

中華民國第 55 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組 數學科

第三名

080411

天靈靈，地靈靈，鄰不鄰？

學校名稱：高雄市鼓山區龍華國民小學

作者：	指導老師：
小六 吳品義	賴佩儀
小六 吳若榛	吳明坤
小六 楊曄昕	
小六 王翊丞	

關鍵詞：拉丁方陣、同字不相鄰、正面多體四角拼圖

摘要

將『拉丁方陣』應用在日常生活中，設計在上學日中星期一到星期五各年級統一每天穿什麼衣服上學，才能讓人從遠方一眼可以判斷出小朋友是幾年級！

延伸此一概念，配合四角拼圖的規則，將組成正多面體的正 N 邊形各邊塗上顏色並且規定相同顏色的邊才能相接，討論其組合的情況。

壹、研究動機：

下課時操場上、廣場上、走廊上…凡是可以讓小朋友活動的地方都可以看到同學們開心的嬉戲，突然一聲巨響，是玻璃破裂的聲音！在走廊上打棒球的小朋友一哄而散，主任從辦公室衝出來只見到一個穿運動服的背影，身高約 130 公分，可能是三年級、四年級或五年級的學生，一查證，今天這三個年級都是統一穿運動服。若要一班一班地尋找打破玻璃的小朋友，那就得要查 51 個班級，雖然考慮地理位置的侷限可以刪掉某一些班級，但仍是相當龐大的工程。教室裡的我們正你一言我一句的提供意見，於是老師就建議我們可以幫學校設計各個年級每日服裝規定，讓人可以配合身高限制從遠處『一眼看出』小朋友是幾年級的！

經歷了研究相鄰兩年級須有不同穿著的規定後，我們將研究主題作橫向的拓展：配合四角拼圖的概念，將許多的正三角形各邊圖上顏色，而且每個正三角形都有相同的著色，規定有相同顏色的邊才能相接，四個對應邊有相同顏色的正三角形能組成正四面體嗎？八個對應邊有相同顏色的正三角形能組成正八面體嗎？二十個對應邊有相同顏色的正三角形能組成正二十面體嗎？六個對應邊有相同顏色的正方形能組成正六面體嗎？十二個對應邊有相同顏色的正五邊形能組成正十二面體嗎？

貳、研究目的：

- 一、同一個年級從星期一到星期五期中規定 2 天穿運動服(sportswear)、2 天穿便服(clothes)、1 天穿制服(uniform)，不可以連續兩天都穿運動服也不可以連續兩天都穿便服，共有多少種穿法？
- 二、全校一到六年級，星期一到星期五的穿著規劃：不能連續 2 著相同規定服裝且同一天相鄰兩個年級同學必須穿著不同服裝上學共有多少種變化？
- 三、關於『 5×5 同色不相鄰（二同二同一異）三色類拉丁方陣』有多少種排法？
- 四、關於『 $n \times n$ 同色不相鄰三色類拉丁方陣， $n < 10$ 』有多少種排法？
- 五、連續上學數日，制服、便服、運動服輪流穿，不能連 2 天穿著相同樣式的服裝，而且每種樣式的服裝穿著的天數盡量相等，相差最多不超過一天，有多少種方法？(分為 $k+k+k$ 、 $(k+1)+k+k$ 、 $(k+1)+(k+1)+k$)
- 六、用數種顏色塗上正多面體的『各邊』，並且規定每一面各邊的顏色、順序均相同，有哪些正多面體滿足上述條件？

參、研究器材：

筆、紙、電腦。

肆、研究過程與內容：

- 一、每個年級在一星期的五個上學日中規定：2 天穿運動服(S)、2 天穿便服(C)、1 天穿制服(U)，不可以連續兩天都穿運動服也不可以連續兩天都穿便服。
某一個年級在星期一到星期五之間按上述規定共有 12 種穿法：

想法一： S、S 相鄰，C、C 相鄰(SSCC)，U 插空隙：0

S、S 不相鄰，C、C 相鄰(SCCS)，U 插空隙： $1 \times 1 = 1$

S、S 相鄰，C、C 不相鄰(CSSC)，U 插空隙： $1 \times 1 = 1$

S、S 不相鄰，C、C 不相鄰(CSCS、SCSC)，U 插空隙： $2 \times C_1^5 = 10$ ，共有 $1+1+10=12$ 種。

想法二：U 排首位：S、C 相間有 2 種情況；所以共有 2 種排列方法。

U 排第二位：首位若確定則後三位確定，而首位有 S、C 這 2 種情況。

U 排第三位：首二位有 S、C 或 C、S 兩種排列；末二位也有 S、C 或 C、S 兩種排列，因此共有 $2 \times 2 = 4$ 種排列。

U 排第四位：末位若確定則前三位確定，而末位有 S、C 這 2 種情況。

U 排末位：前四位 S、C 相間有 2 種情況；所以共有 2 種排列方法。

共有 $2+2+4+2+2=12$ 種同字不相鄰的排列方法。

想法三：排容原理：

$$\begin{aligned} & \{ \text{任意排} \} - \{ S、S \text{ 相鄰} \} - \{ C、C \text{ 相鄰} \} + \{ S、S \text{ 相鄰且 } C、C \text{ 相鄰} \} \\ &= \frac{5!}{2!2!} - \frac{4!}{2!} - \frac{4!}{2!} + 3! = 12 \end{aligned}$$

想法四：

考慮 U 前和 U 後 2S、2C 的排列，因為只有兩種字母，而且又要同字不相鄰，偶數個字母的排列的情況只有兩種：『S 開頭、C 結尾』或『C 開頭、S 結尾』；奇數個字母的排列情況也只有兩種：『S 個數比 C 多 1』或『C 個數比 S 多 1』，但是 2S、2C 的總數為 4(偶數)，奇數個字母出現的次數必為偶數，因此，若 U 前有奇數個字則 U 後也必定為奇數個字母，這『兩組』奇數個字母的總排列數為 $2 \times 1 = 2$ 。

U 前字母個數	U 後字母個數	排列個數	小計
4	0	$2! \times 1$	2
3	1	2×1	2
2	2	$2! \times 2!$	4

1	3	2×1	2
0	4	$1 \times 2 !$	2
			共 12 種

二、全校一至六年級在『不相鄰』規定下的穿著方法總數：

我們將 S、S、C、C、U 同字不相鄰的 12 種方法做成紙條並將他們編號，擺成上下兩條，紀錄這兩條對應的位置是否滿足同色不相鄰的情況。



(圖一)

若規定相鄰兩個年級在同一天當中不能穿著同一種服裝，那麼全校各年級同學在一個星期中的穿著有多少種變化？我們用**樹狀圖**作圖如下：

我們只畫出上列以 1 號 (UCSCS) 為首的一種，其餘請參閱附錄，結論如下：

①以 1 號 (UCSCS)、2 號 (USCSC)、11 號 (CSCSU)、12 號 (SCSCU)

為首者各有 107 種方法。

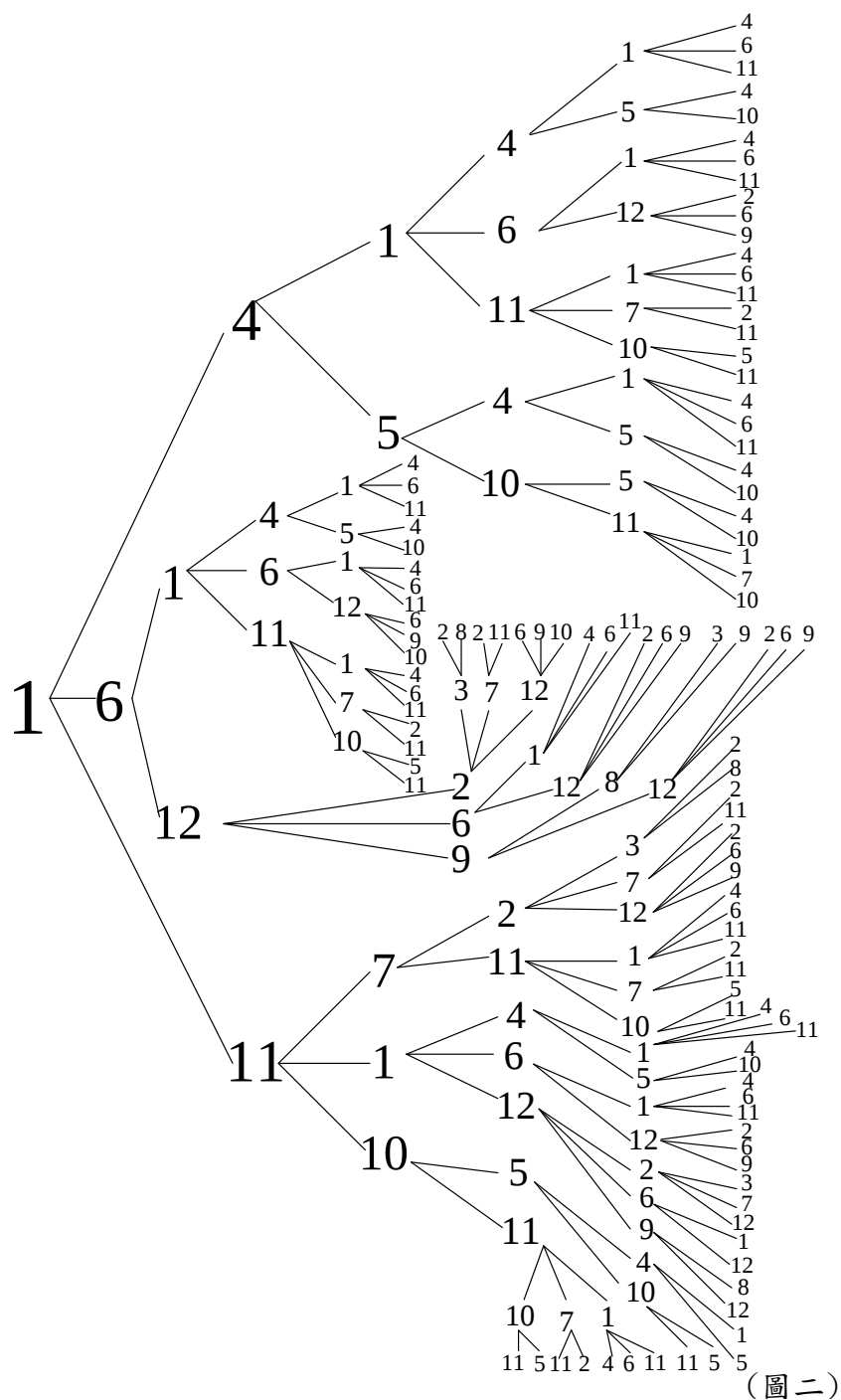
②以 3 號 (CUSCS)、4 號 (SUCSC)、9 號 (CSCUS)、10 號 (SCSUC) 為

