中華民國第55屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

080410

「乘」先啟後-以乘法探討數字方塊

學校名稱：國立科學工業園區實驗高級中學(附設國小)

作者：	指導老師：
小六 黃柏翰 小六 王榆承 小六 盧佳希	林裕翔

關鍵詞：乘層方塊、結束數字、層數

摘要

本研究主要在探討如何運用乘法計算數字方塊，我們稱它為「乘層方塊」。藉由訂定乘層方塊的遊戲規則，探討乘層方塊的層數還有結束數字的秘密，並期望能作為國小乘法課程上有趣的教學活動。

首先，我們定義乘層方塊的遊戲規則，並驗證遊戲規則是否可行。接著把數字分成奇數和偶數並組合成不同的類型計算，總共有 20 種類型，在不同類型中又組成不同的排列，總共有 1540 種排列。每個組員分別計算不同類型和不同排列，做完後再互相檢驗有無缺漏，接著針對計算結果加以統計和分析。

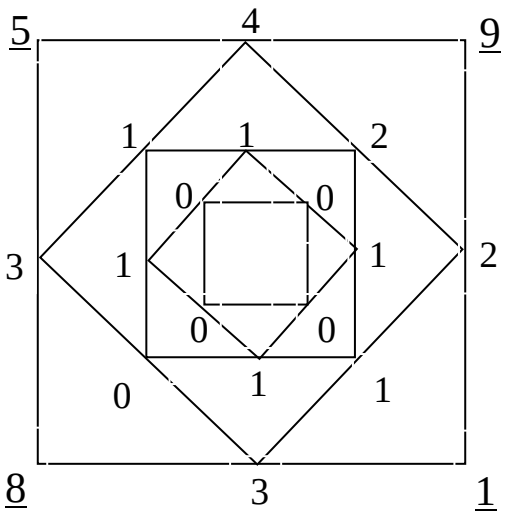
研究結果發現，我們訂定的乘層方塊遊戲規則是可行的，依照規則乘層方塊會有收斂的情形，而收斂的結束數字只有 0、1、5、6，其中以 0 的數量最多。層數方面，乘層方塊的層數最多能達到 7 層，而 4 層的數量最多。結束數字 0 最多與層數 4 層最多的原因在於排列中出現 0 或 5。此外，研究發現乘層方塊遊戲規則僅適用於四邊形。

規劃未來使用除法、加法並使用在不同多邊形來進行研究，期望能得到更豐富的成果。

壹、研究動機

加減乘除的運算在國小階段的數學佔了非常重要的角色。因為加減乘除的計算是最貼近我們生活的數學運算規則，凡是買賣、增加、損失、成長…等計算都跳脫不了加減乘除的運算。但是在學習加減乘除的過程，老師往往發下一張張計算題練習卷，讓我們不斷的反覆計算來熟悉運算規則，這樣的過程雖然能增進我們的「數感」及「計算速度」，但相對的也較為無趣。如果我們能利用加減乘除設計一個遊戲或活動，那麼必定能讓數學變得有趣，造福學弟學妹們並且提供老師們一個好玩的數學教學活動，達到寓教於樂的目的，相信大家也會更喜歡數學。

在一次數學遊戲課程中，接觸到「數字方塊」(第 34 屆全國中小學科學展覽國小數學組)。數字方塊規則是：先將四個正數寫在方塊的四個角，再將相鄰兩數的差寫在四條邊的中點，再將四個點連成方塊，按照如此的運算規則繼續計算，最後方塊的四個邊會變成 0(如右圖)。



我們親自體驗數字方塊的遊戲規則，發現無論四個數字怎麼變，最後四個數字一定會收斂為 0。也發現當四個數字越大時，數字方塊層數不一定就越多。我們認為數字方塊不僅能配合數學課的減法單元，更能讓同學在操作的過程中探討如何排列出最多層的數字方塊，增加許多純計算以外的娛樂。因此，我們想探究數字方塊是否有其它的玩法。

接著，我們尋找數字方塊的相關研究，發現第 35 屆全國中小學科展國小數學組-從數字方塊到數字八卦、第 35 屆全國中小學科展高中數學組-方塊數論、第 45 屆全國中小學科展國中數學組-層出不窮及第 50 屆全國中小學科展國小組—數字方尋極限~數字方塊擴展層數極限…等是以數字方塊為基礎做更深入的探討。以上研究皆運用減法規則探討數字方塊，尚未發現用其他的運算規則來探討。因此，運用減法以外規則來玩數字方塊成了我們努力的目標。

首先我們嘗試了以乘法來玩數字方塊，雖然知道乘積會越乘越大並且不會有收斂(註一)的情況產生，但我們深信一定有「秘密」藏在裡頭。果然，我們在進行乘法的過程中發現「乘積」的個位數字變化似乎有「秘密」存在，方塊在乘法的運算過程會同時出現 4 個相同的個位數字，雖然結束時的 4 個個位數字不一定是 0，但是我們稱它為一種收斂情形，於是開啟了我們的研究之路。

我們以數字方塊為藍圖，期望能以乘法規則設計出新穎的數學遊戲—乘層方塊，讓學弟妹們在遊戲中學習數學並提供辛苦的老師們一個有趣的教學活動。跟著我們一同暢遊「乘層方塊」吧！

(註一：數學上的收斂指的是**極限**，即為一個數列，使得 $\lim_{n\to\infty} a_n = L$，其中 *L* 為一確定的常數，亦即數列 $\{a_n\}$ 隨著 *n* 的增加而趨近於 *L*。而本研究的”收斂”指的是計算的結果變成同一個數字。)

貳、研究目的

我們利用乘法來運算數字方塊並訂定乘層方塊的遊戲規則，接著探討乘層方塊的層數及乘層方塊結束時的數字(結束數字)是否有規律可循？之後再嘗試其它多邊形是否適用乘層方塊的遊戲規則。以下是我們的研究目的：

一、 訂定乘層方塊的遊戲規則。

二、 探討乘層方塊的層數及層數數量為何？

三、 探討乘層方塊的結束數字及數量為何？

四、 探討乘層方塊遊戲規則是否適用於其他多邊形？

參、文獻探討

我們搜尋的文獻中，大多是以減法規則的數字方塊做延伸研究。

序號	名 稱	來 源	作 者	研 究 方 向	內容分析
1	數字方塊	第 34 屆全國中小學科展國小數學組	賴緯綸、林昀緯、方柏翔、蔡淑英、吳慎芬	探討數字方塊的層數。	利用減法探討數字方塊
2	從數字方塊到數字八卦	第 35 屆全國中小學科展國小數學組	賴緯綸、林昀緯、陳昱臻、方柏翔、蔡淑英、吳慎芬	將第 34 屆的四角數字方塊轉換成八角數字方塊探討八角方塊的層數	利用減法探討數字方塊
3	方塊數論	第 35 屆全國中小學科展高中數學組	張建祥、王重凱、林漢良、王玲玉	證明數字方塊的任意四個數字(可正、可負、可重複)，經運算後結果四個中點都會是零。	利用減法探討數字方塊
4	層出不窮	第 45 屆全國中小學科展國中數學組	武良翰、郭梵均、黃亭捷、袁盛博、陳世恩、蔡秀芬	1. 運用由內向外推展多層數字方塊的原則 2. 研究結果指出任意四個正整數所形成的數字方塊的總層數是有限的。	利用減法探討數字方塊
5	數字方塊尋極限~數字方塊擴展層數極限	第 50 屆全國中小學科展國小數學組	唐麒鈞、葉沛鎧、林華葵、李品琦	主要在探討在特定區間內數字方塊的極限	利用減法探討數字方塊

