

中華民國第 55 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組 數學科

最佳創意獎

080407

翻轉卡片及翻轉盒展開圖之探討

學校名稱：嘉義市東區崇文國民小學

作者：	指導老師：
小五 羅以真	蔡佳惠
小五 羅尹岑	翁秀玉
小五 蔡宛儒	
小六 洪耦森	
小六 李孟家	

關鍵詞：平移、旋轉、展開圖

摘要

本研究目的旨在分析翻轉卡片、正立方體翻轉盒及三角形翻轉盒，並進一步設計出展開圖，應用電腦軟體切割照片貼在展開圖上，列印後再組裝成翻轉卡片或翻轉盒，可透過翻轉動作一直變換不同照片，成為展示照片的有趣商品。結果發現，翻轉卡片可展示四面照片，本研究設計出 A4 尺寸正反面的展開圖；而正立方體翻轉盒由 8 個方塊組合而成，連接線位置不同共產生 8 種翻轉類型，其中以「型 2-1-1」可出現六面為最多，而且操作翻轉易回第一面，以座標位移、旋轉方位及動用到的連接線三種方式證明「型 2-1-1」類型可以回到第一面；此外，也分析單一正立方體的 11 種展開圖及三角柱的 23 種展開圖，挑選出適合的展開圖，設計出正立方體翻轉盒及三角形翻轉盒的平面展開圖。

壹、研究動機

寒假作業要交出一個與春節有關的立體作品，左思右想上網無意間看到翻轉盒，它是由 8 個正立方體組裝而成的立體作品，就在這些面上貼上春節的圖案，再利用方塊與方塊之間巧妙地用膠帶連接，就能不停地翻轉，產生不同的面，非常有趣，而這讓我們思考為什麼黏貼這些位置就能產生不停翻轉的效果，令人好奇。

後來，再繼續查相關翻轉的影片，又發現有翻轉卡片的翻轉，但是這些翻轉卡片或翻轉盒上的照片都是要用手工切割一張張的照片後再黏貼上去的，我們就想，如果能夠直接在電腦上剪裁及黏貼照片，再列印出來組裝，就可以自己 DIY 照片，製作出展示照片的有趣商品了，所以，我們希望設計出三種翻轉品的展開圖。（教材相關性：南一版第九冊第六單元長方體與正方體）



貳、研究目的

- 一、研究一、網路上翻轉卡片及正方立體翻轉盒的製作方法之探討
- 二、研究二：設計翻轉卡片的展開圖
- 三、研究三：分析正方體翻轉盒連接線位置不同所產生的類型及翻轉面數
- 四、研究四：設計正立方體翻轉盒展開圖
- 五、研究五：分析三角形翻轉盒面數及設計展開圖

參、研究器材與設備

紙、剪刀、美工刀、膠帶、標籤紙、小積木、電腦、印表機。

肆、研究過程、結果與討論

研究一、網路上翻轉卡片及正方立體翻轉盒的製作方法之探討

(一) 翻轉卡片：網路上的翻轉卡片 (網址https://www.youtube.com/watch?v=s_PP5JV8ub0&app=desktop)

1. 網路上的製作方法： 表一-1：網路上翻轉卡片底圖的作法

(1)各使用 2 張橫長型、狹長型的底紙)	(2)第 3 張與下層的第 1、2 張紙左側黏貼	(3)第 4 張與下層的第 1、2 張紙右側黏貼

2. 操作翻轉可出現的面數

操作 4 次的翻轉，可以出現 4 面，第一、二、四面都是橫長型的長方形，第三面是狹長型的長方形，而且左右二側多出屬於第二面的 2 小塊，稱為亂面(表一-2 的第三面)，但狹長型的長方形(紅框線)還算是完整的。 表一-2：翻轉卡片可出現的面數

第一面(A 面)	第二面(B 面)	第三面(C 面紅框線)	第四面(D 面)

3. 手工切割照片再組合在底紙上：選出 4 組照片，照片必須切割後，再黏貼在底紙上。

表一-3：切割 4 組照片及黏貼於底圖

第一面(A 面) 左右切割成 2 小張	第二面(B 面) 切割成 4 小張	第三面(C 面) 切割成 6 小張

		
第四面(D面) 上下切割成2小張	切割後的照片黏貼在底紙上	

【值得探討】設計翻轉卡片的展開圖

手工黏貼的過程中發現，要將照片對齊的很準，相當麻煩，貼歪了，撕開必須非常小心，如果設計出展開圖，就能不必手工切割照片，在電腦軟體切割組合即可。

(二) 正立方體翻轉盒：網路上的翻轉盒

正立方體翻轉盒一共由8個小方塊所組合而成，組合方法如下：

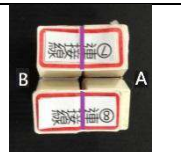
1. 網路上8個小方塊的組合

(1)A組：4個小方塊的連接邊共有3條，①連接線在正面下方，②、③連接線在二邊的側面，完成A組的4個小方塊；

(2)B組：以同樣方法製作B組的4個小方塊(編號為第④、⑤、⑥條連接邊)。

(3)AB組結合：以上的方法完成2組後，從最上方，再以第⑦、⑧條連接邊分別連接A+B組，形成一共8個小方塊的正立方體翻轉盒。

表一-4：網路上8個小方塊連接線的組合

					
A組的①連接線(紫線)	A組的②連接線(紫線)	A組的③連接線(紫線)	B組的④⑤連接線(紫線)	B組的④⑥連接線(紫線)	利用⑦和⑧連接線組合A+B組

【值得探討】連接線的位置

連接線的位置不同，就會產生不同的翻轉，能夠操作翻轉的次數越多，產生的面數就越多，就能放越多組照片，那連接線應該要如何組合才能獲得較多的面數？

2. 手工切割照片再組合在小方塊上

網路上作法是將照片手工切割後，再黏貼在小方塊上。

【值得探討】設計正立方體翻轉盒的展開圖

手工切割照片很不方便，如果設計出正立方體翻轉盒的展開圖，就能直接利用電腦上軟體切割組合即可。

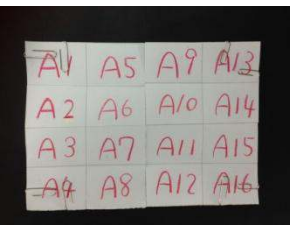
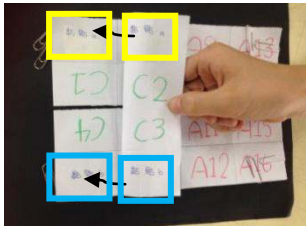
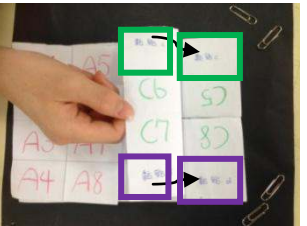
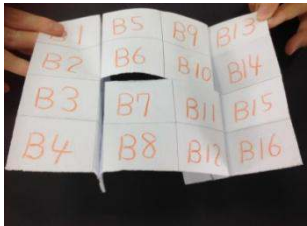
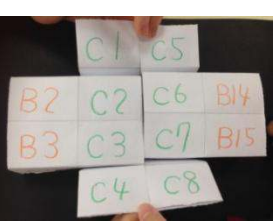
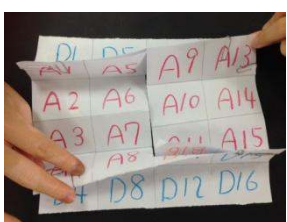


二、研究二：設計翻轉卡片的展開圖

(一)翻轉卡片的面數及分析

由研究一之表一-2 得知，翻轉卡片後可產生 A~D 四面，最後回到 A 面；為了找出四面照片的位置，先用一張 A4 紙折成 4 小張，以表一-1 的方法製作翻轉卡片的底紙，原本以雙面膠黏貼處(佔 16 分之一面積)，則改用迴紋針暫時固定，操作翻轉的動作，分別在四面上，由上而下，左而右，寫上每面的小編號，例如：A 面寫上 A1~A16，區分為 16 小格。

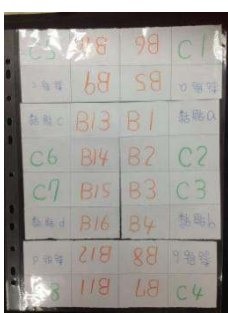
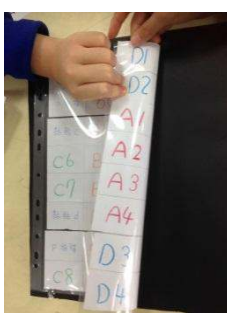
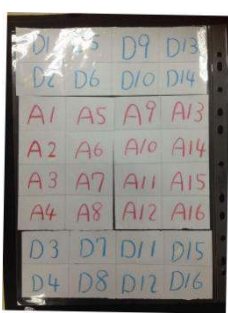
表二-1：翻轉卡片的面數編號

			
第一面 A 面 A1~A16	黏貼處 a(黃色) b(藍色)	黏貼處 c(綠色) d(紫色)	左右翻開到 第二面 B 面 B1~B16
			
上下翻開	第三面 C 面 C1~C8 出現 B 亂面	左右翻開到 第四面 D 面 D1~D16	上下翻開 回到第一面 A 面

(二)翻轉卡片的展開圖設計

將迴紋針移除後，拆散 4 張底紙排成 A4 尺寸，比對黏貼處要鄰近，a 對 a、b 對 b、...等，就能找到卡片正反面中各小面的所有編號，即為設計圖，切割線為在中間形成「工」字。

表二-2：找出 A4 尺寸的翻轉卡片設計圖

				
迴紋針移除後排 成 A4 尺寸	尋找各 2 個 a、b、 c、d 黏貼處能夠相 鄰	確認好位置的紙放 入透明夾 (稱為卡片反面)	翻到背面	得知另一面的編 號位置 (稱為卡片正面)

(三)電腦軟體切割及貼上照片

選擇四張照片，使用 photcap 軟體，調整照片的長寬比，將整張照片切割成適合的大小，根據編號直接在電腦上貼在不同位置，列印出來後黏貼、切割組合後就能完成翻轉卡片。

<table> <tr><td>D1</td><td>D5</td><td>D9</td><td>D13</td></tr> <tr><td>D2</td><td>D6</td><td>D10</td><td>D14</td></tr> <tr><td>A1</td><td>A5</td><td>A9</td><td>A13</td></tr> <tr><td>A2</td><td>A6</td><td>A10</td><td>A14</td></tr> <tr><td>A3</td><td>A7</td><td>A11</td><td>A15</td></tr> <tr><td>A4</td><td>A8</td><td>A12</td><td>A16</td></tr> <tr><td>D3</td><td>D7</td><td>D11</td><td>D15</td></tr> <tr><td>D4</td><td>D8</td><td>D12</td><td>D16</td></tr> </table>	D1	D5	D9	D13	D2	D6	D10	D14	A1	A5	A9	A13	A2	A6	A10	A14	A3	A7	A11	A15	A4	A8	A12	A16	D3	D7	D11	D15	D4	D8	D12	D16	<table> <tr><td>C5</td><td>$\overline{018}$</td><td>$\overline{98}$</td><td>C1</td></tr> <tr><td>黏貼 a</td><td>$\overline{68}$</td><td>$\overline{58}$</td><td>黏貼 c</td></tr> <tr><td>黏貼 a</td><td>B13</td><td>B1</td><td>黏貼 c</td></tr> <tr><td>C6</td><td>B14</td><td>B2</td><td>C2</td></tr> <tr><td>C7</td><td>B15</td><td>B3</td><td>C3</td></tr> <tr><td>黏貼 b</td><td>B16</td><td>B4</td><td>黏貼 d</td></tr> <tr><td>黏貼 b</td><td>$\overline{128}$</td><td>$\overline{88}$</td><td>黏貼 d</td></tr> <tr><td>C8</td><td>$\overline{118}$</td><td>$\overline{78}$</td><td>C4</td></tr> </table>	C5	$\overline{018}$	$\overline{98}$	C1	黏貼 a	$\overline{68}$	$\overline{58}$	黏貼 c	黏貼 a	B13	B1	黏貼 c	C6	B14	B2	C2	C7	B15	B3	C3	黏貼 b	B16	B4	黏貼 d	黏貼 b	$\overline{128}$	$\overline{88}$	黏貼 d	C8	$\overline{118}$	$\overline{78}$	C4
D1	D5	D9	D13																																																														
D2	D6	D10	D14																																																														
A1	A5	A9	A13																																																														
A2	A6	A10	A14																																																														
A3	A7	A11	A15																																																														
A4	A8	A12	A16																																																														
D3	D7	D11	D15																																																														
D4	D8	D12	D16																																																														
C5	$\overline{018}$	$\overline{98}$	C1																																																														
黏貼 a	$\overline{68}$	$\overline{58}$	黏貼 c																																																														
黏貼 a	B13	B1	黏貼 c																																																														
C6	B14	B2	C2																																																														
C7	B15	B3	C3																																																														
黏貼 b	B16	B4	黏貼 d																																																														
黏貼 b	$\overline{128}$	$\overline{88}$	黏貼 d																																																														
C8	$\overline{118}$	$\overline{78}$	C4																																																														
圖二-1：翻轉卡片正面設計圖	圖二-2：翻轉卡片反面設計圖																																																																
圖二-3：卡片正面拼貼照片 紅線-A面 綠線-D面 黃線-切割線	圖二-4：卡片反面拼貼照片 紅線-B面 綠線-C面 黃線-切割線																																																																

