中華民國第55屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

第三名

080409

改頭換面? 改頭換面!

學校名稱：臺北市士林區蘭雅國民小學

作者：	指導老師：
小六 沈禾謙	柯俊男 蔡依真

關鍵詞：新型移位遊戲、最少步數、找規則

摘　　要

本研究探討並推廣「改頭換面」的移位遊戲

一、2n 型

（一）在原來遊戲只有二列的情況，最少的移動步數為 2n+1 *n 是直行數

(二) 將棋子由符號變成數字，發現各列的編號在移動後的順序不變時，最少步數為 3n

二、3n 型

(一) 3n 向上輪換型

1. 最少步數為 4n+3，順序不變則最少步數為 4n+4

(二) 3n 向下輪換型

1. 最少步數為 4n+5，順序不變則最少步數為 4n+6

(三) 3n 上下列交換型

1. 最少步數為 6n+1，順序不變則最少步數為 7n

三、mn 型

(一) mn 向上輪換型

1. mn 向上輪換型最少步數一般公式為 2(m-1)n+2m-3

2.順序不變時一般公式為 2(m-1)n+2m-2

(二) mn 向下輪換型

1. mn 向下輪換型最少步數一般公式為 2(m-1)n+2m-1

2.順序不變時一般公式為 2(m-1)n+2m

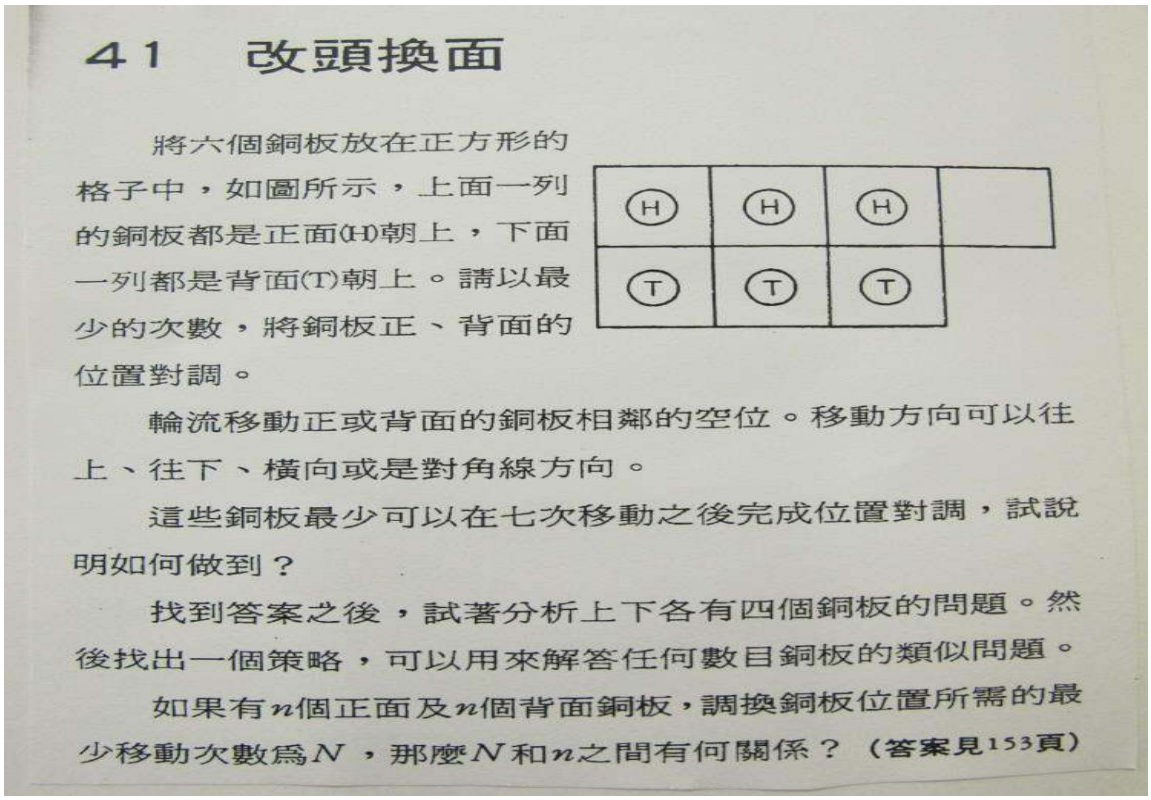
(三) mn 上下列交換型

mn 上下列交換型在 m>3 時，最少步數一般公式為 2(2m-3)n+2(m-3)

壹、 研究動機

一、研究動機與遊戲說明

學校圖書館有一本叫「數學遊樂園之老謀深算」的數學遊戲書，裡面有很多內容都很吸引我，其中有一則叫「改頭換面」的題目，原始題目如下圖。



41　改頭換面

將六個銅板放在正方形的格子中，如圖所示，上面一列的銅板都是正面(H)朝上，下面一列都是背面(T)朝上。請以最少的次數，將銅板正、背面的位置對調。

H	H	H	
T	T	T	

輪流移動正或背面的銅板相鄰的空位。移動方向可以往上、往下、橫向或是對角線方向。

這些銅板最少可以在七次移動之後完成位置對調，試說明如何做到？

找到答案之後，試著分析上下各有四個銅板的問題。然後找出一個策略，可以用來解答任何數目銅板的類似問題。

如果有n個正面及n個背面銅板，調換銅板位置所需的最少移動次數爲N，那麼N和n之間有何關係？（答案見153頁）

這遊戲要先畫出上下兩列的正方形格子，上列比下列多一個空格，再將六個銅板放在正方形格子裡，上面一列皆是正面，下面一列皆是反面，留著上列多出的空格為暫停格(如圖)，銅板可以往上、下、左、右或對角線的相鄰空格移動，然後用最少的移動步數把正、反面的銅板位置對調。空格的行數可以持續增加使銅板的數目增多，如果有 n 個正面銅板及 n 個反面銅板，對調銅板位置所需移動的最少步數規則為何？