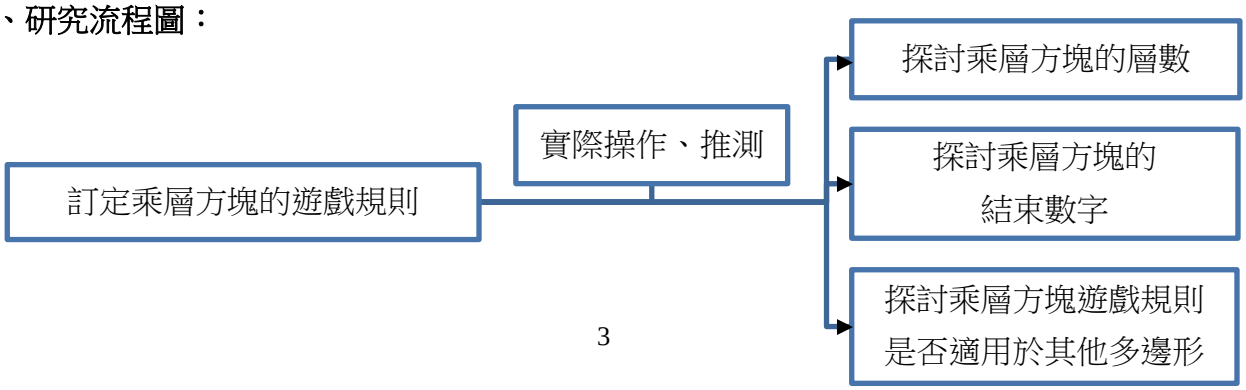
綜合以上文獻，我們並未發現有文獻運用乘法規律來研究數字方塊，因此，我們打算以乘法規則來研究乘法數字方塊--乘層方塊。

肆、研究設備與器材

紙、筆、Excel 軟體、Word 軟體

伍、研究過程與方法

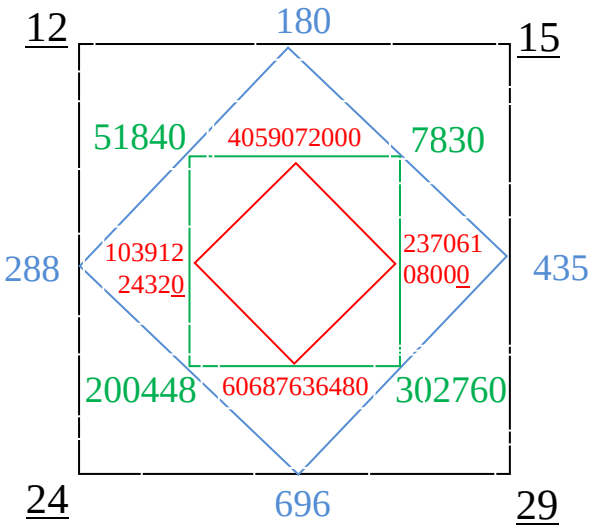
一、研究流程圖：



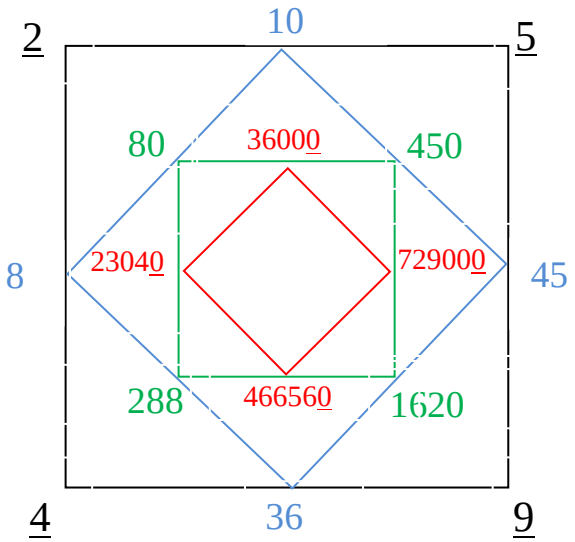
二、定義乘層方塊遊戲規則--

一開始我們任意挑選四個數字放在乘層方塊的四個角作乘法運算，而相鄰兩角的數字乘積必然是越乘越大，沒有收斂的情形，但我們在相乘的過程中發現乘層方塊的 4 邊中點會「同時」出現相同的數字，例如 4 邊中點同時出現的個位數字皆為 0、4 或 9...等。我們試了好幾組發現都有相同的情況，因此我們定義**「當內層方塊 4 個乘積的 4 個中點的個位數字相同時，表示乘層方塊收斂成某數，此時乘層方塊結束。」**

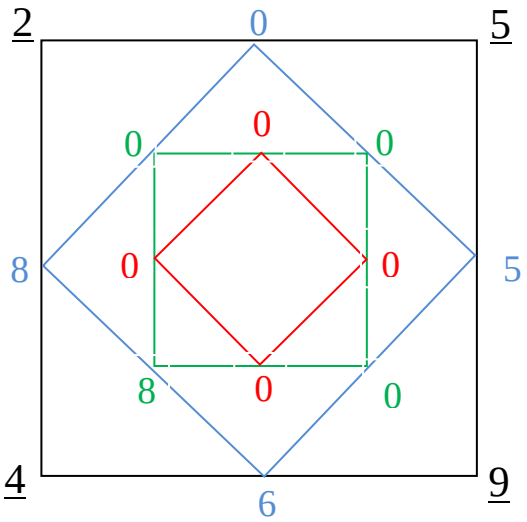
另外，我們發現，因為只看乘積的個位數字，所以我們只需要用個位數字來研究即可。例如(12.15.23.29) <圖 1-1>的層數與(2.5.3.9) <圖 1-2>的層數相同，而在做乘層方塊的過程也只需要保留乘積的個位數字來繼續計算，層數也是相同，如<圖 1-3>。



<圖 1-1>



<圖 1-2>

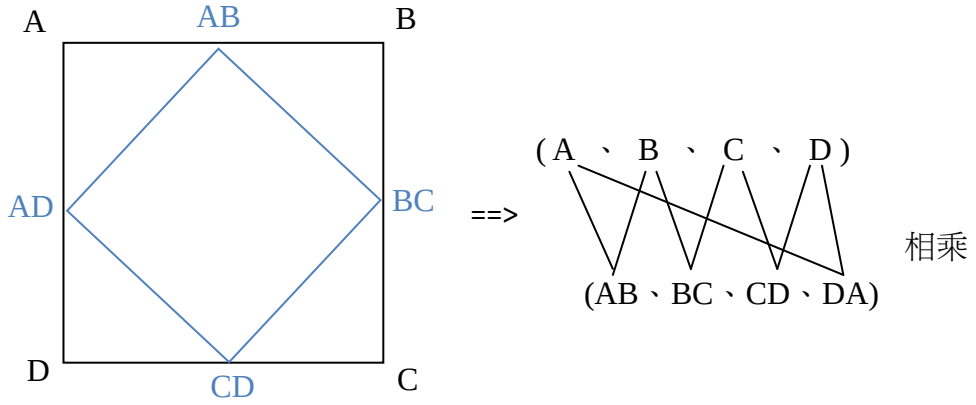


<圖 1-3>

定義乘層方塊遊戲規則為：

1. 任意選取 4 個個位數字(0~9)寫在乘層方塊的四個角，
2. 將相鄰兩數相乘，且僅保留乘積的個位數放在四條邊的中間，
3. 再連成一個新的方塊，依照先前的步驟持續操作，
4. 直到四條邊中點的數字相同即結束。如(圖 1-3)為 4 層乘層方塊範例。

為了方便紀錄及節省計算空間，我們將乘層方塊上的數字排列轉換成(A.B.C.D)的形式，如下(圖 2)。



(圖 2)

三、名詞定義

- **D**=different：代表相異的數字；
- **S**=same：代表相同的數字；
- **O**=odd：代表奇數；
- **E**=even：代表偶數。

  範例：類型 2SO+2DE 表示有兩個相同奇數+兩個相異偶數的組合，如(2.3.4.3)。
- 結束數字：乘層方塊結束時的四個相同的數字
- 層數：乘層方塊計算至結束時的步驟數。一開始為第 1 層。
- 循環排列：指乘層方塊上的數字 A、B、C、D 經順時針或逆時針旋轉後，數字的順序一樣。

  範例：(A.B.C.D)、(B.C.D.A)、(C.D.A.B)、(D.A.B.C)為同一種循環排列，而(A.B.C.D)與(A.B.D.C)、(A.C.B.D)為相異循環排列