(四) 列印並組裝：列印 A4 的展開圖，剪下來組裝就能變成翻轉卡片，實品如表二-3 (製成

影片 請點選 <https://www.youtube.com/watch?v=82P9MkW8br8>)

表二-3：列印組合完成的翻轉卡片實品

A 面(A1~A16)	B 面(B1~B8)	C 面(C1~C8)	D 面(D1~D16)

三、研究三：分析正方體翻轉盒連接線位置不同所產生的類型及翻轉面數

(一)方塊之間的連接線位置

1. 問題一：1 個方塊能有幾條連接線？

條件：1 個方塊只能有 2 條連接線

(1) 1 條連接線：如果只有 1 條連接線，就只能連接 2 個方塊，無法連接第 3 個方塊，則無法形成 8 個方塊的翻轉盒。

(2) 3 條以上的連接線：3 個方塊組合時，以 C1 為例，有 3 條連接線(紅線)，其餘 3 塊方塊在翻轉時就會產生空間重疊的狀況，例如 C4 翻到下面，C2 往左翻轉，二個方塊就重疊(圖三-1)。

(3) 綜合以上，1 個方塊只能有 2 條連接線。

2. 問題二：第 1 塊方塊第 2 條連接線 L2 的位置為何？

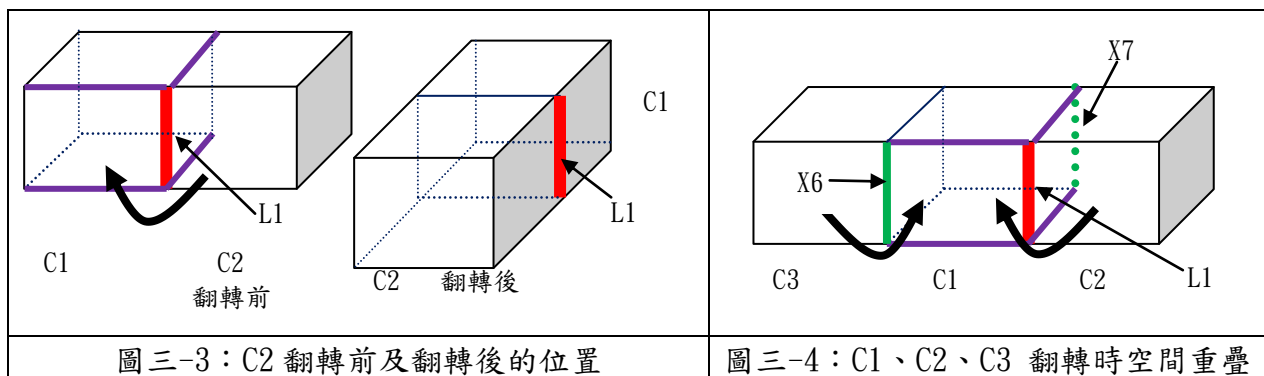
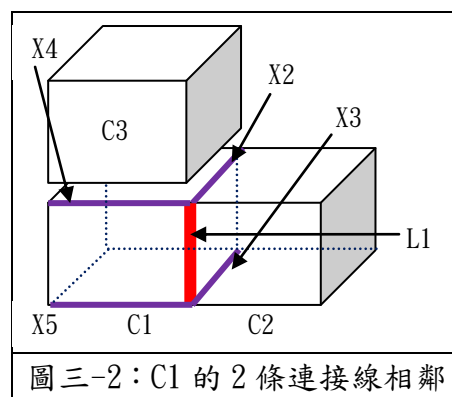
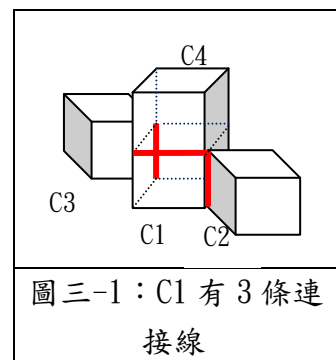
由問題一得知，每 1 個方塊有 2 條連接線，在圖三-2 中，我們先從 C1 和 C2 這 2 個方塊開始，先固定 C1 和 C2 的連接線 L1 的位置(紅線)，再加上 C3，找出第 2 條連接線 L2 的位置應該在何處。

(1) 條件一：2 條連接線不相鄰

如果 L1 和 L2 這 2 條連接線相鄰時，就會成直角而卡住，則 C1 就不能翻轉。例如，圖三-2 中設 L1(紅線) 為 C1 的第 1 條連接線，周圍有 4 條相鄰的 X2~X5(紫線)就不能成為第 2 條連接線 L2。

(2) 條件二：3 塊方塊之間翻轉時空間不重疊

以 C1 來看，設定 L1(紅線)的位置後，如果第 2 條連接線是 X6(圖三-4 綠線)，則 C2、C3 同時翻轉時，C2 及 C3 的空間會重疊(圖三-4)，所以平行的 X6(綠線)不行；同理，C1 右後方的 X7(綠色虛線)也是不行(圖三-4)。

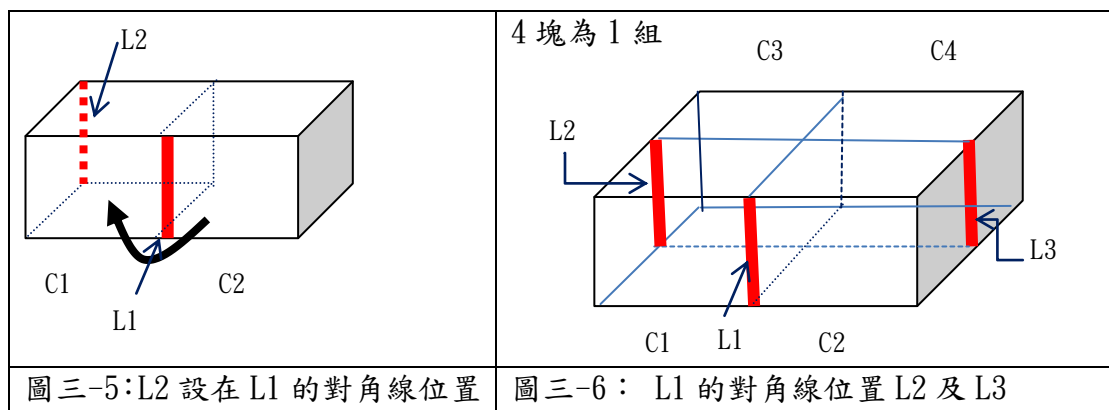


(3)綜合條件一及條件二：**L2 只剩下對角線及側邊 2 個位置**

刪除 X2~X5(紫線)及 X6~X7(綠線)後，L2 只剩下對角線及側邊 2 個位置。

A. 型 1：L2 在對角線位置

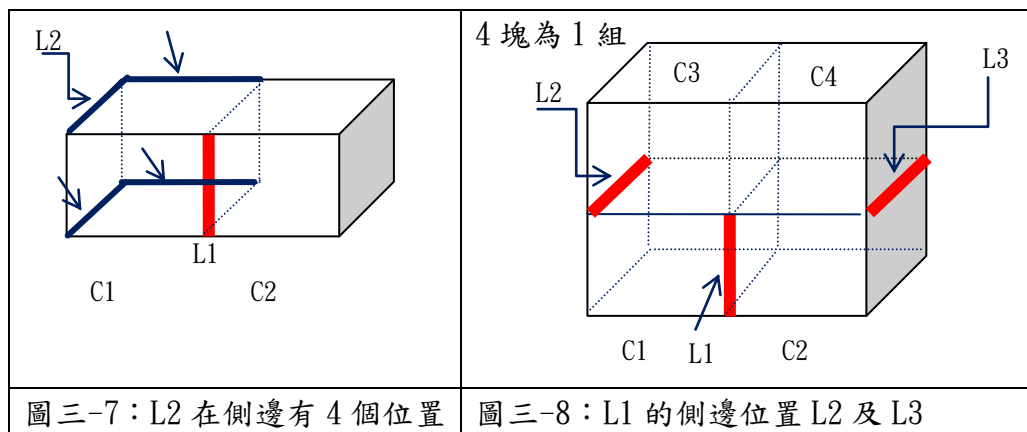
第 2 條連接線 L2 設在 L1 的對角線位置(圖三-5)，當我們以 4 塊為一組時，以對稱的方式找到 C3、C4 的連接線 L3 的位置。



B. 型 2：L2 在側邊位置

a. 4 條側邊位置(箭頭處)對於 L1 而言是對稱的，所以，我們只選其中 1 個位置(L2)繼續探討(圖三-7)。

b. 第 2 條連接線 L2 選定其中一個位置後，以 4 塊為一組時，並以對稱的方式找到第 3、4 塊連接線 L3 的位置(圖三-8)。



(4)每 4 塊為一組，翻轉盒由 A、B 二組組合而成：

我們設定的翻轉盒有 8 塊方塊，先以 4 塊形成一組，稱為 A 組，會有 L1、L2 及 L3 共 3 條連接線，以同樣方法製作另外 4 塊方塊稱為 B 組，會有 L4、L5 及 L6 共 3 條連接線，A、B 組合起來一共是 8 塊，接著根據「型 1：L2 在對角線位置」及「型 2：L2 在側邊位置」，繼續探討 A、B 組如何組合。

3. 問題三：A、B 組之間連接線的位置

(1) 4 塊方塊以「型 1：L2 在對角線位置」為一組的情況，探討 A、B 組之間連接線 L7 及的位置：

以 L2 在對角線位置的方式來組合 4 塊方塊，則會形成 4 塊同一層的情況，圖三-9 中 A 組在上層，B 組在下層，二組要連接起來，根據表一-4 組合 A+B 組要有 2 條連接線，我們先以 A 組左前方的 C4 進行分析，試圖先找出 1 條連接線的位置：

A. 條件一：每個方塊有 2 條連接線

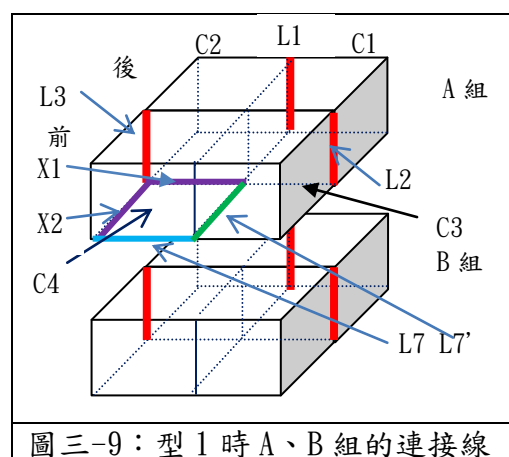
後層的 C1 有 L1 及 L2，C2 有 L1 及 L3，也就是 C1 及 C2 都有 2 條連接線，所以 A、B 組之間的連接線，只能安排在前層的方塊 C3 及 C4（圖三-9）。

B. 條件二：連接線要鄰近 B 組的面

A 組要和 B 組連接起來，因此，連接線應該要鄰近 B 組，就是 C4 接近 B 組的底面 4 條線，有 X1、X2（紫線）、L7（藍線）、L7'（綠線）。

C. 條件三：2 條連接線不相鄰

以 C4 來看，以上 4 條線不與 L3 相鄰，則只剩下 L7（藍線）、L7'（綠線）2 條可做為連接線（圖三-9）。



D. 綜合以上：以箭頭處所指的 C4 分析，可以成為連接 A、B 組的連接線，依序符合條件一、二、三的只剩下 2 條線，分別稱為「型 1-1：外線」（藍線）和「型 1-2：內線」（綠線），我們依照以上方式做出實品，實際操作紀錄翻轉面數及優缺點如下：

表三-1：型 1-1 及型 1-2 之翻轉面數及優缺點

後 前 A 組 B 組 L7 L8	後 前 A 組 B 組 L7 L8
【型 1-1：外線】 連接線 L7 及 L8 以外線（藍線）組合	【型 1-2：內線】 連接線 L7 及 L8 以內線（綠線）組合
1. 可產生 3 面 2. 翻轉不順暢 3. 不易回到第 1 面	1. 可產生 4 面 2. 翻轉不順暢 3. 不易回到第 1 面

