,k)+j 和 m＝j 時，倒數第 k 個淘汰的新編號相同，所以倒數第 k 個淘汰的原編號也會相同，即

f(n, lcm(n,n-1,……,k)+j,k)＝f(n,j,k)，其中 j＝1～lcm(n,n-1,……,k)　　（公式 2）

例如：f(5,60+j,1)＝f(5,j,1)，其中 j＝1～60。

因此當 m 可改變的範圍是連續 lcm(n,n-1,……,k) 個數時，f(n,m,k) 一樣會產生循環。我們猜想：不論人數多少，當 m 的範圍剛好使幸運位置形成循環時，每個編號倒數第 k 個淘汰的機會都一樣嗎？

四、探討每個編號倒數第 k 個淘汰機會的公平性（k＝n～1）

根據上述結果，當 m 可改變的範圍是 1～lcm(n,n-1,……,k) 時，f(n,m,k) 一定會產生循環，所以如果要同時探討每個編號倒數第 k（k＝n～1） 個淘汰機會的公平性，需取 m 的範圍爲 1～lcm(n, lcm(n,n-1),lcm(n,n-1,n-2),……, lcm(n,n-1,……,2))，也就是 1～lcm(n,n-1,……,2)。

(一) 人數 2 人時，取 m＝1～2 討論，則

1. m mod 2＝1 的數有 1 個，故編號 1 倒數第 2 個淘汰的機會是 $\frac{1}{2}$ 。
2. m mod 2＝0 的數有 1 個，故編號 2 倒數第 2 個淘汰的機會是 $\frac{1}{2}$ 。
3. 顯而易見，編號 1 和 2 倒數第 1 個淘汰的機會也都是 $\frac{1}{2}$ 。

(二) 人數 3 人時，將表 7 部分資料重排可得表 9。

表 9：n＝3，倒數第 k 個淘汰的編號

m		1	4	5	2	3	6
m mod 3		1	1	2	2	0	0
m mod 2		1	0	1	0	1	0
f(3,m,3)		1	1	2	2	3	3
留下的編號	1	2	2	3	3	1	1
	2	3	3	1	1	2	2

因 lcm(3,2)＝6，故取 m=1～6 討論，則

1. m mod 3＝1 的數有 1、4，此時淘汰編號 1，留下編號依序爲 2、3，所以

(1)編號 1 倒數第 3 個淘汰的次數是 2 次。

(2) 1、4 除以 2 的餘數分別是 1、0，根據表 6 可推知，編號 2、3 倒數第 2 個淘汰各 1 次，且倒數第 1 個淘汰各 1 次。

2. m mod 3＝2 的數有 2 和 5，此時淘汰編號 2，留下編號依序爲 3、1，同理

(1)編號 2 倒數第 3 個淘汰的次數是 2 次。

(2)編號 3、1 倒數第 2 個淘汰各 1 次，且倒數第 1 個淘汰各 1 次。

3. m mod 3＝0 的數有 3 和 6，此時淘汰編號 3，留下編號依序爲 1、2，同理

(1)編號 3 倒數第 3 個淘汰的次數是 2 次。

(2)編號 1、2 倒數第 2 個淘汰各 1 次，且倒數第 1 個淘汰各 1 次。

結果：每個編號倒數第 k 個淘汰的機會都是$1\times(3-1)\div 6=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$。

(三) 人數 4 人時，將表 8 部分資料重排可得表 10：

表 10：n＝4，倒數第 k 個淘汰的編號

m		1	5	9	10	2	6	7	11	3	4	8	12
m mod 4		1	1	1	2	2	2	3	3	3	0	0	0
m mod 3		1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0
m mod 2		1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0
f(4,m,4)		1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4
留下的編號	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4	1	1	1
	2	3	3	3	4	4	4	1	1	1	2	2	2
	3	4	4	4	1	1	1	2	2	2	3	3	3

因 lcm(4,3,2)＝12，故取 m＝1～12 討論，則

1. m mod 4＝1 的數有 3 個，此時淘汰編號 1，留下編號依序爲 2、3、4，所以

(1)編號 1 倒數第 4 個淘汰的次數是 3 次。

(2)根據表 9 可推知，編號 2、3、4 倒數第 3 個淘汰各 1 次，倒數第 2 個淘汰各 1 次，倒數第 1 個淘汰各 1 次。

2. m mod 4＝2 的數有 3 個，此時淘汰編號 2，留下編號依序爲 3、4、1，同理

(1)編號 2 倒數第 4 個淘汰的次數是 3 次。

(2)編號 3、4、1 倒數第 3、2、1 個淘汰都各 1 次。

3. m mod 4＝3 的數有 3 個，此時淘汰編號 3，留下編號依序爲 4、1、2，同理

(1)編號 3 倒數第 4 個淘汰的次數是 3 次。

(2)編號 4、1、2 倒數第 3、2、1 個淘汰都各 1 次。

4. m mod 4＝0 的數有 3 個，此時淘汰編號 4，留下編號依序爲 1、2、3，同理

(1)編號 4 倒數第 4 個淘汰的次數是 3 次。

(2)編號 1、2、3 倒數第 3、2、1 個淘汰都各 1 次。

結果：每個編號倒數第 k 個淘汰的機會都是$1\times(4-1)\div 12=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$。

(四) 人數 5 人時，仿造表 10 的模式，可建立表 11 的資料。

表 11：n＝5，倒數第 k 個淘汰的編號

m		1	41	21	46	26	6	31	11	51	16	56	36	2、7、12、…、57	3、8、13、…、58	4、9、14、…、59	5、10、15、…、60
m mod 5		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1				
m mod 4		1	1	1	2	2	2	3	3	3	0	0	0				
m mod 3		1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0				
m mod 2		1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0				
f(5,m,5)		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	3	4	5
留下的編號	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	4	5	1
	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	4	5	1	2
	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	5	1	2	3
	4	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	1	2	3	4