正	正	正	暫
反	反	反	

這是一種更靈活的移位遊戲，原書有附答案，不過只說明結果，沒有說明為什麼是這個結果，剛好現在六年級下學期南一版的數學課本第二單元就是「怎樣解題」，教我們怎樣列表找規律，這個題目很有挑戰性，於是我決定用**棋子代替銅板**，好好探討它。

二、名詞解釋

1. **m** 是橫列數， **n** 是直行數，所以 **2n 型**（m=2）是原來遊戲只有上下兩列的情況，**3n 型**是上下三列的情況，**mn 型**是推廣到 m 列 n 行的情況。右圖是 3n 型兩行（m=3,n=2）的情況。

	n=2	
m=3	1	1
	2	2
	3	3

2. **最少步數**是不管同一列棋子的位置順序，把各列棋子移動成「完成圖型」所需的最少步數。我將棋子編號後，同一列棋子因為有順序，可以要求移動後棋子的數字順序不變。**順序不變的最少步數**就是把各列的棋子移動成完成圖型後，同一列棋子的順序仍然不變時所需的最少移動步數(如下圖)。這時為了要讓移動後每列的編號順序不變，移動步數會增多。

原始圖型	
1	2
3	4

→

最少步數圖型	
3	4
2	1

1、2 順序變了

依順序排列的最少步數圖型	
3	4
1	2

3. 當 m>3 時，棋子移動後的完成圖型可有不同選擇，**向上輪換型**是每列都向上移一列，然後最上面一列移到最下面。**向下輪換型**是每列都向下移一列，然後最下面一列移到最上面。**上下列交換型**是最上面一列和最下面一列的棋子位置交換。

原始圖型	
1	1
2	2
3	3

向上輪換型	
2	2
3	3
1	1

向下輪換型	
3	3
1	1
2	2

上下列交換型	
3	3
2	2
1	1

貳、研究目的

一、探討 2n 型「改頭換面」遊戲的最少步數及順序不變的最少步數

二、探討 3n 型「改頭換面」遊戲的最少步數

(一) 探討 3n 向上輪換型的最少步數及順序不變的最少步數

(二) 探討 3n 向下輪換型的最少步數及順序不變的最少步數

(三) 探討 3n 上下列交換型的最少步數及順序不變的最少步數

三、探討 mn 型「改頭換面」遊戲的最少步數

(一) 推測 mn 向上輪換型的最少步數及順序不變的最少步數

(二) 推測 mn 向下輪換型的最少步數及順序不變的最少步數

(三) 推測 mn 上下列交換型的最少步數

參、研究設備及器材

紙、筆、奇異筆、棋子、膠帶

肆、研究方法、結果與討論

一、探討 2n 型（上下兩列）的最少步數

（一）使用符號的移動方式

1、方法

先將上排的棋子用奇異筆畫上圈，再將下排的棋子用奇異筆畫上叉，然後盡可能用最少的步數將上下列的棋子對調。

2、結果

原始圖型	完成圖型	移動順序說明
O2 O1 ＊ ╳2 ╳1	╳2 ╳1 ＊ O1 O2	最少步數是 5 步，移動順序為 ╳1→O2→╳2→O1→╳1
O3 O2 O1 ＊ ╳3 ╳2 ╳1	╳2 ╳3 ╳1 ＊ O3 O1 O2	最少步數是 7 步，移動順序為 ╳1→O2→╳3→O3→╳2→O1→╳1
O4 O3 O2 O1 ＊ ╳4 ╳3 ╳2 ╳1	╳4 ╳2 ╳3 ╳1 ＊ O3 O4 O1 O2	最少步數是 9 步，移動順序為 ╳1→O2→╳3→O4→╳4→O3→ ╳2→O1→╳1

將結果整理如下表：

圖型	2*1	2*2	2*3	2*4	2*5	2*6	2*7
最少步數	3 步	5 步	7 步	9 步	11 步	13 步	15 步

3、討論

從上面的結果，發現最少步數的特色如下

(1）從「原始圖型」到「完成圖型」，除了第一個棋子移動 2 次外，其它的每一個棋子都只有移動 1 次，而對角線方向前進是最省步數的位移方式。

(2）從「原始圖型」到「完成圖型」，除了最後一步和中間交換步是左右或上下移動，其它的都是對角線移動。

(3) 在最簡單的 2*1 圖型，除了棋子交換的 2 步外（一個往上一個往下)，還要有 1 步讓路，所以是 3 步。因為一行至少要 2 步(1 步上 1 步下)，所以之後每多一行就多 2 步。