(2)4 塊方塊以「型 2：L2 在側邊位置」為 1 組的情況，探討 A、B 組之間連接線的位置：

以 L2 在側邊位置的方式來組合 4 塊方塊，則會形成直立式，以下以 A 組上層 C3(箭頭處)進行分析：

A. 條件一：每個方塊有 2 條連接線

下層的 C1 及 C2 都已經有 2 條連接線(紅線)，所以 A、B 組之間的連接線，只能安排在上層 C3 及 C4。

B. 條件二：連接線要鄰近 B 組的面

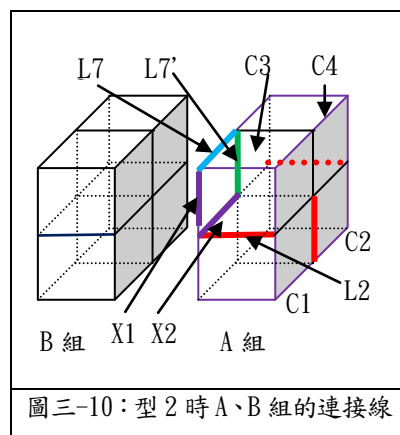
連接線應該要鄰近 B 組，有 X1、X2(紫線)、L7(藍線)、L7' (綠線)。

C. 條件三：2 條連接線不相鄰

以 C3 來看，不與 L2 相鄰的，所以只剩下 L7(藍線)、L7' (綠線)可做為連接線。

D. 綜合以上：

以 C3 分析依序符合條件一、二、三成為連接 A、B 組的連接線，分別稱為「型 2-1：外線」(L7 藍線)和「型 2-2：內線」(L7' 綠線)，可再分別探討，但在組合時的方位又可以分為「背對背」、「同方向」及「面對面」三種，以下繼續探討。



圖三-10：型 2 時 A、B 組的連接線

4. 問題四：A、B 組連接時的方位

(1) 型 2-1 情況，A、B 組連接線為外線(藍線)時：

A、B 組排列時，以紅線連接線的方位分為「型 2-1-1：背對背」、「型 2-1-2：同方向」及「型 2-1-3：面對面」三種組合，操作實品得到翻轉面數及優缺點如下：

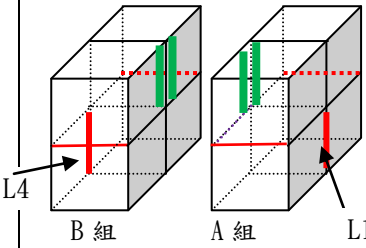
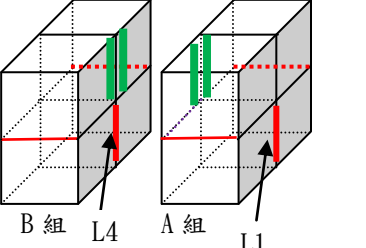
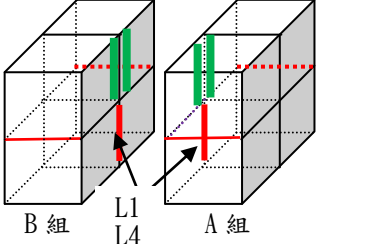
表三-2：型 2-1-1、型 2-1-1 及型 2-1-3 之翻轉面數及優缺點

B 組 A 組 L1	B 組 L4 A 組 L1	B 組 L4 A 組 L1
【型 2-1-1】：A、B 組「背對背」組合 L1、L4 是背對背	【型 2-1-2】：A、B 組「同方向」組合 L1、L4 是同方向	【型 2-1-3】：A、B 組「面對面」組合 L1、L4 是面對面
1. 可產生 6 面 2. 翻轉順暢 3. 容易回到第 1 面	1. 可產生 3 面 2. 翻轉不順暢 3. 不易回到第 1 面	1. 可產生 4 面 2. 翻轉不順暢 3. 不易回到第 1 面

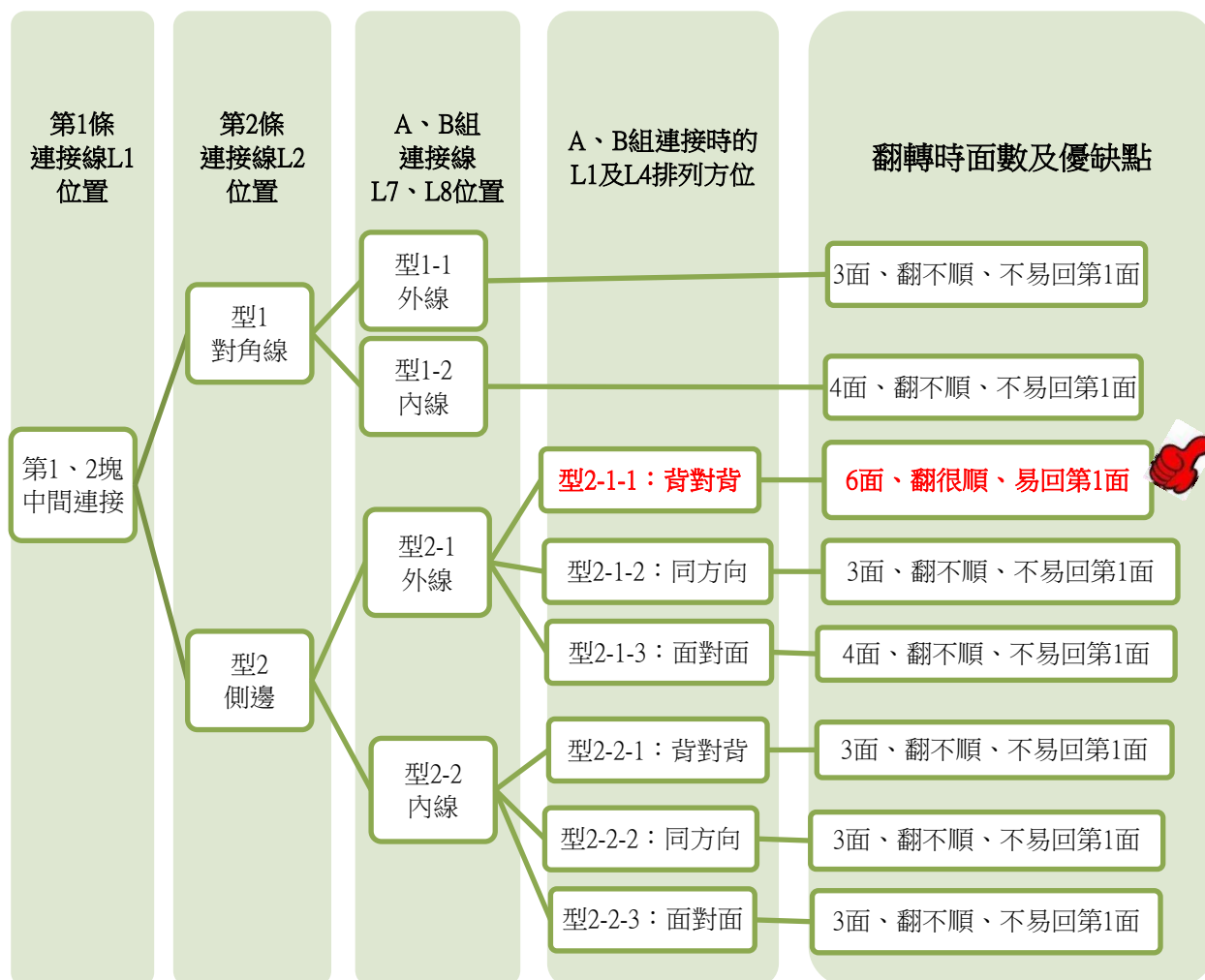
(2) 型 2-2 情況，A、B 組連接線為內線(綠線)時：

A、B 組排列時，以紅線連接線的方位分為「型 2-2-1：背對背」、「型 2-2-2：同方向」及「型 2-2-3：面對面」三種組合，操作實品得到翻轉面數及優缺點如下：

表三-3：型 2-2-1、型 2-2-2 及型 2-2-3 之翻轉面數及優缺點

 B 組 A 組 L1	 B 組 L4 A 組 L1	 B 組 L1 L4 A 組
【型 2-2-1】：A、B 組「背對背」組合 L1、L4 是背對背	【型 2-2-2】：A、B 組「同方向」組合 L1、L4 是同方向	【型 2-2-3】：A、B 組「面對面」組合 L1、L4 是面對面
1. 可產生 3 面 2. 翻轉不順暢 3. 不易回到第 1 面	1. 可產生 3 面 2. 翻轉不順暢 3. 不易回到第 1 面	1. 可產生 3 面 2. 翻轉不順暢 3. 不易回到第 1 面

小結：綜合以上，8 個小方塊組成正立方體翻轉盒所有連接線位置分類如圖三-11：



圖三-11：正立方體翻轉盒連接線位置類型圖

8 種類型製成影片 請點選 <https://www.youtube.com/watch?v=8cHE4M7ck9E>

註：「不易回第 1 面」表示順著展開的位置翻轉不容易翻回第 1 面

(二)翻轉方式決定採用「不旋轉的翻轉方式」

由圖三-11 得知，型 2-1-1 是最佳的翻轉盒，以下皆以此模型繼續深入探討。若以型 2-1-1 製作的翻轉盒，整個翻轉盒是否「旋轉」(不是翻轉)會影響產生的面數，如果採用整個翻轉盒可以旋轉，則會產生亂面及重複面，而且不容易轉回第一面，因此本研究採用整個翻轉盒完全不旋轉，直接找到可展開的位置打開，此翻轉方式稱為「不旋轉的翻轉方式」，此方法不會產生亂面及重複面，而且很容易轉回第一面，只是有 8 小面是空白面，分析過程在表三-4 說明。

(三) 翻轉的過程與產生的面數之討論

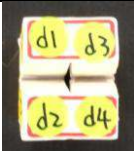
1. 操作翻轉的過程中，一共產生 A~F 六面。

2. 空白面：每個方塊有 6 面，共有 8 塊，小面總數為： $6 \times 8 = 48$ 面；

計算 6 個步驟的「出現小面數量」總和為： $4 \times 2 + 8 \times 4 = 40$ 面；

二者差距 $48 - 40 = 8$ 面，此為未出現的面，這與我們實際操作中發現，有 8 面小空白面的情況相同。

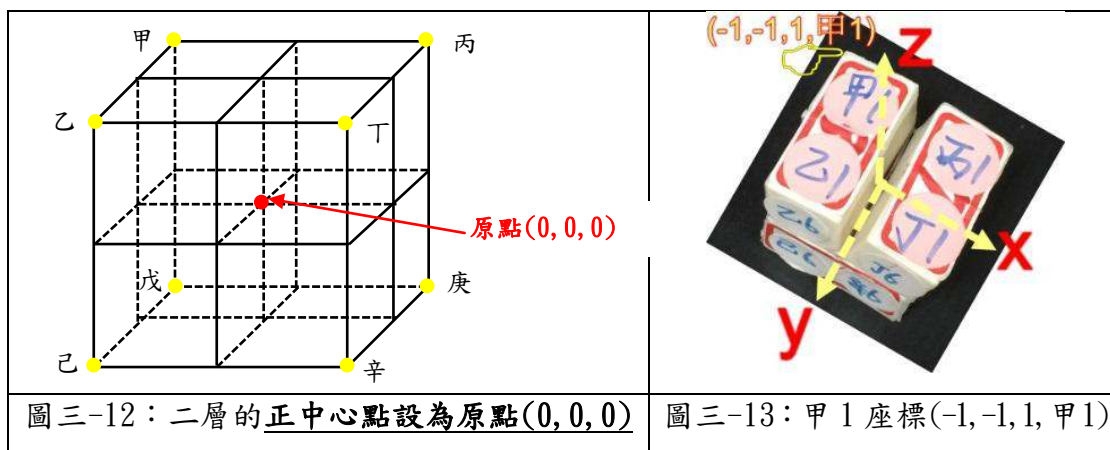
表三-4：正方體翻轉盒以「不旋轉的翻轉方式」翻轉的過程與產生的面數

循環	面數	圖	小面	下一步翻轉動作	
可出 現 6 面 	第一面 A 面		4	左右往外	
	第二面 B 面		8	上下往外	
	第三面 C 面		8	左右往外	
	第四面 D 面		4	上下往外	
	第五面 E 面		8	左右往外	
	第六面 F 面		8	上下往外	
					空白面

(四) 分析翻轉時每個方塊的座標，證明翻轉六次後回到第一面。

1. 座標：(1) xyz 為空間軸，以第一面上層 4 個方塊編號為甲～丁、下層 4 個方塊編號為戊～辛，二層的正中心點設為原點(0, 0, 0)。

(2) 由上往下看翻轉盒，出現的第一面編號為甲 1、乙 1、丙 1、丁 1，以方塊往外的斜對角點，紀錄座標(下圖中的箭頭處，如圖三-12 及圖三-13)：



圖三-12：二層的正中心點設為原點(0, 0, 0)

圖三-13：甲 1 座標(-1, -1, 1, 甲1)

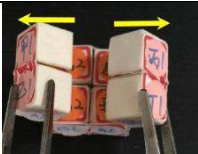
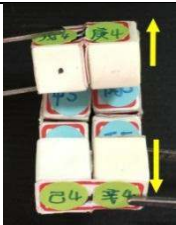
表三-5：正方體翻轉盒翻轉後的所有面的座標(x, y, z, 面)