首者各有 65 種方法。

③以 5 號 (CSUCS)、8 號 (SCUSC) 為首者各有 56 種方法。

④以 6 號 (CSUSC)、7 號 (SCUCS) 為首者各有 86 種方法。

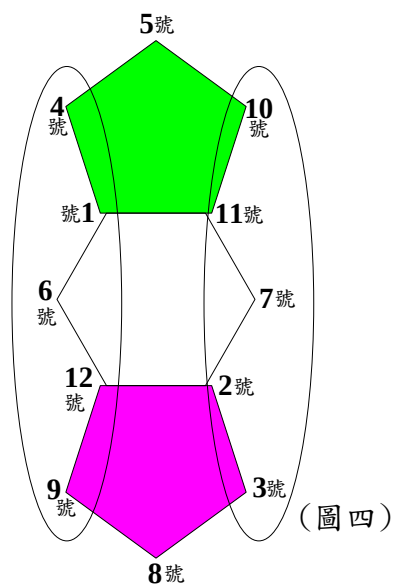
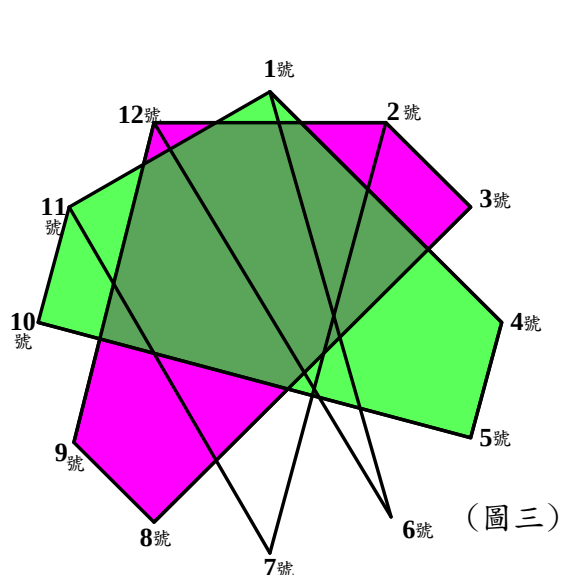
以 1 號 (UCSCS) 為第一列圖示如下，共有 107 種方法。



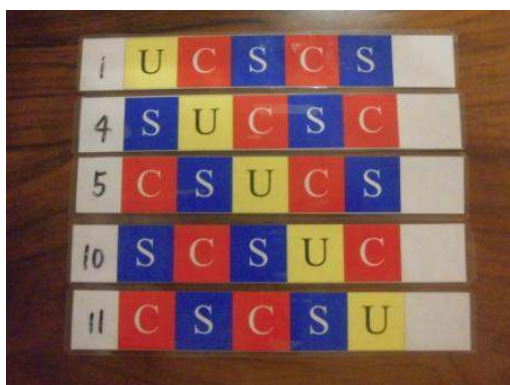
綜合上討論，共有 $(107 \times 4) + (65 \times 4) + (56 \times 2) + (86 \times 2) = 972$ 種方法。

三、我們先定義『類拉丁方陣』：在一個 $n \times n$ 的方陣中，填入 n^2 個字母，滿足以下條件：(1) 每一列、每一行中同字不能相鄰。(2) 每一列、每一行中各個字母的總數必須相同。

如上（圖一），先將這 12 個編號平均放在圓周上，若滿足上下同字不相鄰則將這兩個編號連線，記錄後如下圖：



我們再將上面圖三的編號調整一下位置得到圖四，發現有 2 個五邊形及 1 個六邊形。這 2 個五邊形正是我們要找的『類拉丁方陣』的源頭，以任何一點做為起點，可以選擇順時針或逆時針，繞完一圈正是一個『5x5 同色不相鄰三色類拉丁方陣』，有 $(5 \times 2) \times 2 = 20$ 個類拉丁方陣；另外，以 6 號或 7 號為第三列，一到五列分別為【(4 號 1 號 6 號 12 號 9 號) 、(9 號 12 號 6 號 1 號 4 號)、(10 號 11 號 7 號 2 號 3 號)、(3 號 2 號 7 號 11 號 10 號)】還有 4 個類拉丁方陣，因此共有 $20 + 4 = 24$ 個類拉丁方陣。

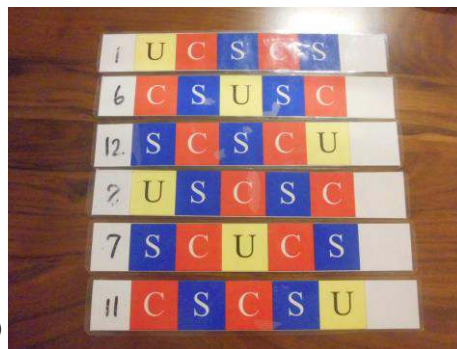


(圖五)



(圖六)

上面圖五、圖六為其中兩個例子，置於這六邊形雖不是方陣，卻可用於實際問題中的 1 到 6 年級的穿制服問題，而且排列後的圖形對稱性相當漂亮。



(圖七)

四、關於『 $n \times n$ 同色不相鄰三色類拉丁方陣， $n < 10$ 』的排列方法，我們先回到最簡單的情況並以字母代替顏色的討論如下：

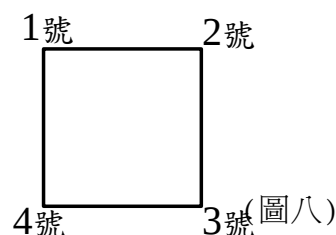
1、S、S、C、U 同字不相鄰能夠產生多少種『 4×4 』的類拉丁方陣？

S、S、C、U 同字不相鄰的直線排列共有 $2! \times C_2^3 = 6$ 種，我們將他們分類如下：

1 號：SCSU 2 號：CSUS

3 號：SUSC 4 號：USCS

5 號：SCUS 6 號：SUCS



很明顯的上面的『5 號』和『6 號』這兩種的下一列必定構成『S、S 相鄰』，因此其皆不能成為『 4×4 』的類拉丁方陣的列成員。我們再將可以做為上下兩列的關係畫出來(如上圖八)，若要形成類拉丁方陣，那麼第一列有 4 個選擇，接下來有順時針或逆時針兩種方法排定下一列，因此有 $4 \times 2 = 8$ 種『 4×4 』的類拉丁方陣。

2、三個字母 S、C、U，同字不相鄰能夠產生多少種『 5×5 』的類拉丁方陣？

(1) 3S、C、U：因為 3S 要同字不相鄰只有『SUSCS、SCSUS』兩種情況，明顯的可以看得出來 S 不可能上、下兩列同字不相鄰。

(2) 2S、2C、U：在『研究目的三』中已經討論完畢，共有 24 種。

3、三個字母 S、C、U，同字不相鄰能夠產生多少種『 6×6 』的類拉丁方陣？

(1) 4S、C、U：同一列中因為 S 以外的字母數只有 2 個而 4S 之間有 3 個空隙，

故 4S 無法以同字不相鄰的情況出現。

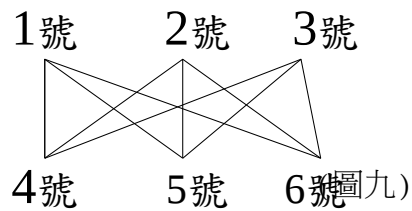
(2) 3S、2C、U：我們可以利用問題『研究目的一』中的多種方法算出在這種條件下『同字不相鄰』的排列方法有 10 種，並且以 1 號到 10 號記錄：

1 號：SCSCSU、2 號：SCSUSC、3 號：SUSCSC、4 號：CSCSUS、

5 號：CSUSCS、6 號：USCSCS、

7 號：SCSCUS、8 號：SCSUCS、

9 號：SCUSCS、10 號：SUCSCS。



將可以做為上下兩列的編號連線，得到右邊的圖九。

若要形成類拉丁方陣，那麼第一列有 6 個選擇，接下來有 3 條連線可以選擇，同一條線不可以經過兩次，否則字母 U 在同一行會出現兩次，就不符合同一行只有一個字母 U 的限制，接下來依序有 2 條連線、2 條連線、1 條連線、1 條連線可以選擇，因此有 $6 \times 3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 = 72$ 種『3S2C1U』的『6×6』類拉丁方陣。

(3) 2S、2C、2U：我們算出在這種條件下『同字不相鄰』的排列方法有 30 種，但是列出這 30 種之後要做出他們的上下相鄰的關係實在是太複雜了，於是我們想出另一種分類的方法，例如：(1 5)表示在同一列中的第 1 及第 5 個字母相同，於是我們得到下列的五類：

甲類：(1 3) (2 5) (4 6)、乙類：(1 4) (2 6) (3 5)、

丙類：(1 5) (2 4) (3 6)、丁類：(1 4) (2 5) (3 6)、

戊類：(1 6) (2 4) (3 5)。字母 S、C、U 分別在每一類上的排列各有 $3! = 6$ 種， $6 \times 5 = 30$ ，也滿足我們之前所計算的結果。