(4）最少步數的結果觀察分析如下：

圖型	最少步數	規則
2*1	3	2*1+1
2*2	5	2*2+1
2*3	7	2*3+1
2*4	9	2*4+1
⋮	⋮	⋮
2*n	2n+1	2*n+1

從以上的討論，我完成了原題的解答，2n 型最少步數的公式為 2n+1，與原書上一樣。

(5）為了進一步的了解移動時棋子的改變，我將棋子編號，再進一步探討。

（二）使用數字的移動方式

1、方法

（1）為符合數字順序的習慣，先將[暫停格]從第一列最右邊移到最左邊。

（2）將棋子從左到右，從上到下的用奇異筆編號，然後盡可能用最少步數將上下列的棋子對調，再觀察棋子移動後的改變。

2、結果

原始圖型　　完成圖型　　移動順序說明

*	1	2
	3	4

*	3	4
	2	1

最少步數是 5 步
移動順序為 3→2→4→1→3

或

*	4	3
	1	2

最少步數是 5 步
移動順序為 1→4→2→3→1

註：底下畫線的數字表示被移動過 2 次

*	1	2	3
	4	5	6

*	4	6	5
	2	1	3

最少步數是 7 步，移動順序為
4→2→6→3→5→1→4

或

*	5	4	6
	1	3	2

最少步數是 7 步，移動順序為
1→5→3→6→2→4→1

*	1	2	3	4
	5	6	7	8

*	5	7	6	8
	2	1	4	3

最少步數是 9 步，移動順序為
5→2→7→4→8→3→6→1→5

*	1	2	3	4	5
	6	7	8	9	10

*	6	8	7	10	9
	2	1	4	3	5

最少步數是 11 步 ，移動順序為 6→2→8→4→10→5→9→3→7→1→6

將結果整理如下表：

圖型	2*1	2*2	2*3	2*4	2*5	2*6	2*7
最少步數	3	5	7	9	11	13	15

3、討論

（1）從結果中我發現，最少步數為 2n+1，但走法不是只有一種。

（2）最少步數的完成圖型的數字順序改變了。上下列對調後，有一列會從第一個棋子就開始兩個兩個數字交換，另一列則第一個棋子數字不變，剩下的開始兩個兩個交換。

（3）棋子移動後的數字順序如果不變，那最少步數的情形會如何呢？

（三）數字順序不變的移動方法

1、方法

盡可能用最少步數將上下排的棋子對調，同時讓對調後的數字還是依照順序排列，找出順序不變的最少步數。也就是說，原題只將上下列對調，我除將上下列對調外，進一步讓各列的編號順序不變才算完成。

2、 結果

原始圖型

*	1	2
	3	4

完成圖型

*	3	4
	1	2

移動順序說明

最少步數是 6 步，移動順序為 3→2→4→2→1→3

註：底下畫線的數字表示被移動過 2 次

*	1	2	3
	4	5	6

*	4	5	6
	1	2	3

最少步數是 9 步，移動順序為 4→2→6→3→6→5→2→1→4

*	1	2	3	4
	5	6	7	8

*	5	6	7	8
	1	2	3	4

最少步數是 12 步，移動順序為 5→2→7→4→8→4→3→7→6→2→1→5

*	1	2	3	4	5
	6	7	8	9	10

*	6	7	8	9	10
	1	2	3	4	5

最少步數是 15 步，移動順序為 6→2→8→4→10→5→10→9→4→3→8→7→2→1→6

將結果整理如下表：

圖型	2*1	2*2	2*3	2*4	2*5	2*6	2*7
順序不變的最少步數	3	6	9	12	15	18	21

3、討論

（1）完成圖型每列的數字**順序不變時，最少步數規則為 3n**，分析如下：

圖型	**最少步數**	**規則**
2*1	3	3*1
2*2	6	3*2
2*3	9	3*3
2*4	12	3*4
⋮	⋮	⋮
2*n	3n	3*n

（2）因為對調後的數字要依照順序排列才算[完成圖型]，所以**每一行**都要 3 步(一步向上，一步向下，一步讓路)，沒辦法透過對角線移動來減少步數。

（3）從結果也可看到每一行都有一個數字移動過 2 次，所以最少步數=3n。

（4）從以上討論中，我發現這其中有更多其他的變化可以探討，那麼三列的情形又如何呢?

二、探討 3n 型（三列）的最少步數

（一）向上輪換型的探討

1、方法

（1）將棋子從右到左，上到下的編號，然後盡可能的用最少的步數使完成圖型時上排的移到最下面，中排的移到最上面，下排的移到中間。

（2）盡可能的用最少的步數使向上輪換的完成圖型每列的數字順序不變。

2、結果

原始圖型　　完成圖型　　移動順序說明

*	1	2
	3	4
	5	6

*	3	4
	6	5
	1	2

最少步數為 11 步，移動順序為
3→2→4→6→2→1→6→5→1→6→3

註：底下畫 1 條線的數字表示移動過 2 次，畫 2 條的表示移動過 3 次。

*	3	4
	5	6
	1	2

順序不變的最少步數是 12 步，移動順序為 3→1→4→5→1→2→5→6 →2→5→4→3

*	1	2	3
	4	5	6
	7	8	9

*	4	6	5
	8	7	9
	1	2	3

最少步數為 15 步，移動順序為
4→2→6→3→5→9→3→8
→2→1→9→7→1→9→4

*	4	5	6
	7	8	9
	1	2	3

順序不變的最少步數是 16 步，移動順序為 4→2→5→3→6→9→3→8→2→1→8→7→1→7→8→4

*	1	2	3	4
	5	6	7	8
	9	10	11	12

*	5	7	6	8
	11	9	10	12
	1	2	3	4

最少步數為 19 步，移動順序為
5→2→7→4→8→12→4→3→6→11→3→10→2→1→11→9→1→11→5

*	9	10	11	12
	5	6	7	8
	1	2	3	4

順序不變的最少步數是 20 步，移動順序為 5→2→6→3→7→4→8→12→4→11→3→10→2→1→10→9→1→9→10→5

*	1	2	3	4	5
	6	7	8	9	10
	11	12	13	14	15

*	6	8	7	10	9
	13	11	12	15	14
	1	2	3	4	5

最少步數為 23 移動順序為
6→2→8→4→10→5→9→15→5→14→4→3→7→13→3→12→2→1→3→11→1→13→6

*	6	7	8	9	10
	11	12	13	14	15
	1	2	3	4	5

順序不變的最少步數是 24 步，移動順序為 6→2→8→4→10→5→9→15→5→15→14→4→3→8→7→12→2→1→12→11→1→11→12→6

*	7	9	8	11	10	12
	15	13	14	17	16	18
	1	2	3	4	5	6

最少步數為 27 步，移動順序為 7→2→9→4→11→6→12→18→6→5→10→17→5→16→4→3→8→15→3→14→2→1→15→13→1→15→7

*	7	8	9	10	11	12
	13	14	15	16	17	18
	1	2	3	4	5	6

順序不變的最少步數是 28 步，移動順序為 7→2→8→3→9→4→10→5→11→6→12→18→6→17→5→16→4→15→3→14→2→1→14→13→1→13→14→7