四、將個位數字分類

我們將個位數字 0~9 分成**奇數**(1、3、5、7、9)與**偶數**(0、2、4、6、8)兩大類來探討乘層方塊，再將過程中的發現用來推測其他類型的層數與結束數字。將個位數字分成奇數與偶數的原因是--個位數字可分為「奇數」和「偶數」兩大類，而九九乘法表裡 1 和 9、3 和 7、2 和 8、4 和 6 的倍數的個位數字有對稱的規律，例如：

3 的倍數是 3、 6、 9、12、15、18、21、24、27與

7 的倍數是 63、56、49、42、35、28、21、14、7；

2 的倍數 2、 4、 6、 8、10、12、14、16、18與

8 的倍數 72、64、56、48、40、32、24、16、 8。

5 的倍數的個位數字是 5、10、15、20、25、30、35、40、45。

我們猜想這樣的規律是否會對乘層方塊的層數有所影響？因此，我們將奇數、偶數分開及混合成不同的類型來探究乘層方塊？

我們分類的類型有 4DO、4DE、4SO、4SE、2DO+2DE、2SE+2DO、2SO+2SE、2SO+2DO、2SO+2DE、2SE+2DE、2SO+2SO、2SE+2SE、3DO+E、3DE+O、3SO+O、3SO+E、3SE+O、3SE+E、O+E+2SE、O+E+2SO 共 20 種類型，我們將這 20 種類型分別製作成表格並與隊員相互檢驗計算結果是否有錯誤，最後再一同分析所觀察到的規律。

另外，同一種類型會有不同的排列，而有些排列是相同的循環排列，做出來的層數和結束數字會相同，所以只要做其中一種排列即可。例如(A.B.C.D)、(B.C.D.A)、(C.D.A.B)、(D.A.B.C)為同一種循環排列；而(A.B.C.D)與(A.B.D.C)、(A.C.B.D)為相異循環排列，雖然結束數字會相同，但層數不一定相同。其他類型的排列也依照同樣的作法來計算。<表 1>是利用排列組合計算各類型排列的數量及總和。

<表 1>　各類型排列的數量及總和

類 型	排 列	計　算	數量
4SO	AAAA	$C_1^5 = 5$	5
4SE	AAAA	$C_1^5 = 5$	5
4DO	ABCD ACDB ACBD	$C_4^5 \times \frac{4!}{4} \div 2 = 5 \times 6 \div 2 = 15$	15
4DE	ABCD ACDB ACBD	$C_4^5 \times \frac{4!}{4} \div 2 = 5 \times 6 \div 2 = 15$	15
2DO+2DE	奇偶奇偶 奇奇偶偶	$C_2^5 \times C_2^5 \times \frac{4!}{4} \div 2 = 10 \times 10 \times 6 \div 2 = 300$	300
2SE+2DO	ABAC	$C_2^5 \times C_1^5 \times 2! \div 2 = 10 \times 5 \times 2 \div 2 = 50$	100
	AABC	$C_1^5 \times C_2^5 \times \frac{3!}{3} \div 2 = 5 \times 10 \times 2 \div 2 = 50$	
2SO+2DO	ABAC	$C_1^5 \times C_2^4 \times 2! \div 2 = 5 \times 6 \times 2 \div 2 = 30$	60
	AABC	$C_1^5 \times C_2^4 \times \frac{3!}{3} \div 2 = 5 \times 6 \times 2 \div 2 = 30$	

2SO+2DE	ABAC	$C_1^5 \times C_2^5 \times 2! \div 2 = 5 \times 10 \times 2 \div 2 = 50$	100
	AABC	$C_1^5 \times C_2^5 \times \frac{3!}{3} \div 2 = 5 \times 10 \times 2 \div 2 = 50$	
2SE+2DE	ABAC	$C_1^5 \times C_2^4 \times 2! \div 2 = 5 \times 6 \times 2 \div 2 = 30$	60
	AABC	$C_1^5 \times C_2^4 \times \frac{3!}{3} \div 2 = 5 \times 6 \times 2 \div 2 = 30$	
2SO+2SO	AABB	$C_2^5 = 10$	20
	ABAB	$\mathrm{C}_2^5 = 10$	
2SE+2SE	AABB	$C_2^5 = 10$	20
	ABAB	$\mathrm{C}_2^5 = 10$	
2SO+2SE	AABB	$C_1^5 \times C_1^5 = 5 \times 5 \equiv 25$	50
	ABAB	$C_1^5 \times C_1^5 = 5 \times 5 \equiv 25$	
3DO+E	ABCD	$C_3^5 \times C_1^5 \times \frac{4!}{4} \div 2 = 10 \times 5 \times 6 \div 2 = 150$	150
3DE+O	ABCD	$C_3^5 \times C_1^5 \times \frac{4!}{4} \div 2 = 10 \times 5 \times 6 \div 2 = 150$	150
3SO+O	AAAB	$C_1^5 \times C_1^4 = 5 \times 4 = 20$	20
3SO+E	AAAB	$C_1^5 \times C_1^5 = 5 \times 5 = 25$	25
3SE+O	AAAB	$C_1^5 \times C_1^5 = 5 \times 5 = 25$	25
3SE+E	AAAB	$C_1^5 \times C_1^4 = 5 \times 4 = 20$	20
O+E+2SO	ABCC	$C_1^5 \times C_1^5 \times C_1^4 \times \frac{3!}{3} \div 2 = 5 \times 5 \times 4 \times 2 \div 2 = 100$	200
	ACBC	$C_1^5 \times C_1^5 \times C_1^4 \times 2! \div 2 = 5 \times 5 \times 4 \times 2 \div 2 = 100$	
O+E+2SE	ABCC	$C_1^5 \times C_1^5 \times C_1^4 \times \frac{3!}{3} \div 2 = 5 \times 5 \times 4 \times 2 \div 2 = 100$	200
	ACBC	$C_1^5 \times C_1^5 \times C_1^4 \times 2! \div 2 = 5 \times 5 \times 4 \times 2 \div 2 = 100$	
		合　計	1540

陸、結果與討論

一 、 訂定乘層方塊的遊戲規則

經過一千五百四十組的挑戰及驗證，我們計算的乘層方塊皆會同時出現 4 個相同數字(A.A.A.A)的情況，尚未出現例外。但是我們發現，如果按照我們先前定義「當內層方塊 4 個乘積的 4 個中點的個位數字相同時，表示乘層方塊收斂成某數，此時乘層方塊結束。」的遊戲規則，乘層方塊會出現**「假性結束」**。例如(9.9.9.9)便是「假性結束」的狀態，因為(9.9.9.9)可以繼續做下一層變成(1.1.1.1)，而(1.1.1.1)繼續計算會以(1.1.1.1)一直重複，所以(1.1.1.1)才是乘層方塊真正的結束。其他的假性結束狀態還有(2.2.2.2)、(3.3.3.3)、(4.4.4.4)、(7.7.7.7)、(8.8.8.8)、(9.9.9.9)。因此我們要修正我們假設的乘層方塊遊戲規則，規則訂定如下：

1.任意取四個個位數字(0~9)寫在乘層方塊的四個角。

2.將相鄰兩數相乘，而且僅保留乘積的個位數字放在四條邊的中點。

3.再將四條邊的中點連成一個新的方塊，並依照先前的步驟持續操作。

4.直到四條邊中點的數字不斷重複即表示乘層方塊結束。例如(0.0.0.0)、(1.1.1.1)、(5.5.5.5)、(6.6.6.6)

研究證實我們的假設是可行的。而我們猜想”除法”及”加法”應該也可以發展出一套遊戲規則來玩。因為除法可看成「乘法的逆運算」或解釋為「重複的減法」；而加法可看成「減法的逆運算」或解釋為「乘法的基礎」。目前我們有定義除法的遊戲規則，但礙於時間的關係，我們將它們訂定為我們之後完成的目標。

