中華民國第55屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

080406

好牛吃盡窩邊草

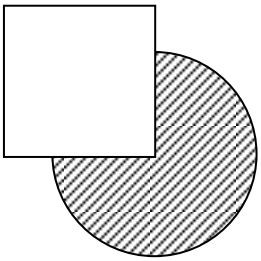
學校名稱：臺中市私立明道普霖斯頓國民小學

作者：	指導老師：
小六 唐翊桓 小五 甄佑恩	陳志平

關鍵詞：牛吃草、面積、規律

摘要

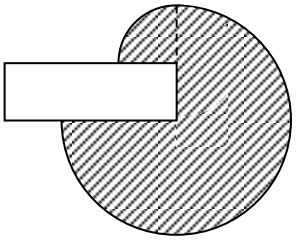
本研究從牛吃草問題出發，將牛以繩子綁在房子固定的點，牠吃草的範圍是個部份圓(如圖一斜線部份)，我們改變固定點的位置、改變繩長、改變不同的房子形狀、讓固定點變成可動式等，研究所圍成形狀面積的變化，找出規律，並將研究結果進行實際的應用。



圖一

壹、研究動機

在部編版六上數學課本第八單元「正多邊形與圓」的單元中，介紹正多邊形與圓面積的計算，老師在課堂上提出一個題目：「一頭牛被一條 4 公尺長的繩子綁在長方形農舍的一角，農舍長 6 公尺寬 2 公尺，請問這頭牛最多能吃多少平方公尺的草？」，這個題目可以用一個 $\frac{3}{4}$ 圓加一個 $\frac{1}{4}$ 圓(如圖二)算出來，答案是 13π ，這個題目引發我的好奇，怎麼樣可以改變面積，是否能找出規律，研究的結果能不能做實際上的應用，我找了一個以前和我合作過數學科展的五年級同學，一起展開我們的研究。



圖二

貳、研究目的

一、找出可以改變面積的變數，並找出規律。

二、找出生活中的應用。

參、研究器材

紙、筆、圓規、尺、灑水器、水管、塑膠管、市售割圓器。

肆、研究架構

一、找出影響牛吃草面積的變數

(一)固定點的位置：

移動牛綁在房子的點，會影響牛所能繞的範圍。

(二)繩子的長度：

綁牛繩子的長度直接影響圓的半徑，會讓面積改變。

(三)房子的形狀：

房子是牛不能吃草的範圍，房子的形狀將改變牛能吃草的面積。

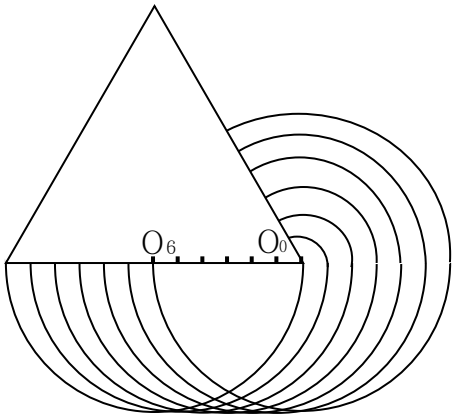
二、探討固定點為連續可移動而產生的牛吃草問題

三、找出生活中的應用

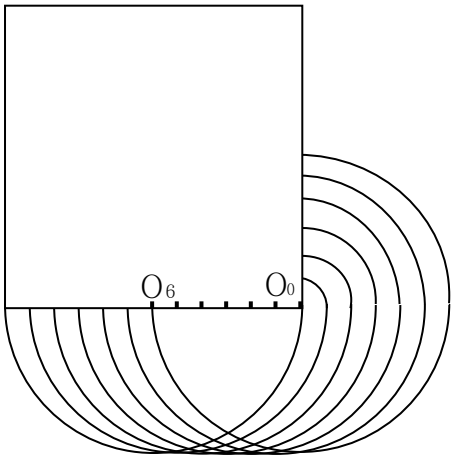
伍、研究過程

一、改變固定點的位置，找出面積

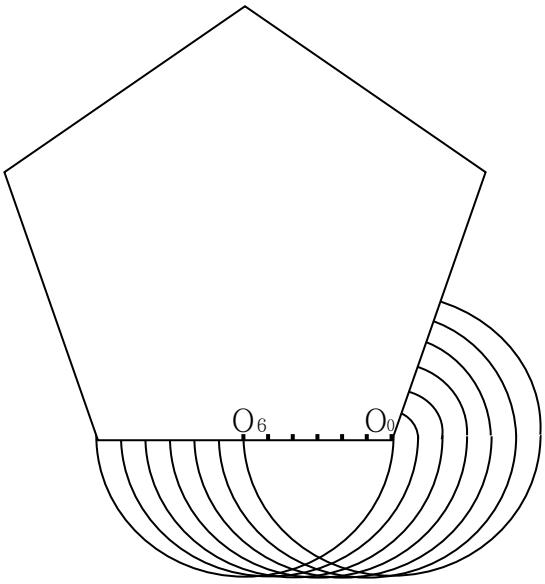
(一)我們用正三角形、正方形、正五邊形、正六邊形當作房子，改變固定點的位置，探討面積的改變，如圖三~圖六。



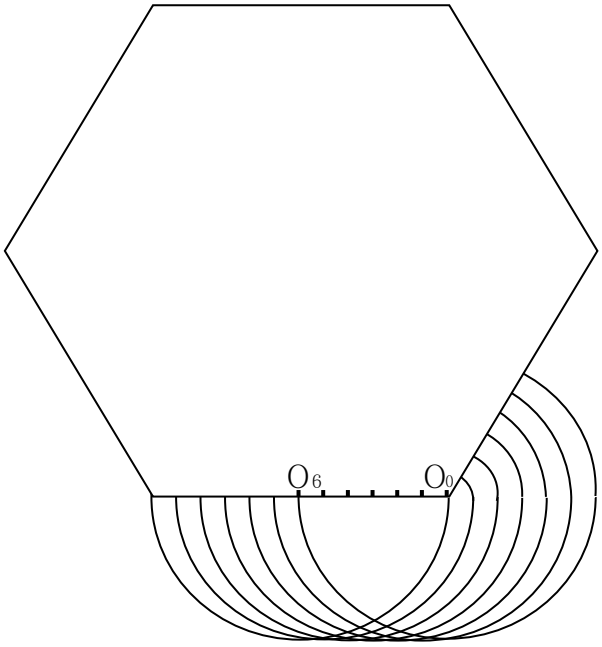
圖三 正三角形



圖四 正方形



圖五 正五邊形



圖六 正六邊形

(二) n ＝3（表示房子為正三角形），d ＝12（表示房子的邊長為 12），r ＝6（表示繩長為 6），O_6表示固定點距離最近的房子頂點為 6 單位長，O_0表示固定點在頂點上，我們整理 n ＝3～6，O_6~O_0，如表一~表四。