將結果整理如下表：

圖型	3*2	3*3	3*4	3*5	3*6
最少步數	11	15	19	23	27
順序不變最少步數	12	16	20	24	28

3、討論

圖型	最少步數	規則	順序不變最少步數	規則
3*2	11	4*2+3	12	4*2+4
3*3	15	4*3+3	16	4*3+4
3*4	19	4*4+3	20	4*4+4
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
3*n	4n+3	4*n+3	4n+4	4*n+4

由此可知 3n 向上輪換型的最少步數規則是 4n+3，順序不變的最少步數規則是 4n+4。

（1）每一行的棋子要完成輪換，在沒有任何阻擋的狀況下，至少需要 4 步(2 個棋

子向上 1 步，1 個棋子向下 2 步)。

（2）因為每一個棋子都要至少動 1 次，會需要有 2 次的讓路，其中 1 次移到暫停格之後再移到位，所以只有多 1 步。另外 1 次是到位後才要讓，所以會多 2 步，所以總共會多 3 步（請見現場操作說明）。

（3）因為每一行的棋子至少需要 4 步，所以每增一行只多 4 步的就是最少步數。

（4）移動後每列順序不變的向上輪換型，其最少步數規則為 4n+4。比最少步數多了 1 步是為了調整順序。

(二) 向下輪換型的探討

1、方法

（1）將棋子從右到左，上到下的編號，然後盡可能的用最少的步數使完成圖型時上排的移到中間，中排的移到最下面，下排的移到最上面。

（2）盡可能的用最少的步數使向下輪換的完成圖型每列的數字順序不變。

2、結果

原始圖型　　完成圖型　　移動順序說明

*	1	2
	3	4
	5	6

*	6	5
	1	2
	3	4

最少步數為 13 步，移動順序為
3→6→4→6→3→1→6
→5→3→2→3→2→1

*	5	6
	1	2
	3	4

順序不變的最少步數為 14 步，
移動順序為 3→6→4→2→6→3
→1→2→5→3→5→ 6→2→1

*	1	2	3
	4	5	6
	7	8	9

*	8	7	9
	1	2	3
	4	5	6

最少步數為 17 步，移動順序為
4→8→5→9→6→3→9→8→4
→1→8→7→4→2→4→2→1

*	7	8	9
	1	2	3
	4	5	6

順序不變的最少步數為 18 步，移動順序為 4→8→5→9→6→3→9→2→8→4→1→2→7→4→7→8→2→1

*	1	2	3	4
	5	6	7	8
	9	10	11	12

*	10	9	11	12
	1	2	3	4
	5	6	7	8

最少步數為 21 步，移動順序為 5→10→6→11→7→12→8→4→12→3→11→10→5→1→10→9→5→2→9→2→1

*	9	10	11	12
	1	2	3	4
	5	6	7	8

順序不變的最少步數為 22 步，移動順序為 5→10→6→11→7→12→8→4→12→3→11→2→10→5→1→2→9→5→9→2→9→1

*	6	8	7	10	9
	13	11	12	15	14
	1	2	3	4	5

最少步數為 25 步，移動順序為 6→12→7→13→8→14→9→15→10→5→15→4→14→3→13→12→6→1→12→11→6→2→11→2→1

*	6	7	8	9	10
	11	12	13	14	15
	1	2	3	4	5

順序不變的最少步數為 26 步，移動順序為
6→12→7→13→8→14→9→15→10→5→15→4→14→3→13→12→6→1→12→11→6→2→12→11→2

	14	13	15	16	17	18
	1	2	3	4	5	6
	7	8	9	10	11	12

最少步數為 29 移動順序為
7→14→8→15→9→16→10→17→11→18→12→6→18→5→17→4→16→3→15→14→7→1→14→13→7→13→2→13→1

	13	14	15	16	17	18
	1	2	3	4	5	6
	7	8	9	10	11	12

順序不變的最少步數為 30 步，移動順序為 7→14→8→15→9→16→10→17→11→18→12→6→18→5→ 17→4→16→3→15→14→7→1→ 14→13→7→13→2→14→13→1

將結果整理如下表：

圖型	3*2	3*3	3*4	3*5	3*6
最少步數	13	17	21	25	29
順序不變最少步數	14	18	22	26	30

3、討論

圖型	最少步數	規則	順序不變最少步數	規則
3*2	13	4*2+5	14	4*2+6
3*3	17	4*3+5	18	4*3+6
3*4	21	4*4+5	22	4*4+6
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
3*n	4n+5	4*n+5	4n+6	4*n+6

由此可知 3n 向下輪換型的最少步數是 4n+5，移動後數字順序不變的最少步數是 4n+6。

（1）每一行的棋子要完成輪換，在沒有任何阻擋的狀況下，至少需要 4 步(2 個棋子向下 1 步，1 個棋子向上 2 步)。

（2）因為每一個棋子都要至少動 1 次，會需要有 4 次的讓路，其中 1 次讓路時是往反方向，所以會多 2 步，另外 3 次就只是讓路而以，所以會多 3 步，所以總共會多 5 步（請見現場操作說明）。