二 、 乘層方塊的層數

<討論二之一> 乘層方塊排列中的 0 和 5

(一) 起始的乘層方塊排列中只要出現「0」層數不會超過 4 層。因為任何數乘以 0 都會變成 0，排列中做最多乘 4 次會乘完其他的數字，造成乘層方塊結束，如<表 2-1>。

<表 2-1>

類型	排列	計算過程	說明
4DE	(A.B.C.D)	**(0.4.6.8)**->(0.4.8.0)->(0.2.0.0)->(0.0.0.0)	起始的乘層方塊排列中只要出現「0」層數不會超過 4 層。
2SO+2SE	(A.A.B.B)	**(9.9.0.0)**->(1.0.0.0)->(0.0.0.0)	
2DO+2SE	(A.B.A.C)	(**0.3.0.5)**->(0.0.0.0)	

(二)乘層方塊中出現「0」

1. 當出現 2 個 0，A、B 為任意數且 A、B≠0 時，(0.A.0.B)**再 1 層**必定結束；
2. 當出現 2 個 0，A、B 為任意數且 A、B≠0 時，(0.0.A.B)**再 2 層**必定結束；
3. 當出現 3 個 0，A 為任意數且 A≠0 時，則(0.0.0.A)**再 1 層**就結束，如<表 2-2>。

<表 2-2>

類型	排列	計算過程	說明
O+E+2SE	(A.C.B.C)	**(5.0.6.0)->(0.0.0.0)**	當出現 2 個 0，A、B 為任意數且 A、B≠0 時，(0.A.0.B)再 1 層必定結束
		(5.0.8.0)->(0.0.0.0)	
		(5.0.2.0)->(0.0.0.0)	
2SE+2SE	(A.A.B.B)	**(0.0.8.8)->(0.0.4.0)->(0.0.0.0)**	當出現 2 個 0，A、B 為任意數且 A、B≠0 時，(0.0.A.B)再 2 層必定結束
2DO+2DE	奇偶奇偶	(1.2.5.8)->**(2.0.0.8)->(0.0.0.6)->(0.0.0.0)**	
2DO+2SE	(A.B.A.C)	(4.5.4.9)->**(0.0.6.6)->(0.0.6.0)->(0.0.0.0)**	
3SE+E	(A.A.A.B)	**(0.0.0.6)->(0.0.0.0)**	當出現 3 個 0，A 為任意數且 A≠0 時，則(0.0.0.A)再 1 層就結束
2DO+2SE	(A.B.C.A)	(6.3.5.6)->(8.5.0.6)->**(0.0.0.8)->(0.0.0.0)**	
2SE+2DE	(A.B.A.C)	(2.0.2.8)->(0.0.6.6)->**(0.0.6.0)->(0.0.0.0)**	

(三)起始的乘層方塊排列中只要出現「5」層數不會超過 4 層。我們認為是因為奇數乘以 5，個位數字必定為 5，四個數字很快會相同；而偶數乘以 5，個位數字必定等於 0，而 0 會加速乘層方塊結束，如<表 2-3>

<表 2-3>

類型	排列	計算過程	說明
4DO	(A.B.C.D)	**(1.3.5.7)**->(3.5.5.7)->(5.5.5.1)->(5.5.5.5)	起始的乘層方塊排列中只要出現「5」層數不會超過 4 層。
2SO+2SE	(A.A.B.B)	**(5.5.2.2)**->(5.0.4.0)->(0.0.0.0)	
2SO+2DE	(A.B.A.C)	**(5.6.5.8)**->(0.0.0.0)	

(四)乘層方塊中出現「5」。

1. 當出現 2 個 5，A、B 為奇數且 A、B≠5 時，(5.A.5.B)再 1 層就結束；
2. 當出現 2 個 5，A、B 為偶數且 A、B≠5 時，(5.A.5.B)再 1 層就結束。
   但(5.A.5.B)僅會出現在起始乘層方塊，計算過程中不會出現此種排列，故最多 2 層。
3. 當出現 2 個 5，A、B 為奇數且 A、B≠5 時，(5.5.A.B)再 2 層就結束；
4. 當出現 2 個 5，A、B 為偶數且 A、B≠5 時，(5.5.A.B)再 2 層就結束；
5. 當出現 3 個 5，A 為奇數且 A≠5 時，(5.5.5.A)再 1 層就結束。因為 5 乘以奇數個位數字是 5，所以再 1 層就結束；
6. 當出現 3 個 5，A 為偶數且 A≠5 時，(5.5.5.A)再 3 層就結束。因為 5 乘以偶數個位數字是 0 變成(5.5.0.0)，如上述要再 2 層才會結束。

但(5.5.5.A)僅可能出現在起始乘層方塊，過程中不會出現此種排列，所以此類型最多 4 層，如<表 2-4>。

<表 2-4>

類型	排列	計算過程	說明
2SO+2DO	(A.B.A.C)	**(5.1.5.3)->(5.5.5.5)**	出現 2 個 5，A、B 為奇數且 A、B≠5 時，(5.A.5.B)再 1 層就會結束
2SO+2SO	(A.B.A.B)	**(3.5.3.5)->(5.5.5.5)**	
2SO+2DE	(A.B.A.C)	**(5.2.5.4)->(0.0.0.0)**	出現 2 個 5，A、B 為偶數且 A、B≠5 時，(5.A.5.B)再 1 層就會結束
2SO+2SE	(A.B.A.B)	**(5.2.5.2)->(0.0.0.0)**	
2SO+2DO	(A.B.A.C)	(1.3.1.5)->**(3.3.5.5)->(9.5.5.5)->(5.5.5.5)**	當出現 2 個 5，A、B 為奇數且 A、B≠5 時，(5.5.A.B)再 2 層就會結束
2SO+2DO	(A.A.B.C)	(3.3.5.7)->**(9.5.5.1)->(5.5.5.9)->(5.5.5.5)**	
2SO+2DO	(A.A.B.C)	(7.7.1.5)->**(9.7.5.5)->(3.5.5.5)->(5.5.5.5)**	
O+E+2SO	(A.C.B.C)	(5.7.4.7)->**(5.8.8.5)->(0.4.0.5)->(0.0.0.0)**	當出現 2 個 5，A、B 為偶數且 A、B≠5 時，(5.5.A.B)再 2 層就會結束
3DO+E	(A.B.C.D)	(3.5.7.8)->**(5.5.6.4)->(5.0.4.0)->(0.0.0.0)**	
O+E+2SO	(A.B.C.C)	(1.8.5.5)->**(8.0.5.5)->(0.0.5.0)->(0.0.0.0)**	
2SO+2DO	(A.B.A.C)	(1.3.5.3)->(3.5.5.3)->**(5.5.5.9)->(5.5.5.5)**	當出現 3 個 5，A 為奇數且 A≠5 時，(5.5.5.A)再 1 層就會結束。
2SO+2DO	(A.A.B.C)	(5.5.7.9)->**(5.5.3.5)->(5.5.5.5)**	
3SO+O	(A.A.B.C)	(3.3.3.5)->(9.9.5.5)->**(1.5.5.5)->(5.5.5.5)**	
3SO+E	(A.A.B.C)	**(5.5.5.2)->(5.5.0.0)->(5.0.0.0)->(0.0.0.0)**	當出現 3 個 5，A 為偶數且 A≠5 時，(5.5.5.A)再 3 層就會結束。

我們認為 5 和 0 就像乘層方塊層數的剋星，各類型排列中如果出現 5 或 0 會加速乘層方塊結束，最多到 4 層。

<討論二之二>　乘層方塊各類型層數的個數

我們將乘層方塊各類型層數數量整理成<表 2-5>，發現層數數量最多的是 4 層，共 701 個；其次是 7 層，有 308 個；層數數量最少的是 1 層，共 4 個。