<table>
<tr><th rowspan="9">n＝3
d＝12
r ＝6
(如圖三)</th><th>固定點位置</th><th>面積</th><th>相差</th><th>再相差</th></tr>
<tr><td>O_6</td><td>18π</td><td></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\frac{1}{3}\pi$</td></tr>
<tr><td>O_5</td><td>$18\frac{1}{3}\pi$</td><td rowspan="2">$\frac{2}{3}\pi$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">π</td></tr>
<tr><td>O_4</td><td>$19\frac{1}{3}\pi$</td><td rowspan="2">$\frac{2}{3}\pi$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$1\frac{2}{3}\pi$</td></tr>
<tr><td>O_3</td><td>21π</td><td rowspan="2">$\frac{2}{3}\pi$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$2\frac{1}{3}\pi$</td></tr>
<tr><td>O_2</td><td>$23\frac{1}{3}\pi$</td><td rowspan="2">$\frac{2}{3}\pi$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3π</td></tr>
<tr><td>O_1</td><td>$26\frac{1}{3}\pi$</td><td rowspan="2">$\frac{2}{3}\pi$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$3\frac{2}{3}\pi$</td></tr>
<tr><td>O_0</td><td>30π</td></tr>
</table>

表一

<table>
<tr><th rowspan="9">n＝4
d＝12
r ＝6
(如圖四)</th><th>固定點位置</th><th>面積</th><th>相差</th><th>再相差</th></tr>
<tr><td>O_6</td><td>18π</td><td></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\frac{1}{4}\pi$</td></tr>
<tr><td>O_5</td><td>$18\frac{1}{4}\pi$</td><td rowspan="2">$\frac{2}{4}\pi$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\frac{3}{4}\pi$</td></tr>
<tr><td>O_4</td><td>19π</td><td rowspan="2">$\frac{2}{4}\pi$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$1\frac{1}{4}\pi$</td></tr>
<tr><td>O_3</td><td>$20\frac{1}{4}\pi$</td><td rowspan="2">$\frac{2}{4}\pi$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$1\frac{3}{4}\pi$</td></tr>
<tr><td>O_2</td><td>22π</td><td rowspan="2">$\frac{2}{4}\pi$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$2\frac{1}{4}\pi$</td></tr>
<tr><td>O_1</td><td>$24\frac{1}{4}\pi$</td><td rowspan="2">$\frac{2}{4}\pi$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$2\frac{3}{4}\pi$</td></tr>
<tr><td>O_0</td><td>27π</td></tr>
</table>

表二

<table>
<tr><th rowspan="8">n＝5
d＝12
r＝6
(如圖五)</th><th>固定點位置</th><th>面積</th><th>相差</th><th>再相差</th></tr>
<tr><td>O_6</td><td>18π</td><td></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>O_5</td><td>$18\frac{1}{5}\pi$</td><td>$\frac{1}{5}\pi$</td></tr>
<tr><td>O_4</td><td>$18\frac{4}{5}\pi$</td><td>$\frac{3}{5}\pi$</td><td>$\frac{2}{5}\pi$</td></tr>
<tr><td>O_3</td><td>$19\frac{4}{5}\pi$</td><td>π</td><td>$\frac{2}{5}\pi$</td></tr>
<tr><td>O_2</td><td>$21\frac{1}{5}\pi$</td><td>$1\frac{2}{5}\pi$</td><td>$\frac{2}{5}\pi$</td></tr>
<tr><td>O_1</td><td>23π</td><td>$1\frac{4}{5}\pi$</td><td>$\frac{2}{5}\pi$</td></tr>
<tr><td>O_0</td><td>$25\frac{1}{5}\pi$</td><td>$2\frac{1}{5}\pi$</td><td>$\frac{2}{5}\pi$</td></tr>
</table>

表三

<table>
<tr><th rowspan="8">n＝6
d＝12
r＝6
(如圖六)</th><th>固定點位置</th><th>面積</th><th>相差</th><th>再相差</th></tr>
<tr><td>O_6</td><td>18π</td><td></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>O_5</td><td>$18\frac{1}{6}\pi$</td><td>$\frac{1}{6}\pi$</td></tr>
<tr><td>O_4</td><td>$18\frac{2}{3}\pi$</td><td>$\frac{1}{2}\pi$</td><td>$\frac{2}{6}\pi$</td></tr>
<tr><td>O_3</td><td>$19\frac{1}{2}\pi$</td><td>$\frac{5}{6}\pi$</td><td>$\frac{2}{6}\pi$</td></tr>
<tr><td>O_2</td><td>$20\frac{2}{3}\pi$</td><td>$1\frac{1}{6}\pi$</td><td>$\frac{2}{6}\pi$</td></tr>
<tr><td>O_1</td><td>$22\frac{1}{6}\pi$</td><td>$1\frac{1}{2}\pi$</td><td>$\frac{2}{6}\pi$</td></tr>
<tr><td>O_0</td><td>24π</td><td>$1\frac{5}{6}\pi$</td><td>$\frac{2}{6}\pi$</td></tr>
</table>

表四

(三)結論

1.房子為正三角形、正方形、正五邊形、正六邊形，固定點在邊線上離頂點愈遠所圍出來的面積愈小，以在邊線上的中點為最小，愈靠近頂點所圍出來的面積愈大，以在頂點上最大。

2.不管為正幾邊形的房子，固定點每一移動一個單位，面積差有著固定的規律。

(1)正三角形：面積差之間皆相差 $\frac{2}{3}\pi$

(2)正方形：面積差之間皆相差 $\frac{2}{4}\pi$

(3)正五邊形：面積差之間皆相差 $\frac{2}{5}\pi$

(4)正六邊形：面積差之間皆相差 $\frac{2}{6}\pi$

(5)我們推論正 n 邊形，面積差之間皆相差$\frac{2}{n}\pi$，證明如下：

3.當圖形為正 n 邊形時(如圖七)，牛吃草的面積為正 n 邊形一個外角所繞出來的面積，不管為正幾邊形，下半部固定為$\frac{1}{2}$ 圓，右上半部圓心角的角度為 180-正 n 邊形的內角，