（3）因為每一行的棋子至少需要 4 步，所以之後每一行只多 4 步就是最少步數。

（4）順序不變的向下輪換型，其最少步數規則為 4n+6。比最少步數多了一步是為了改變順序。

(三) 3n 上下列交換型的探討

1、方法

（1）將棋子從右到左，上到下的編號，然後盡可能的用最少的步數使完成圖型

時上排的移到最下面，中排的不變，下排的移到最上面。

(2)盡可能的用最少的步數使上下列交換後的完成圖型每列的數字順序不變。

2、結果

原始圖型　　完成圖型　　移動順序說明

*	1	2
	3	4
	6	5

*	6	5
	3	4
	1	2

最少步數為 13 步，
移動順序為 3→2→4→6→2→1→6→5→1→4→5→4→3

*	5	6
	3	4
	1	2

順序不變的最少步數為 14 步，
移動順序為
3→2→4→6→2→1→6→5→1→4→6→5→4→3

1

*	1	2	3
	4	5	6
	7	8	9

*	7	8	9
	4	6	5
	2	1	3

最少步數為 19 步，移動順序為
4→2→6→3→5→9→3→5→9→8→2→1→8→7→1→6→7→6→4

*	7	8	9
	4	5	6
	1	2	3

順序不變的最少步數為 21 步，
移動順序為 4→2→6→3→5→9→3→5→9→8→2→1→8→7→1→7→5→6→8→7→4

*	1	2	3	4
	5	6	7	8
	9	10	11	12

*	9	10	11	12
	5	7	8	6
	2	1	3	4

最少步數為 25 步，移動順序為
5→2→7→4→8→11→6→9→2→1→9→3→11→12→4→10→1→7→10→8→12→6→3→7→5
6→3→7→5

*	9	10	11	12
	5	6	7	8
	1	2	3	4

順序不變的最少步數為 28 步，
移動順序為 5→2→7→4→8→11→4→3→11→12→4→3→10→2→1→6→9→1→9→10→8→12→8→7→10→6→9→5

將結果整理如下表：

圖型	3*2	3*3	3*4
最少步數	13	19	25
順序不變 最少步數	14	21	28

3、討論

圖型	最少步數	規則	順序不變 最少步數	規則
3*2	13	6*2+1	14	7*2
3*3	19	6*3+1	21	7*3
3*4	25	6*4+1	28	7*41
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
3*n	6n+1	6*n+1	6n+1	7*n

由此可知 3n 上下列交換型的最少步數規則是 6n+1，順序不變的最少步數規則是 7n。

（1）每一行的棋子要完成對換，至少需要 6 步 (1 個棋子向上 2 步，1 個棋子向下 2 步，中間的要讓路移開後再回去) 。

（2）在最後收尾的時候，會需要多 1 步來讓位。

（3）最少步數規則為 6n+1（請見現場操作說明）。

（4)因為每一行的棋子交換至少需要6步,所以之後每一行多6步就是最少步數。

（5）數字的變化可以看出移動後的改變。

（6）順序不變的上下列交換型，因每行都要 7 步，最少步數規則為 7n。

三、探討 mn 型的最少步數

(一)mn 向上輪換型

1.方法

（1）將原始圖型增加為 4 列、5 列時，盡可能找出最少步數的規則，並推測 m 列時的最少步數規則。

（2）盡可能找出 4 列、5 列時順序不變的最少步數規則，並推測 m 列時順序不變的最少步數規則。

2、結果

(1) 4n 向上輪換型

原始圖型　　完成圖型　　移動順序說明

*	1	2
	3	4
	5	6
	7	8

*	3	4
	5	6
	8	7
	1	2

最少步數為 17 步，移動順序為
3→2→4→5→2→1→5→6→8→2→1→8→7→1→8→5→3

*	3	4
	5	6
	7	8
	1	2

順序不變的最少步數為 18 步
移動順序為 3→2→4→5→2→1→5→6→8→2→1→8→7→1→7→8→5→3

*	1	2	3
	4	5	6
	7	8	9
	10	11	12

*	4	5	6
	8	7	9
	10	11	12
	1	3	2

最少步數為 23 步，移動順序為
4→2→5→3→6→9→3→8→2→1→8→7→11→3→12→2→1→11→10→1→11→8→4

*	5	6	7	8
	10	9	11	12
	14	13	16	15
	2	3	1	4

最少步數為 29 步，移動順序為
5→2→6→3→7→4→8→12→4→11→3→10→2→1→10→9→13→2→1→13→14→3→16→4→15→1→13→10→5

將結果整理如下表：

圖型	4*2	4*3	4*4	4*5
最少步數	17	23	29	35
規則	6*2+5	6*3+5	6*4+5	6*5+5
依照順序最少步數	18	24	30	36
規則	6*2+6	6*3+6	6*4+6	6*5+6

(2)5n 向上輪換型

原始圖型　　完成圖型　　移動順序說明

*	1	2
	3	4
	5	6
	7	8
	9	10

	3	4
	5	6
	7	8
	9	10
	2	1

最少步數為 23 步(8*2+7=23)
3→2→4→5→2→1→5→6→7→2→1→7→8→9→2→1→9→10→1→9→7→5→3

	3	4
	5	6
	7	8
	9	10
	1	2

順序不變的最少步數為 24 步(8*2+8=24)
3→2→4→5→2→1→5→6→7→2→1→7→8→9→2→1→9→10→2→1→9→7→5→3

	4	5	6
	8	7	9
	10	11	12
	13	14	15
	3	1	2

最少步數為 31 步(8*3+7=31)
4→2→5→3→6→9→3→8→2→1→8→7→11→3→12→2→1→11→10→13→3→15→2→1→15→14→1→15→11→8→4

	4	5	6
	7	8	9
	10	11	12
	13	14	15
	1	2	3

順序不變的最少步數 32 步(8*3+8=32)
4→2→5→3→6→9→3→7→2→1→7→8→11→3→12→15→3→2→1→11→10→14→2→1→14→ 13→1→14→10→11→7→4

	5	6	7	8
	10	9	11	12
	13	14	16	15
	17	18	19	20
	3	1	4	2

最少步數 39 步(8*4+7=39)
5→2→6→3→7→4→8→12→4→11→3→10→2→1→10→9→14→3→16→4→15→2→1→14→13→17→3→19→4→20→2→1→19→18→1→19→14→10→5