因 lcm(5,4,3,2)＝60，故取 m＝1～60 討論，則

1. m mod 5＝1 的數有 12 個，此時淘汰編號 1，留下編號依序爲 2、3、4、5，所以

(1)編號 1 倒數第 5 個淘汰的次數是 12 次。

(2)根據表 10 可推知，編號 2、3、4、5 倒數第 4、3、2、1 個淘汰都各 3 次。

2. m mod 5＝2 的數有 12 個，此時淘汰編號 2，留下編號依序爲 3、4、5、1，同理

(1)編號 2 倒數第 5 個淘汰的次數是 12 次。

(2)編號 3、4、5、1 倒數第 4、3、2、1 個淘汰都各 3 次。

3. m mod 5＝3 的數有 12 個，此時淘汰編號 3，留下編號依序爲 4、5、1、2，同理

(1)編號 3 倒數第 5 個淘汰的次數是 12 次。

(2)編號 4、5、1、2 倒數第 4、3、2、1 個淘汰都各 3 次。

4. m mod 5＝4 的數有 12 個，此時淘汰編號 4，留下編號依序爲 5、1、2、3，同理

(1)編號 4 倒數第 5 個淘汰的次數是 12 次。

(2)編號 5、1、2、3 倒數第 4、3、2、1 個淘汰都各 3 次。

5. m mod 5＝0 的數有 12 個，此時淘汰編號 5，留下編號依序爲 1、2、3、4，同理

(1)編號 5 倒數第 5 個淘汰的次數是 12 次。

(2)編號 1、2、3、4 倒數第 4、3、2、1 個淘汰都各 3 次。

結果：每個編號倒數第 k 個淘汰的機會都是$3\times(5-1)\div 60=\frac{12}{60}=\frac{1}{5}$。

(五) 當人數增加至 6 人，每個編號倒數第 k 個淘汰次數的推算模式便不再如此明顯。

伍、研究結果

一、本研究在 n＝1～30，且 m 值可改變的條件下，討論最不幸運位置，發現

(一) 如果最不幸運位置存在時，幸運位置都沒有形成循環；幸運位置產生循環時，最不幸運位置就不存在。

(二) n＝1～30，只要 m 的範圍夠大，最不幸運位置就不存在。

二、當 m 可改變的範圍是 1～lcm(n,n-1,……,k) 或連續 lcm(n,n-1,……,k) 個數時，f(n,m,k) 就會產生循環。

三、當 n＝2～5，m＝1～lcm(n,n-1,……,2) 時，每個編號倒數第 k 個淘汰的機會都是$\frac{1}{n}$。

陸、討論

一、能以數學方法證明：人數相同時，每個編號倒數第 k 個淘汰的機會有可能相同嗎？

從表 9、表 10 和表 11 的討論發現：取 m＝1～n!，可以得到下列定理：

定理 1：人數 n 人，反覆淘汰留下來的第 m 個人，取 m＝1～n! 時，每個編號倒數第 k 個淘汰的機會都是$\frac{1}{n}$。

證明：以數學歸納法證明如下

步驟 1：當 n＝1，取 m＝1，因爲只有一個人，所以淘汰機會一定相同。

步驟 2：當 n＝2，取 m＝1～2（2!），因爲 m＝1 時，f(2,1,2)＝1、f(2,1,1)＝2；m＝2 時，f(2,2,2)＝2、f(2,2,1)＝1；所以每個編號倒數第 k (k＝2～1) 個淘汰的機

會都是$\frac{1}{2}$，因此，上述命題成立。

步驟 3：假設 n＝x，取 m＝1～x! 時，上述命題成立；則每個編號倒數第 k (k＝x～1) 個淘汰的機會都是$\frac{1}{x}$。而此時 m mod x 的數值爲 1、2、……、x-1、0 各 (x-1)! 個；換句話說 n＝x，m mod x 的數值爲 1、2、……、x-1、0 各 (x-1)! 個時，每個編號倒數第 k (k＝x～1) 個淘汰的次數各 (x-1)! 次。

步驟 4：當 n＝x+1 時，取 m＝1～(x+1)!，將 m 分組討論如表 12。

表 12：n＝x+1，m＝1～(x+1)！時，倒數第 k 個淘汰的編號

m	1、 (x+1)+1、 2(x+1)+1、 ……、 (x!-1)(x+1)+1	2、 (x+1)+2、 2(x+1)+2、 ……、 (x!-1)(x+1)+2	……	x、 (x+1)+x、 2(x+1)+x、 ……、 (x!-1)(x+1)+x	(x+1)、 2(x+1)、 3(x+1)、 ……、 x!(x+1)
m mod (x+1) 的值及個數	1 x!個	2 x!個	……	x x!個	0 x!個
f(n,m,x+1)	1	2	……	x	x+1
剩下的編號	2、3、…、x+1	3、4、…、x+1、1	……	x+1、1、2、…、x-1	1、2、…、x
m mod x 的 值及個數	1、2、…、x-1、0 各(x-1)!個	2、…、x-1、0、1 各(x-1)!個	……	0、1、2、…、x-1 各(x-1)!個	1、2、…、x-1、0 各(x-1)!個

1. 根據表 12 得知，每個編號倒數第 x+1 個淘汰的次數是$\frac{(x+1)!}{x+1}=x!$；所以每個編號倒數第 x+1 個淘汰的機會是$\frac{x!}{(x+1)!}=\frac{1}{x+1}$。
2. 此時剩下 x 人，再依 m mod (x+1) 的值將 m 分成 x+1 組討論；由表 12 可知每一組中，m mod x 的數值爲 1、2、……、x-1、0 各 (x-1)! 個，所以每個編號倒數第 k (k＝x～1) 個淘汰的次數各 (x-1)! 次。