即 $180-(n-2)\times180\div n$

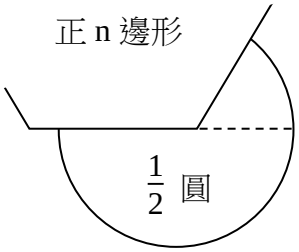
$=180-180+\frac{360}{n}$

$=\frac{360}{n}$

牛吃草面積為：

$\frac{1}{2}\pi r^2+\frac{360}{n}\div360\times(r-o)^2\pi$

$=\frac{1}{2}\pi r^2+\frac{1}{n}\times(r-o)^2\pi$，其中 o 代表固定點與頂點的距離。



圖七

4. 正 n 邊形牛吃草面積差之間皆相差 $\frac{2}{n}\pi$

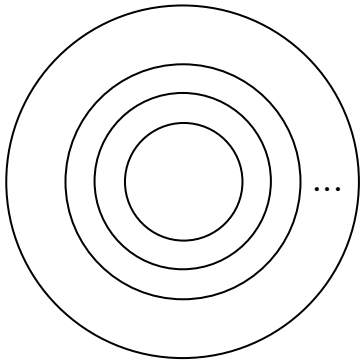
(1)圖八為半徑為 1、2、3…、n 的同心圓，面積分別為 π、4π、9π、…、$n^2\pi$，相鄰的同心圓面積相差分別為 3π、5π、7π、…、$(2n+1)\pi$，亦即每個環形面積分別為 3π、5π、7π、…、$(2n+1)\pi$，而每個相鄰的環形面積相差皆為 2π。

(2)正 n 邊形牛吃草的面積為$\frac{1}{2}\pi r^2+\frac{1}{n}\times(r-o)^2\pi$，

移動固定點，面積相差為$\frac{1}{n}$ 個半徑為(r-o)的圓，

彼此間再相差 $\frac{1}{n}$ 個環形，

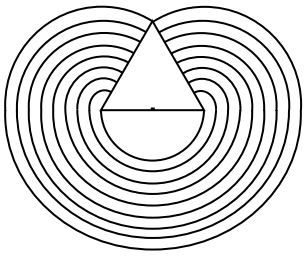
即為 $\frac{1}{n}\times2\pi=\frac{2}{n}\pi$，故得證。



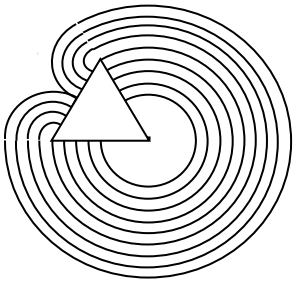
圖八

二、改變繩長，找出面積

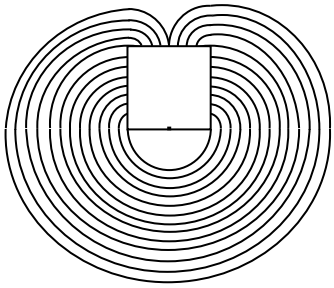
(一)我們用正三角形、正方形、正五邊形、正六邊形當作房子，並分別在邊線上的中點和頂點為固定位置，改變繩長，探討面積的改變，如圖九~圖十六。(我們以圓規繪製圖形，如附件一)



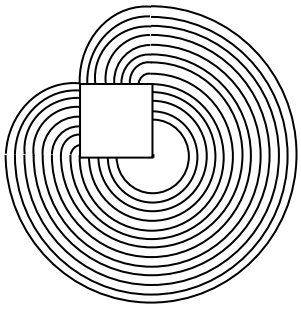
圖九 正三角形 中點



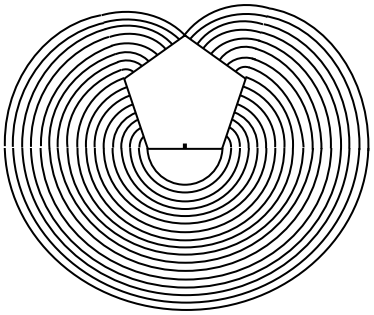
圖十 正三角形 頂點



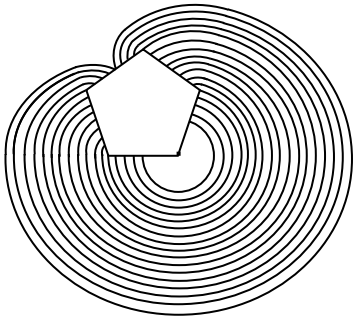
圖十一 正方形 中點



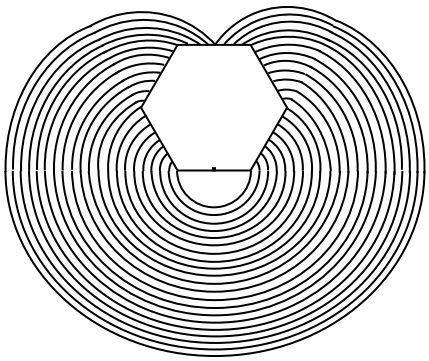
圖十二 正方形 頂點



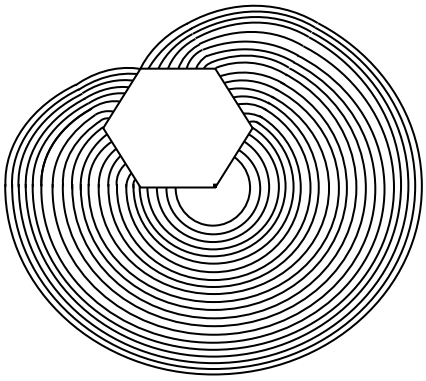
圖十三 正五邊形 中點



圖十四 正五邊形 頂點



圖十五 正六邊形 中點



圖十六 正六邊形 頂點

(二) n ＝3（表示房子為正三角形），d ＝8（表示房子的邊長為 8），O_4表示固定點距離最近的房子頂點為 4 單位長，O_0表示固定點在頂點上，我們整理 n ＝3～6，O_4和 O_0兩個位置上各種不同繩長所圍出來的面積(註一)，如表五~表十二。