	5	6	7	8
	9	10	11	12
	13	14	15	16
	17	18	19	20
	1	2	3	4

順序不變的最少步數 40 步(8*4+8=40)
5→2→6→3→7→4→8→12→4→11→3→9→2→1→9→ 10→14→3→15→4→16→20→4→19→3→2→1→14→13 →18→2→1→18→17→1→18→13→14→9→5

將結果整理如下表 ：

圖型	5*2	5*3	5*4
最少步數	23	31	39
規則	8*2+7	8*3+7	8*4+7
按照順序最少步數	24	32	40
規則	8*2+8	8*3+8	8*4+8

3.討論

(1) 向上輪換型最少步數一般規則

m=3 的最少步數規則為 4n+3 → (2*2)n+3 → 2*(3-1)n+2*3-3

m=4 的最少步數規則為 6n+5 → (2*3)n+5 → 2*(4-1)n+2*4-3

m=5 的最少步數規則為 8n+7 → (2*4)n+7 → 2*(5-1)n+2*5-3

……↓ ↓……

由此推論向上輪換的一般規則為 2(m-1)n+2m-3。

(2) 向上輪換型順序不變最少步數的一般規則

m=3 的最少步數規則為 4n+4 → (2*2)n+4 → 2*(3-1)n+2*(3-1)

m=4 的最少步數規則為 6n+6 → (2*3)n+6 → 2*(4-1)n+2*(4-1)

m=5 的最少步數規則為 8n+8 → (2*4)n+8 → 2*(5-1)n+2*(5-1)

……↓↓……

由此推論向上輪換後順序不變的一般規則為 2(m-1)n+2(m-1)= 2(m-1)n +2m-2。

（3）順序不變最少步數的一般規則比最少步數的一般規則多 1 步。

(二)mn 向下輪換型

1、方法

（1）將原始圖型增加為 4 列、5 列時，盡可能找出最少步數的規則，並推測 m 列時的最少步數規則。

（2）盡可能找出 4 列、5 列時順序不變的最少步數規則，並推測 m 列時順序不變的最少步數規則。

2、結果

（1）4n 向下輪換型

原始圖型

*	1	2
	3	4
	5	6
	7	8

完成圖型

*	7	8
	1	2
	3	4
	6	5

移動順序說明

最少步數為 19 步
移動順序為 3→5→7→6→5→7→8→5→4→7→3 →1→7→8→3→2→8→2→1

*	7	8
	1	2
	3	4
	5	6

順序不變的最少步數為 20 步
移動順序為 3→5→7→6→5→7→8→6→5→4→7→3→1→7→8→3→2→8→2→1

*	1	2	3
	4	5	6
	7	8	9
	10	11	12

*	11	12	10
	1	2	3
	4	5	6
	7	8	9

最少步數為 25 步，移動順序為
4→7→11→8→12→9→6→12→7
→11→10→7→5→11→4→1→11
→10→4→2→12→3→10→2→1

*	1	2	3	4
	5	6	7	8
	9	10	11	12
	13	14	15	16

*	14	15	13	16
	1	2	4	3
	5	6	7	8
	9	10	11	12

最少步數為 31 步，移動順序為
5→9→14→10→15→11→16→12
→8→16→7→15→9→14→13→9
→6→14→5→1→14→13→5→2
→15→4→16→3→13→2→1

將結果整理如下表：

圖型	4*2	4*3	4*4	4*5	4*6	4*7
最少步數	19	25	31	37	43	49
規則	6*2+7	6*3+7	6*4+7	6*5+7	6*6+7	6*7+7
依照順序最少步數	20	26	32	38	44	50
規則	6*2+8	6*3+8	6*4+8	6*5+8	6*6+8	6*7+8

(2)5n 向下輪換型

原始圖型　　完成圖型　　移動順序說明

	1	2
	3	4
	5	6
	7	8
	9	10

	10	9
	1	2
	3	4
	5	6
	7	8

最少步數 25 步(8*2+9=25)
3→5→7→10→8→7→10→9→7→6→5
→10→9→5→4→10→3→1→10→9→3
→2→9→2→1

	9	10
	1	2
	3	4
	5	6
	7	8

順序不變的最少步數 26 步(8*2+10=26)
3→5→7→10→8→7→10→9→7→6→5→10
→9→5→4→10→3→1→10→9→3→2→10
→9→2→1

	14	15	13
	1	2	3
	4	6	5
	7	8	9
	10	11	12

最少步數 33 步(8*3+9=33)
4→7→10→14→11→15→12→9→15→10→14
→ 13→10→8→7→14→13→7→6→15→5→14
→4→1→14→13→4→2→15→3→13→2→1

	13	14	15
	1	2	3
	4	5	6
	7	8	9
	10	11	12

順序不變的最少步數 34 步(8*3+10=34)
4→7→10→14→11→15→12→9→15→10
→14→13→10→8→7→14→13→7→5→
15→6→3→15→2→14→4→1→2→13→4→
13→2→13→1

將結果整理如下表：

圖型	5*2	5*3	5*4
最少步數	25	33	41
規則	8*2+9	8*3+9	8*4+9
按照順序最少步數	26	34	42
規則	8*2+10	8*3+10	8*4+10

3、討論

(1) 向下輪換型最少步數一般規則

m=3 的最少步數規則為 4n+5 → (2*2)n+5 → 2*(3-1)n+ 2*3-1

m=4 的最少步數規則為 6n+7 → (2*3)n+7 → 2*(4-1)n+ 2*4-1

m=5 的最少步數規則為 8n+9 → (2*4)n+9 → 2*(4-1)n+ 2*4-1

……↓ ↓…….