不論字母『S、C、U』如何排列，對於某兩類總是不能作為相鄰的兩列，例

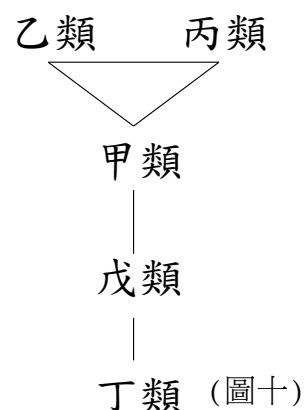
如甲類中：SCSUCU、SUSCUC、

CUCSUS、CSCUSU、UCUSCS、USUCSC 和丁類中：SCUSCU、

SUCSUC、CSUCSU、CUSCUS、USCUSC、UCSUCS。於是，

我們將這五類的關係是否可用直線連結來表示是否可

作為相鄰的兩列。



① 由單一類所組成的類拉丁方陣：

首先考慮甲類的情況：

	S(1 3)C(2 5)U(4 6)	S(1 3)C(4 6)U(2 5)
	S(2 5)C(4 6)U(1 3)	S(4 6)C(2 5)U(1 3)
	S(4 6)C(1 3)U(2 5)	S(2 5)C(1 3)U(4 6)

左邊三列每列各出現兩次而且同一列不能相鄰出現，非常『巧合』的就是『2S2C2U 同字不相鄰的排列個數=30』。另外右邊三種情況也同樣有 30 種類拉丁方陣，因此，光是甲類就有 60 種類拉丁方陣，共有 5 類則產生 300 種類拉丁方陣。

② 由某兩類所組成的類拉丁方陣：

首先考慮由甲、乙所產生的類拉丁方陣，如下面表格所列出共有 24+12+12+12=60 種，又甲和乙可以互換，所以共有 60×2=120 種。其總共有 5 直線關係可產生故 120×5=600 種類拉丁方陣。

第一列：甲 第二列：甲 第三列：甲 第四列：乙 第五列：乙 第六列：乙 有 6×2×1×1×2×1=24 種	第一列：甲 第二列：甲 第三列：乙 第四列：乙 第五列：乙 第六列：甲 有 6×2=12 種	第一列：甲 第二列：乙 第三列：乙 第四列：乙 第五列：甲 第六列：甲 有 6×2=12 種	第一列：甲 第二列：乙 第三列：乙 第四列：甲 第五列：甲 第六列：乙 有 6×2=12 種
--	--	--	--

③ 由某三類以上所組成的類拉丁方陣：

觀察上面五類的關係圖形可知甲、乙、丙三類形成一個三角形，將這個三角形轉兩圈可形成『類拉丁方陣』，那麼第一列有甲、乙、丙 3 個選擇，每一類的 S、C、

U 可以互換，接下來有順時針或逆時針兩種方法排定下一列，因此有 $3 \times 3! \times 2 = 36$ 種『6×6』的類拉丁方陣。

綜合上面的討論，有 $300 + 600 + 36 = 936$ 種『2S2C2U』『6×6』類拉丁方陣，和電腦所計算出來的結果相符。

4、三個字母 S、C、U，同字不相鄰能夠產生多少種『7×7』的類拉丁方陣？

(1) 5S、C、U：同一列中因為 S 以外的字母數只有 2 個而 5S 之間有 4 個空隙，故 5S 無法以同字不相鄰的情況出現。

(2) 4S、2C、U：因為 4S 要同字不相鄰只有『SUSCSCS、SCSUSCS、SCSCSUS』

三種情況，明顯的可以看得出來 S 不可能上、下兩列同字不相鄰。

(3) 3S、3C、U：我們計算出在這種條件下『同字不相鄰』的排列方法有 18 種

(9 類)，我們先將其分類後考慮其是否能成為相鄰兩列的條件，

以直線作為標記得到下圖。

甲類：(1 3 5) (2 4 6) (7)、

乙類：(1 3 5) (2 4 7) (6)、

丙類：(1 3 6) (2 4 7) (5)、

丁類：(1 3 6) (2 5 7) (4)、

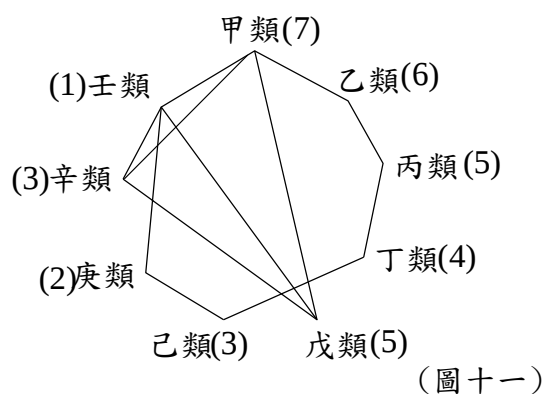
戊類：(1 3 7) (2 4 6) (5)、

己類：(1 4 6) (2 5 7) (3)、

庚類：(1 4 6) (3 5 7) (2)、

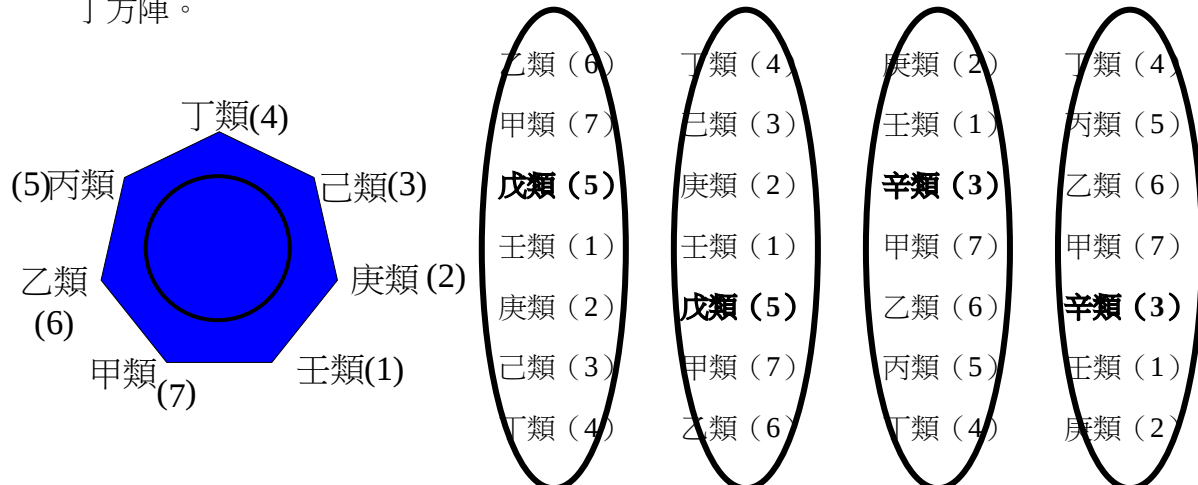
辛類：(1 5 7) (2 4 6) (3)

壬類：(2 4 6) (3 5 7) (1)。



我們將可以做為上下兩列的關係畫出來，如上圖有一個七邊形，若要形成類拉丁方陣，那麼第一列有 7 個選擇，每一類的 S、C 可以互換，接下來有順時針或逆時針兩種方法排定下一列，有 $7 \times 2 \times 2 = 28$ 種；另外，以『戊類』、『辛類』為第三列、第五列的分別有 4 種，共有 $28 + 4 + 4 = 36$ 種『3S3C1U』的『7×7』類拉

丁方陣。

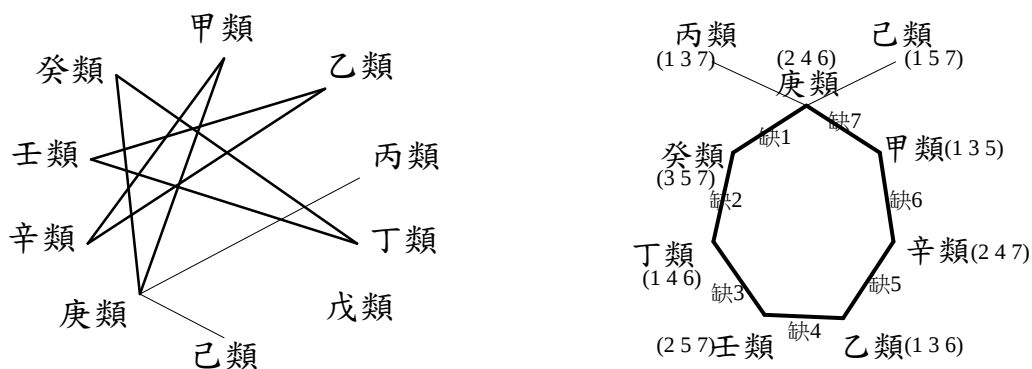


(圖十二)

(4) 3S、2C、2U：我們計算出在這種條件下『同字不相鄰』的排列方法有 38 種，

我們只考慮 S 的位置來做分類如下：

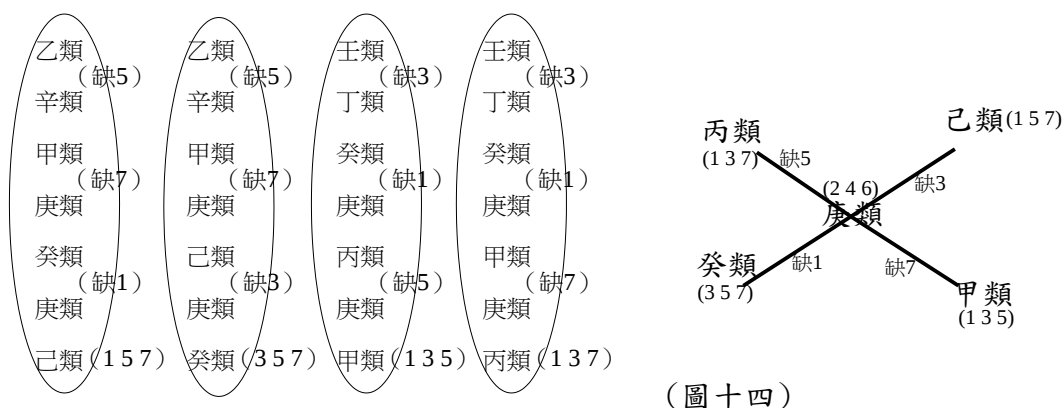
甲類：(1 3 5)、乙類：(1 3 6)、丙類：(1 3 7)、丁類：(1 4 6)、
 戊類：(1 4 7)、己類：(1 5 7)、庚類：(2 4 6)、辛類：(2 4 7)、
 壬類：(2 5 7)、癸類：(3 5 7)。



(圖十三)