   但是每個編號在其中 x 組各只出現 1 次，所以在 x+1 組中，每個編號倒數第 k (k＝x～1) 個淘汰的次數各 x(x-1)!＝x! 次，因此每個編號倒數第 k (k＝x～1) 個淘汰的機會是$\frac{x!}{(x+1)!}=\frac{1}{x+1}$。
3. 根據 1、2，上述命題成立。

步驟 5：由步驟 1～4 得證。

二、在幸運位置的循環節中，每個編號出現的機會都相同嗎？

(一) 根據定理 1 得知：人數 n 人，反覆淘汰留下來的第 m 個人，只要取 m＝1～n! 時，每個編號倒數第 1 個淘汰的機會都相同。

(二) 由研究得知 m＝1～lcm(n,n-1,……,2) 時，f(n,m,1) 會依原編號循環，其循環節長度是 lcm(n,n-1,……,2)。

(三) 又因為 n! 是 lcm(n,n-1,……,2) 的整數倍，所以在幸運位置的循環節中，每個編號出現的機會都相同。

三、人數 n 人，反覆淘汰留下來的第 m 個人，取 m＝1～lcm(n,n-1,……,2)時，每個編號倒數第 k 個淘汰的機會都相同嗎？

(一) 將表 6、表 7 和表 8 中，倒數第 k 個淘汰的編號整理成表 13，發現下列遞迴公式：

$$f(n,m,n)=\begin{cases} m \bmod n & ,\text{if } m \bmod n \neq 0 \\ n & ,\text{if } m \bmod n = 0 \end{cases}$$

當 $1 \le k \le n-1$ 時，

$$f(n,m,k)=\begin{cases} (m+f(n-1,m,k)) \bmod n & ,\text{if } (m+f(n-1,m,k)) \bmod n \neq 0 \\ n & ,\text{if } (m+f(n-1,m,k)) \bmod n = 0 \end{cases} \qquad \text{(公式 3)}$$

表 13：n＝2、3、4，倒數第 k 個淘汰的編號

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
f(2,m,2)	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
f(2,m,1)	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
f(3,m,3)	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2
f(3,m,2)	2	1	1	3	3	2	2	1	1	3	3	2	2	1	1	3	3	2	2	1
f(3,m,1)	3	3	2	2	1	1	3	3	2	2	1	1	3	3	2	2	1	1	3	3
f(4,m,4)	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
f(4,m,3)	2	4	2	1	3	1	4	2	4	3	1	3	2	4	2	1	3	1	4	2
f(4,m,2)	3	3	4	3	4	4	1	1	2	1	2	2	3	3	4	3	4	4	1	1
f(4,m,1)	4	1	1	2	2	3	2	3	3	4	4	1	4	1	1	2	2	3	2	3

(二) 以公式 2 和公式 3，使用 Excel 推算 n＝1～16，m＝1～lcm(n,n-1,……,2) 時，每個編號倒數第 k 個淘汰的機會都是 $\frac{1}{n}$；又因為人數 n 人，m＝1～lcm(n,n-1,……,k) 時，f(n,m,k) 一定會產生循環，其循環節長度是 lcm(n,n-1,……,k)，所以本研究

據此提出「約瑟夫定理」，內容及證明如下：

定理 2：人數 n 人，反覆淘汰留下來的第 m 個人，取 m＝1～lcm(n,n-1,……,2) 時，每個編號倒數第 k 個淘汰的機會都相同。

證明：

1. 根據定理 1 得知人數 n 人，反覆淘汰留下來的第 m 個人，取 m＝1～n! 時，每個編號倒數第 k 個淘汰的機會都相同。
2. 由研究得知 m＝1～lcm(n,n-1,……,k) 時，f(n,m,k) 會依原編號循環，其循環節長度是 lcm(n,n-1,……,k)。
3. 又因為 n! 是 lcm(n,n-1,……,k) 的整數倍，所以在倒數第 k 個淘汰的循環節中，每個編號出現的機會都相同。
4. 又因為 lcm(n,n-1,……,2) 是 lcm(n,n-1,……,k) 的整數倍，所以 m＝1～lcm(n,n-1,……,2) 時，每個編號倒數第 k 個淘汰的機會都相同，得證。

柒、結論

本研究發現 n 個人的約瑟夫問題，反覆淘汰留下來的第 m 個人，m＝1～lcm(n,n-1,……,k) 時，倒數第 k 個淘汰的編號 f(n,m,k) 會循環，其循環節長度是 lcm(n,n-1,……,k)；又找出 f(n,m,k) 的遞迴公式，再以該公式使用 Excel 推算 n＝1～16，m＝1～lcm(n,n-1,……,2) 時，發現人數不變時，每個編號倒數第 k (k＝n～1) 個淘汰的機會都相同；據此提出並證明「約瑟夫定理」：人數 n 人，反覆淘汰留下來的第 m 個人，取 m＝1～lcm(n,n-1,……,2) 時，每個編號倒數第 k 個淘汰的機會都相同。也就是說：n 個人，報 1～m 汰 m 的約瑟夫問題，每個人倒數第 k 個淘汰機會公平的條件是取 m 的範圍為 1～lcm(n,n-1,……,2) 的整數倍。

Frank Ruskey 與 Aaron Williams (2010)提出 The Feline Josephus Problem 的淘汰規則，即每個編號有 t 條命，報 1～m 選 m，選到第 t 次才淘汰，未來可以挑戰在此汰留規則下，探討每個編號倒數第 k 個淘汰機會的公平性。

捌、參考資料

一、中文部分：

林千雅、陳珉儒、邱晨熙、梁育棻（2004）。公主的抉擇—數的規律。*中華民國第 44 屆中小學科學展覽會參展作品專輯*。取自 http://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/44/E/040402.pdf。