面數		照片	座標		
第一面 A 面		上層	下層(看不見)		
		(-1, -1, 1, 甲1) (1, -1, 1, 丙1) (-1, 1, 1, 乙1) (1, 1, 1, 丁1)	(-1, -1, 1, 戊1) (1, -1, 1, 庚1) (-1, 1, 1, 己1) (1, 1, 1, 辛1)		
第二面 B 面		(-2, -1, -1, 甲2) (-1, -1, -1, 戊2) (1, -1, -1, 庚2) (2, -1, -1, 丙2) (-2, 1, -1, 乙2) (-1, 1, -1, 己2) (1, 1, -1, 辛2) (2, 1, -1, 丁2)			
第三面 C 面		(-2, -1, -1, 甲3) (-1, -1, -1, 戊3) (1, -1, -1, 庚3) (2, -1, -1, 丙3) (-2, 1, -1, 乙3) (-1, 1, -1, 己3) (1, 1, -1, 辛3) (2, 1, -1, 丁3)			
第四面 D 面		上層	下層(看不見)		
		(-1, -1, 1, 戊4) (1, -1, 1, 庚4) (-1, 1, 1, 己4) (1, 1, 1, 辛4)	(-1, -1, -1, 甲4) (1, -1, -1, 丙4) (-1, 1, -1, 乙4) (1, 1, -1, 丁4)		
面數	照片	座標	面數	照片	座標
第五面 E 面		(-1, -2, -1, 戊5) (1, -2, -1, 庚5)	第六面 F 面		(-1, -2, -1, 戊6) (1, -2, -1, 庚6)
		(-1, -1, -1, 甲5) (1, -1, -1, 丙5)			(-1, -1, -1, 甲6) (1, -1, -1, 丙6)
		(-1, 1, -1, 乙5) (1, 1, -1, 丁5)			(-1, 1, -1, 乙6) (1, 1, -1, 丁6)
		(-1, 2, -1, 己5) (1, 2, -1, 辛5)			(-1, 2, -1, 己6) (1, 2, -1, 辛6)

由表三-5 發現未出現的小面有：甲 4、乙 4、丙 4、丁 4、戊 1、己 1、庚 1、辛 1，共 8 小面。

2. 操作翻轉的六步驟：在表三-6 中發現，有 4 次旋轉+平移，及 2 次平移，皆是偶數。

表三-6：正方體翻轉盒的翻轉六步驟

		
步驟一：旋轉+平移	步驟二：旋轉	步驟三：旋轉+平移
		
步驟四：旋轉+平移	步驟五：旋轉	步驟六：旋轉+平移

3. 小方塊的平移座標改變量及旋轉角度之結果：

第一面的上層甲、乙、丙、丁是對稱的，下層的戊、己、庚、辛是對稱的，分別選擇甲和戊，針對操作翻轉時的步驟一～六，分析平移時座標改變量及旋轉時的角度於表三-7。

平移：以 xyz 座標的改變，例如甲方塊第一面時座標為 $(-1, -1, 1)$ ，翻轉成第二面時甲方塊的座標為 $(-2, -1, -1)$ ，則甲方塊的步驟一就是平移為 $(-1, 0, -2)$ 。

旋轉：例如甲的步驟一是往左方及下方旋轉 180 度，就表示在 xz 平面上旋轉-180 度(以 x 軸的+-為依據)；甲的步驟二是往遠方及下方旋轉 90 度(以立體空間時 y 軸的+-為依據)，就表示在 yz 平面上旋轉-90 度。

表三-7：小方塊甲及戊在翻轉步驟時改變的平移座標改變量及旋轉角度

翻轉 步驟	甲方塊					戊方塊				
	平移			旋轉		平移			旋轉	
	x	y	z	xz 平面 (度)	yz 平面 (度)	x	y	z	yz 平面 (度)	xz 平面 (度)
步驟一	-1		-2	-180		不動				
步驟二					-90				-90	
步驟三	+1			-90				+2		-90
步驟四	不動						-1	-2	-180	
步驟五				-90						-90
步驟六			+2		-90		+1		-90	
加總	0		0	-360	-180		0	0	-360	-180

4. 小方塊的平移座標改變量及旋轉角度之討論：

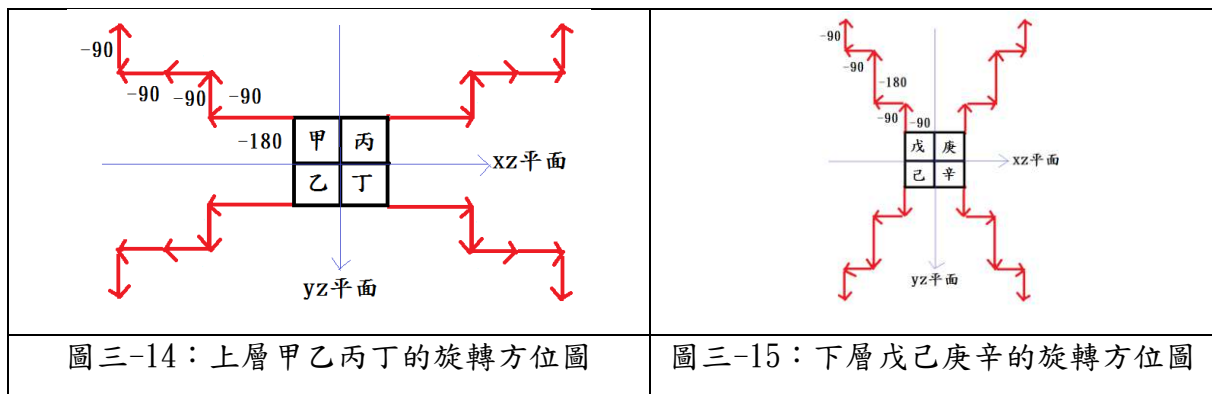
(1) 平移：

由表三-7 得知，甲和戊的 xyz 各自加總後都是 0，這代表翻轉的六次步驟後，**平移方面是回到原來位置**；乙丙丁和甲情況是對稱的，己庚辛和戊情況是對稱的，同理，乙丙丁及己庚辛的平移方面也是回到原來位置。

(2) 旋轉：

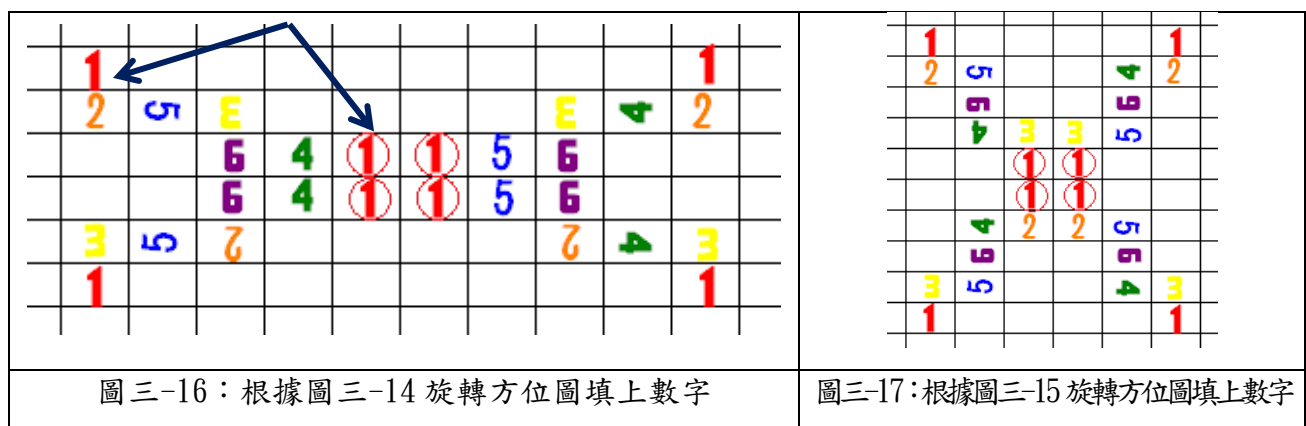
A. 上層有甲乙丙丁，以甲為代表，由表三-7 得知，甲在 xz 平面旋轉-360 度，在 yz 平面旋轉-180 度，以同樣方法也得到乙丙丁的結果，畫成旋轉方位圖，如圖三-14。

B. 下層有戊己庚辛，以戊為代表，由表三-7 得知，在 yz 平面旋轉-360 度，在 xz 平面旋轉-180 度，以同樣方法得到己庚辛的結果，畫成旋轉方位圖，如圖三-15。



C. 證明：圖三-14 及圖三-15 的小方塊經過旋轉角度後會回到第一面

將 1 個小方塊的 6 面寫上 1~6 的數字，放在一張方格紙上，依照圖三-14 及圖三-15 的旋轉方式，每旋轉 90 度，就在方格中填上看到的數字，結果如下圖三-16 及圖三-17：



由圖三-16 及圖三-17 紙上的數字發現，第一面的數字是 1，**根據旋轉角度的方位圖操作後，雖然有不同的操作方式，但確實都能回到數字 1，也就是能回到第一面**（例如：圖三-16 箭頭處 2 個位置都是 1）。

5. 綜合以上，以座標來探討翻轉六步驟後平移改變為 0，代表會回到原來位置，而旋轉角的旋轉方位圖也證明能回到第一面，所以座標及面都能回到第一面。

(五) 分析翻轉時「動到連接線」的情況，證明翻轉六次後回到第一面。

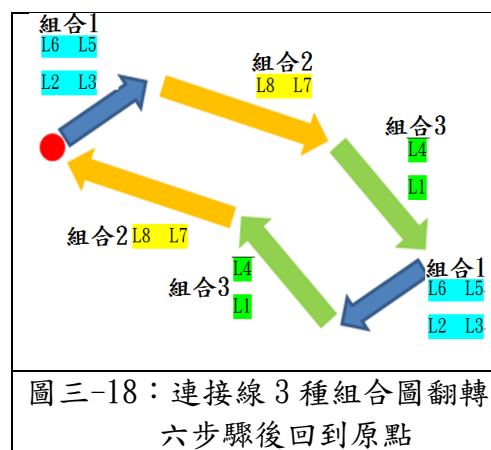
1. 翻轉六步驟動到哪些連接線：以下 L1 代表編號 1 的連接線，依此類推。

表三-8：正立方體翻轉盒在翻轉六步驟中動到連接線

翻轉步驟	照片	圖示	動到的連接線
步驟一		L6 L2 L5 L3 	L6 L5 L2 L3 連接線組合 1
步驟二		L8 L7 	L8 L7 連接線組合 2
步驟三		L4 L1 	L4 L1 連接線組合 3
步驟四		L6 L2 L5 L3 	L6 L5 L2 L3 連接線組合 1
步驟五		L4 L1 	L4 L1 連接線組合 3
步驟六		L8 L7 	L8 L7 連接線組合 2

2. 討論：

- (1) 結果發現，動到的連接線有不同的 3 組(藍、黃、綠區塊)，而且每 1 組會出現 2 次，也就是翻轉出去，再翻轉回來，所以，操作六次步驟後會回到原來的位置。
- (2) 如果以 3 種不同箭頭表示翻轉動作時動到連接線的 3 種組合，藍、黃、綠色分別代表連接線組合 1、2、3，由圖三-18 發現，會回到原點。



3. 以「動到的連接線」探討 8 種類型翻轉盒是否會回第一面

表三-9：以連接線探討 8 種類型翻轉盒

類型	步驟一	步驟二	步驟三	步驟四	步驟五	步驟六	說明
型 1-1:外線	L3 L2 L6 L5	L7 L8					不易回第一面 共 3 面
型 1-2:內線	L3 L2 L6 L5	L1 L4	L7 L8				不易回第一面 共 4 面
型 2-1-1	L6 L5 L2 L3	L8 L7	L4 L1	L6 L5 L2 L3	L4 L1	L8 L7	易回第一面 共 6 面
型 2-1-2	L5 L6 L2 L3	L8 L7					不易回第一面 共 3 面
型 2-1-3	L5 L6 L3 L2	L8 L7	L4 L1				不易回第一面 共 4 面
型 2-2-1	L6 L5 L2 L3	L6 L5 L8 L7 L2 L3					不易回第一面 共 3 面
型 2-2-2	L5 L6 L2 L3	L4 L5 L6 L8 L7 L2 L3 L1					不易回第一面 共 3 面
型 2-2-3	L2 L3 L6 L5	L2 L7 L8 L5					不易回第一面 共 3 面

註：8 種類型製成影片 請點選 <https://www.youtube.com/watch?v=8cHE4M7ck9E>

研究三的連接線位置之探討中找到 8 種類型，為什麼只有型 2-1-1 易回到第一面，而其他類型不易回到第一面，由表三-9 發現型 2-1-1 所動用到的連接線組合是成對出現，所以會回到第一面，而其他類型皆不是，所以不易回到第一面。