甲類可以細分為兩小類：(1 3 5) (2 7) (4 6)、(1 3 5) (4 7) (2 6)
 辛類可以細分為兩小類：(2 4 7) (1 6) (3 5)、(2 4 7) (3 6) (1 5)
 乙類可以細分為兩小類：(1 3 6) (7 5) (2 4)、(1 3 6) (2 5) (7 4)
 壬類可以細分為兩小類：(2 5 7) (6 4) (1 3)、(2 5 7) (1 4) (6 3)
 丁類可以細分為兩小類：(1 4 6) (5 3) (7 2)、(1 4 6) (7 3) (5 2)
 癸類可以細分為兩小類：(3 5 7) (4 2) (6 1)、(3 5 7) (6 2) (4 1)
 庚類可以細分為三小類：(2 4 6) (3 1) (5 7)、(2 4 6) (5 1) (3 7)、
 (2 4 6) (7 1) (3 5)。

每一個相對位置的數字在（圖十三）中順時針方向都是在『模 7 中減 1』，逆時針方向都是在『模 7 中加 1』，由七邊形所產生類拉丁方陣的第一列有 14 個選擇，有順時針或逆時針兩種方法排定下一列，又每一類的 C、U 可以互換，所以在這個規則下有 $14 \times 2 \times 2 = 56$ 種，再利用『缺』的想法可找出 $(4 \times 4) + (4! \times 4) = 112$ 種，因此目前共找出了 $56 + 112 = 168$ 種類拉丁方陣。



(圖十四)

但是電腦計算出 196 種類拉丁方陣，我們尚且無法知道其中沒有規則的部分，故只能做以下結論：至少有 168 種『3S2C2U』的『7×7』類拉丁方陣。

5、三個字母 S、C、U，同字不相鄰能夠產生多少種『8×8』的類拉丁方陣？

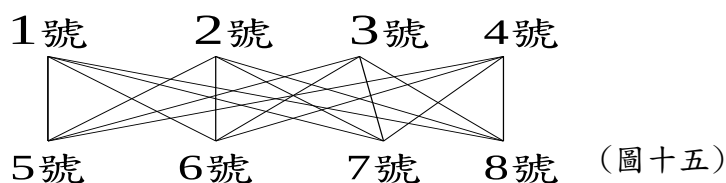
某一列組成同字不相鄰的三種字母，最多只能有『4 同』，因為 n 個相同字母有 $n-1$ 個空隙要填，因此 $n + (n-1) \leq 8$ ， $n \leq 4.5$ ， n 最多只能為 4。

(1) 4S、3C、U：我們計算出在這種條件下『同字不相鄰』的排列方法有 14 種，

並且以 1 號到 14 號記錄：

- 1 號：SCSCSCSU、2 號：SCSCSUSC、3 號：SCSUSCSC、4 號：SUSCSCSC
 5 號：CSCSCSUS、6 號：CSCSUSCS、7 號：CSUSCSCS、8 號：USCSCSCS
 9 號：SCUSCSCS、10 號：SCSCUSCS、11 號：SCSCSCUS、
 12 號：SUCSCSCS、13 號：SCSUCSCS、14 號：SCSCSUCS。

我們將其編號在考慮其是否能成為相鄰兩列的條件，以直線作為標記得到下圖。



(圖十五)

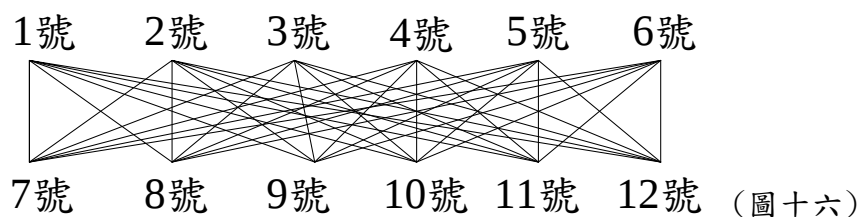
若要形成類拉丁方陣，那麼第一列有 8 個選擇，接下來有 4 條連線可以選擇，同一條線不可以經過兩次，否則字母 U 在同一行會出現兩次，就不符合同一行只有一個字母 U 的限制，接下來依序有 3 條連線、3 條連線、2 條連線、2 條連線、1 條連線、1 條連線可以選擇，因此恰有 $8 \times 4 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 = 1152$ 種類拉丁方陣。

(2) 4S、2C、2U：我們計算出在這種條件下『同字不相鄰』的排列方法有 24 種，

並且以 1 號到 24 號記錄：

1 號：SCSCSUSU、2 號：SCSUSCSU、3 號：SCSUSUSC、4 號：SUSCSCSU
 5 號：SUSCSUSC、6 號：SUSUSCSC、7 號：CSCSUSUS、8 號：CSUSCSUS
 9 號：CSUSUSCS、10 號：USCSCSUS、11 號：USCSUSCS、12 號：USUCSCS
 13 號～24 號不能成為相鄰兩列的條件，因此我們不列出。

我們將其編號在考慮其是否能成為相鄰兩列的條件，以直線作為標記得到下圖。



若奇數列為 1～6 號那麼偶數列就必須為 7～12 號。

相反地，若奇數列為 7～12 號那麼偶數列就必須為

1～6 號，以奇數列為 1～6 號來說：奇數列共有四

列，對於不為『字母 S』的位置來說，可以有右邊

六種情況。

1 號	C	C	U	U
2 號	C	U	C	U
3 號	C	U	U	C
4 號	U	C	C	U
5 號	U	C	U	C
6 號	U	U	C	C

(圖十七)

① 1 號配 6 號共有 $\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$ 種排列。

② 2 號配 5 號共有 $\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$ 種排列。

③ 3 號配 4 號共有 $\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$ 種排列。

④ 1 號、2 號、5 號、6 號的搭配有 $4! = 24$ 種排列。

⑤ 1 號、3 號、4 號、6 號的搭配有 $4! = 24$ 種排列。

⑥ 2 號、3 號、4 號、5 號的搭配有 $4!=24$ 種排列。

因此，1~6 號在奇數列的排列有 $6+6+6+24+24+24=90$ 種，7~12 號在偶數列的排列也有 90 種，因此有 $90 \times 90 \times 2 = 16200$ 種類拉丁方陣。

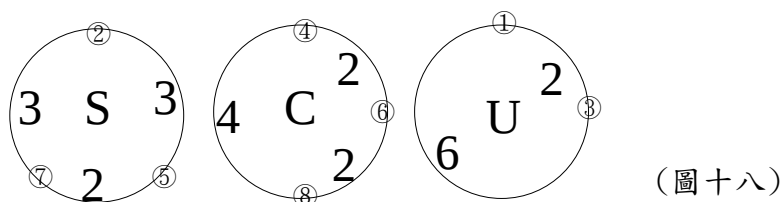
(3) 3S、3C、2U：我們計算出在這種條件下『同字不相鄰』的排列方法有 74 種，

因為數量太大我們無法再將其編號觀察其彼此的關係，而在討論『3S、2C、2U』時給我們以下的靈感：8 的因數有 1、2、4、8，因此我們至少可以找到『4 循環』、『8 循環』構成類拉丁方陣。

由 U 所在的位置來分類：

①在模 8 下差為 2 者：(1 3)、(2 4)、(3 5)、(4 6)、(5 7)、(6 8)、(7 1)、(8 2)

以 U(1 3)為例，只能搭配 S、C 為(2 5 7)、(4 6 8)在模 8 下其間隔圖形為



只有『模 8 中減 1』或『模 8 中加 1』才不會有相鄰兩列有相同數字的問題，其它加 2、3、4、5、6 都會造成相鄰兩列有相同數字的情況，另外，S、C 位置互換數字也必定會有相鄰兩列有相同數字的情況。因此，若要形成類拉丁方陣，那麼第一列有 8 個選擇，每一類的 S、C 可以互換且在『模 8 中可加減 1』兩種方法排定下一列，因此有 $8 \times 2 \times 2 = 32$ 種 8 循環的『8x8』類拉丁方陣。

例如：

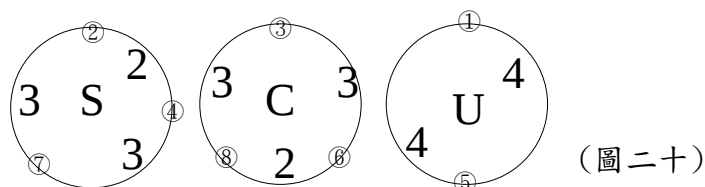
S	C	U
(2 5 7)	(4 6 8)	(1 3)
(3 6 8)	(5 7 1)	(2 4)
(4 7 1)	(6 8 2)	(3 5)
(5 8 2)	(7 1 3)	(4 6)
(6 1 3)	(8 2 4)	(5 7)
(7 2 4)	(1 3 5)	(6 8)
(8 3 5)	(2 4 6)	(7 1)
(1 4 6)	(3 5 7)	(8 2)

(圖十九)

②在模 8 下差為 3 者：(1 4)、(2 5)、(3 6)、(4 7)、(5 8)、(6 1)、(7 2)、(8 3)和①的討論相同，我們可以找到 64 種 8 循環的『8x8』類拉丁方陣。

③在模 8 下差為 4 者：(1 5)、(2 6)、(3 7)、(4 8)

以 U(1 5)為例，只能搭配 S、C 為(2 4 7)、(3 6 8)在模 8 下其間隔圖形為



只有『模 8 中減 1』或『模 8 中加 1』才不會有相鄰兩列有相同數字的問題，其它加 2、3、4、5、6 都會造成相鄰兩列有相同數字的情況，另外，S、C 位置互換數字也必定會有相鄰兩列有相同數字的情況。因此，若要形成類拉丁方陣，那麼第一列有 4 個選擇，每一類的 S、C 可以互換且在『模 8 中可加減 1』兩種方法排定下一列，因此有 $4 \times 2 \times 2 = 16$ 種 4 循環的 4x8 矩陣，根據第四列決定第五列為模 8 中加 1 或減 1，第五列為下一個 4 循環的開始，第六列也有『模 8 中加 1 或減 1』兩個選擇，因此五到八列有 $2 \times 2 \times 1 \times 1 = 4$ ，故共有 $16 \times 4 = 64$ 個『8x8』類拉丁方陣。