	繩長	面積	相差	再相差
n ＝3 d ＝8 O＝4 (如圖九)	4	8π		
			$5\frac{1}{6}\pi$	
	5	$13\frac{1}{6}\pi$		$2\frac{1}{3}\pi$
			$7\frac{1}{2}\pi$	
	6	$20\frac{2}{3}\pi$		$2\frac{1}{3}\pi$
			$9\frac{5}{6}\pi$	
	7	$30\frac{1}{2}\pi$		$2\frac{1}{3}\pi$
			$12\frac{1}{6}\pi$	
	8	$42\frac{2}{3}\pi$		$2\frac{1}{3}\pi$
			$14\frac{1}{2}\pi$	
	9	$57\frac{1}{6}\pi$		$2\frac{1}{3}\pi$
			$16\frac{5}{6}\pi$	
	10	74π		$2\frac{1}{3}\pi$
			$19\frac{1}{6}\pi$	
	11	$93\frac{1}{6}\pi$		$2\frac{1}{3}\pi$
			$21\frac{1}{2}\pi$	
	12	$114\frac{2}{3}\pi$		

表五

	繩長	面積	相差	再相差
n ＝3 d ＝8 O＝0 (如圖十)	4	$13\frac{1}{3}\pi$		
			$7\frac{1}{2}\pi$	
	5	$20\frac{5}{6}\pi$		$1\frac{2}{3}\pi$
			$9\frac{1}{6}\pi$	
	6	30π		$1\frac{2}{3}\pi$
			$10\frac{5}{6}\pi$	
	7	$40\frac{5}{6}\pi$		$1\frac{2}{3}\pi$
			$12\frac{1}{2}\pi$	
	8	$53\frac{1}{3}\pi$		$2\frac{1}{3}\pi$

	9	$68\frac{1}{6}\pi$	$14\frac{5}{6}\pi$	3π
			$17\frac{5}{6}\pi$	
	10	86π		3π
			$20\frac{5}{6}\pi$	
	11	$106\frac{5}{6}\pi$		3π
			$23\frac{5}{6}\pi$	
	12	$130\frac{2}{3}\pi$		

表六

	繩長	面積	相差	再相差
	4	8π		
			5π	
	5	13π		2π
			7π	
	6	20π		2π
			9π	
	7	29π		2π
			11π	
	8	40π		2π
			13π	
n＝4	9	53π		2π
d＝8			15π	
O＝4	10	68π		2π
(如圖十一)			17π	
	11	85π		2π
			19π	
	12	104π		$2\frac{1}{2}\pi$
			$21\frac{1}{2}\pi$	
	13	$125\frac{1}{2}\pi$		3π
			$24\frac{1}{2}\pi$	
	14	150π		3π
			$27\frac{1}{2}\pi$	
	15	$177\frac{1}{2}\pi$		3π
			$30\frac{1}{2}\pi$	
	16	208π		

表七

<table>
<tr><th rowspan="17">n＝4
d＝8
O＝0
(如圖十二)</th><th>繩長</th><th>面積</th><th>相差</th><th>再相差</th></tr>
<tr><td>4</td><td>12π</td><td></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">5</td><td rowspan="2">$18\frac{3}{4}\pi$</td><td rowspan="2">$6\frac{3}{4}\pi$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$1\frac{1}{2}\pi$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">6</td><td rowspan="2">27π</td><td rowspan="2">$8\frac{1}{4}\pi$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$1\frac{1}{2}\pi$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">7</td><td rowspan="2">$36\frac{3}{4}\pi$</td><td rowspan="2">$9\frac{3}{4}\pi$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$1\frac{1}{2}\pi$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">8</td><td rowspan="2">48π</td><td rowspan="2">$11\frac{1}{4}\pi$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2π</td></tr>
<tr><td rowspan="2">9</td><td rowspan="2">$61\frac{1}{4}\pi$</td><td rowspan="2">$13\frac{1}{4}\pi$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$2\frac{1}{2}\pi$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">10</td><td rowspan="2">77π</td><td rowspan="2">$15\frac{3}{4}\pi$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$2\frac{1}{2}\pi$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">11</td><td rowspan="2">$95\frac{1}{4}\pi$</td><td rowspan="2">$18\frac{1}{4}\pi$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$2\frac{1}{2}\pi$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">12</td><td rowspan="2">116π</td><td rowspan="2">$20\frac{3}{4}\pi$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$2\frac{1}{2}\pi$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">13</td><td rowspan="2">$139\frac{1}{4}\pi$</td><td rowspan="2">$23\frac{1}{4}\pi$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$2\frac{1}{2}\pi$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">14</td><td rowspan="2">165π</td><td rowspan="2">$25\frac{3}{4}\pi$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$2\frac{1}{2}\pi$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">15</td><td rowspan="2">$193\frac{1}{4}\pi$</td><td rowspan="2">$28\frac{1}{4}\pi$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$2\frac{1}{2}\pi$</td></tr>
<tr><td>16</td><td>224π</td><td>$30\frac{3}{4}\pi$</td></tr>
</table>

表八

	繩長	面積	相差	再相差
	4	8π		
			$4\frac{9}{10}\pi$	
	5	$12\frac{9}{10}\pi$		$1\frac{4}{5}\pi$
			$6\frac{7}{10}\pi$	
	6	$19\frac{3}{5}\pi$		$1\frac{4}{5}\pi$
			$8\frac{1}{2}\pi$	
	7	$28\frac{1}{10}\pi$		$1\frac{4}{5}\pi$
			$10\frac{3}{10}\pi$	
	8	$38\frac{2}{5}\pi$		$1\frac{4}{5}\pi$
			$12\frac{1}{10}\pi$	
	9	$50\frac{1}{2}\pi$		$1\frac{4}{5}\pi$
			$13\frac{9}{10}\pi$	
	10	$64\frac{2}{5}\pi$		$1\frac{4}{5}\pi$
			$15\frac{7}{10}\pi$	
n＝5	11	$80\frac{1}{10}\pi$		$1\frac{4}{5}\pi$
d＝8			$17\frac{1}{2}\pi$	
O＝4	12	$97\frac{3}{5}\pi$		$2\frac{1}{5}\pi$
(如圖十三)			$19\frac{7}{10}\pi$	
	13	$117\frac{3}{10}\pi$		$2\frac{3}{5}\pi$
			$22\frac{3}{10}\pi$	
	14	$139\frac{3}{5}\pi$		$2\frac{3}{5}\pi$
			$24\frac{9}{10}\pi$	
	15	$164\frac{1}{2}\pi$		$2\frac{3}{5}\pi$
			$27\frac{1}{2}\pi$	
	16	192π		$2\frac{3}{5}\pi$
			$30\frac{1}{10}\pi$	
	17	$222\frac{1}{10}\pi$		$2\frac{3}{5}\pi$
			$32\frac{7}{10}\pi$	
	18	$254\frac{4}{5}\pi$		$2\frac{3}{5}\pi$
			$35\frac{3}{10}\pi$	
	19	$290\frac{1}{10}\pi$		$2\frac{3}{5}\pi$
			$37\frac{9}{10}\pi$	
	20	328π		