四、研究四：設計正立方體翻轉盒展開圖盒

由研究一的表一-4 得知，正立方體翻轉盒的組合方法，而網路上的作法是將照片沖洗後，切割黏貼於各小面；本研究以下過程嘗試設計翻轉盒的展開圖，讓照片直接在電腦上切割及貼在展開圖上，最後，印表機列印後，一體成型，就能完成附有照片的翻轉盒。

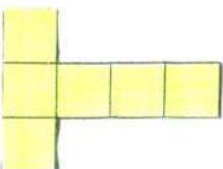
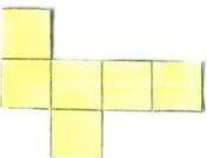
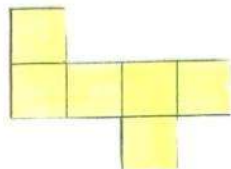
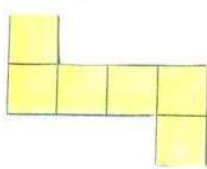
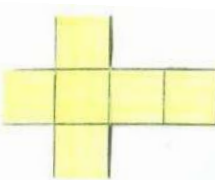
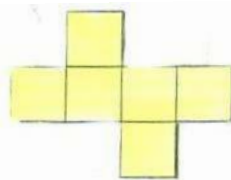
以下先針對 1 個小正立方體(也稱為小方塊)的展開圖種類進行分析，再從其中挑選適合的展開圖類型，將 4 個小方塊的展開圖全部設計於一張 A4 紙上。

(一)分析小方塊 6 面展開圖的類型

1 個小方塊有 6 個面，針對「最多相連的面數」進行分析，發現共有 11 種展開圖類型：

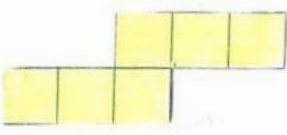
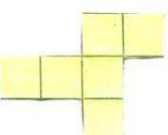
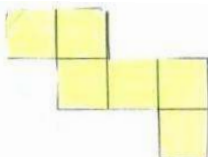
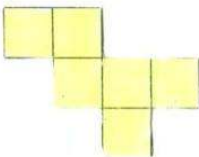
1. 型 1：以「4 個正方形相連」：型 1-1～型 1-6，共 6 種都是長 4x 寬 3。

表四-1：正立方體「4 個正方形相連」展開圖

型 1-1 	型 1-2 	型 1-3 
型 1-4 	型 1-5： 	型 1-6 

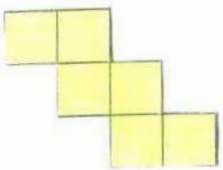
2. 型 2：以「3 個正方形相連」：型 2-1～型 2-4 共 4 種，除了型 2-1 是長 5x 寬 2 之外，其餘都是長 4x 寬 3。

表四-2：正立方體「3 個正方形相連」展開圖

型 2-1 	型 2-2 	型 2-3 	型 2-4 
--	--	---	--

3. 型 3：「2 個正方形相連」：型 3 只有 1 種，長 4x 寬 3。

表四-3：正立方體「2 個正方形相連」展開圖

型 3 
--

(二)正立方體翻轉盒的展開圖

1. 決定每 4 個小方塊為 1 組，設計在一張 A4 紙上：

正立方體翻轉盒由 8 個小方塊組成，先拆成 4 個小方塊為 1 組，也就是設計 4 個小方塊的展開圖在 A4 紙上，因此將會有 2 張 A4 紙，分為 A 版、B 版。

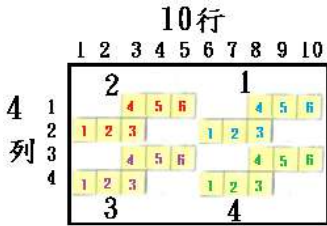
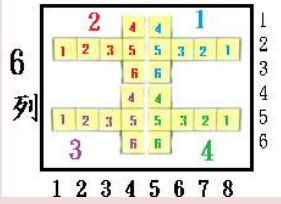
2. 挑選 4 個小方塊在 A4 紙上展開圖的類型

1 個小方塊的展開圖類型有 11 種，從中挑選適合的類型，設計在一張 A4 紙的尺寸內：

(1)考慮紙張尺寸比率

可以放大到 3 倍，其他類型可以放大的倍率大於型 2-1(3.5 倍>3 倍)，選擇最大的數字，所以，型 2-1 不適合，其餘類型皆可列入考慮。

表四-4：考慮紙張尺寸比率挑選正立方體翻轉盒適合的展開圖類型

1 個方塊的展開圖類型		A4 紙尺寸	型 2-1 (2 行×5 列)	其他類型(皆是 3 列×4 行)
4 個方塊在一張紙上			 (寬 4 行×長 10 列)	 (寬 6 列×長 8 行)
放大倍率	寬	21cm	$21 \div 4 = 5.25$ (×)	$21 \div 6 = 3.5$ (○)
	長	約 30cm	$30 \div 10 = 3$ (○)	$30 \div 8 = 3.75$ (×)
內部長寬放大倍率比較			選擇放大 3 倍； 若選寬度放大 5.25 倍，則長度放大後會超過 A4 紙。	選擇放大 3.5 倍； 若選長度放大 3.75 倍，則寬度放大後會超過 A4 紙。
不同類型比較			3.5>3，放大的倍率以此類型最大，又能擠在 A4 尺寸內。	

(2)考慮 1 個小方塊展開圖的對稱性

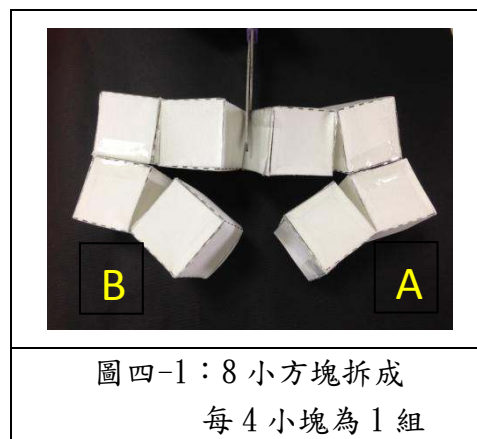
將 4 個小方塊展開圖共 24 面設計在一張 A4 紙上，若不具有對稱性，將會眼花瞭亂，因此，從「非型 2-1」中繼續挑選具有對稱性質，以型 1-1 較為簡易。

3. 拆解 4 個小方塊的面，找到 3 條連接線的位置：

4 個小方塊有 3 條連接線，一張 A4 紙中留意 3 條「連接線」不能剪斷(圖四-2)。

(1)以型 1-1 拆解：

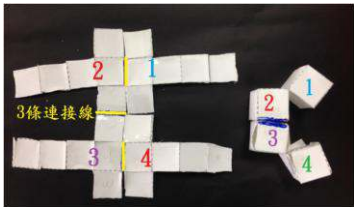
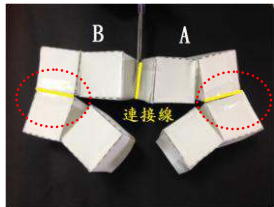
4 個小方塊顏色順序標示為 1 藍→2 紅→3 紫→4 綠，由前面的探討結果，以型 1-1展開，依序拆解第 3、4、2、1 小方塊(圖四-3)，得到 B 版 4 個小方塊可以擠在 A4 尺



寸內的展開圖(圖四-4)。

(2)A、B版連接線位置是對稱：

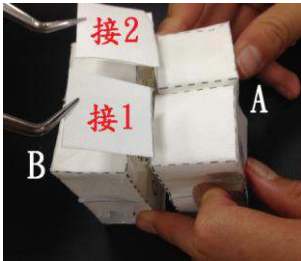
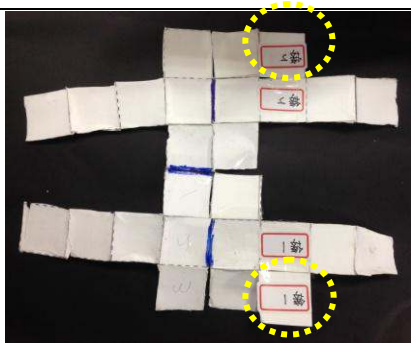
因為A、B版是對稱的，所以，以相同方法拆解得到A版的展開圖，注意，第2、3小方塊之間的連接線位置是對稱的(圖四-5)。

			
圖四-2： 4方塊有3條連接線	圖四-3：拆解小方塊	圖四-4：4方塊拆解展開圖 與立體的對照圖	圖四-5：A、B版是對稱的， 連接線位置也要對稱。

4. A版、B版上的面數與連接面位置：

當A版4方塊和B版4方塊最後必須再連接一起，但不希望使用透明膠帶，所以在A版上多設計2個用來連接A、B版的連接面，這2個面原屬於為B版的圖，所以A版有 $24+2=26$ 面，B版有24面。

為了尋找A版多出的2個連接面，先剪下2個面以膠帶黏貼在翻轉盒上(圖四-6)，再展開A版(圖四-7)，找到多出的2個連接面位置(圖四-8)。

		
圖四-6：在A版上以膠帶貼上2面	圖四-7：拆解後找到2個連接面位置	圖四-8：拆解後找到2個連接面位置， <u>A版有$24+2=26$面</u> 。

(三)找出展開圖照片位置及方向

由研究二得知，正立方體翻轉盒有不同的翻轉方法，但要翻回第一面必須採取「不旋轉翻轉的方式」保證能翻回第一面，所以，我們以此來設計照片放入的位置。

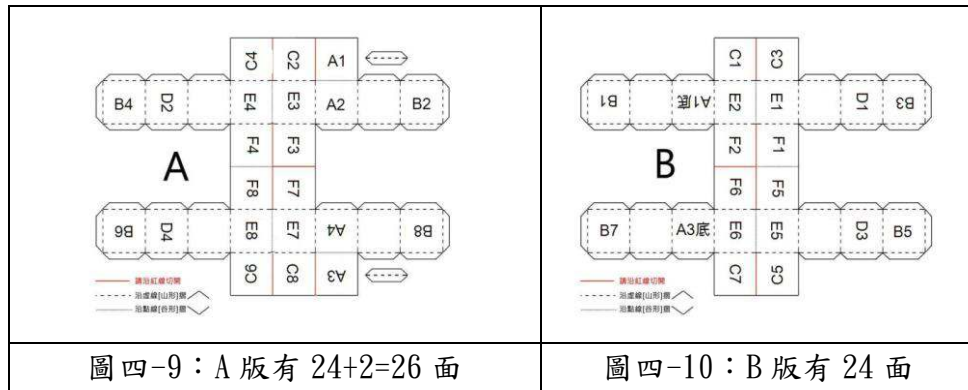
1. 六組照片面的切割面數及編號

正立方體翻轉盒的翻轉過程從依序以A~F面表示，每一組照片切割面數由研究三表三-4得知，切割成不同數目；我們先從上而下，左而右的順序，編示號碼(表四-5)，例如：A組照片要切割成4小張，就編示為A1~A4。