④其他：因為(1 8)在『模 8 中』是相鄰的，我們目前尚無法判定。

綜合以上①～④的討論，我們尚且不能確定沒有規則的情況是否存在，所以只能有如下的結論：在『3S、3C、2U』條件下至少有 $32 + 64 + 64 = 160$ 個類拉丁方陣。

6、三個字母 S、C、U，同字不相鄰能夠產生多少種『9x9』的類拉丁方陣？

$n + (n - 1) \leq 9$ ， $n \leq 5.5$ ，n 最多只能為 5。

(1)『5S、3C、U』和『5S、2C、2U』：

因為 5S 要同字不相鄰只有『SUSCSCSCS、SCSUSCSCS、SCSCSUSCS、SCSCSCSUS』及『SUSUSCSCS、SUSCSUSCS、SUSCSCSUS、SCSUSUSCS、

SCSUSCSUS、SCSCSUSUS』，明顯的可以看得出來 S 不可能上、下兩列同字不相鄰。

(2) 4S、4C、1U：我們計算出在這種條件下『同字不相鄰』的排列方法有 24 種

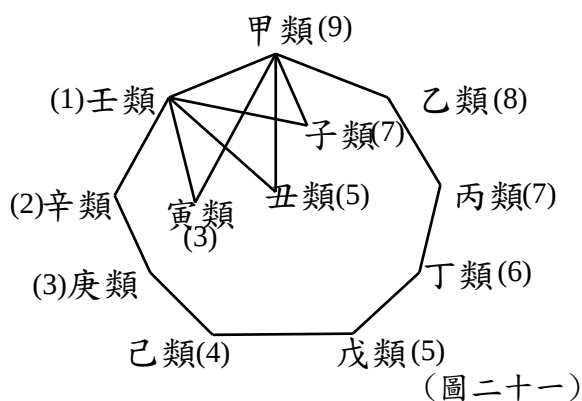
(12 類)，我們將其編號在考慮其是否能成為相鄰兩列的條件，

以直線作為標記得到下圖。

甲類：(1 3 5 7) (2 4 6 8) (9)、
 乙類：(1 3 5 7) (2 4 6 9) (8)、
 丙類：(1 3 5 8) (2 4 6 9) (7)、
 丁類：(1 3 5 8) (2 4 7 9) (6)、
 戊類：(1 3 6 8) (2 4 7 9) (5)、
 己類：(1 3 6 8) (2 5 7 9) (4)、
 庚類：(1 4 6 8) (2 5 7 9) (3)、
 辛類：(1 4 6 8) (3 5 7 9) (2)、
 壬類：(2 4 6 8) (3 5 7 9) (1)

以及另三類，子類：(1 3 5 9) (2 4 6 8) (7)、

丑類：(1 3 7 9) (2 4 6 8) (5)、寅類：(1 5 7 9) (2 4 6 8) (3)。



我們將可以做為上下兩列的關係畫出來，如上圖有一個九邊形，若要形成類拉丁方陣，那麼第一列有 9 個選擇，每一類的 S、C 可以互換，接下來有順時針或逆時針兩種方法排定下一列，因此有 $9 \times 2 \times 2 = 36$ 種；另外，以『子類』、『丑類』、『寅類』為第三、五、七列的分別有 4 種，共有 $36 + 4 \times 3 = 48$ 種『4S4C1U』的『9 × 9』類拉丁方陣。因此，我們歸納得到其規則並且推廣而證明這個結論。

結論：($2n+1$)階條件為 nS 、 nC 、 $1U$ 下有 $12n$ 個類拉丁方陣。(其中類拉丁方陣同本說明說第 5 頁的定義)

證明：當每一列中 U 固定在某一個位置後，其餘 $2n$ 個位置要分成 S、C 兩類同字不相鄰的排列，有兩種情況：

① U 排在偶數位置($2k$)，

$\overbrace{\square \square \square \cdots \square \square \square}^{\text{共 } 2k-1 \text{ 個}} \quad \overbrace{\square \square \square}^{\text{第 } 2k \text{ 個位置}} \quad \overbrace{\square \square \square \cdots \square \square}^{\text{共 } 2n+1-2k \text{ 個}}$

S、C 則有 $(1 \ 3 \ 5 \ \cdots 2k-1 \ 2k+2 \ \cdots 2n)$ 和 $(2 \ 4 \ 6 \ \cdots 2k-2 \ 2k+1 \ \cdots 2n+1)$ 兩種可供選擇，故可形成 n 類。

② U 排在奇數位置($2k+1$)其中 $k=1,2,\dots,n-1$ ，且頭尾($1, 2n+1$)不在同一類，因此 S、C 則有($1\ 3\ 5\ \dots\ 2k-1\ 2k+2\ \dots\ 2n$)和($2\ 4\ 6\ \dots\ 2k\ 2k+3\ \dots\ 2n+1$)兩種可供選擇，故可形成 $n-1$ 類。

③ U 排在首、尾的位置，在同字不相鄰的限制下仍然兩類可供選擇。

上述共有共有($2n+1$)類，根據 U 的位置可作為同字不相鄰上下兩類我們用直線連結，因此便形成一個封閉的($2n+1$)邊形。作為『類拉丁方陣的首列』有($2n+1$)個選擇、每一類的 S、C 可以互換，接下來有順時針或逆時針兩種方法排定下一列，此後每一列都被前一列所固定，因此有 $(2n+1)\times 2\times 2=8n+4$ 個類拉丁方陣。

④ U 排在奇數位置($2k+1$)其中 $k=1,2,\dots,n-1$ ，且頭尾($1, 2n+1$)在同一類，這種『類』共有($n-1$)個，每一個做為『中間奇數列』都可產生 4 個類拉丁方陣，又有 $(n-1)\times 4=4n-4$ ，綜合以上討論，共有 $(8n+4)+(4n-4)=12n$ 個類拉丁方陣。

證明結束■

(3) 4S、3C、2U：我們計算出在這種條件下『同字不相鄰』的排列方法有 79 種，

我們將其編號在考慮其是否能成為相鄰兩列的條件，以直線作為標記得到下圖。

我們只考慮 S 的位置來做分類：

甲類：(1 3 5 7)、乙類：(2 4 6 9)、丙類：(1 3 5 8)

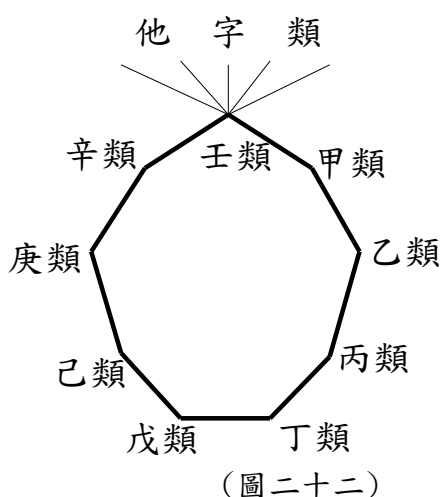
丁類：(2 4 7 9)、戊類：(1 3 6 8)、己類：(2 5 7 9)

庚類：(1 4 6 8)、辛類：(3 5 7 9)、壬類：(2 4 6 8)

他一類：(1 3 5 9)、他二類：(1 3 6 9)、

他三類：(1 3 7 9)、他四類：(1 4 6 9)、

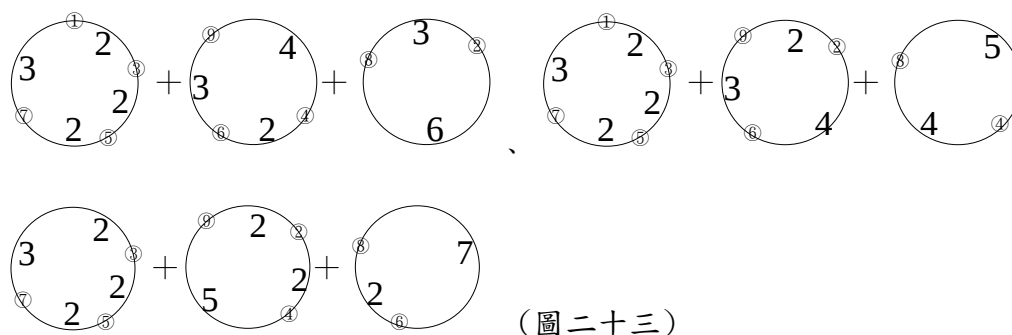
他五類：(1 4 7 9)、他六類：(1 5 7 9)。



從甲類到壬類，每一類都可以細分為六小類，例如甲類(1 3 5 7)：

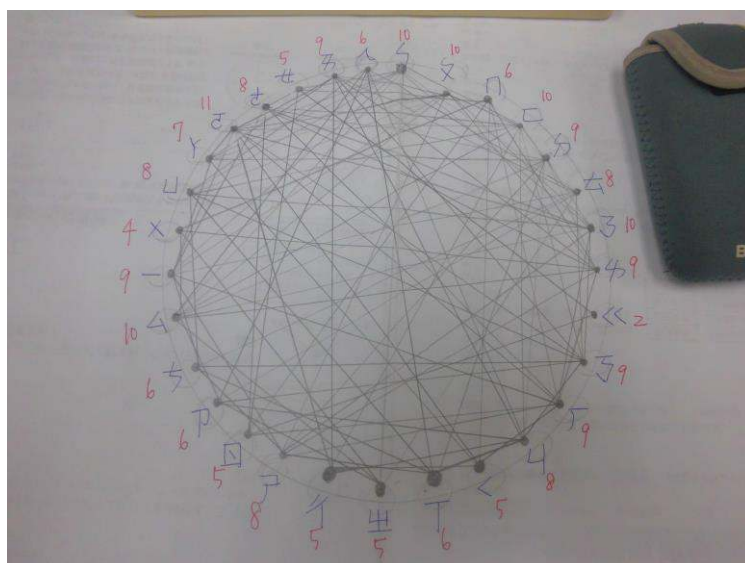
(1 3 5 7) (4 6 9) (2 8)、(1 3 5 7) (2 6 9) (4 8)、(1 3 5 7) (2 4 9) (6 8)、
(1 3 5 7) (4 6 8) (2 9)、(1 3 5 7) (2 6 8) (4 9)、(1 3 5 7) (2 4 8) (6 9)。