(一) 層數 4 層的數量最多，我們認為是因為只要起始排列中有 0 或 5，則層數最多 4 層，而排列中出現 0 或 5 又占多數，所以數量會最多；

(二) 層數 1 層有 4 個，分別是(0.0.0.0)、(1.1.1.1)、(5.5.5.5)、(6.6.6.6)四種。

<表 2-5>　乘層方塊各類型層數

類型＼層數(層)	1	2	3	4	5	6	7	數量
4SO	2	1	2					5
4SE	2	1	2					5
4DO			1	12		2		15
4DE			1	12		2		15
2SO+2SO		5	5	6		4		20
2SE+2SE		5	5	6		4		20
2SO+2DO		6	6	24	4	4	16	60
2SE+2DE		6	6	24	4	4	16	60
2SE+2DO		10	10	32	12	4	32	100
2SO+2DE		10	10	32	12	4	32	100
2SO+2SE		13	17	12		8		50
2DO+2DE			56	152	8	36	48	300
3SO+O		4		4	4		8	20
3SE+E		4		4	4		8	20
3SO+E				13	4		8	25
3SE+O		7	2	4	4		8	25
3DO+E				112	2	16	20	150
3DE+O		7	14	85	4	16	24	150
O+E+2SO			1	116	18	17	48	200
O+E+2SE		30	22	67	17	16	48	200
總　和	4	118	163	701	93	153	308	1540

<討論二之三>　乘層方塊的最高層數

(一) 乘層方塊的最高層數為 **7 層**，見<表 2-5>。有別於第 50 屆數字方塊尋極限中最高層數可達 13 層。

(二) 4SO、4SE 的最高層數是 3 層；4DO、4DE、2SO+2SE、2SO+2SO、2SE+2SE、3SO+O 這六種類型的最高層數是 6 層；其餘類型皆有到 7 層。我們認為，如果排列的數字結構較單一則層數較少，如 4SO、4SE<表 2-6>；亦或是出現 0、5 時會使數字變得單一，所以層數較少，結束得較快；而 2SO+2DO、2SE+2DE…等類型排列因為奇偶數的排列、奇數是否相異、偶數是否相異與類型中奇偶數的個數…等較為複雜，才能出現 6 層或 7 層。這也讓我們聯想到自然課所學的，生物愈多樣才能讓環境愈平衡且長久。

<表 2-6>

類型	排列	計算過程	說明
4SO	(A.A.A.A)	(1.1.1.1)	排列的數字愈單一則出現的層數較少。
		(5.5.5.5)	
		(9.9.9.9)->(1.1.1.1)	
		(7.7.7.7)->(9.9.9.9)->(1.1.1.1)	
		(3.3.3.3)->(9.9.9.9)->(1.1.1.1)	
4SE	(A.A.A.A)	(0.0.0.0)	
		(6.6.6.6)	
		(4.4.4.4)->(6.6.6.6)	
		(2.2.2.2)->(4.4.4.4)->(6.6.6.6)	
		(8.8.8.8)->(4.4.4.4)->(6.6.6.6)	

<討論二之四>　乘層方塊各類型層數的個數對稱

整理<表 2-5>，我們發現<4SO、4SE>、<4DO、4DE>、<2SO+2SO、2SE+2SE>、<2SO+2DO、2SE+2DE>、<2SE+2DO、2SO+2DE >、<3SO+O、3SE+E>這六組在層數的個數上**完全對稱**。

進一步探討原因，我們認為：

1. <4SO、4SE>、<4DO、4DE>、<2SO+2SO、2SE+2SE>、<2SO+2DO、2SE+2DE>、<2SE+2DO、2SO+2DE>、<3SO+O、3SE+E>這六組類型不僅彼此排列的數量相同且在編碼上奇數與偶數是對稱的<表 2-7>，所以相對應類型乘積的個位數字種類的個數會相同，造成層數的數量會相同。例如<2SO+2DO、2SE+2DE>，2SO+2DO 乘積的個位數字只有 0、2、4、6、8 五種；2SE+2DE 乘積的個位數字只有 1、3、5、7、9 五種。

<表 2-7>

相對應類型	4 S O 4 S E	4 D O 4 D E	2 S O + 2 S O 2 S E + 2 S E	2 S O + 2 D O 2 S E + 2 D E	2 S E + 2 D O 2 S O + 2 D E	3 S O + O 3 S E + E

2. 其他種類型如 2SO+2SE 和 2DO+2DE 沒有編碼相對稱的類型；<3DE+O、3DO+E>、<O+E+2SO、O+E+2SE>…等類型雖然編碼對稱，但是奇數偶數參雜，乘積的個位數字種類個數不同，所以數量上沒有對稱情形。例如<3DE+O、3DO+E>，3DE+O 乘積的個位數字有 0、2、4、6、8 五種；3DO+E 乘積的個位數字有 0、1、2、3、4、5、6、7、8、十種。

這項結果呼應了我們將數字分為奇數與偶數兩類來討論的猜想。

<討論二之五>　反推乘層方塊類型 3DO+E、3DE+O、3SO+O、3SO+E、3SE+O、3SE+E、O+E+2SO、O+E+2SE 的層數

(一) 運算過程中，我們發現若 3DO+E、3DE+O、3SO+O、3SO+E、3SE+O、3SE+E、O+E+2SO、O+E+2SE 八種類型的排列中若**沒有 0 或 5**，經過一次運算後的類型 C1 (Count 1st)會變成 4DE、2SE+2DE、2SE+2SO、2DO+2DE、2SE+2SE、2SO+2SO 六種類型<表 2-8>，所以我們只要將「一次運算」後的結果 C1 對照之前的資料，再將所得到的層數加 1 層，便是乘層方塊的層數。如此一來，我們就不用將全部的計算過程寫出來了。

我們發現，在經過一次運算之後的類型 C1 中，可到達的最高層數是 6 層，並不會出現 7 層的 C1，所以 3DO+E…等八種類型最高層只能到達 7 層。

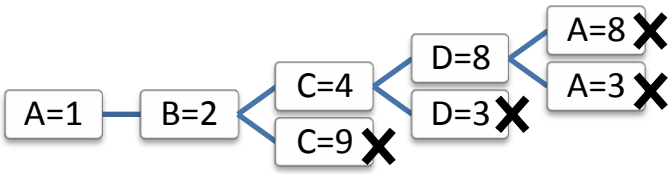
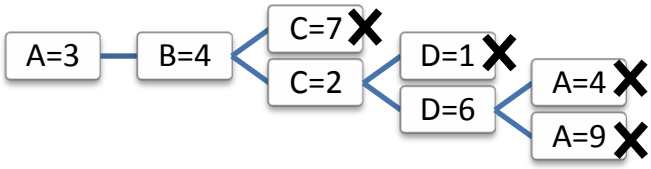
<表 2-8>

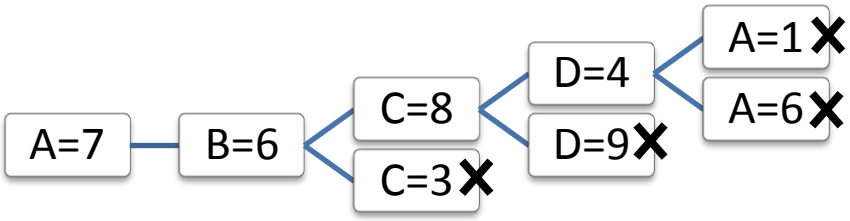
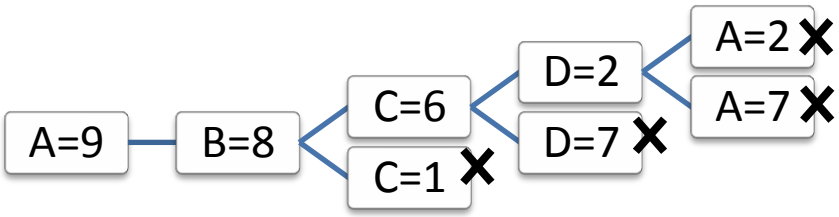
類型	排列	經過一次運算後的類型 C1	可達 C1 中的最高層數	C1+1 總層數
3DO+E	(A.B.C.D)	2DO+2DE	6	7
3DE+O	(A.B.C.D)	4DE	6	7
	(A.B.C.D)	2SE+2SE	6	7
	(A.B.C.D)	2SE+2DE	5	6
3SO+O	(A.A.A.B)	2SO+2SO	6	7
3SO+E	(A.A.A.B)	2SE+2SO	6	7
3SE+O	(A.A.A.B)	2SE+2SE	6	7
3SE+E	(A.A.A.B)	2SE+2SE	6	7
O+E+2SO	(A.B.C.C)	2DO+2DE	6	7
	(A.C.B.C)	2SE+2SO	6	7
O+E+2SE	(A.B.C.C)	4DE	6	7
	(A.B.C.C)	2SE+2SE	6	7
	(A.B.C.C)	2SE+2DE	6	7
	(A.C.B.C)	2SE+2SE	6	7