表四-5：六組照片面的切割面數及編號

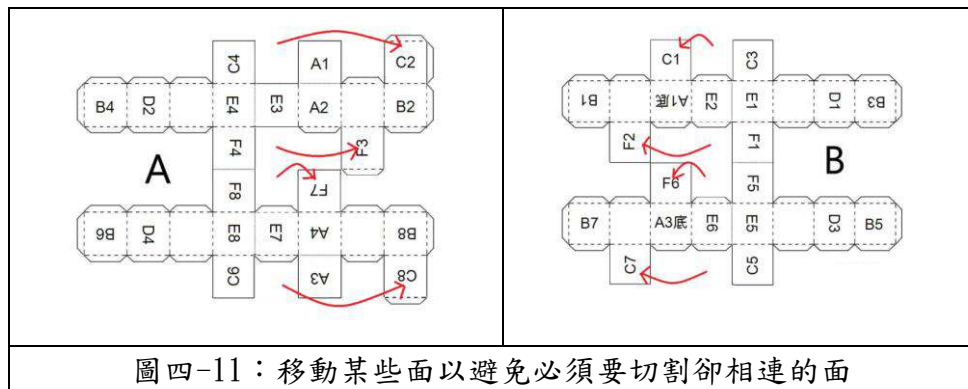


2. 拆解得知展開圖照片位置及方向：展開 8 方塊，就能得知展開圖上各照片的位置及方向。



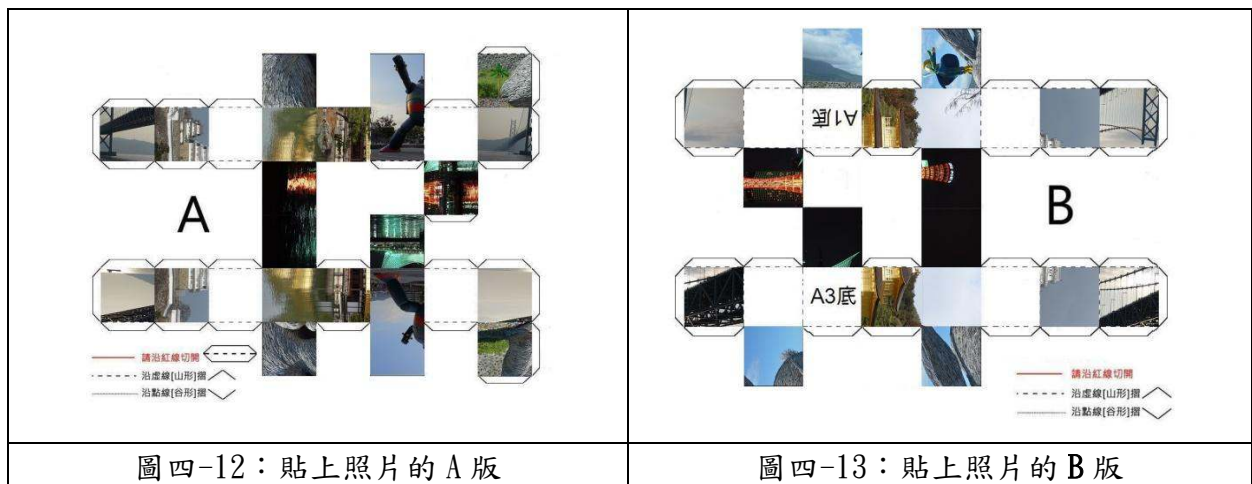
3. 修改展開圖避免應該要切割卻相連的面：

實際列印後組裝時發現，有些位置是連接線不能剪開，有些位置是切割線，必須剪開，常會混亂，造成組裝上的困擾，因此，再次移動一些面的位置(圖四-11)，改善此困擾。



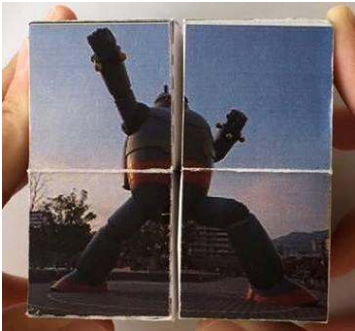
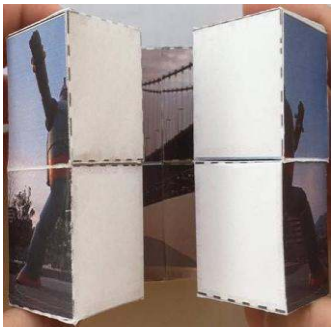
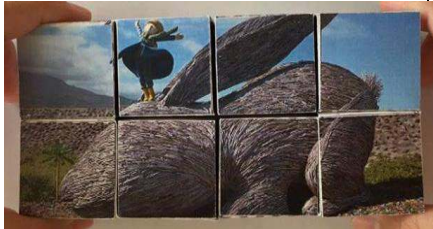
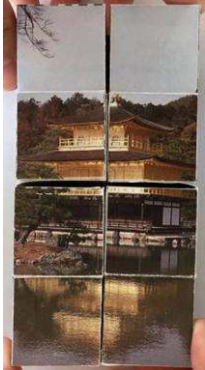
(四)電腦軟體切割及貼上照片

找出六張照片，使用 photcap 軟體，調整照片的長寬比，就能將整張照片切割成適合的大小，根據編號，貼上不同的位置，就能完成拼貼照片(圖四-12、圖四-13)。



列印圖四-12、圖四-13，剪下組裝就能變成正立方體翻轉盒，**製成影片請點選**
<https://www.youtube.com/watch?v=BvIV9m33sD4>，實品如下：

表四-5：正立方體翻轉盒實品翻轉面數與過程

		
A 面(A1~A4)	A 面→B 面（左右翻轉）	B 面(B1~B8)
		
B 面→C 面（上下翻轉）	C 面(C1~C8)	C 面→D 面（左右翻轉）
		
D 面(D1~D4)	D 面→E 面（上下翻轉）	E 面(E1~E8)
		
E 面→F 面（左右翻轉）	F 面(F1~F8)	回到 A 面（上下翻轉）

五、研究五：分析三角形翻轉盒面數及設計展開圖

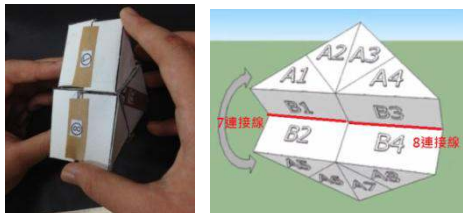
本研究模擬正立方體翻轉盒，改為三角形的柱體，同樣地，先針對 1 個小三角柱的展開圖種類進行分析，再從其中挑選適合的展開圖類型，將各 4 個小三角柱的展開圖設計於 A4 紙上。

(一)分析三角形翻轉盒的組合

三角形翻轉盒一共由 8 個小三角柱所組合而成，其組合方法如下：

1. 4 個小三角柱的連接邊共有 3 條，①連接線在正面下方，②、③連接線在二邊的側面，完成 A 組的 4 個小三角柱；
2. 以同樣方法製作 B 組的 4 個小三角柱(會有第④、⑤、⑥條連接邊)。
3. 以上的方法完成 B 組後，從最上方，再以第⑦、⑧條連接邊分別連接 A、B 組，形成一共 8 個小三角柱的三角形翻轉盒。

表五-1：三角形翻轉盒組合方法

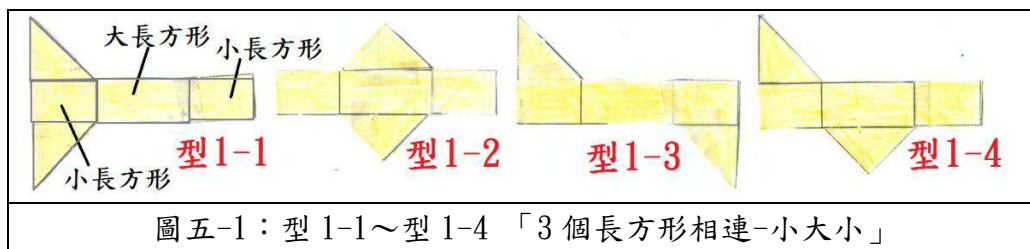
		
A 組的①②③連接線	B 組的④⑤⑥連接線	A 組+B 組的⑦、⑧連接線

(二)分析 1 個小三角柱 5 面展開圖的類型

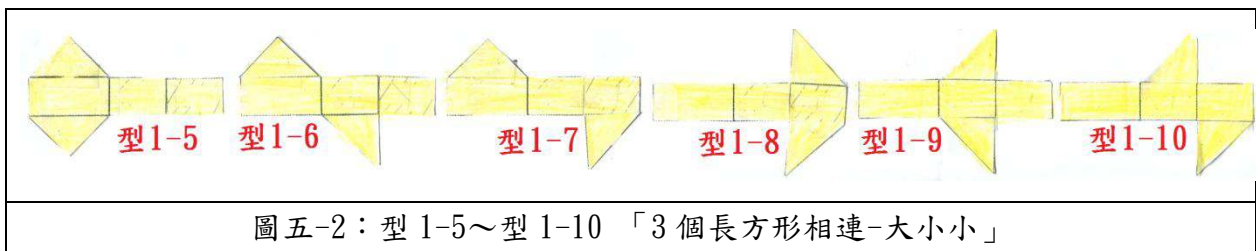
1 個三角柱體的 5 個面(2 個三角形、1 個大長方形、2 個小長方形)，以下針對「長方形最多相連的面數」進行分析，例如，「型 1」就是以「最多相連的長方形面有 3 個」，所以稱為「3 個長方形相連」；結果發現共有以下 10 種展開圖類型：

1. 型 1「3 個長方形相連」：共有 10 種不同的展開圖

(1)長方形是「小大小」：意思為小長方形連著大長方形，再連著小長方形。

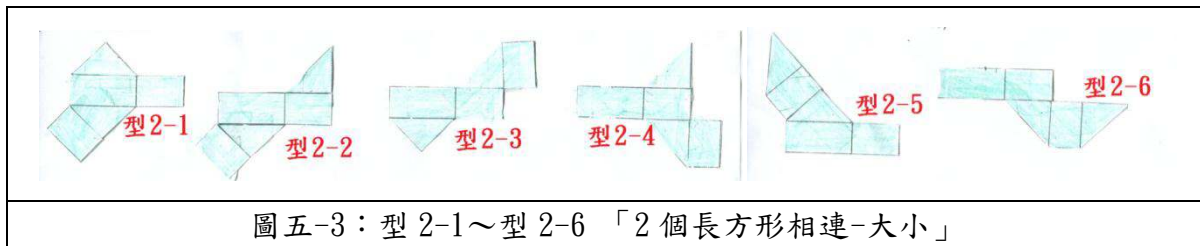


(2)長方形是「大小小」：意思為大長方形連著小長方形，再連著小長方形。

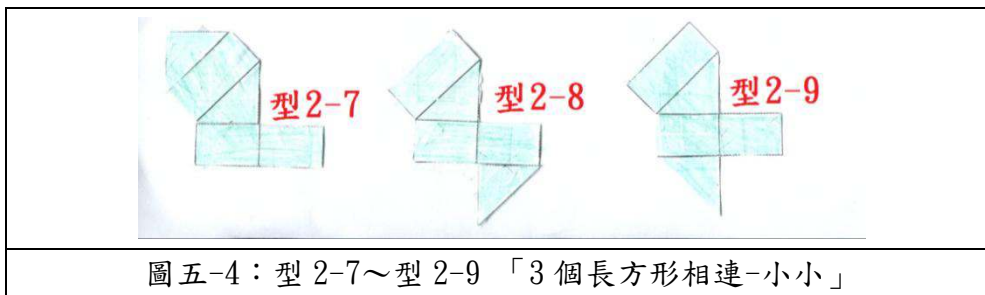


2. 型 2：「2 個長方形相連」：共有以下 9 種不同的展開圖。

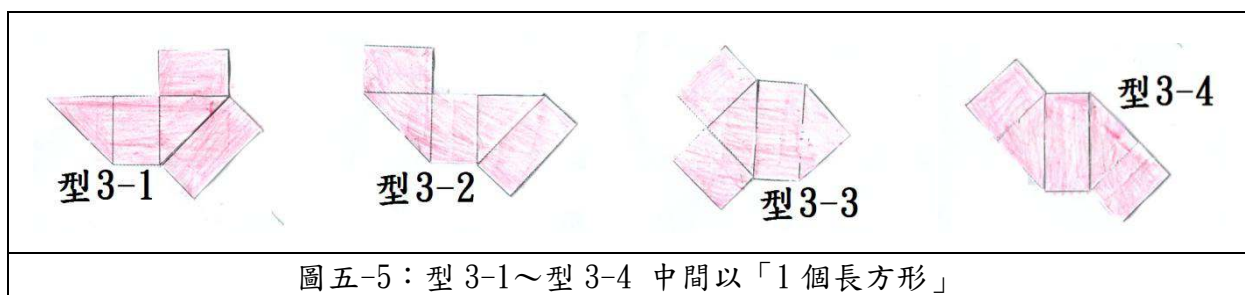
(1)長方形是「大小」：意思為大長方形連著小長方形。



(2)長方形是「小小」：意思為小長方形連著小長方形。



3. 型 3：「1 個長方形」：：共有 4 種不同的展開圖。



(三)三角形翻轉盒的設計圖

1. 決定每 4 小塊為 1 組，設計在一張 A4 紙上：

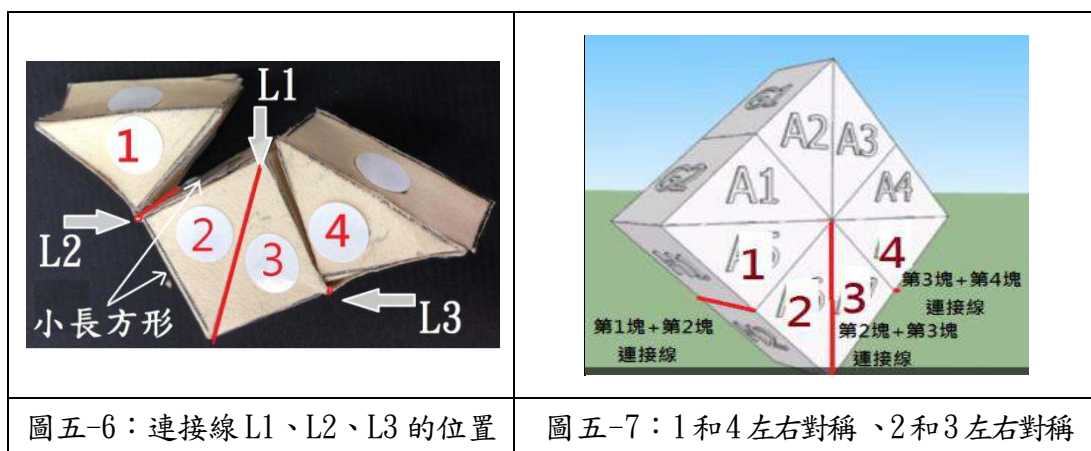
三角形翻轉盒由 8 個三角柱組成，我們先拆成 4 個三角柱為 1 組，也就是設計 4 個三角柱的展開圖在 A4 紙上，因此將會有 2 張 A4 紙，分為 A 版、B 版。