林奕丞、洪嘉蔓、陳昊廷、徐東葦（2005）。探索俄羅斯遊戲法則之奧秘。*中華民國第 45 屆中小學科學展覽會參展作品專輯*。取自 http://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/45/elementary/0804/080409.pdf。

林豐正、詹朱聰、林裕翔、簡子爲（2003）。九死一生。*中華民國第 43 屆中小學科學展覽會參展作品專輯*。取自 http://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/43/pdf/e/040401.pdf。

段凱文、梁廷宇、羅子瑞、黃蛟晟（2004）。王位繼承人。*中華民國第 44 屆中小學科學展覽會參展作品專輯*。取自 http://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/44/c08/080403.pdf。

張廷仰、胡豐榮、許天維（2001）。環狀重排序列的性質。*測驗統計簡訊*，43，12-16。

陳衍文（譯）（1991）。*具體數學*。臺北市：格致。（Graham, Ronald L ; Knuth, Donald Ervin ; Patashnik, Oren, 1989）

葉佩雯（2005）。老師無法解決的難題。*中華民國第 45 屆中小學科學展覽會參展作品專輯*。取自 http://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/45/elementary/0804/080418.pdf。

葉佩雯（2006a）。約瑟夫數列。*臺灣 2006 年國際科學展覽會參展作品專輯*。取自 http://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-2/2006/pdf/010002.pdf。

葉佩雯（2006b）。約瑟夫數列的最後一章。*中華民國第 46 屆中小學科學展覽會參展作品專輯*。取自 http://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/46/junior/0304/030417.pdf。

葉佩雯（2007）。約瑟夫問題。*臺灣 2007 年國際科學展覽會參展作品專輯*。取自 http://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-2/2007/pdf/010003.pdf。

楊皓琮、翁郁婷（1999）。公主如何救王子。*中華民國第 39 屆中小學科學展覽會優勝作品專輯*。取自 http://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/39/school/39-4-5.pdf。

談祥柏（1991）。*數學奇趣錄*。臺北市：台灣商務。

戴于珽（2004）。我要活下去。*中華民國第 44 屆中小學科學展覽會參展作品專輯*。取自

http://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/44/E/040409.pdf。

簡民惠（2000）。天生贏家的奧秘—『傳遞問題』之研究與探討。*中華民國第 40 屆中小學科學展覽會優勝作品專輯*。取自 http://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/40/mschool/17h/17.htm。

鄒慶叡、劉志豪、林己豪、劉欣宜（2005）。魔數。*中華民國第 45 屆中小學科學展覽會參展作品專輯*。取自 http://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/45/high/0304/030406.pdf。

二、英文部分：

Casburn Ledah & Phan Tuyet-Linh (2001) . The Orthogonal Josephus Problem. In *The Journal of the Summer Undergraduate Mathematical Science Research Institute(summer 2001).* Department of Mathematics Miami University. from http://www.units.miamioh.edu/sumsri/sumj/2001/Orthog.pdf

Ruskey Frank & Williams Aaron(2010). The Feline Josephus Problem. In Paolo Boldi & Luisa Gargano(Eds.), *Fun with Algorithms: 5th International Conference, FUN 2010, Ischia, Italy,June 2010 Proceedings.* from https://books.google.com.tw/books?id=ExMm0iIJJ1QC&pg=PA343&lpg=PA343&dq=the+feline+josephus+problem&source

三、網路資料：

Yiu Paul(2003). The Josephus problem and its generalization. In Yiu Paul(2003), *Recreational Mathematics*(pp.1001-1004). Department of Mathematics Florida Atlantic University. from http://web.boun.edu.tr/topcu/RecreationalMathematics.pdf

Yiu Paul(2012). The Josephus problem and its generalization. In Yiu Paul(2012), *Problem Solving and Recreational Mathematics*(pp.401-405). Department of Mathematics Florida Atlantic University. from http://math.fau.edu/Yiu/PSRM2012/PSRM20120702.pdf