表九

	繩長	面積	相差	再相差
	4	$11\frac{1}{5}\pi$		
			$6\frac{3}{10}\pi$	
	5	$17\frac{1}{2}\pi$		$1\frac{2}{5}\pi$
			$7\frac{7}{10}\pi$	
	6	$25\frac{1}{5}\pi$		$1\frac{2}{5}\pi$
			$9\frac{1}{10}\pi$	
	7	$34\frac{3}{10}\pi$		$1\frac{2}{5}\pi$
			$10\frac{1}{2}\pi$	
	8	$44\frac{4}{5}\pi$		$1\frac{4}{5}\pi$
			$12\frac{3}{10}\pi$	
	9	$57\frac{1}{10}\pi$		$2\frac{1}{5}\pi$
			$14\frac{1}{2}\pi$	
	10	$71\frac{3}{5}\pi$		$2\frac{1}{5}\pi$
			$16\frac{7}{10}\pi$	
n＝5	11	$88\frac{3}{10}\pi$		$2\frac{1}{5}\pi$
d＝8			$18\frac{9}{10}\pi$	
O＝0	12	$107\frac{1}{5}\pi$		$2\frac{1}{5}\pi$
(如圖十四)			$21\frac{1}{10}\pi$	
	13	$128\frac{3}{10}\pi$		$2\frac{1}{5}\pi$
			$23\frac{3}{10}\pi$	
	14	$151\frac{3}{5}\pi$		$2\frac{1}{5}\pi$
			$25\frac{1}{2}\pi$	
	15	$177\frac{1}{10}\pi$		$2\frac{1}{5}\pi$
			$27\frac{7}{10}\pi$	
	16	$204\frac{4}{5}\pi$		$2\frac{3}{5}\pi$
			$30\frac{3}{10}\pi$	
	17	$235\frac{1}{10}\pi$		3π
			$33\frac{3}{10}\pi$	
	18	$268\frac{2}{5}\pi$		3π
			$36\frac{3}{10}\pi$	
	19	$304\frac{7}{10}\pi$		3π
			$39\frac{3}{10}\pi$	
	20	344π		

表十

	繩長	面積	相差	再相差
	4	8π		
			$4\frac{5}{6}\pi$	
	5	$12\frac{5}{6}\pi$		$1\frac{2}{3}\pi$
			$6\frac{1}{2}\pi$	
	6	$19\frac{1}{3}\pi$		$1\frac{2}{3}\pi$
			$8\frac{1}{6}\pi$	
	7	$27\frac{1}{2}\pi$		$1\frac{2}{3}\pi$
			$9\frac{5}{6}\pi$	
	8	$37\frac{1}{3}\pi$		$1\frac{2}{3}\pi$
			$11\frac{1}{2}\pi$	
	9	$48\frac{5}{6}\pi$		$1\frac{2}{3}\pi$
			$13\frac{1}{6}\pi$	
	10	62π		$1\frac{2}{3}\pi$
			$14\frac{5}{6}\pi$	
	11	$76\frac{5}{6}\pi$		$1\frac{2}{3}\pi$
			$16\frac{1}{2}\pi$	
n＝6 d＝8 O＝4 (如圖十五)	12	$93\frac{1}{3}\pi$		2π
			$18\frac{1}{2}\pi$	
	13	$111\frac{5}{6}\pi$		$2\frac{1}{3}\pi$
			$20\frac{5}{6}\pi$	
	14	$132\frac{2}{3}\pi$		$2\frac{1}{3}\pi$
			$23\frac{1}{6}\pi$	
	15	$155\frac{5}{6}\pi$		$2\frac{1}{3}\pi$
			$25\frac{1}{2}\pi$	
	16	$181\frac{1}{3}\pi$		$2\frac{1}{3}\pi$
			$27\frac{5}{6}\pi$	
	17	$209\frac{1}{6}\pi$		$2\frac{1}{3}\pi$
			$30\frac{1}{6}\pi$	
	18	$239\frac{1}{3}\pi$		$2\frac{1}{3}\pi$
			$32\frac{1}{2}\pi$	
	19	$271\frac{5}{6}\pi$		$2\frac{1}{3}\pi$
			$34\frac{5}{6}\pi$	
	20	$306\frac{2}{3}\pi$		$2\frac{2}{3}\pi$
			$37\frac{1}{2}\pi$	
	21	$344\frac{1}{6}\pi$		3π
			$40\frac{1}{2}\pi$	

	22	$384\frac{2}{3}\pi$		3π
			$43\frac{1}{2}\pi$	
	23	$428\frac{1}{6}\pi$		3π
			$46\frac{1}{2}\pi$	
	24	$474\frac{2}{3}\pi$		

表十一

	繩長	面積	相差	再相差
	4	$10\frac{2}{3}\pi$		
			6π	
	5	$16\frac{2}{3}\pi$		$1\frac{1}{3}\pi$
			$7\frac{1}{3}\pi$	
	6	24π		$1\frac{1}{3}\pi$
			$8\frac{2}{3}\pi$	
	7	$32\frac{2}{3}\pi$		$1\frac{1}{3}\pi$
			10π	
	8	$42\frac{2}{3}\pi$		$1\frac{2}{3}\pi$
			$11\frac{2}{3}\pi$	
	9	$54\frac{1}{3}\pi$		2π
			$13\frac{2}{3}\pi$	
n＝6	10	68π		2π
d＝8			$15\frac{2}{3}\pi$	
O＝0	11	$83\frac{2}{3}\pi$		2π
(如圖十六)			$17\frac{2}{3}\pi$	
	12	$101\frac{1}{3}\pi$		2π
			$19\frac{2}{3}\pi$	
	13	121π		2π
			$21\frac{2}{3}\pi$	
	14	$142\frac{2}{3}\pi$		2π
			$23\frac{2}{3}\pi$	
	15	$166\frac{1}{3}\pi$		2π
			$25\frac{2}{3}\pi$	
	16	192π		$2\frac{1}{3}\pi$
			28π	
	17	220π		$2\frac{2}{3}\pi$