2. 挑選 4 個小三角柱在 A4 紙上展開圖的類型

1 個三角柱有 5 面，4 個三角柱共有 20 個面要設計在一張 A4 紙的尺寸內；而 1 個

三角柱的展開圖類型有 23 種，我們要從中挑選適合的類型做為設計。

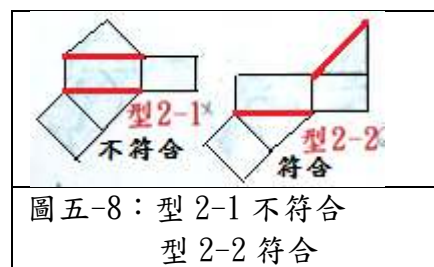
4 塊為 1 小組，我們編號為第 1~4 塊，因為是第 1 和第 4 是左右對稱，第 2 和第 3 是左右對稱，以下針對這二類做分析，並且由連接線的位置判斷適合的展開圖：



(1) 第 2 塊或第 3 塊的條件：考慮 L1 及 L2(或 L3)

A. 條件一：「其中一個三角形的斜邊不連接自己的面」

圖五-7 中的連接線 L1 在第 2 塊和第 3 塊的連接線在三角形的斜邊，首要條件是「其中一個三角形的斜邊不連接自己的面」。例如，型 2-1 中的三角形的二條斜邊(紅線)都連接自己的面，則無法與另一個三角柱連接(只能用膠帶連接了)。



在 23 種類型中符合此條件的有 17 種：型 1-1、型 1-3、型 1-4、型 1-6、型 1-7、型 1-8、型 1-9、型 1-10、型 2-2、型 2-3、型 2-4、型 2-5、型 2-6、型 2-8、型 2-9、型 3-1、型 3-2。

B. 條件二：「2 個小長方形短邊的面不相連」

圖五-7 中第 1 塊和第 2 塊的連接線 L2(或 L3 的情況)在小長方形的短邊，所以條件二是「2 個小長方形短邊的面不相連」。例如，型 1-8 的 2 個小長方形的短邊(綠線)的面相連，無法與另一個三角柱連接，只能用膠帶才能連接了。



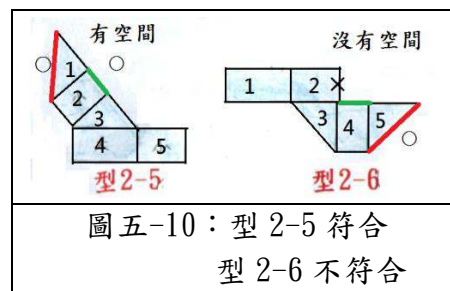
在符合上一個條件中的 17 種類型中，符合條件二的有：型 1-1、型 1-3、型 1-4、型 2-2、型 2-3、型 2-4、型 2-5、型 2-6、型 3-1、型 3-2。

C. 條件三：「2 條連接線(紅、綠)的周圍要有空間」

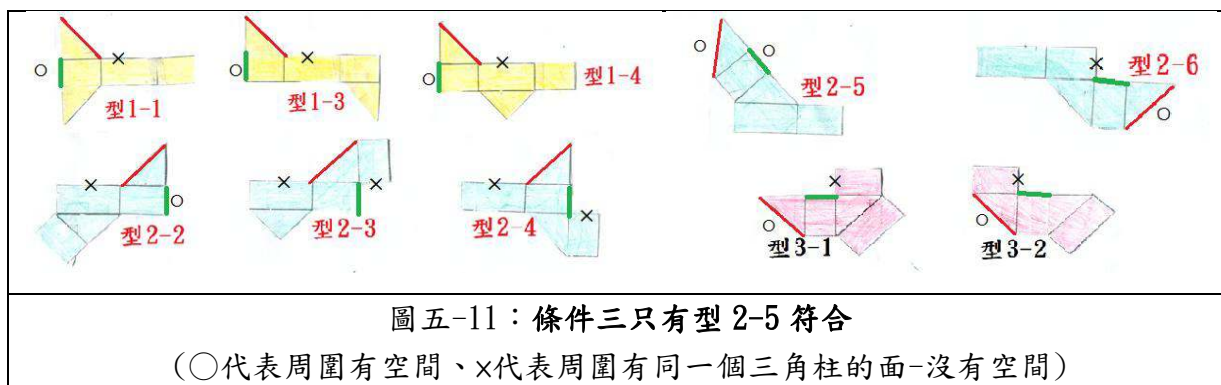
連接線 L1(紅線)、L2 及 L3(綠線)附近必須有乾淨的空間，否則連接線 2 旁的小三角柱的各 5 個面展開時，會重疊在一起，無法攤開在同一張紙上。例如，型 2-5：

符合條件，因為 L1(紅線)以後要連接另一個小三角柱，紅線周圍的空間很大；L2(或 L3)(綠線)以後要連接另一個小三角柱，周圍的空間也是很大。

符合上一個條件中的 10 種類型中，只有型 2-5 符合，。



圖五-10：型 2-5 符合
型 2-6 不符合



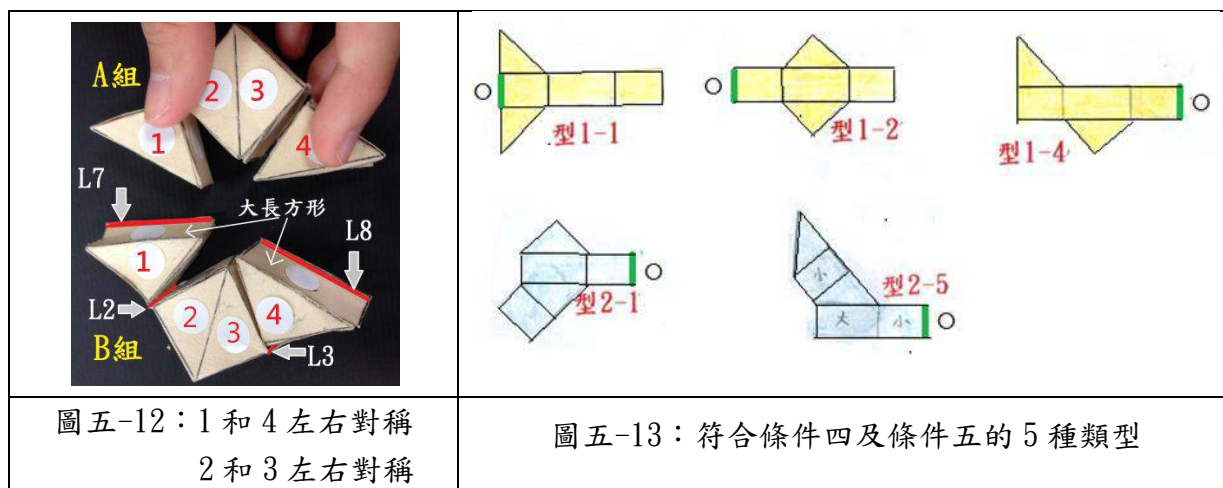
圖五-11：條件三只有型 2-5 符合

(○代表周圍有空間、x代表周圍有同一個三角柱的面-沒有空間)

綜合以上，符合條件一、二、三的只有型 2-5，可以成為第 2 塊、或第 3 塊的展開圖。

(2) 第 1 塊或第 4 塊：考慮 L2 (或 L3)

由圖五-12 中第 1 塊的 L2 或第 4 塊的 L3，它的位置在小長方形的短邊上，所以必須符合二個條件，條件四：「2 個小長方形短邊的面不相連」及條件五：「連接線的周圍要有空間」，符合條件四、五的有：型 1-1、型 1-2、型 1-4、型 2-1、型 2-5。



圖五-12：1 和 4 左右對稱
2 和 3 左右對稱

圖五-13：符合條件四及條件五的 5 種類型

(3) 組合第 1、2、3、4 塊：考慮 L7(或 L8)

A. 組合類型：共有 5 類

由以上的得知，只能選型 2-5 當第 2 塊、第 3 塊，能當第 1、第 4 塊的有 5 種：型 1-1、型 1-2、型 1-4、型 2-1、型 2-5。

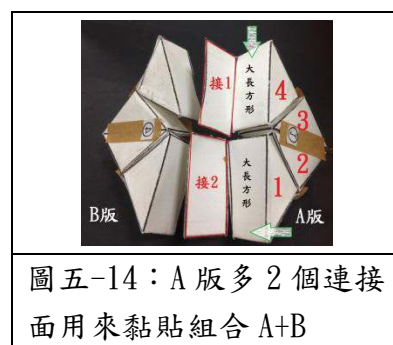
B. 考慮黏貼 A 組和 B 組多出來的 2 個連接面

因為 A、B 二組組合黏貼時，我們不用膠帶，必須在 A 版上多設計 2 個連接面來黏貼組合 A、B 二組，而這 2 個連接面的位置在第 1 塊和第 4 塊的大長方形旁邊(圖五-14)。

在表五-2 的 5 種組合中，再符合條件七：第 1 塊和第 4 塊的「大長方形的長邊」有空間放連接面，以下有三種

符合：上(型 1-1)+下(型 2-5)、上(型 1-4)+下(型 2-5)、上(型 2-5)+下(型 2-5)。

表五-2：4 個三角柱體共 20 面展開圖的 5 種組合類型



圖五-14：A 版多 2 個連接面用來黏貼組合 A+B

有空間放連接面	上(型 1-1)+下(型 2-5)	上(型 1-4)+下(型 2-5)	上(型 2-5)+下(型 2-5)
沒有空間放連接面	上(型 1-2)+下(型 2-5)		上(型 2-1)+下(型 2-5)

C. 考慮組合圖的長寬放大到 A4 的倍率

以下測量 3 種組合類型的長寬後，根據 A4 尺寸計算放大倍率，選擇最大的數字，所以，最後選擇是「上(型 1-4)+下(型 2-5)」(表五-2 及表五-3)。

表五-3：考慮紙張尺寸比率挑選正立方體翻轉盒適合的展開圖類型

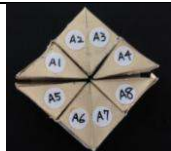
組合類型		A4 尺寸	上(型 1-1) + 下(型 2-5)	上(型 1-4) + 下(型 2-5)	上(型 2-5) + 下(型 2-5)
原寬			9.5	8.54	7.8
原長			17.1	16.7	19.5
放大倍率	寬	21cm	$21 \div 9.5 = 2.2(\times)$	$21 \div 8.45 = 2.5(\times)$	$21 \div 7.8 = 2.7(\times)$
	長	約 30cm	$30 \div 17.1 = 1.75(\bigcirc)$	$30 \div 16.7 = 1.80(\bigcirc)$	$30 \div 19.5 = 1.54(\bigcirc)$
內部長寬放大倍率比較			選擇放大 1.75 倍	選擇放大 1.80 倍	選擇放大 1.54 倍
不同類型比較			1.80 > 1.75 > 1.54 長度放大的倍率以 1.80 最大		

(四)照片圖案切割方法及組裝

1. 八組照片面的切割面數及編號

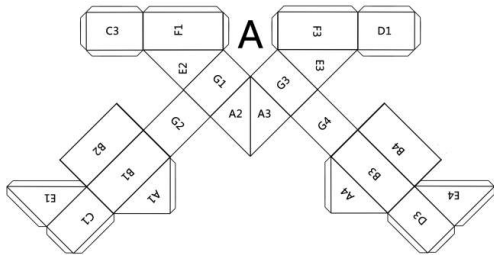
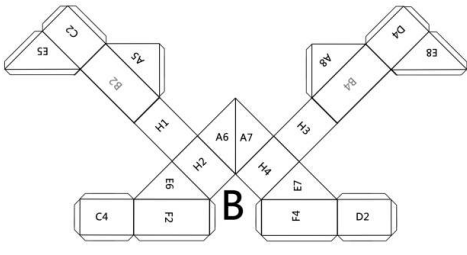
三角形翻轉盒依照翻轉過程從第一～八照片面依序以 A～H 編號，例如：A 組照片要切割成 8 小張，就標示為 A1～A8。

表五-4：三角形翻轉盒八面的編號

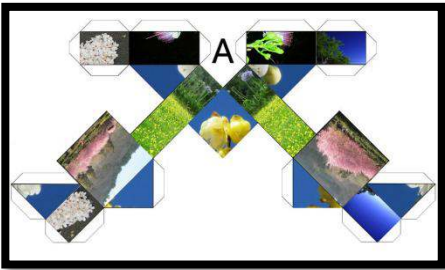
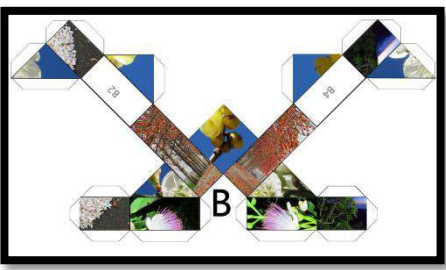
					