和『3S2C2U』的情況相同，我們試驗過這六小類的先後順序是必須有限制的，理由是其每一個相對位置的數字在(圖二十二)中順時針方向都是在『模 9 中減 1』，逆時針方向都是在『模 9 中加 1』，如此一來，就不會有相鄰兩列有相同數字的問題，其它加 2、3、4、5、6、7 都會造成相鄰兩列有相同數字的情況，如下圖三種情況。



因此，若要形成類拉丁方陣，那麼第一列有 $9 \times 6 = 54$ 個選擇，接下來有順時針或逆時針兩種方法排定下一列，但是我們尚且不能確定沒有規則的情況是否存在，故只能做以下結論：**至少有 $54 \times 2 = 108$ 種『4S3C2U』的『9x9』類拉丁方陣。**

(4) 3S、3C、3U：我們計算出在這種條件下『同字不相鄰』的排列方法有 174 種，將其分為 $174 \div 3! = 29$ 類，其是否能成為相鄰兩列的條件，以直線作為標記得到下圖。



(圖二十四)

仿照『2S2C2U』的模式做成以下討論，由於篇幅過大，計算部分在附錄中呈現。

①由單一類所組成的類拉丁方陣：

首先某類的情況：

S(1 3 5)C(2 6 8)U(4 7 9)	S(1 3 5)C(4 7 9)U(2 6 8)
S(2 6 8)C(4 7 9)U(1 3 5)	S(4 7 9)C(2 6 8)U(1 3 5)
S(4 7 9)C(1 3 5)U(2 6 8)	S(2 6 8)C(1 3 5)U(4 7 9)

左邊三列每列各出現三次而且同一列不能相鄰出現，非常巧合的就是『3S3C3U

同字不相鄰的排列個數=174』，另外右邊三種情況為也同樣有 174 種類拉丁方陣。因此，每類各有 $174 \times 2 = 348$ 種類拉丁方陣，共有 29 類則產生 $348 \times 29 = 10092$ 種類拉丁方陣。

②由某兩類所組成的類拉丁方陣，觀察圖形的頂點，其連線數做成下列表格：

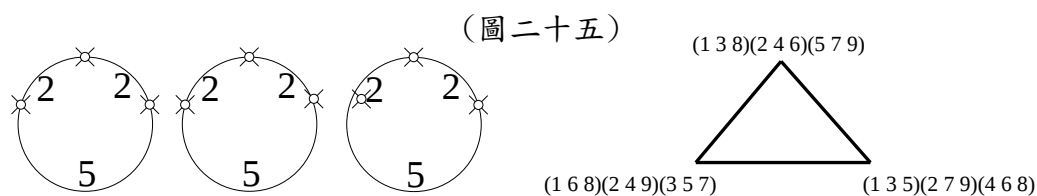
連線數	2	4	5	6	8	9	10
頂點個數	1	2	4	5	7	4	6

共有【 $(2 \times 1) + (4 \times 2) + (5 \times 4) + (6 \times 5) + (8 \times 7) + (9 \times 4) + (10 \times 6)$ 】 $\div 2 = 106$ 條直線，每條直線可提供 1164 個類拉丁方陣，又有 106 條直線所以共可產生 $1260 \times 106 = 133560$ 個類拉丁方陣。

③由某三類所組成的類拉丁方陣：

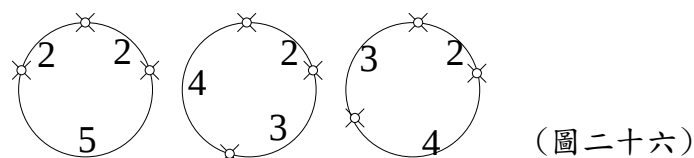
以某一個頂點來說，和他以直線相連結的有 n 類，以這一個頂點做為中心（四、五、六列），其上三列有 n 類可供選擇，其下三列有 $(n-1)$ 類可供選擇，即有 P_2^n 個，共有 $P_2^2 \times 1 + P_2^4 \times 2 + P_2^5 \times 4 + P_2^6 \times 5 + P_2^8 \times 7 + P_2^9 \times 4 + P_2^{10} \times 6 = 1476$ 種如下形式的類拉丁方陣，我們稱它為『直線形』，每組直線形可提供 144 個類拉丁方陣，所以共有 $144 \times 1476 = 212544$ 種。

除了上述的直線形某三類所組成的類拉丁方陣之外，還有一種『三循環』所組成的類拉丁方陣：

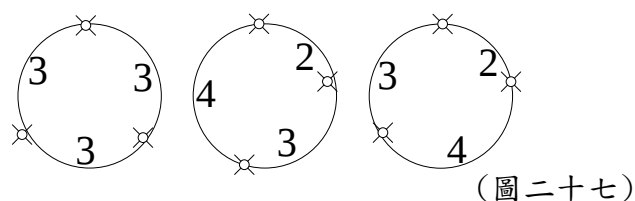


共有 $3! \times 3 \times 2 = 36$ 種。

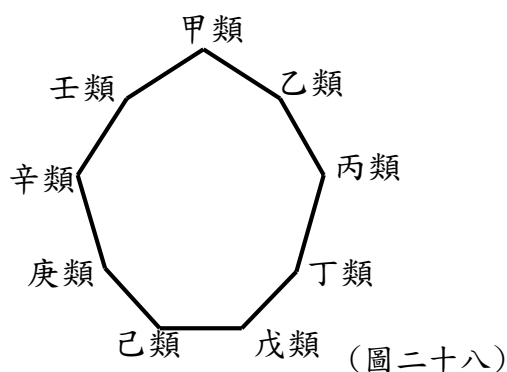
④由某四類以上所組成的類拉丁方陣：以下有兩種『九循環』的情況。



甲類：(1 4 6)(2 7 9)(3 5 8)、乙類：(1 3 8)(2 5 7)(4 6 9)、
 丙類：(1 3 7)(2 4 9)(3 6 8)、丁類：(1 3 5)(2 6 8)(4 7 9)、
 戊類：(1 5 8)(2 4 6)(3 7 9)、己類：(1 4 8)(2 6 9)(3 5 7)、
 庚類：(1 3 7)(2 5 9)(4 6 8)、辛類：(1 3 6)(2 4 8)(5 7 9)、
 壬類：(1 6 8)(2 4 7)(3 5 9)



甲類：(1 4 8)(2 5 7)(3 6 9)、
 乙類：(1 4 7)(2 5 9)(3 6 8)、
 丙類：(1 3 6)(2 5 8)(4 7 9)、
 丁類：(1 5 8)(2 4 7)(3 6 9)、
 戊類：(1 4 7)(2 6 9)(3 5 8)、
 己類：(1 3 7)(2 5 8)(4 6 9)、
 庚類：(1 5 7)(2 4 8)(3 6 9)、
 辛類：(1 4 7)(2 6 8)(3 5 9)、
 壬類：(1 4 6)(2 5 8)(3 7 9)



共有 $(3! \times 9 \times 2) \times 2 = 216$ 種可能。

綜合上面的討論，但是我們尚且不能確定沒有規則的情況是否存在，故只能做以下結論：**至少有** $10092 + 133560 + 212544 + 36 + 216 = 356448$ 種『3S3C3U』的『9×9』的類拉丁方陣。

經過上面的討論，我們找到一些規則來計算出 10 階之內的三色類拉丁方陣數量的『準確值』或是『最小值』的討論，其中『3S2C2U』、『3S3C2U』、『4S3C2U』、

『3S3C3U』我們尚且不能確定其是否為準確值，是否有『規律之外』的情況產生，故只能宣稱『最小值』。我們請學校的電腦老師協助，利用電子計算機幫忙計算佐證，其介面說明介紹如右：

(圖二十九)

五、連續上學數日，制服(U)、便服(C)、運動服(S)輪流穿，不能連2天穿著相同樣式的服裝，而且每種樣式的服裝穿著的天數盡量相等，相差最多不超過一天，有多少種排法？(分為 $k+k+k$ 、 $(k+1)+k+k$ 、 $(k+1)+(k+1)+k$)當 $k=2$ 、 $k=3$ 時也許可以用上述的方法慢慢算而不產生錯誤，但在計算 $(4+4+3)$ 時，就會讓人擔心有沒有算錯，這裡我們找出一個有系統的科學方法來，不論 k 值為何均可使用，不易出錯。利用『研究目的一』的『想法四』

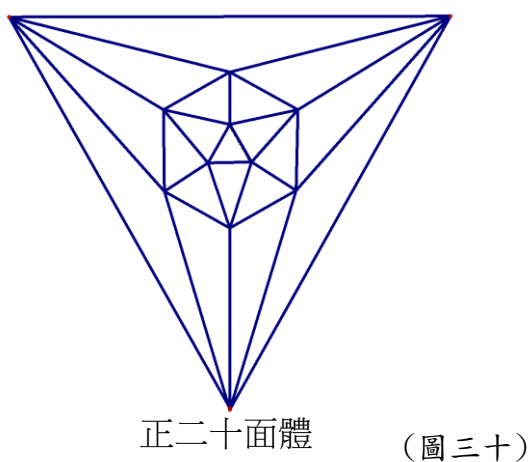
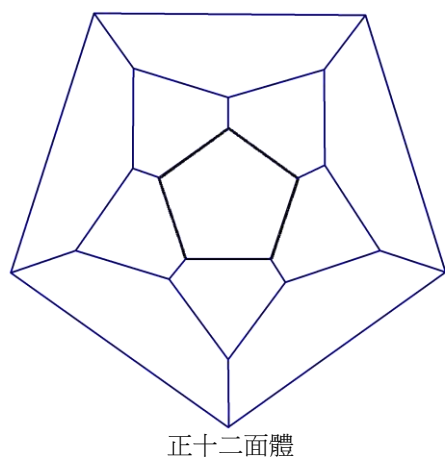
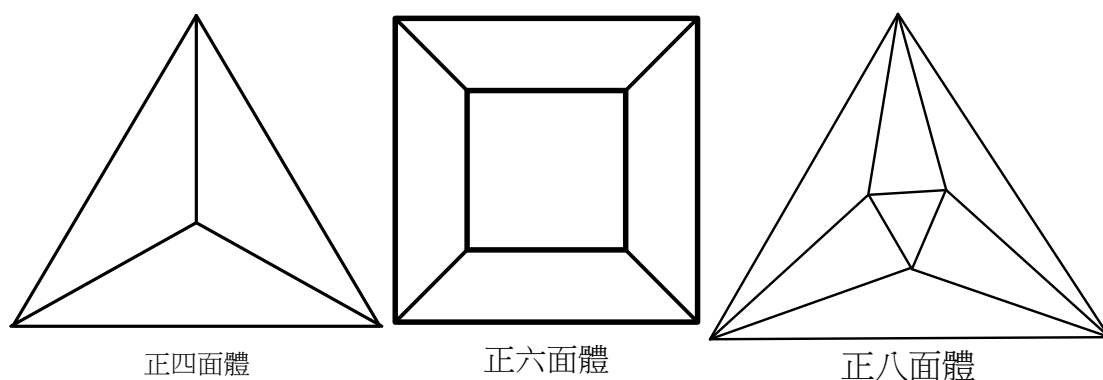
來處理，以5S、5C、5U為例：