(二) 反推法：對照<表 2-5>，C1 中僅 2DO+2DE、2SE+2DE 可達 7 層，其餘最高層數皆為 6 層，所以我們只需要將 2DO+2DE、2SE+2DE 中 7 層的排列(共 64 種)反推「是否能形成 3DO+E、O+E+2SO、O+E+2SE 三種類型」，便能知道是否可能突破 7 層。因為 3DE+O 經過一次運算變成 2SE+2DE 類型的最高層數僅達 5 層，因此不在反推的範圍之內。反推時須顧慮奇偶數個數及相同的循環排列。範例如<表 2-9>考慮奇偶數個數、<表 2-10>考慮循環排列。

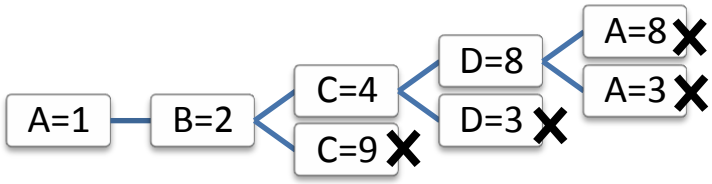
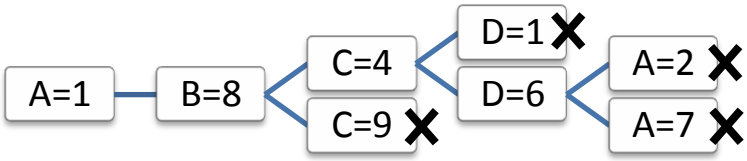
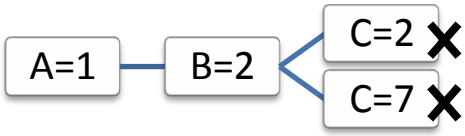
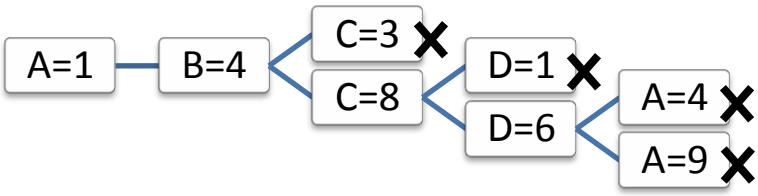
反推結果：2DO+2DE、2SE+2DE 中 7 層的排列皆無法反推形成 3DO+E、O+E+2SO、O+E+2SE 三種類型，因此仍無法突破 7 層。

<表 2-9>　**2SE+2DE**(2.8.2.4)反推 **3DE+O**(考慮奇數、偶數個數)

<table>
<tr><th colspan="3">3DE+O -----經過一次運算----> 2SE+2DE</th></tr>
<tr><td>說明</td><td colspan="2">由 2SE+2DE 中層數最高 7 層(2.8.2.4)反推至類型 3DE+O (A.B.C.D)。
因為 3DE+O 僅有一個奇數，故假設 A=1、A=3、A=7、A=9
(A.B.C.D)←反推←(2.8.2.4)：AxB=>2；BxC=>8；CxD=>2；DxA=>4</td></tr>
<tr><td>情況一
A=1
反推法
流程圖</td><td colspan="2"> 
</td></tr>
<tr><td rowspan="4">情況一
說明</td><td>A x B => 2
1 x 2 => 2</td><td>因為只能有一個奇數，所以假設 A=1 則 B=2</td></tr>
<tr><td>B x C => 8
2 x 4 => 8
2 x 9 => 8</td><td>當 B=2 時，
1. 若 C=4，符合 3DE+O
2. 若 C=9 則出現 2 個奇數，不符合 3DE+O</td></tr>
<tr><td>C x D => 2
4 x 3 => 2
4 x 8 => 2</td><td>當 C=4 時，
1. 若 D=3 則出現 2 個奇數，不符合 3DE+O
2. 若 D=8，符合 3DE+O</td></tr>
<tr><td>D x A => 4
8 x 3 => 4
8 x 8 => 4</td><td>當 D=8 時，
A=3，出現 2 個奇數；或 A=8，但是 A 必須=1，前後不相同，也不符合 3DE+O</td></tr>
<tr><td>情況二
A=3
反推法
流程圖</td><td colspan="2"> 
</td></tr>
<tr><td rowspan="4">情況二
說明</td><td>A x B =>2
3 x 4 =>2</td><td>因為只能有一個奇數，設 A=3 則 B=4</td></tr>
<tr><td>B x C =>8
4 x 7 =>8
4 x 2 =>8</td><td>當 B=4 時，
1. 若 C=7，則出現 2 個奇數，不符合 3DE+O
2. 若 C=2，符合 3DE+O</td></tr>
<tr><td>C x D =>2
2 x 1 =>2
2 x 6 =>2</td><td>當 C=2 時，
1. 若 D=1 則出現 2 個奇數，不符合 3DE+O
2. 若 D=6，符合 3DE+O</td></tr>
<tr><td>D x A =>4
6 X 4 =>4
6 x 9 =>4</td><td>當 D=6 時，
A=9，出現 2 個奇數；或 A=4，但是 A 必須=3，前後不相同，也不符合 3DE+O</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>情況三
A=7
反推法
流程圖</td><td colspan="2"> 
</td></tr>
<tr><td rowspan="4">情況三
說明</td><td>A x B =>2
7 x 6 =>2</td><td>因為只能有一個奇數，設 A=7 則 B=6</td></tr>
<tr><td>B x C =>8
6 x 3 =>8
6 x 8 =>8</td><td>當 B=6 時，
1. 若 C=3 則出現 2 個奇數，不符合 3DE+O
2. 若 C=8，符合 3DE+O</td></tr>
<tr><td>C x D =>2
8 x 4 =>2
8 x 9 =>2</td><td>當 C=8 時，
1. 若 D=4，符合 3DE+O
2. 若 D=9 則出現 2 個奇數，不符合 3DE+O</td></tr>
<tr><td>D x A=>4
4 x 1 =>4
4 x 6 =>4</td><td>當 D=4 時，
A=1，出現 2 個奇數；或 A=6，但是 A 必須=7，前後不相同，也不符合 3DE+O</td></tr>
<tr><td>情況四
A=9
反推法
流程圖</td><td colspan="2"> 
</td></tr>
<tr><td rowspan="4">情況四
說明</td><td>A x B =>2
9 x 8 =>2</td><td>因為只能有一個奇數，設 A=9 則 B=8</td></tr>
<tr><td>B x C =>8
8 x 1 =>8
8 x 6 =>8</td><td>當 B=8 時，
1. 若 C=1 則出現 2 個奇數，不符合 3DE+O
2. 若 C=6，符合 3DE+O</td></tr>
<tr><td>C x D =>2
6 x 2 =>2
6 x 7 =>2</td><td>當 C=6 時，
1. 若 D=2，符合 3DE+O
2. 若 D=7 則出現 2 個奇數，不符合 3DE+O</td></tr>
<tr><td>D x A=>4
2 x 2 =>4
2 x 7 =>4</td><td>當 D=2 時，
1. 若 A=7，出現 2 個奇數；
2. 或 A=2，但是 A 必須=9，前後不相同，也不符合 3DE+O</td></tr>
<tr><td>總結</td><td colspan="2">3DE+O 不會出現 2SE+2DE 中的最高層數 7 層，所以 3DE+O 的最高層數只能是 7 層。</td></tr>
</table>

<表 2-10>　**2SE+2DE**(2.8.2.4)反推 **3DE+O**　(考慮相同循環排列)