A 面 8 塊 菱形	B 面 4 塊 大長方形(橫)	C、D 面各 4 塊 小長方形(橫)	E 面 8 塊 菱形	F 面 4 塊 大長方形(縱)	G、H 面各 4 塊 小長方形(縱)

2. 拆解得知展開圖照片位置及方向

拆解並展開以上的 8 塊三角柱，得知展開圖各照片的位置及方向如下：

	
圖五-15：1 個三角柱有 5 面，4 個三角柱共有 20 個面，A 版有 20+2=22 面。	圖五-16：1 個三角柱有 5 面，4 個三角柱共有 20 個面，B 版有 20 面。

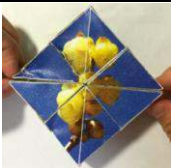
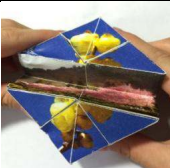
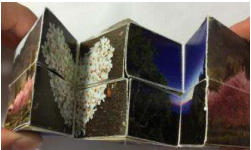
3. 切割及貼上照片：使用 photocap 軟體，調整照片的長寬比，再使用旋轉就能切割直角三角形、長方形等形狀，再貼上不同的位置，就能完成拼貼照片。

	
圖五-17：貼上圖片的 A 版	圖五-18：貼上圖片的 B 版

4. 列印並組裝：列印出來，剪下組裝就能變成三角形翻轉盒，製成影片 [請點選影片](https://www.youtube.com/watch?v=dr1FI35oi2M)

<https://www.youtube.com/watch?v=dr1FI35oi2M>，實品翻轉過程如表五-5：

表五-5：三角形翻轉盒實品翻轉面數與過程

				
A 面(A1～A8)	A 面→B 面	B 面(B1～B4)	B 面→C 面+D 面	C 面+D 面

C 面(C1~C4)	D 面(D1~D4)	D 面→E 面	E 面(E1~E8)	E 面→F 面
F 面(F1~F4)	F 面→G 面→H 面	G 面 (G1~G4)	H 面 (H1~H4)	H 面→回到 A 面

伍、結論

本研究以翻轉為主題，探討翻轉卡片、正立方體翻轉盒及三角形翻轉盒，並且設計出展開圖，可挑選照片透過電腦操作，列印再組裝，**透過手動操作翻轉的過程中，看到照片一直變換，是一件很有趣的展示照片用的商品。**

一、翻轉卡片

翻轉卡片有四面照片，本研究找出將四個照片切割後設計在同一張 A4 紙上的正反二面，中間切割「工」字後，再將 4 個黏貼處貼好，即可成為翻轉卡片。

(製作過程影片 <https://www.youtube.com/watch?v=82P9MkW8br8>)

表一：翻轉卡片展開圖及實品翻轉出四面照片

D1	D5	D9	D13
D2	D6	D10	D14
A1	A5	A9	A13
A2	A6	A10	A14
A3	A7	A11	A15
A4	A8	A12	A16
D3	D7	D11	D15
D4	D8	D12	D16

C5	0T8	98	C1
黏貼 a	68	58	黏貼 c
黏貼 a	B13	B1	黏貼 c
C6	B14	B2	C2
C7	B15	B3	C3
黏貼 b	B16	B4	黏貼 d
黏貼 b	2T8	88	黏貼 d
C8	1T8	78	C4

研發設計的卡片展開圖-正面編號

A 面(A1~A16)

研發設計的卡片展開圖-反面編號

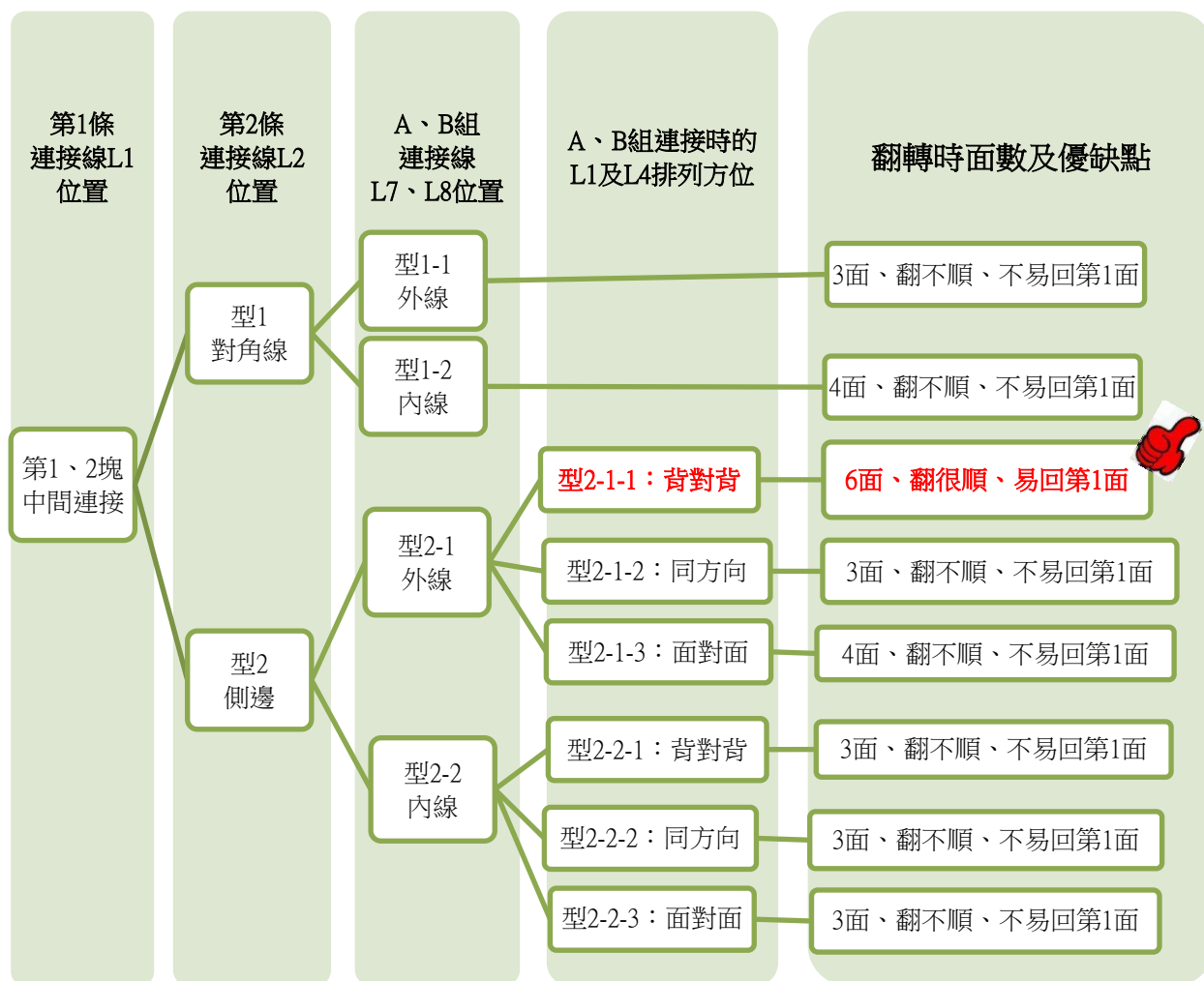
B 面(B1~B8)

C 面(C1~C8)

D 面(D1~D16)

二、正立方體翻轉盒

(一) 8 個小方塊採取不旋轉的翻轉方式，在連接線不同組合下，會產生 8 種翻轉盒類型(圖二)，其中以「型 2-1-1」翻轉順暢，容易回到第一面，而且面數六面為最多。



圖二：正立方體翻轉盒連接線位置類型圖

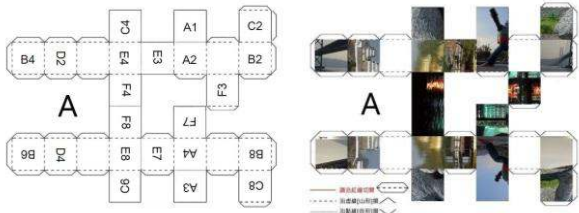
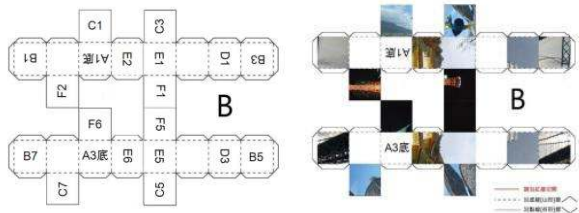
(製作過程影片 <https://www.youtube.com/watch?v=8cHE4M7ck9E>)

(二) 特別分析「型 2-1-1」的連接線組合，以座標來探討操作翻轉六步驟後，由 p. 13 表三-7 得知平移改變為 0，代表會回到原來位置，而根據旋轉方位圖(圖三-14、圖三-15)在方格上填上數字(圖三-16、圖三-17)也證明操作翻轉六步驟能回到第一面，所以座標及面都能回到第一面。

(三) 分析翻轉時「動到連接線」的情況，「型 2-1-1」有不同的 3 組，而且每 1 組出現 2 次，第 1 次翻轉出去，第 2 次翻轉回來，所以，證明操作六次步驟後會回到原來的位置。

(四) 以「型 2-1-1」製成的翻轉盒可產生六面，從正方立體的 11 種展開圖中找出適合的組合，可挑選六張照片切割後設計在二張 A4 紙(分為 A 版、B 版)，列印後黏貼組裝即成為可翻轉六張照片的正立方體翻轉盒。(製作過程影片 <https://www.youtube.com/watch?v=BvIV9m33sD4>)

表二：正立方體翻轉盒展開圖及實品翻轉出六面照片

					
研發設計的展開圖-A版(共 26 面)			研發設計的展開圖-B版(共 24 面)		
					
A 面 (A1~A4)	B 面(B1~B8)	C 面(C1~C8)	D 面 (D1~D4)	E 面 (E1~E8)	F 面 (F1~F8)

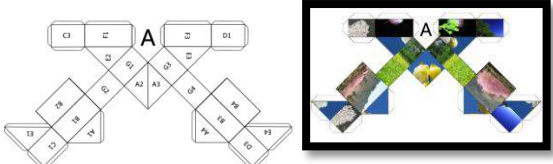
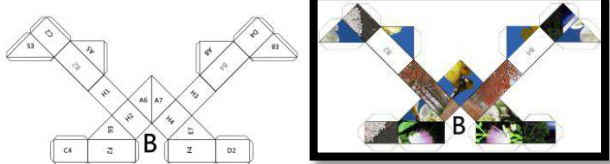
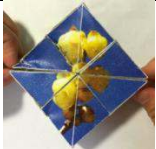
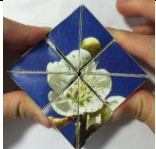
三、三角形翻轉盒

(一)以 8 小塊三角柱體，以類似正立方體翻轉盒的型 2-1-1 在 8 個位置連接後，形成三角形翻轉盒。

(二)操作翻轉後可產生八面，我們從三角柱體的 23 種展開圖中找出適合的組合，可將八組照片切割後，設計在二張 A4 紙(分為 A 版、B 版)，列印後黏貼組裝即成為三角形翻轉盒，展開圖及實品翻轉照片請參考表三。

(製作過程影片 <https://www.youtube.com/watch?v=dr1Fl35oi2M>)

表三：三角形翻轉盒展開圖及實品翻轉出八面照片

					
研發設計的展開圖-A版(共 22 面)			研發設計的展開圖-B版(共 20 面)		
					
A 面(A1~A8)	B 面(B1~B4)	C 面(C1~C4)+ D 面(D1~D4)	E 面(E1~E8)	F 面 (F1~F4)	G 面(G1~G4)+ H 面(H1~H4)

陸、參考資料

Robin Messenheimer (2011 年)。The Never-Ending or Endless Card。youtube 影片 104 年 1 月 28 日取自：https://www.youtube.com/watch?v=s_PP5JY8ubo&app=desktop。

Robin Messenheimer (2012 年)。Magic Folding Cube Tutorial。youtube 影片 104 年 1 月 28 日取自：https://www.youtube.com/watch?list=PL2-pZahY7Byvg2jHkW_gTZNarm_W8Mj_z&v=CFRu3MsUYc8&app=desktop。

PenMerah [dot] com (無日期)。Amazing paper ~ share ye。facebook 影片 104 年 1 月 28 日取自：<https://www.facebook.com/video.php?v=514806771954365&set=vb.106426632792383&type=2&theater>。

【評語】 080407

本研究以翻轉卡片、正立方體翻轉盒以及三角形翻轉盒為探究主題，並進一步延伸探究成果，製成展示照片等相關的有趣商品，生動活潑、創意十足，值得嘉許。