U U U U U						奇偶排列數	數字排列數	總排列數
0	1	1	1	7	0	四奇： $\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$	三同一異： $\frac{4!}{3!} = 4$	24
0	1	1	2	6	0	二奇二偶： $(2!)^3 = 8$	二同二異： $\frac{4!}{2!} = 12$	96
0	1	1	3	5	0	四奇： $\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$	二同二異： $\frac{4!}{2!} = 12$	72
0	1	1	4	4	0	二奇二偶： $(2!)^3 = 8$	二同二同： $\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$	48
0	1	2	2	5	0	二奇二偶： $(2!)^3 = 8$	二同二異： $\frac{4!}{2!} = 12$	96
0	1	2	3	4	0	二奇二偶： $(2!)^3 = 8$	四異： $4! = 24$	192

0	1	3	3	3	0	四奇： $\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$	三同一異： $\frac{4!}{3!} = 4$	24
0	2	2	2	4	0	四偶： $(2!)^4 = 16$	三同一異： $\frac{4!}{3!} = 4$	64
0	2	2	3	3	0	二奇二偶： $(2!)^3 = 8$	二同二同： $\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$	48
							第一類總和	664
1	1	1	1	6	0	四奇一偶： $\frac{4!}{2! \times 2!} \times 2! = 12$	四同一異： $\frac{5!}{4!} = 5$	60
1	1	1	2	5	0	四奇一偶： $\frac{4!}{2! \times 2!} \times 2! = 12$	三同二異： $\frac{5!}{3!} = 20$	240
1	1	1	3	4	0	四奇一偶： $\frac{4!}{2! \times 2!} \times 2! = 12$	三同二異： $\frac{5!}{3!} = 20$	240
1	1	2	2	4	0	二奇三偶： $2! \times (2!)^3 = 16$	二同二異一異： $\frac{5!}{2! \times 2!} = 30$	480
1	1	2	3	3	0	四奇一偶： $\frac{4!}{2! \times 2!} \times 2! = 12$	二同二異一異： $\frac{5!}{2! \times 2!} = 30$	360
1	2	2	2	3	0	二奇三偶： $2! \times (2!)^3 = 16$	三同二異： $\frac{5!}{3!} = 20$	320
2	2	2	2	2	0	五偶： $(2!)^5 = 32$	五同： $\frac{5!}{5!} = 1$	32
							第二類總和	1732
							第二類的總數須乘以 2：	3464
1	1	1	1	1	5	六奇： $\frac{6!}{3! \times 3!} = 20$	五同一異： $\frac{6!}{5!} = 6$	120
1	1	1	1	2	4	四奇二偶： $\frac{4!}{2! \times 2!} \times (2!)^2 = 24$	四同二異： $\frac{6!}{4!} = 30$	720
1	1	1	1	3	3	六奇： $\frac{6!}{3! \times 3!} = 20$	四同二同： $\frac{6!}{4! \times 2!} = 15$	300
1	1	1	2	2	3	四奇二偶： $\frac{4!}{2! \times 2!} \times (2!)^2 = 24$	三同二同一異： $\frac{6!}{3! \times 2!} = 60$	1440
1	1	2	2	2	2	二奇四偶： $2! \times (2!)^4 = 32$	四同二同： $\frac{6!}{4! \times 2!} = 15$	480
							第三類總和	3060
							一至三類總和	7188

六、我們將這 5 種正多面體壓成平面展現（如下圖）並且在其邊上做數字的記號

作為不同顏色邊的區別(如附錄)，再由實際的磁鐵玩具套組做呈現。



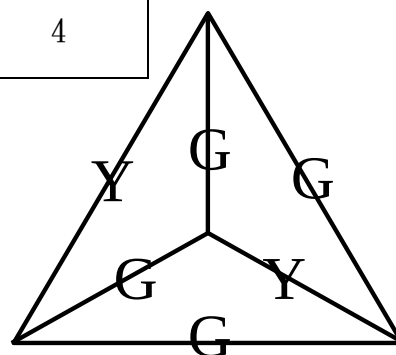
用數種顏色塗上正多面體的各邊，並且規定每一面各邊的顏色、順序均相同（可以順時針或逆時針），其討論如下：

1、正四面體：

每面正三角形三邊為 2 綠 1 黃



連結狀況	頂點個數
2 綠 1 黃	4

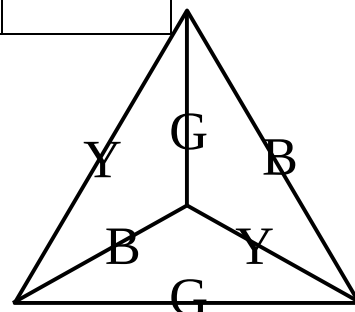
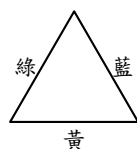


(圖三十一)

每面正三角形三邊為 1 綠 1 黃 1 藍



連結狀況	頂點個數
1 綠 1 黃 1 藍	4



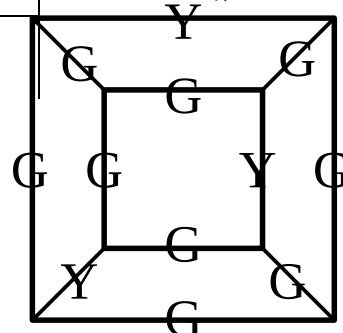
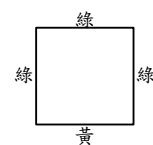
(圖三十二)

2、正六面體：

每面正方形四邊為 3 綠 1 黃



連結狀況	頂點個數
3 綠	2
2 綠 1 黃	6

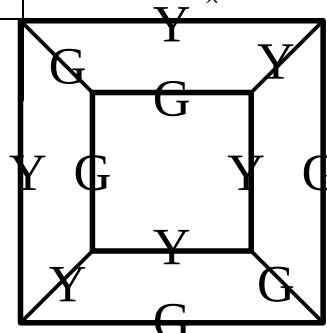
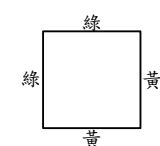


(圖三十三)

每面正方形四邊為 2 綠 2 黃



連結狀況	頂點個數
2 綠 1 黃	6
3 黃	2



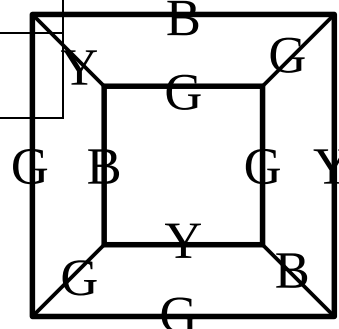
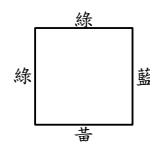
(圖三十四)

每面正方形為 2 綠 1 黃 1 藍

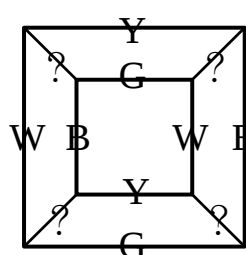
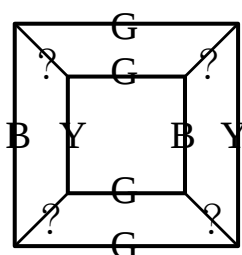
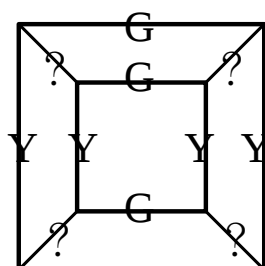


(圖三十五)

連結狀況	頂點個數
3 綠	2
1 綠 1 黃 1 藍	6



另外三種沒有在上面呈現的是正方形每面的環狀排列為(綠黃綠黃)、(綠黃綠藍)、(綠黃藍白)，我們將其無法滿足條件的原因用平面圖形說明: 首先將立體圖形壓成平面圖的最中間一個正方形先塗上顏色，再向外部擴張塗色，若產生矛盾的地方用『？』表示，即為無法滿足條件的狀況。



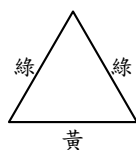
(圖三十六)

4、正八面體：

每面正三角形為 2 綠 1 黃



每面正三角形為 1 紅 1 白 1 藍



連結狀況	頂點個數
3 綠 1 黃	6
2 綠 2 黃	2



連結狀況	頂點個數
2 紅 2 白 1 藍	2
2 紅 1 白 2 藍	2
1 紅 2 白 2 藍	2

25
(圖三十七)

5、正十二面體：

每面正五邊形各邊為4綠1



每面正五邊形各邊為3綠2黃



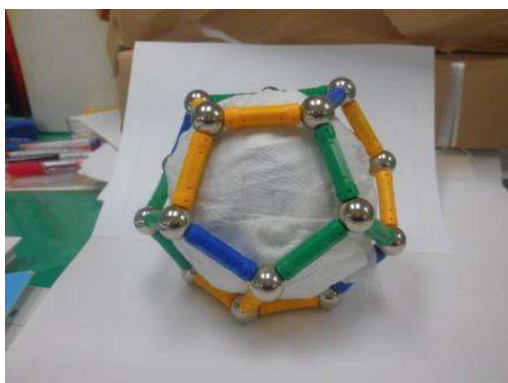
連結狀況	頂點個數
3 綠	8
2 綠 1 黃	12



連結狀況	頂點個數
3 綠	4
2 綠 1 黃	12
3 黃	4

(圖三十八)