由此推論向下輪換型最少步數的一般規則為 2(m-1)n+2m-1

(2)向下輪換型的最少步數比向上輪換型多 2 步，因為向下輪換型一開始移動的那個棋子和後段收尾時都各多 1 步，總計多 2 步。(請見現場說明)

(3) 向下輪換型順序不變最少步數的一般規則

m=3 的最少步數規則為 4n+6 → (2*2)n+6 → 2*(3-1)n+ 2*3

m=4 的最少步數規則為 6n+8 → (2*3)n+8 → 2*(4-1)n+ 2*4

m=5 的最少步數規則為 8n+10→ (2*4)n+10 → 2*(5-1)n+ 2*5

……↓ ↓……

由此推論順序不變最少步數的一般規則為 2(m-1)n+2m

（4）順序不變最少步數的一般規則同樣比最少步數的一般規則多 1 步。

(三)mn 上下列交換型

1、方法

將原始圖型增加為 4 列、5 列時，盡可能找出最少步數的規則，並推測 m 列時的最少步數規則。

2、結果

(1) 4n 上下列交換型

原始圖型

*	1	2
	3	4
	5	6
	7	8

完成圖型

	7	8
	3	6
	4	5
	1	2

移動順序說明

最少步數 22 步

3→1→4→6→1→2→6→5→7→1→2→7→8→2→5→4→7→8→4→6→8→3

	10	11	12
	4	8	5
	6	9	7
	1	3	2

最少步數 32 步
4→2→5→3→6→9→3→8→2→1→8→7→11→3→12→2→1→11→10→1→9→12→7→6→12→5→11→10→6→8→10→4

(2) 5n 上下列交換型

原始圖型　　完成圖型　　移動順序說明

	1	2
	3	4
	5	6
	7	8
	9	10

	10	9
	3	4
	5	6
	8	7
	1	2

最少步數 32 步
3→1→4→6→1→2→6→5→7→1→2→7→8→9→1→2→9→10→2→8→7→9→10→7→5→6→9→10→6→4→10→3

	13	14	15
	4	5	6
	7	8	9
	12	11	10
	2	3	1

最少步數 46 步
4→1→5→2→6→9→2→3→9→8→3→7→10→3→1→10→11→1→12→15→1→2→15→14→3→13→2→11→13→12→10→13→7→15→14→10→8→9→15→14→9→6→14→5→13→4

(3) 6n 上下列交換型

原始圖型　　完成圖型　　移動順序說明

	11	12
	3	6
	5	4
	7	8
	10	9
	1	2

最少步數 42 步
3→2→4→6→2→1→6→5→8→2→1→8→7→9→2→1→9→10→12→2→1→12→11→1→10→9→12→11→9→7→8→12→11→8→5→4→12→11→4→6→11→3

	18	17	16
	4	5	6
	7	9	8
	10	12	11
	13	15	14
	2	1	3

最少步數 60 步

4→1→5→2→6→9→2→3→9→8→12→2→3→7→1→12→11→14→2→3→14→1→10→13→16→2→1→16→17→1→3→15→18→3→15→14→16→18→14→11→18→17→13→10→12→18→17→12→7→16→8→9→16→17→9→6→17→5→18→4

3、.討論

(1)最少步數一般規則

m=2 的最少步數規則為 2n+1 → (2*1)n+1 → 2*（2*3-3）n+1

m=3 的最少步數規則為 6n+1 → (2*3)n+1 → 2*（2*3-3）n+1

m=4 的最少步數規則為 10n+2 → (2*5)n+2 → 2*（2*4-3）n+2*(4-3)

m=5 的最少步數規則為 14n+4 → (2*7)n+4 → 2*（2*5-3）n+2*(5-3))

m=6 的最少步數規則為 18n+6 → (2*9)n+6 → 2*（2*6-3）n+2*(6-3)

……↓↓……

由此推論 m=2、3 的最少步數規則為特列 ，公式為 2(2m-3)n+1

而 m>4 時，猜測其最少步數規則為 2(2m-3)n+2(m-3)

（2）在上下列對調的情形，m=2、3 時和 m=4、5、6…時的規則不一樣。因為暫停空格只有 1 個，在 m=2、3 時，開始的讓步可以移到暫停空格，只需加 1 步。但是 m>4 時，沒有足夠的暫停空格，棋子移動時會被堵在下面，所以每多一列就要多 4n+2 步。

四、探討 2n 型暫停格在不同位置的最少步數

（一）方法

在二列的狀況下，將[暫停格]移到上、下、左、右不同位置，尋找上下對調及上下對調後數字順序不變的最少步數。

（二）結果

說明：下圖，周圍可當暫停格的位置皆有兩個數字。在每一個可當暫停格內，左邊的數字是最少步數，右邊的數字是順序不變的最少步數。

2*2 圖型

	8、8	8、8	
5、6	1	2	5、6
5、6	3	4	5、6
	8、8	8、8	

2*3 圖型

	10、11	10、11	10、11	
7、9	1	2	3	7、9
7、9	4	5	6	7、9
	10、11	10、11	10、11	

2*4 圖型

	12、14	12、14	12、14	12、14	
9、12	1	2	3	4	9、12
9、12	5	6	7	8	9、12
	12、14	12、14	12、14	12、14	

2*5 圖型

	14、17	14、17	14、17	14、17	14、17	
11、15	1	2	3	4	5	11、15
11、15	6	7	8	9	10	11、15
	14、17	14、17	14、17	14、17	14、17	

將結果整理如下表：

圖型		2*2	2*3	2*4	2*5	……	2*n
左右的暫停格	最少步數	5	7	9	11	……	2n+1
	順序不變最少步數	6	9	12	15	……	3n
上下的暫停格	最少步數	8	10	12	14	……	2n+4
	順序不變最少步數	8	11	14	17	……	3n+2

（三） 討論

1、暫停空格在上列的左、右邊和下列的左、右邊時，最少步數的公式一樣是2n+1，順序不變的最少步數公式一樣是 3n。因為在兩列時只有對調，不管空格在上列或下列的左右邊，結果都一樣。