<table>
<tr><td rowspan="9"></td><td>18</td><td>$250\frac{2}{3}\pi$</td><td rowspan="2">$30\frac{2}{3}\pi$</td><td rowspan="2">$2\frac{2}{3}\pi$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">19</td><td rowspan="2">284π</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$33\frac{1}{3}\pi$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">20</td><td rowspan="2">320π</td><td rowspan="2">36π</td><td rowspan="2">$2\frac{2}{3}\pi$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$38\frac{2}{3}\pi$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">21</td><td rowspan="2">$358\frac{2}{3}\pi$</td><td rowspan="2">$2\frac{2}{3}\pi$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$41\frac{1}{3}\pi$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">22</td><td rowspan="2">400π</td><td rowspan="2">$2\frac{2}{3}\pi$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">44π</td></tr>
<tr><td>23</td><td>444π</td><td rowspan="2">$2\frac{2}{3}\pi$</td></tr>
<tr><td>24</td><td>$490\frac{2}{3}\pi$</td><td>$46\frac{2}{3}\pi$</td></tr>
</table>

表十二

註一：我們研究繩長以不長到重疊為原則。

(三)結論

1. n ＝3， d ＝8，O＝4，r=4~12(房子為正三角形，三角形邊長為 8 單位，固定點在正三角形邊上中點位置，繩長 4~12 單位)：

(1)面積 $A=\frac{1}{2}r^2\pi+\frac{2}{3}(r-4)^2\pi$ ，即$\frac{1}{2}$ 圓+左右 2 個$\frac{1}{3}$ 圓，如圖九。

(2)繩長每增加 1 單位長，面積之間的差皆相差 $2\frac{1}{3}\pi$

2. n ＝3， d ＝8，O＝0，r=4~12(房子為正三角形，三角形邊長為 8 單位，固定點在正三角形頂點位置，繩長 4~12 單位)：

(1)面積 $A=\frac{5}{6}r^2\pi+\frac{2}{3}(r-8)^2\pi$ ，當 $4\leqq r\leqq 8$ 時，即為$\frac{5}{6}$ 圓，r>8 時，再加左右 2 個$\frac{1}{3}$ 圓，如圖十。

(2)r<8，繩長每增加 1 單位長，面積之間的差皆相差 $1\frac{2}{3}\pi$

r>8，繩長每增加 1 單位長，面積之間的差皆相差 3π

3. n ＝4， d ＝8，O＝4，r=4~16(房子為正方形，正方形邊長為 8 單位，固定點在正方形邊上中點位置，繩長 4~16 單位)：

(1)面積 $A=\frac{1}{2}r^2\pi+\frac{1}{2}(r-4)^2\pi+\frac{1}{2}(r-12)^2\pi$，當 4≦r≦12 即為$\frac{1}{2}$ 圓，再加左右 2 個$\frac{1}{4}$ 圓，r>12，再加左右 2 個$\frac{1}{4}$ 圓，如圖十一。

(2)r<12，繩長每增加 1 單位長，面積之間的差皆相差 2π

r>12，繩長每增加 1 單位長，面積之間的差皆相差 3π

4. n ＝4， d ＝8，O＝0，r=4~16(房子為正方形，正方形邊長為 8 單位，固定點在正方形頂點位置，繩長 4~16 單位)：

(1)面積 $A=\frac{3}{4}r^2\pi+\frac{1}{2}(r-8)^2\pi$，當 4≦r≦8 時，即為$\frac{3}{4}$ 圓，r>8 時，再加左右 2 個$\frac{1}{4}$ 圓，如圖十二。

(2)r<8，繩長每增加 1 單位長，面積之間的差皆相差 $1\frac{1}{2}\pi$

r>8，繩長每增加 1 單位長，面積之間的差皆相差 $2\frac{1}{2}\pi$

5. n ＝5， d ＝8，O＝4，r=4~20(房子為正五邊形，正五邊形邊長為 8 單位，固定點在正五邊形邊上中點位置，繩長 4~20 單位)：

(1)面積 $A=\frac{1}{2}r^2\pi+\frac{2}{5}(r-4)^2\pi+\frac{2}{5}(r-12)^2\pi$，當 4≦r≦12 即為$\frac{1}{2}$ 圓，再加左右 2 個$\frac{1}{5}$ 圓，r>12 時，再加左右 2 個$\frac{1}{5}$ 圓，如圖十三。

(2)r<12，繩長每增加 1 單位長，面積之間的差皆相差 $1\frac{4}{5}\pi$

r>12，繩長每增加 1 單位長，面積之間的差皆相差 $2\frac{3}{5}\pi$

6. n ＝5， d ＝8，O＝0，r=4~20(房子為正五邊形，正五邊形邊長為 8 單位，固定點在正五邊形頂點位置，繩長 4~20 單位)：

(1)面積 $A=\frac{7}{10}r^2\pi+\frac{2}{5}(r-8)^2\pi+\frac{2}{5}(r-16)^2\pi$，當 4≦r≦8 時，即為$\frac{7}{10}$ 圓，r>8 時，再加左右 2 個$\frac{1}{5}$ 圓，r>16 時，再加左右 2 個$\frac{1}{5}$ 圓，如圖十四。

(2)r<8，繩長每增加 1 單位長，面積之間的差皆相差 $1\frac{2}{5}\pi$

8< r<16，繩長每增加 1 單位長，面積之間的差皆相差 $2\frac{1}{5}\pi$

r>16，繩長每增加 1 單位長，面積之間的差皆相差 3π

7. n ＝6， d ＝8，O＝4，r=4~24(房子為正六邊形，正六邊形邊長為 8 單位，固定點在正六邊形邊上中點位置，繩長 4~24 單位)：

(1)面積 $A=\frac{1}{2}r^2\pi+\frac{1}{3}(r-4)^2\pi+\frac{1}{3}(r-12)^2\pi+\frac{1}{3}(r-20)^2\pi$，當 $4\leqq r\leqq 12$ 即為$\frac{1}{2}$ 圓，

再加左右 2 個$\frac{1}{6}$ 圓，r>12 時，再加左右 2 個$\frac{1}{6}$ 圓，r>20 時，再加左右 2 個$\frac{1}{6}$ 圓，如圖十五。

(2)r<12，繩長每增加 1 單位長，面積之間的差皆相差 $1\frac{2}{3}\pi$

12< r<20，繩長每增加 1 單位長，面積之間的差皆相差 $2\frac{1}{3}\pi$

r>20，繩長每增加 1 單位長，面積之間的差皆相差 3π

8. n ＝6， d ＝8，O＝0，r=4~24(房子為正六邊形，正六邊形邊長為 8 單位，固定點在正六邊形頂點位置，繩長 4~24 單位)：

(1)面積 $A=\frac{2}{3}r^2\pi+\frac{1}{3}(r-8)^2\pi+\frac{1}{3}(r-16)^2\pi$，當 $4\leqq r\leqq 8$ 時，即為$\frac{2}{3}$ 圓，r>8 時，