3DE+O -----經過一次運算----> 2SE+2DE		
說明	由 2SE+2DE 中層數最高 7 層(2.8.2.4)反推至類型 3DE+O (A.B.C.D)。 (2.8.2.4)相同循環排列有(8.2.4.2)、(2.4.2.8)、(4.2.8.2)。以 A=1 為例。	
情況一 **(2.8.2.4)，A=1** 反推流程圖		
情況一說明	同<表 2-9>情況一	
情況二 **(8.2.4.2)，A=1** 反推流程圖		
情況二說明	A x B =>8 1 x 8 =>8	因為只能有一個奇數， 設 A=1 則 B=8
	B x C =>2 8 x 4 =>2 8 x 9 =>2	當 B=4 時 1.若 C=4 則符合 3DE+O 2.若 C=9 則出現 2 個奇數，不符合 3DE+O
	C x D =>4 4 x 1 =>4 4 x 6 =>4	當 C=4 時 1. 若 D=1 則出現 2 個奇數，不符合 3DE+O 2. 若 D=6 則符合 3DE+O
	D x A =>2 6 x 2 =>2 6 x 7 =>2	當 D=6 時， A=7，出現 2 個奇數；或 A=2，但是 A 必須=1，前後不相同，也不符合 3DE+O
情況三 **(2.4.2.8)，A=1** 反推流程圖		
情況三說明	A x B =>2 1 x 2 =>2	因為只能有一個奇數， 設 A=1 則 B=2
	B x C =>4 2 x 2 =>4 2 x 7 =>4	當 B=2 1. 若 C=2，則出現兩個相同偶數，不符合 3DE+O 2. 若 C=7 則出現 2 個奇數，不符合 3DE+O
	C x D =>2	
	D x C =>8	
情況四 (4.2.8.2)，A=1 反推法 流程圖		

情況四說明	A x B =>4 1 x 4 =>4	因為只能有一個奇數， 設 A=1 則 B=4
	B x C =>2 4 x 3 =>2 4 x 8 =>2	當 B=4 時 1. 若 C=3 則出現 2 個奇數，不符合 3DE+O 2. 若 C=8 則符合 3DE+O
	C x D =>8 8 x 1 =>8 8 x 6 =>8	當 C=8 時 1. 若 D=1 則出現 2 個奇數，不符合 3DE+O 2. 若 D=6，符合 3DE+O
	D x A =>2 6 x 4 =>4 6 x 9 =>4	當 D=6 1. 若 A=4，則出現兩個相同偶數，不符合 3DE+O 2. 若 A=9，則出現 2 個奇數，不符合 3DE+O
總結	3DE+O 不會出現 2SE+2DE 中的最高層數 7 層，所以 3DE+O 的最高層數只能是 7 層。	

最後我們將這八種類型一個個算了出來，結果證實了以上的推論是正確的。

三 、 乘層方塊的結束數字

乘層方塊的結束數字僅收斂在 0、5、1、6 四個數字。也就是說，當乘層方塊出現 4 個 0、5、1 或 6 時，表示乘層方塊結束。

<討論一>與<討論二>，我們將個位數字分成奇數與偶數兩大類來探討乘層方塊的規則及層數，我們做了 1540 種排列。若繼續用這 1540 種排列探討乘層方塊的結束數字工程一樣會很浩大，而我們在整理的過程中發現，可以利用個位數 0~9 的乘積且僅保留個位數字來探討乘層方塊的結束數字，這種方法會更簡易來探討。所以在這個部分，我們會運用這兩種方法來探討並互相檢驗。如<表 3-1>，因為 AxB=BxA，所以我們只討論 A≤B 的部分。

<表 3-1>　個位數字 0~9 乘積的個位數字

A \ B	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1		1	2	3	4	5	6	7	8	9
2			4	6	8	0	2	4	6	8
3				9	2	5	8	1	4	7
4					6	0	4	8	2	6
5						5	0	5	0	5
6							6	2	8	4
7								9	6	3
8									4	2
9										1

<討論三之一>　乘層方塊各類型結束數字收斂於 0、5、1、6

(一) 收斂於 0：

1. 乘層方塊中，各類型的排列只要出現 0，則結束數字必為 0。
2. 乘層方塊中，當各類型的排列排列中有 5，其餘只要有一數是偶數時，結束數字一定是 0。

因為 0 乘以任何數皆會變成 0，所以只要有 0 出現，結束數字一定是 0。

(二) 收斂於 5：

乘層方塊中，各類型的排列中有 5，其餘皆為奇數時，結束數字為 5。

因為 5 乘以奇數，個位數字一定是 5，所以當排列中其它數字皆為奇數時，結束數字是 5。

(三) 收斂於 1：

當各類型的排列數字為除了 5 以外的奇數，結束數字是 1。

因為奇數 X 奇數的個位數字一定是奇數，所以乘層方塊會收斂於 1、3、7、9 其中一個奇數。我們也發現將 1、3、7、9 平方然後取其個位數字後繼續平方運算，當底數與個位數字相同時結束，此時留下的底數會是 1。

$1^2=1$ ； $3^2=9=>9^2=81=>1^2=1$ ； $7^2=49=>9=>9^2=81=>1^2=1$ ； $9^2=81=>1^2=1$，

所以當排列數字為除了 5 以外的奇數，結束數字是 1。

(四) 收斂於 6：

當各類型的排列中沒有 0 或 5 且至少有一個偶數時，都會收斂於 6。

因為偶數 X 偶數或偶數 X 奇數的個位數字一定是偶數，所以乘層方塊會收斂於 2、4、6、8 其中一個奇數。我們也發現將 2、4、6、8 平方然後取其個位數字後繼續平方運算，當底數與個位數字相同時結束，此時留下的底數會是 6。

$2^2=4=>4^2=16=>6^2=36$ ； $4^2=16=>6^2=36$ ； $\mathbf{6^2=36}$ ； $8^2=64=>4^2=16=>6^2=36$

所以當排列中沒有 0 或 5 且至少有一個偶數時，都會收斂於 6。

綜合上述，乘層方塊結束時會收斂於某一個個位數字，若將個位數字平方然後取其個位數字後繼續平方運算，當底數與個位數字相同時結束，此時留下的底數會是 0、5、1、6 如表<3-2>。

<表 3-2>　個位數字 0~9 平方過程

$\mathbf{0^2=0}$	$\mathbf{5^2=25}$	$\mathbf{1^2=1}$ $3^2=9=>9^2=81=>1^2=1$ $7^2=49=>9=>9^2=81=>1^2=1$ $9^2=81=>1^2=1$	$\mathbf{6^2=36}$ $2^2=4=>4^2=16=>6^2=36$ $4^2=16=>6^2=36$ $8^2=64=>4^2=16=>6^2=36$

因此，假性結束必須繼續往下做才會是真正的結束狀態。

<討論三之二>　乘層方塊結束數字的數量

我們依據<表 3-1>個位數字乘積的個位數字數量及<討論三之一>個位數字平方的結果分類整理成<表 3-3>。同時，我們也將乘層方塊各類型的結束數字數量整理乘<表 3-4>。從表中得知，結束數字 0 的數量最多，共有 822 個；其次是結束數字 6，共有 598 個；最少的是結束數字 1，共有 55 個。

<表 3-3> 個位數字乘積的個位數字及個位數字平方結果

個位數字	0	5	1	3	7	9	2	4	6	8
個數	14	5	3	2	2	3	6	7	7	6
平方結果	0	5	1				6			
相同平方結果總個數	14	5	10				26			

<表 3-4> 各類型結束數字總整理

類型＼結束數字	0	5	1	6	合計
4SO		1	4		5
4SE	1			4	5
4DO		12	3		15
4DE	12			3	15
2DO+2DE	192			108	300
2DO+2SE	52			48	100
2SO+2DO		36	24		50
2SE+2DE	36			24	60
2SO+2SE	18			32	50
2SO+2DE	52			48	100
2SO+2SO		8	12		20
2SE+2SE	8			12	20
3DO+E	112			38	150
3DE+O	102			48	150
3SO+O		8	12		20
3SE+E	8			12	20
3SO+E	9			16	25
3SE+O	9			16	25
O+E+2SO	105			95	200
O+E+2SE	106			94	200
合計	822	65	55	598	1540