2、暫停空格在圖型上面或下面時，最少步數的公式為 2n+4，因為一開始和中間各有 1 次需移到暫停格，共多 4 步，也就比暫停格在旁邊時多 3 步。

3、暫停空格在圖型上面或下面時，對調後數字順序不變的最少步數公式為 3n+2。

伍、結論

將遊戲橫列數（代號為 m）增加，目前最少步數的主要發現整理如下：

向上輪換及向下輪換型

圖型(列數)	向上輪換型		向下輪換型	
	最少步數	順序不變最少步數	最少步數	順序不變最少步數
3n 型(m=3)	4n+3	4n+4	4n+5	4n+6
4n 型(m=4)	6n+5	6n+6	6n+7	6n+8
5n 型(m=5)	8n+7	8n+8	8n+9	8n+10
……	……	……	……	……
mn 型(m 列)	2(m-1)n+2m-3	2(m-1)n+2m-2	2(m-1)n+2m-1	2(m-1)n+2m

*m=橫列數, n=直行數

上下列交換型

圖型(列數)	最少步數	順序不變最少步數
3n 型(m=3)	6n+1	7 n
4n 型(m=4)	10n+2	12n
5n 型(m=5)	14n+4	—
6n 型(m=6)	18n+6	—
……	……	—
mn 型(m 列 n 行)	2(2m-3)n+2(m-3)[1]	—

[1]: m>3 時才適用這個規則

一、 2n 型「改頭換面」遊戲的探討

(一) 每一行的棋子要完成輪換，在沒有任何阻擋的狀況下，至少需要 2 步。

(二) 因為一開始時要把 1 顆棋子移到暫停格，所以會多 1 步，公式是 2n+1。

(三) 將棋子加以編號後，完成圖型要依照順序編號，則新解答為 ：3n。

這 3n 和(2n+1)的多出來的步數為 ：

1. 最少步數和依照順序編號在 2*1 時步數一樣。
2. 之後每多 1 直行依照順序編號就比最少步數多 1 步。(因最少步數除了第 1 行要 3 步，其餘只要 2 步，但依照順序編號每次都要 3 步)

(四) 棋子給予編號後，真的[改頭換面]了！我發現這其中有更多的變化可以探討。

二、3n 型「改頭換面」遊戲的探討

(一) 3n 向上輪換型的探討

1. 每 1 行的棋子要完成輪換，在沒有任何阻擋的狀況下，至少需要 4 步(2 步向上，2 步向下)。
2. 因為每 1 個棋子都要至少動 1 次，會需要有 2 次的讓路，其中 1 次移到暫停格之後再移到位，所以只有多 1 步。另外 1 次是到位後才要讓，所以會多 2 步，所以總共會多 3 步。
3. 最少步數=4n+3。
4. 3n 向上輪換型順序不變的最少步數規則是 4n+4。

5. 順序不變的最少步數每個都比最少步數多 1 步，那是因為依照順序編號只有在中間時多動了 1 步來調整棋子順序。

(二) 3n 型向下輪換狀的探討

1. 每一行的棋子要完成輪換，在沒有任何阻擋的狀況下，至少需要 4 步。(2 步向上，2 步向下)
2. 因為每一個棋子都要至少動 1 次，會需要有 4 次的讓路，其中 1 次讓路時是往反方向，所以會多 2 步，另外 3 次就只是讓路而已，會多 3 步，所以總共會多 5 步。
3. 最少步數=4n+5。
4. 3n 向下輪換型因走法問題，除了第一排的最左邊兩個棋子對換其餘順序都沒變。
5. 3n 向下輪換型順序不變的最少步數規則是 4n+6。
6. 編號順序不變的最少步數每個都比最少步數多 1 步，那是因為依照順序編號只有在中間時多動　了 1 步來改變棋子順序。
7. 向下輪換型的最少步數比向上輪換型多 2 步。

(三) 3n 上下列交換型的探討

1. 每一行的棋子要完成對換，在沒有任何阻擋的狀況下，至少需要 6 步(3 步向上，3 步向下，因為中間的移開再移回來)。
2. 最少步數=6n+1 (因為每 1 排都要動 1 次，加上 1 次 1 個棋子的讓路) 。
3. 順序不變的最少步數規則是 7n。

三、mn 型「改頭換面」遊戲的探討

(一)mn 向上輪換型的一般公式

1. 最少步數的一般規則為 2(m-1)n+2m-3。
2. 順序不變的最少步數一般規則為 2(m-1)n+2m-2。

(二)mn 向下輪換型一般公式

1. 最少步數的一般規則為 2(m-1)n+2m-1。

2. 順序不變的最少步數一般規則為 2(m-2)n+2m。

（三）以上四個規則依序多 1 步。

(四)mn 上下列交換型一般公式

1. m≦3 時，最少步數一般規則為 2(2m-3)n+1。

2. m≧4 時，最少步數一般規則猜測為 2m-3)n+2(m-3)。

四、空格移位 2n 型「改頭換面」遊戲的探討

(一)2n 上下排一般公式

1. 2n 暫停格在上下排的最少步數規則為 2n+4。

2. 2n 暫停格在上下排順序不變的最少步數規則為 3n+2。

陸、展望

一、暫停格位置改變時對最少步數的影響

二、暫停格數量改變時對最少步數的影響

三、把棋子編號後用亂數方式的「原始圖型」排在棋盤上，然後移動成依數字順序的「完成圖型」，是否可以預測最少步數? 不同形狀對最少步數的影響。

柒、參考資料

Brian Bolt 著，黃啟明譯（1995）。數學遊樂園之老謀深算。台北市：牛頓出版社。

黃金鐘主編（2014）。國小數學六年級（下）南一版，第二單元:怎樣解題(一)。台南市: 南一書局。

【評語】080409

本研究主要目的在探討並推廣「移位」遊戲；在課外閱讀中獲得靈感，從 $2n$ 型出發，逐步推廣至 $3n$ 型與 mn 型，循序漸進地探究，說理清晰，論述有條理，值得稱許。