再加左右 2 個$\frac{1}{6}$ 圓，r>16 時，再加左右 2 個$\frac{1}{6}$ 圓，如圖十六。

(2)r<8，繩長每增加 1 單位長，面積之間的差皆相差 $1\frac{1}{3}\pi$

8< r<16，繩長每增加 1 單位長，面積之間的差皆相差 2π

r>16，繩長每增加 1 單位長，面積之間的差皆相差 $2\frac{2}{3}\pi$

9.我們發現當固定點在正多邊形邊上的中點時，面積為一個半圓再加上 2 個$\frac{1}{n}$ 圓，其中 n 代表正多邊形的邊數。當固定點在正多邊形的頂點時，面積為正多邊形一個外角所圍成的扇形面積，再加上 2 個$\frac{1}{n}$ 圓。

10.因為圓形半徑每增加一單位長(如圖八)，環形面積差皆為 2π，我們可以從各個繩長包含幾個圓，來找出半徑增加一單位，面積差相差多少，整理如表十三。

正多邊形	固定點位置	繩長	所包含的圓	面積增加相差
正三角形	中點	$4\leqq r\leqq 12$	1 個$\frac{1}{2}$ 圓、2 個$\frac{1}{3}$ 圓	$\frac{1}{2}\times 2\pi+2\times\frac{1}{3}\times 2\pi=2\frac{1}{3}\pi$
	頂點	$4\leqq r\leqq 8$	1 個$\frac{5}{6}$ 圓	$\frac{5}{6}\times 2\pi=1\frac{2}{3}\pi$
		$8< r\leqq 12$	1 個$\frac{5}{6}$ 圓、2 個$\frac{1}{3}$ 圓	$\frac{5}{6}\times 2\pi+2\times\frac{1}{3}\times 2\pi=3\pi$

正方形	中點	$4 \leqq r \leqq 12$	1 個$\frac{1}{2}$ 圓、2 個$\frac{1}{4}$ 圓	$\frac{1}{2} \times 2\pi + 2 \times \frac{1}{4} \times 2\pi = 2\pi$
		$12 < r \leqq 16$	1 個$\frac{1}{2}$ 圓、2 個$\frac{1}{4}$ 圓、2 個$\frac{1}{4}$ 圓	$\frac{1}{2} \times 2\pi + 2 \times \frac{1}{4} \times 2\pi + 2 \times \frac{1}{4} \times 2\pi = 3\pi$
	頂點	$4 \leqq r \leqq 8$	1 個$\frac{3}{4}$ 圓	$\frac{3}{4} \times 2\pi = 1\frac{1}{2}\pi$
		$8 < r \leqq 16$	1 個$\frac{3}{4}$ 圓、2 個$\frac{1}{4}$ 圓	$\frac{3}{4} \times 2\pi + 2 \times \frac{1}{4} \times 2\pi = 2\frac{1}{2}\pi$
正五邊形	中點	$4 \leqq r \leqq 12$	1 個$\frac{1}{2}$ 圓、2 個$\frac{1}{5}$ 圓	$\frac{1}{2} \times 2\pi + 2 \times \frac{1}{5} \times 2\pi = 1\frac{4}{5}\pi$
		$12 < r \leqq 20$	1 個$\frac{1}{2}$ 圓、2 個$\frac{1}{5}$ 圓、2 個$\frac{1}{5}$ 圓	$\frac{1}{2} \times 2\pi + 2 \times \frac{1}{5} \times 2\pi + 2 \times \frac{1}{5} \times 2\pi = 2\frac{3}{5}\pi$
	頂點	$4 \leqq r \leqq 8$	1 個$\frac{7}{10}$ 圓	$\frac{7}{10} \times 2\pi = 1\frac{2}{5}\pi$
		$8 < r < 16$	1 個$\frac{7}{10}$ 圓、2 個$\frac{1}{5}$ 圓	$\frac{7}{10} \times 2\pi + 2 \times \frac{1}{5} \times 2\pi = 2\frac{1}{5}\pi$
		$16 < r \leqq 20$	1 個$\frac{7}{10}$ 圓、2 個$\frac{1}{5}$ 圓、2 個$\frac{1}{5}$ 圓	$\frac{7}{10} \times 2\pi + 2 \times \frac{1}{5} \times 2\pi + 2 \times \frac{1}{5} \times 2\pi = 3\pi$
正六邊形	中點	$4 \leqq r \leqq 12$	1 個$\frac{1}{2}$ 圓、2 個$\frac{1}{6}$ 圓	$\frac{1}{2} \times 2\pi + 2 \times \frac{1}{6} \times 2\pi = 1\frac{2}{3}\pi$
		$12 < r < 20$	1 個$\frac{1}{2}$ 圓、2 個$\frac{1}{6}$ 圓、2 個$\frac{1}{6}$ 圓	$\frac{1}{2} \times 2\pi + 2 \times \frac{1}{6} \times 2\pi + 2 \times \frac{1}{6} \times 2\pi = 2\frac{1}{3}\pi$
		$20 < r \leqq 24$	1 個$\frac{1}{2}$ 圓、2 個$\frac{1}{6}$ 圓、2 個$\frac{1}{6}$ 圓、2 個$\frac{1}{6}$ 圓	$\frac{1}{2} \times 2\pi + 2 \times \frac{1}{6} \times 2\pi + 2 \times \frac{1}{6} \times 2\pi + 2 \times \frac{1}{6} \times 2\pi = 3\pi$

	頂點	$4 \leqq r \leqq 8$	1 個$\frac{2}{3}$ 圓	$\frac{2}{3} \times 2\pi = 1\frac{1}{3}\pi$
		$8 < r < 16$	1 個$\frac{2}{3}$ 圓、2 個$\frac{1}{6}$ 圓	$\frac{2}{3} \times 2\pi + 2 \times \frac{1}{6} \times 2\pi = 2\pi$
		$16 < r \leqq 24$	1 個$\frac{2}{3}$ 圓、2 個$\frac{1}{6}$ 圓、2 個$\frac{1}{6}$ 圓	$\frac{2}{3} \times 2\pi + 2 \times \frac{1}{6} \times 2\pi + 2 \times \frac{1}{6} \times 2\pi = 2\frac{2}{3}\pi$