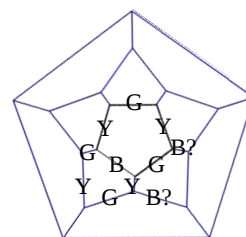
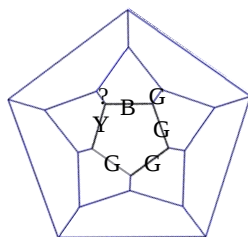
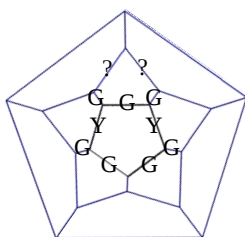
每面正五邊形各邊為2綠2黃1藍



連結狀況	頂點個數
3 綠	4
3 黃	4
1 綠 1 黃 1 藍	12

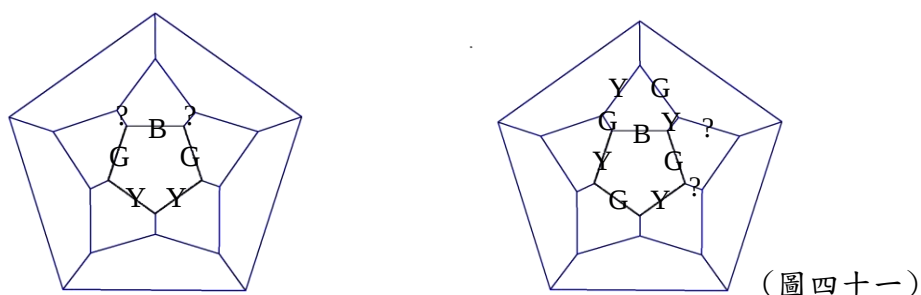
(圖三十九)

另外幾種每面正五邊形環狀排列為(綠綠黃綠黃)、(綠綠綠黃藍)、(綠綠黃綠藍)：



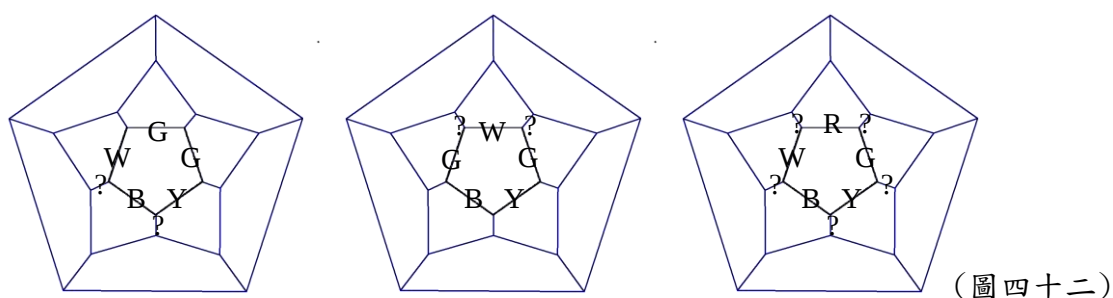
(圖四十)

每面正五邊形為 2 綠 2 黃 1 藍的六種環狀排列：(BGYGY)、(BYGYG)、(BYYGG)、(BGGYY)、(BGYYG)及(BYGGY)。只有『綠綠相鄰且黃黃相鄰』這種情況可以滿足要求的條件而構成正十二面體，其餘不可行者說明如下：。



(圖四十一)

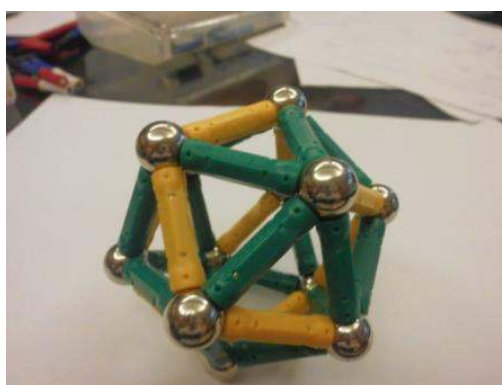
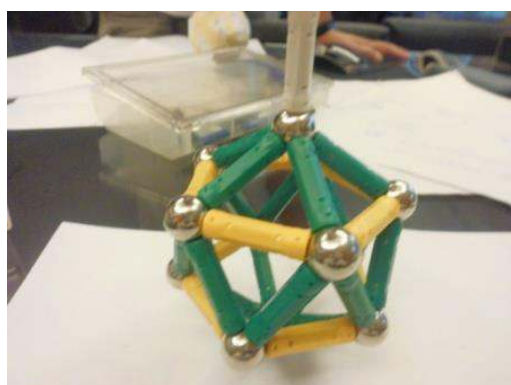
最後，每面正五邊形為 2 綠 1 黃 1 藍 1 白共四種顏色及五種顏色全用上塗在正十二面體的各邊，並且規定每一面各邊的顏色、順序均相同，也是不可能的：



(圖四十二)

7、正二十面體：

每面正三角形為 2 綠 1 黃



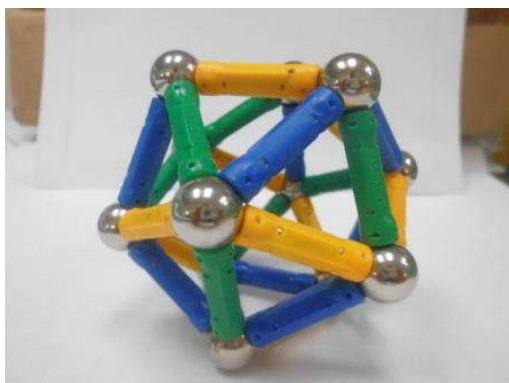
連結狀況	頂點個數
5 綠	2
3 綠 2 黃	10



(圖四十三)

連結狀況	頂點個數
4 綠 1 黃	4
3 綠 2 黃	8

每面正三角形為 1 綠 1 黃 1 藍



連結狀況	頂點個數
2 綠 2 黃 1 藍	4
2 黃 2 藍 1 綠	4
2 藍 2 綠 1 黃	4

(圖四十四)

伍、研究結果：

一、我們利用『樹狀圖』成功地解決的實際上學中的服裝穿規定中不相鄰的問題。

二、關於三種顏色排成一列其個數為 $k+k+k$ 、 $(k+1)+k+k$ 、 $(k+1)+(k+1)+k$

三種情況，滿足同色不相鄰的排列數有多少種？我們有獨特的計算方法。

三、三字母 S、C、U 同字不相鄰的『類拉丁方陣』個數如下：

S	2	2	3	2	3	3	4	4	3	4	4	3
C	1	2	2	2	3	2	3	2	3	4	3	3
U	1	1	1	2	1	2	1	2	2	1	2	3
個數	8	24	72	936	36	≥ 168	1152	16200	≥ 128	48	≥ 160	≥ 356448

四、 $(2n+1)$ 階條件為 nS 、 nC 、 $1U$ 下有 $12n$ 個類拉丁方陣。

五、用 n 種顏色圖上正多面體各邊，規定每一面各邊的顏色、順序均相同，如下：

多面體 \ 顏色數	2	3	4	5
正四面體(每面為正三角形)	○	○		
正六面體(每面為正方形)	○	○	×	
正八面體(每面為正三角形)	○	○		
正十二面體(每面為正五邊形)	○	○	×	×
正二十面體(每面為正三角形)	○	○		

陸、延伸與展望：

- 一、關於『 $N \times N$ 同色不相鄰 M 色類拉丁方陣， $N > 9$ 、 $M > 3$ 』有多少種排法？
- 二、觀察出階數愈大，其類拉丁方陣的個數膨脹得非常快；在相同階數的情況下， S 、 C 、 U 個數愈平均，其類拉丁方陣的數量愈多，這個現象將是我們未來想要再繼續研究的方向。
- 三、雖然已經請電腦老師協助幫忙寫出程式計算，類拉丁方陣的個數問題，但目前只能計算到階數 ≤ 6 的部分，階數太大則電腦運算的時間會變得很長，仍需要再努力，我們也即將上國中了，未來希望能在這方面獲得一些成果。
- 四、希望未來可以將『研究問題五』用電腦程式來表現，因為我們已經找到了系統性的方法，只是還沒有能力用電腦輔助。
- 五、我們希望將來可以將正多面體的邊塗色問題開發成『幼兒益智玩具』。

柒、後記：

我們經由日常生活中的例子出發，一路經歷了超出國小數學的範疇，認識了排列組合中的一些基本的運算符號，見識到數學的浩瀚，在 google 中搜尋關鍵字的方便，見到了數學發展的軌跡，就好像豬八戒和沙悟淨帶著唐三藏取經一般，沒有孫悟空的幫忙而就憑一點小小的本事是到不了西天的。我們觀察出一些規律進而做出了一些小小的成果，再往下走就是困難的『組合設計』，在網路上搜尋到的資料是指導老師也看不懂的範疇，希望我們長大後有機會練成更高深的武功再回來挑戰挑戰。

捌、參考資料及其他：

- 1 國中數學第六冊，康軒出版社。民國 102 年。
- 2 羅見金（民 82）。科克曼女生問題。台北市：九章出版社。
- 3 李彥韻（民 86）。幻方研究。37 屆全國科展高中組第三名，台中一中。
- 4 拉丁方陣。維基百科，2012 年 9 月 19 日。<http://zh.wikipedia.org/wiki/Sudoku>
- 5 Brendan D.Mckay、Eric Rogoyski (1995)。LATIN SQUARES OF ORDER 10。

【評語】 080411

從生活情境出發，形式有意義的探究動機，值得肯定。另外，此件作品主要應用「類拉丁方陣」概念解決同色不相鄰有多少種排列方法，相當有趣。探討過程深入且細緻，所展現的成果有可看性，是一件不錯的作品。