Josephus Problem。取自 http://acm.nudt.edu.cn/~twcourse/JosephusProblem.html

玖、附錄：

n	m																									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
3	3	3	2	2	1	1	3	3	2	2	1	1	3	3	2	2	1	1	3	3	2	2	1	1	3	3
4	4	1	1	2	2	3	2	3	3	4	4	1	4	1	1	2	2	3	2	3	3	4	4	1	4	1
5	5	3	4	1	2	4	4	1	2	4	5	3	2	5	1	3	4	1	1	3	4	1	2	5	4	2
6	6	5	1	5	1	4	5	3	5	2	4	3	3	1	4	1	3	1	2	5	1	5	1	5	5	4
7	7	7	4	2	6	3	5	4	7	5	1	1	2	1	5	3	6	5	7	4	1	6	3	1	2	2
8	8	1	7	6	3	1	4	4	8	7	4	5	7	7	4	3	7	7	2	8	6	4	2	1	3	4
9	9	3	1	1	8	7	2	3	8	8	6	8	2	3	1	1	6	7	3	1	9	8	7	7	1	3
10	10	5	4	5	3	3	9	1	7	8	7	10	5	7	6	7	3	5	2	1	10	10	10	1	6	9
11	11	7	7	9	8	9	5	9	5	7	7	11	7	10	10	1	9	1	10	10	9	10	11	3	9	2
12	12	9	10	1	1	3	12	5	2	5	6	11	8	12	1	5	2	7	5	6	6	8	10	3	10	4
13	13	11	13	5	6	9	6	13	11	2	4	10	8	13	3	8	6	12	11	13	1	4	7	1	9	4
14	14	13	2	9	11	1	13	7	6	12	1	8	7	13	4	10	9	2	2	5	8	12	2	11	6	2
15	15	15	5	13	1	7	5	15	15	7	12	5	5	12	4	11	11	5	6	10	14	4	10	5	1	13
16	16	1	8	1	6	13	12	7	8	1	7	1	2	10	3	11	12	7	9	14	3	10	1	13	10	7
17	17	3	11	5	11	2	2	15	17	11	1	13	15	7	1	10	12	8	11	17	7	15	7	3	1	16
18	18	5	14	9	16	8	9	5	8	3	12	7	10	3	16	8	11	8	12	1	10	1	12	9	8	6
19	19	7	17	13	2	14	16	13	17	13	4	19	4	17	12	5	9	7	12	2	12	4	16	14	14	13
20	20	9	20	17	7	20	3	1	6	3	15	11	17	11	7	1	6	5	11	2	13	6	19	18	19	19
21	21	11	2	21	12	5	10	9	15	13	5	2	9	4	1	17	2	2	9	1	13	7	21	21	2	3
22	22	13	5	3	17	11	17	17	2	1	16	14	22	18	16	11	19	20	6	21	12	7	22	1	5	7
23	23	15	8	7	22	17	1	2	11	11	4	3	12	9	8	4	13	15	2	18	10	6	22	2	7	10
24	24	17	11	11	3	23	8	10	20	21	15	15	1	23	23	20	6	9	21	14	7	4	21	2	8	12
25	25	19	14	15	8	4	15	18	4	6	1	2	14	12	13	11	23	2	15	9	3	1	19	1	8	13
26	26	21	17	19	13	10	22	26	13	16	12	14	1	26	2	1	14	20	8	3	24	23	16	25	7	13
27	27	23	20	23	18	16	2	7	22	26	23	26	14	13	17	17	4	11	27	23	18	18	12	22	5	12
28	28	25	23	27	23	22	9	15	3	8	6	10	27	27	4	5	21	1	18	15	11	12	7	18	2	10
29	29	27	26	2	28	28	16	23	12	18	17	22	11	12	19	21	9	19	8	6	3	5	1	13	27	7
30	30	29	29	6	3	4	23	1	21	28	28	4	24	26	4	7	26	7	27	26	24	27	24	7	22	3

n	m																									
	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
3	2	2	1	1	3	3	2	2	1	1	3	3	2	2	1	1	3	3	2	2	1	1	3	3	2	2
4	1	2	2	3	2	3	3	4	4	1	4	1	1	2	2	3	2	3	3	4	4	1	4	1	1	2
5	3	5	1	3	3	5	1	3	4	2	1	4	5	2	3	5	5	2	3	5	1	4	3	1	2	4
6	6	3	6	3	4	1	4	1	3	2	2	6	2	6	2	5	6	4	6	3	6	4	4	3	5	2
7	5	3	7	5	7	5	2	7	3	3	4	2	6	4	1	5	7	6	2	7	4	3	4	4	7	5
8	8	7	4	3	6	5	3	1	6	7	1	8	5	4	2	7	2	2	7	5	3	3	5	6	2	1
9	8	8	6	6	1	1	9	8	5	7	2	1	8	8	7	4	9	1	7	6	5	6	9	2	8	8
10	5	6	5	6	2	3	2	2	10	3	9	9	7	8	8	6	2	5	2	2	2	4	8	2	9	10
11	10	1	1	3	11	2	2	3	1	6	2	3	2	4	5	4	1	5	3	4	5	8	2	8	5	7
12	1	5	6	9	6	10	11	1	12	6	3	5	5	8	10	10	8	1	12	2	4	8	3	10	8	11
13	2	7	9	13	11	3	5	9	8	3	1	4	5	9	12	13	12	6	5	9	12	4	13	8	7	11
14	1	7	10	1	14	7	10	1	1	11	10	14	2	7	11	13	13	8	8	13	3	10	6	2	2	7
15	13	5	9	1	15	9	13	5	6	2	2	7	11	2	7	10	11	7	8	14	5	13	10	7	8	14
16	8	1	6	15	14	9	14	7	9	6	7	13	2	10	16	4	6	3	5	12	4	13	11	9	11	2
17	1	12	1	11	11	7	13	7	10	8	10	17	7	16	6	12	15	13	16	7	17	10	9	8	11	3
18	10	4	12	5	6	3	10	5	9	8	11	1	10	2	11	18	4	3	7	17	10	4	4	4	8	1
19	18	13	3	16	18	16	5	1	6	6	10	1	11	4	14	3	9	9	14	6	19	14	15	16	2	15
20	5	1	12	6	9	8	18	15	1	2	7	19	10	4	15	5	12	13	19	12	6	2	4	6	13	7
21	11	8	20	15	19	19	9	7	15	17	2	15	7	2	14	5	13	15	1	16	11	8	11	14	1	17
22	16	14	5	1	6	7	20	19	6	9	17	9	2	20	11	3	12	15	2	18	14	12	16	20	8	3
23	20	19	11	8	14	16	7	7	18	22	8	1	18	14	6	22	9	13	1	18	15	14	19	1	13	9
24	23	23	16	14	21	24	16	17	5	10	21	15	9	6	23	16	4	9	22	16	14	14	20	3	16	13
25	25	1	20	19	2	6	24	1	15	21	8	3	23	21	14	8	22	3	17	12	11	12	19	3	17	15
26	26	3	23	23	7	12	5	9	24	5	19	15	10	9	3	24	13	21	10	6	6	8	16	1	16	15
27	26	4	25	26	11	17	11	16	5	14	2	26	22	22	17	12	2	11	1	25	26	2	11	24	13	13
28	25	4	26	28	14	21	16	22	12	22	11	8	5	6	2	26	17	27	18	15	17	22	4	18	8	9
29	23	3	26	29	16	24	20	27	18	29	19	17	15	17	14	10	2	13	5	3	6	12	24	10	1	3
30	20	1	25	29	17	26	23	1	23	5	26	25	24	27	25	22	15	27	20	19	23	30	13	30	22	25