(一) 結束數字 0 的數量

結束數字 0 的數量最多，從表<3-3>中我們發現個位數字 0 出現的次數最高，雖然平方結果的總個數不是最多，但是 5 乘以偶數個位數是 0，0 乘以任何數都會是 0，所以結束數字為 0 的數量會最多。

(二) 結束數字 6 的數量：

從<表 3-3>中可發現偶數出現的次數最多，因為偶數 x 偶數=偶數、偶數 x 奇數=偶數，故當收斂於偶數時，偶數的平方結果會 6，所以結束數字 6 的數量位居第二。

(三) 結束數字 1 的數量

<表 3-3>中乘積出現奇數(5 除外)的有 10 次。因為乘層方塊的類型要全為奇數才會收斂於奇數，當收斂於奇數時，奇數平方結果會是 1，所以結束數字 1 的數量位居第三。

(四) 結束數字 5 的數量

<表 3-3>中 5 出現的次數最少，因為 5x 奇數個位數字才會是 5，條件相對比較嚴格，所以數量會最少。

整理我們的討論，如同<討論二之一>的結果，0 和 5 不僅是乘層方塊層數的剋星，同時對結束數字的影響也很大。而 0 和 5 同時出現時，則以大魔王「0」的規則為主，因此我們在討論時，經常將排列中含有 0 和 5 的隔離出來討論。

此外，乘層方塊結束數字為 0、5、1、6 更加令我們感覺到數字的奧秘。

- 0 和 1 讓我們聯想到電腦就是以二進位的方式在運算，光用這兩個數字就能組成如此多的資訊，難怪 0 和 1 在乘層方塊中佔有舉足輕重的地位。
- 5 讓我們聯想到生活中，我們經常做 5 個一數的運用，例如數東西、貨幣…等。而且 10 是 5 的倍數，生活中我們最常用的就是十進位的運算。
- 6 讓我們聯想到有時間是以六十進位、一天 24 小時、一年 12 個月、一圈 360 度…等都是 6 的倍數。

綜合上述討論，我們總覺得乘層方塊還有許多神秘面紗是我們尚未揭開的。礙於時間及能力，這些秘密我們無法一一發現，也期許之後有興趣的同好可以繼續來挖掘。

四 、 乘層方塊的遊戲規則套用於其他多邊形

我們將乘層方塊的遊戲規則套用於其他多邊形，探討是否適用，整理如下表<4-1>。

我們從三邊形測試到十六邊形，目前發現乘層方塊遊戲規則僅適用於四邊形，這項結果與第 34 屆-數字方塊結果不同，因為數字方塊的規則還適用於八邊形、十六邊形、三十二邊形…等，詳細的原因我們尚未有結論。不過我們發現雖然遊戲規則不適用於其他多邊形，但是運算過程中會出現週期，也就是會重複出現相同的循環排列，之後可以朝著方面再繼續深究。

<表 4-1>　乘層方塊遊戲規則套用於其他多邊形

邊數	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
適用	X	V	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X

柒、結論與建議

一、乘層方塊的遊戲規則

我們訂定的乘層方塊遊戲規則是可行的，乘層方塊結束時，內層方塊四條邊的中點會出現四個相同的個位數字。

遊戲規則：

1.任意取四個個位數字(0~9)寫在乘層方塊的四個角。

2.將相鄰兩數相乘，而且僅保留乘積的個位數字放在四條邊的中點。

3.再將四條邊的中點連成一個新的方塊，並依照先前的步驟持續操作。

4.直到內層方塊四條邊中點的數字不斷重複即表示乘層方塊結束。例如(0.0.0.0)、(1.1.1.1)、(5.5.5.5)、(6.6.6.6)

二、乘層方塊的層數

(一) 我們認為 5 和 0 就像乘層方塊的剋星，各類型排列中如果若出現 5 或 0 會加速乘層方塊結束，最多到 4 層。統計的結果層數個數最多的是 5 層，共 701 個，其次是 7 層，有 308 個；層數數量最少的是 1 層，共 4 個。

(二) 乘層方塊最高可到達 7 層。

(三) 如果排列的數字結構愈單一則出現的層數愈少，如 4SO、4SE。

(四) <4SO、4SE>、<4DO、4DE>、<2SO+2SO、2SE+2SE>、<2SO+2DO、2SE+2DE>、<2SE+2DO、2SO+2DE >、<3SO+O、3SE+E>這六組在層數的個數上**完全對稱**。因為這六組不僅排列數量相同，數字相乘後的個位數字種類個數也相同，所以層數的數量會相同。

三、乘層方塊的結束數字

(一) 乘層方塊的結束數字是 0、5、1、6 四個數字。乘層方塊運算到最後皆會結束於某一個個位數字，將假性結束繼續往下做，最後會得到(0.0.0.0)、(1.1.1.1)、(5.5.5.5)、(6.6.6.6)四種結果，因為唯有 0^2、5^2、1^2、6^2 的個位數字才會與底數相同，不斷重複。

(二) 乘層方塊的排列出現 0，則結束數字必為 0；若排列中為四個奇數，其中一個數字是 5，則結束數字為 5；若排列中全為除了 5 以外的奇數，則結束數字必為 1；若排列中沒有 0 或 5，且至少有一個偶數，則乘層方塊的結束數字必為 6。

(三) 因為 0 乘以任何數字皆會變成 0；5 乘以偶數也會有 0 出現，所以結束數字是 0 的排列數量最多。與<討論二>一樣，0 和 5 對乘層方塊的結束數字扮演關鍵的角色。

四、乘層方塊的遊戲規則套用於其他多邊形

在我們的研究中，除了四邊形以外，其他多邊形無法適用乘層方塊的遊戲規則。雖然不會收斂，但我們發現在計算的過程中乘層方塊的排列會出現週期，可做為未來我們繼續探討的目標。

綜合上述結論，我們訂定的遊戲規則是可行的，希望有機會能介紹給更多的人知道，無論是老師、同學或數學愛好人士。

當我們完成乘層方塊的 20 種類型之後，我們發現排列中有 0 和 5 是比較特殊的，若是能分開來另做討論一定會更加豐富，也提供給以後的研究者一些建議。

捌、未來展望

一、目前已有了**減法規則的數字方塊**和**乘法規則的乘層方塊**，我們希望之後再繼續探討加法規則及除法規則的數字方塊。在探討乘層方塊的前期我們也有嘗試過假設加法以及除法的遊戲規則。對於除法的規則目前有初步的假設，但礙於時間尚未做深入的探討。加法則尚未找出其可能的規律性。

二、雖然乘方塊的遊戲規則不適用於其他多邊形，我們也想試試看在其他多邊形計算過程中乘層方塊出現的週期有何規律？

玖、參考文獻

賴緯綸、林昀緯、方柏翔、蔡淑英、吳慎芬(1994)；數字方塊。國立科學教育館：第 34 屆全國中小學科展國中數學組。

賴緯綸、林昀緯、陳昱臻、方柏翔、蔡淑英、吳慎芬(1995)；從數字方塊到數字八卦。國立科學教育館：第 35 屆全國中小學科展國中數學組。

張建祥、王重凱、林漢良、王玲玉(1995)；方塊數論。國立科學教育館：第 35 屆全國中小學科展高中數學組

武良翰、郭梵均、黃亭捷、袁盛博、陳世恩、蔡秀芬(2005)；層出不窮。國立科學教育館：第 45 屆全國中小學科展國中數學組。

唐麒鈞、葉沛鎧、林華葵、李品琦(2010)；數字方尋極限~數字方塊擴展層數極限的探討。國立科學教育館：第 50 屆全國中小學科展國中數學組

【評語】080410

過去的作品是運用減法規則探討數字方塊，而本作品嘗試將減法規則改成乘法規則來探究，值得肯定。可惜的是三人共同的成果卻由一人出席代表報告，較無法展現出大家的分工合作。