n	m																									
	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
3	1	1	3	3	2	2	1	1	3	3	2	2	1	1	3	3	2	2	1	1	3	3	2	2	1	1
4	2	3	2	3	3	4	4	1	4	1	1	2	2	3	2	3	3	4	4	1	4	1	1	2	2	3
5	5	2	2	4	5	2	3	1	5	3	4	1	2	4	4	1	2	4	5	3	2	5	1	3	4	1
6	4	2	3	6	2	6	2	1	6	5	1	5	1	4	5	3	5	2	4	3	3	1	4	1	3	1
7	1	7	2	6	3	1	5	5	4	4	1	6	3	7	2	1	4	2	5	5	6	5	2	7	3	2
8	6	5	1	6	4	3	8	1	1	2	8	6	4	1	5	5	1	8	4	5	7	7	5	3	8	8
9	5	5	2	8	7	7	4	7	8	1	8	7	6	4	9	1	7	6	3	5	8	9	8	7	4	5
10	8	9	7	4	4	5	3	7	9	3	1	1	1	10	6	9	6	6	4	7	1	3	3	3	1	3
11	6	8	7	5	6	8	7	1	4	10	9	10	11	10	7	11	9	10	9	2	8	11	1	2	1	4
12	11	2	2	1	3	6	6	1	5	12	12	2	4	4	2	7	6	8	8	2	9	1	4	6	6	10
13	12	4	5	5	8	12	13	9	1	9	10	1	4	5	4	10	10	13	1	9	4	10	1	4	5	10
14	9	2	4	5	9	14	2	13	6	1	3	9	13	1	1	8	9	13	2	11	7	14	6	10	12	4
15	2	11	14	1	6	12	1	13	7	3	6	13	3	7	8	1	3	8	13	8	5	13	6	11	14	7
16	7	1	5	9	15	6	12	9	4	1	5	13	4	9	11	5	8	14	4	16	14	7	1	7	11	5
17	9	4	9	14	4	13	3	1	14	12	17	9	1	7	10	5	9	16	7	3	2	13	8	15	3	15
18	8	4	10	16	7	17	8	7	3	2	8	1	12	1	5	1	6	14	6	3	3	15	11	1	8	3
19	4	1	8	15	7	18	10	10	7	7	14	8	1	10	15	12	18	8	1	18	19	13	10	1	9	5
20	17	15	3	11	4	16	9	10	8	9	17	12	6	16	2	20	7	18	12	10	12	7	5	17	6	3
21	7	6	16	4	19	11	5	7	6	8	17	13	8	19	6	4	13	4	20	19	1	18	17	9	20	18
22	16	16	5	16	10	3	20	1	1	4	14	11	7	19	7	6	16	8	3	3	8	4	4	19	9	8
23	23	1	14	3	21	15	10	15	16	20	8	6	3	16	5	5	16	9	5	6	12	9	10	3	17	17
24	4	7	21	11	6	1	21	3	5	10	23	22	20	10	24	1	13	7	4	6	13	11	13	7	22	23
25	7	11	1	17	13	9	5	13	16	22	11	11	10	1	16	19	7	2	25	3	11	10	13	8	24	1
26	8	13	4	21	18	15	12	21	25	6	22	23	23	15	5	9	24	20	18	23	6	6	10	6	23	1
27	7	13	5	23	21	19	17	27	5	14	4	6	7	27	18	23	12	9	8	14	25	26	4	1	19	25
28	4	11	4	23	22	21	20	3	10	20	11	14	16	9	1	7	25	23	23	2	14	16	23	21	12	19
29	28	7	1	21	21	21	21	5	13	24	16	20	23	17	10	17	7	6	7	16	29	3	11	10	2	10
30	21	1	26	17	18	19	20	5	14	26	19	24	28	23	17	25	16	16	18	28	12	17	26	26	19	28

n	m																									
	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
3	3	3	2	2	1	1	3	3	2	2	1	1	3	3	2	2	1	1	3	3	2	2	1	1	3	3
4	2	3	3	4	4	1	4	1	1	2	2	3	2	3	3	4	4	1	4	1	1	2	2	3	2	3
5	1	3	4	1	2	5	4	2	3	5	1	3	3	5	1	3	4	2	1	4	5	2	3	5	5	2
6	2	5	1	5	1	5	5	4	6	3	6	3	4	1	4	1	3	2	2	6	2	6	2	5	6	4
7	4	1	5	3	7	5	6	6	2	7	4	2	4	2	6	4	7	7	1	6	3	1	5	2	4	3
8	3	1	6	5	2	1	3	4	1	7	5	4	7	6	3	2	6	7	2	8	6	5	2	8	3	3
9	1	9	6	6	4	4	7	9	7	5	4	4	8	8	6	6	2	4	9	7	6	6	4	2	7	8
10	10	9	7	8	7	8	2	5	4	3	3	4	9	10	9	10	7	10	6	5	5	6	5	4	10	2
11	1	1	11	2	2	4	10	3	3	3	4	6	1	3	3	5	3	7	4	4	5	7	7	7	3	7
12	8	9	8	12	1	4	11	5	6	7	9	12	8	11	12	3	2	7	5	6	8	11	12	1	10	3
13	9	11	11	3	6	10	5	13	2	4	7	11	8	12	1	6	6	12	11	13	3	7	9	12	9	3
14	4	7	8	1	5	10	6	1	5	8	12	3	1	6	10	2	3	10	10	13	4	9	12	2	14	9
15	8	12	14	8	13	4	1	12	2	6	11	3	2	8	13	6	8	1	2	6	13	4	8	14	12	8
16	7	12	15	10	16	8	6	2	9	14	4	13	13	4	10	4	7	1	3	8	16	8	13	4	3	16
17	1	7	11	7	14	7	6	3	11	17	8	1	2	11	1	13	17	12	15	4	13	6	12	4	4	1
18	8	15	2	17	7	1	1	17	8	15	7	1	3	13	4	17	4	18	4	12	4	16	5	16	17	15
19	11	19	7	4	14	9	10	8	19	8	1	15	18	10	2	16	4	19	6	15	8	2	11	4	6	5
20	10	19	8	6	17	13	15	14	6	16	10	5	9	2	15	10	19	15	3	13	7	2	12	6	9	9
21	5	15	5	4	16	13	16	16	9	20	15	11	16	10	3	20	9	6	16	6	1	18	8	3	7	8
22	18	7	20	20	11	9	13	14	8	20	16	13	19	14	8	4	16	14	3	16	12	8	21	17	22	2
23	5	18	9	10	2	1	6	8	3	16	13	11	18	14	9	6	19	18	8	22	19	16	7	4	10	14
24	12	2	18	20	13	13	19	22	18	8	6	5	13	10	6	4	18	18	9	24	22	20	12	10	17	22
25	16	7	24	2	21	22	4	8	5	21	20	20	4	2	24	23	13	14	6	22	21	20	13	12	20	1
26	17	9	1	6	26	2	11	16	14	5	5	6	17	16	13	13	4	6	25	16	16	16	10	10	19	1
27	15	8	1	7	1	5	15	21	20	12	13	15	27	27	25	26	18	21	14	6	7	8	3	4	14	24
28	10	4	26	5	28	5	16	23	23	16	18	21	6	7	6	8	1	5	27	20	22	24	20	22	5	16
29	2	26	20	29	24	2	14	22	23	17	20	24	10	12	12	15	9	14	8	2	5	8	5	8	21	4
30	21	16	11	21	17	26	9	18	20	15	19	24	11	14	15	19	14	20	15	10	14	18	16	20	4	18

n	m																									
	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
3	2	2	1	1	3	3	2	2	1	1	3	3	2	2	1	1	3	3	2	2	1	1	3	3	2	2
4	3	4	4	1	4	1	1	2	2	3	2	3	3	4	4	1	4	1	1	2	2	3	2	3	3	4
5	3	5	1	4	3	1	2	4	5	2	2	4	5	2	3	1	5	3	4	1	2	4	4	1	2	4
6	6	3	6	4	4	3	5	2	4	2	3	6	2	6	2	1	6	5	1	5	1	4	5	3	5	2
7	6	4	1	7	1	1	4	2	5	4	6	3	7	5	2	2	1	1	5	3	7	4	6	5	1	6
8	7	6	4	3	6	7	3	2	6	6	1	7	4	3	1	2	2	3	8	7	4	2	5	5	2	8
9	4	4	3	3	7	9	6	6	2	3	8	6	4	4	3	5	6	8	5	5	3	2	6	7	5	3
10	9	10	10	1	6	9	7	8	5	7	3	2	1	2	2	5	7	10	8	9	8	8	3	5	4	3
11	4	6	7	10	5	9	8	10	8	11	8	8	8	10	11	4	7	11	10	1	1	2	9	1	1	1
12	1	4	6	10	6	11	11	2	1	5	3	4	5	8	10	4	8	1	1	5	6	8	4	9	10	11
13	2	6	9	1	11	4	5	10	10	2	1	3	5	9	12	7	12	6	7	12	1	4	1	7	9	11
14	9	14	4	11	8	2	4	10	11	4	4	7	10	1	5	1	7	2	4	10	14	4	2	9	12	1
15	9	15	6	14	12	7	10	2	4	13	14	3	7	14	4	1	8	4	7	14	4	10	9	2	6	11
16	2	9	1	10	9	5	9	2	5	15	1	7	12	4	11	9	1	14	2	10	1	8	8	2	7	13
17	5	13	6	16	16	13	1	12	16	10	14	4	10	3	11	10	3	17	6	15	7	15	16	11	17	7
18	2	11	5	16	17	15	4	16	3	16	3	12	1	13	4	4	16	13	3	13	6	15	17	13	2	11
19	12	3	17	10	12	11	1	14	2	16	4	14	4	17	9	10	4	2	12	4	17	8	11	8	17	8
20	17	9	4	18	1	1	12	6	15	10	19	10	1	15	8	10	5	4	15	8	2	14	18	16	6	18
21	17	10	6	21	5	6	18	13	2	19	8	21	13	7	1	4	21	21	12	6	1	14	19	18	9	1
22	12	6	3	19	4	6	19	15	5	1	13	5	20	15	10	14	10	11	3	20	16	8	14	14	6	21
23	2	20	18	12	21	1	15	12	3	23	13	6	22	18	14	19	16	18	11	6	3	19	3	4	20	13
24	11	6	5	24	10	15	6	4	20	17	8	2	19	16	13	19	17	20	14	10	8	1	10	12	5	23
25	16	12	12	7	19	25	17	16	8	6	23	18	11	9	7	14	13	17	12	9	8	2	12	15	9	3
26	17	14	15	11	24	5	24	24	17	16	8	4	24	23	22	4	4	9	5	3	3	24	9	13	8	3
27	14	12	14	11	25	7	27	1	22	22	15	12	6	6	6	16	17	23	20	19	20	15	1	6	2	25
28	7	6	9	7	22	5	26	1	23	24	18	16	11	12	13	24	26	5	3	3	5	1	16	22	19	15
29	25	25	29	28	15	28	21	26	20	22	17	16	12	14	16	28	2	11	10	11	14	11	27	5	3	29
30	10	11	16	16	4	18	12	18	13	16	12	12	9	12	15	28	3	13	13	15	19	17	4	13	12	9

n	m																									
	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
3	1	1	3	3	2	2	1	1	3	3	2	2	1	1	3	3	2	2	1	1	3	3	2	2	1	1
4	4	1	4	1	1	2	2	3	2	3	3	4	4	1	4	1	1	2	2	3	2	3	3	4	4	1
5	5	3	2	5	1	3	4	1	1	3	4	1	2	5	4	2	3	5	1	3	3	5	1	3	4	2
6	4	3	3	1	4	1	3	1	2	5	1	5	1	5	5	4	6	3	6	3	4	1	4	1	3	2
7	2	2	3	2	6	4	7	6	1	5	2	7	4	2	3	3	6	4	1	6	1	6	3	1	4	4
8	5	6	8	8	5	4	8	8	4	1	7	5	3	2	4	5	1	8	6	4	8	6	4	3	7	8
9	1	3	6	7	5	5	1	2	8	6	4	3	2	2	5	7	4	3	2	1	6	5	4	4	9	2
10	2	5	9	1	10	1	8	10	7	6	5	5	5	6	10	3	1	1	1	1	7	7	7	8	4	8
11	1	5	10	3	2	5	2	5	3	3	3	4	5	7	1	6	5	6	7	8	4	5	6	8	5	10
12	12	5	11	5	5	9	7	11	10	11	12	2	4	7	2	8	8	10	12	2	11	1	3	6	4	10
13	13	7	1	9	10	2	1	6	6	8	10	1	4	8	4	11	12	2	5	9	6	10	13	4	3	10
14	4	13	8	3	5	12	12	4	5	8	11	3	7	12	9	3	5	10	14	5	3	8	12	4	4	12
15	15	10	6	2	5	13	14	7	9	13	2	10	15	6	4	14	2	8	13	5	4	10	15	8	9	3
16	2	14	11	8	12	5	7	1	4	9	15	8	14	6	5	16	5	12	2	11	11	2	8	2	4	15
17	14	10	8	6	11	5	8	3	7	13	3	14	4	14	14	9	16	7	15	8	9	1	8	3	6	1
18	1	16	15	14	2	15	1	15	2	9	18	12	3	14	15	11	1	11	2	14	16	9	17	13	17	13
19	18	15	15	15	4	18	5	1	8	16	7	2	13	6	8	5	15	7	18	12	15	9	18	15	1	17
20	9	7	8	9	19	14	2	19	7	16	8	4	16	10	13	11	2	15	7	2	6	1	11	9	16	13
21	14	13	15	17	7	3	13	10	20	9	2	20	12	7	11	10	2	16	9	5	10	6	17	16	3	1
22	13	13	16	19	10	7	18	16	5	17	11	8	1	19	2	2	17	10	4	1	7	4	16	16	4	3
23	6	7	11	15	7	5	17	16	6	19	14	12	6	2	9	10	3	20	15	13	20	18	8	9	21	21
24	17	19	24	5	22	21	10	10	1	15	11	10	5	2	10	12	6	24	20	19	3	2	17	19	8	9
25	23	1	7	14	7	7	22	23	15	5	2	2	23	21	5	8	3	22	19	19	4	4	20	23	13	15
26	24	3	10	18	12	13	3	5	24	15	13	14	10	9	20	24	20	14	12	13	25	26	17	21	12	15
27	20	27	8	17	12	14	5	8	1	20	19	21	18	18	3	8	5	27	26	1	14	16	8	13	5	9
28	11	19	1	11	7	10	2	6	28	20	20	23	21	22	8	14	12	7	7	11	25	28	21	27	20	25
29	26	6	18	29	26	1	23	28	22	15	16	20	19	21	8	15	14	10	11	16	2	6	29	7	1	7
30	7	18	1	13	11	17	10	16	11	5	7	12	12	15	3	11	11	8	10	16	3	8	2	11	6	13

n	m												
	157	158	159	160	161	162	163	164	165	166	167	168	169
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	3	3	2	2	1	1	3	3	2	2	1	1	3
4	4	1	1	2	2	3	2	3	3	4	4	1	4
5	1	4	5	2	3	5	5	2	3	5	1	4	3
6	2	6	2	6	2	5	6	4	6	3	6	4	4
7	5	3	7	5	2	6	1	7	3	1	5	4	5
8	2	1	6	5	3	8	4	3	8	7	4	4	6
9	6	6	3	3	2	8	5	5	2	2	9	1	4
10	3	4	2	3	3	10	8	9	7	8	6	9	3
11	6	8	7	9	10	7	6	8	7	9	8	1	7
12	7	10	10	1	3	1	1	4	4	7	7	1	8
13	8	12	13	5	8	7	8	12	13	4	5	13	8
14	11	2	4	11	1	1	3	8	10	2	4	13	9
15	3	10	13	6	12	13	1	7	10	3	6	1	13
16	16	8	12	6	13	15	4	11	15	9	13	9	6
17	3	13	1	13	4	7	14	5	10	5	10	7	5
18	16	9	16	11	3	7	15	7	13	9	15	13	12
19	2	15	4	19	12	17	7	19	7	4	11	10	10
20	19	13	3	19	13	19	10	3	12	10	18	18	19
21	8	3	15	11	6	13	5	20	9	8	17	18	20
22	11	7	20	17	13	21	14	8	20	20	8	10	13
23	7	4	18	16	13	22	16	11	1	2	14	17	21
24	20	18	9	8	6	16	11	7	22	24	13	17	22
25	2	1	18	18	17	3	24	21	12	15	5	10	16
26	3	3	21	22	22	9	5	3	21	25	16	22	3
27	25	26	18	20	21	9	6	5	24	2	21	1	10
28	14	16	9	12	14	3	1	1	21	28	20	1	11
29	26	29	23	27	1	20	19	20	12	20	13	24	6
30	3	7	2	7	12	2	2	4	27	6	30	12	25

【評語】080412

從某書的一個神奇結果，引發研究動機，值得肯定。針對欲研究的問題也提出了相關的文獻探討與說明，並指出了本研究的獨特性。而解決問題的方法相當不錯，值得鼓勵。