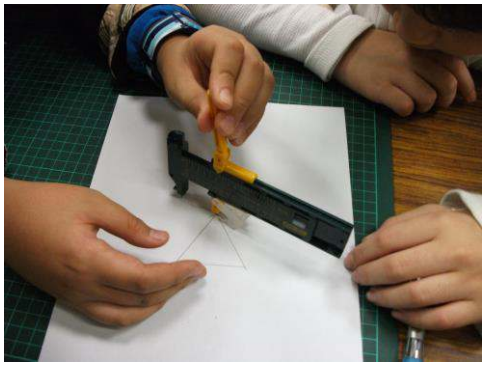
表十三

11.我們發現不論固定點的位置在中點或頂點，當繩長相同時，房子為正 n 邊形，n 越小，圍成的面積越大。

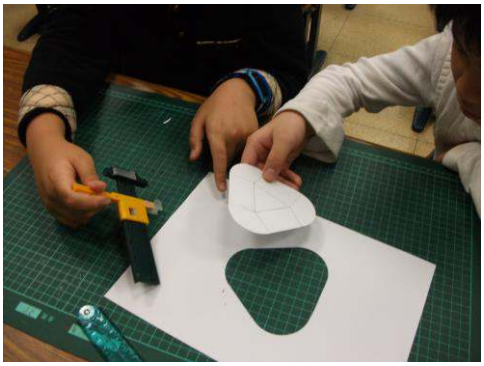
三、探討固定點為連續可移動而產生的牛吃草問題

在牛吃草的問題中，讓固定點變成可以沿著房子的周圍移動的點，可以讓牛繞著房子吃草，這樣可以圍成更大的面積。

(一) 我們發現固定點沿著直線前進時，所圍出來的圖形為長方形，固定點在頂點時，則會圍出一個扇形。我們找到一種市面上的割圓器可以協助我們畫出固定點可以移動的牛吃草圖形，甚至可以將圖形割下，如圖十七、十八，我們將一些圖形割下，黏貼在紙上，如附件二。

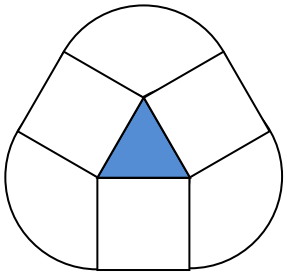


圖十七

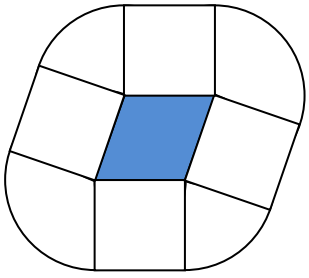


圖十八

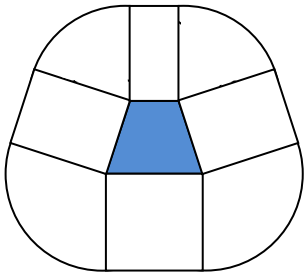
(二) 房子為各種多邊形時，畫出固定點可移動的牛吃草圖形，如圖十九~圖二十四



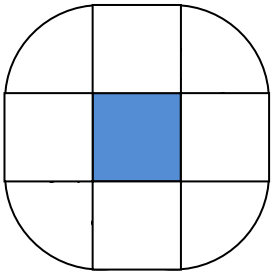
圖十九 正三角形
面積：3 個長方形+1 個圓



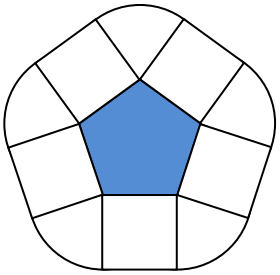
圖二十 平行四邊形
面積：4 個長方形+1 個圓



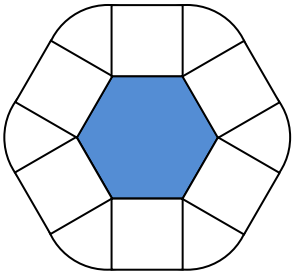
圖二十一 梯形
面積：4 個長方形+1 個圓



圖二十二 正方形
面積：4 個長方形+1 個圓



圖二十三 正五邊形
面積：5 個長方形+1 個圓



圖二十四 正六邊形
面積：6 個長方形+1 個圓

(三)我們發現任意凸多邊形的房子，所圍出來的牛吃草圖形面積為凸多邊形的邊長和×繩長+1 個以繩長為半徑的圓面積。

證明：任意 n 多邊形有 n 個邊，會產生 n 個長方形，面積為邊長和×繩長。

固定點在頂點時會產生扇形，

任意 n 多邊形有 n 個頂點，

每個頂點的周角為 360°，

所有頂點的周角共 360°×n……①

多邊形的邊和繩子會形成長方形，

每一個長方形會有 2 個直角和房子的頂點相連，

n 個頂點共 n×2×90°=180°×n……②

任意 n 多邊形的內角和為(n-2)×180°……③

計算剩餘的外角為①-②-③=

360°×n-180°×n-(n-2)×180°=

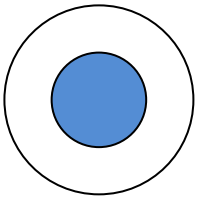
360°×n-180°×n-180°×n +360°=

360°，所以剩餘的外角為一個完整的圓，故得證。

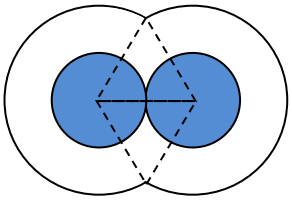
(四)探討房子為圓形的牛吃草問題

我們已找出房子為任意凸多邊形的牛吃草面積，那麼房子為圓形所圍出來的圖形會是什麼形狀？數個圓形的房子連接在一起，形狀及圍出來的面積會有什麼變化？我們以直線形、三角形數、正方形數進行研究。

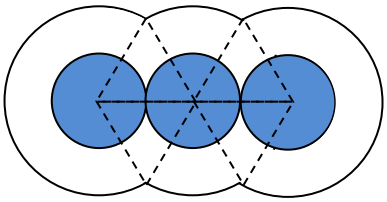
1.直線：將圓形的房子排成一直線(如圖二十五~三十)，房子的半徑訂為 1 單位長，繩長也訂為 1 單位長，計算面積，如表十四。



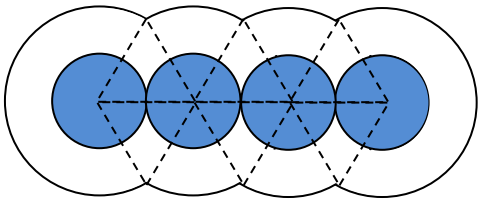
圖二十五



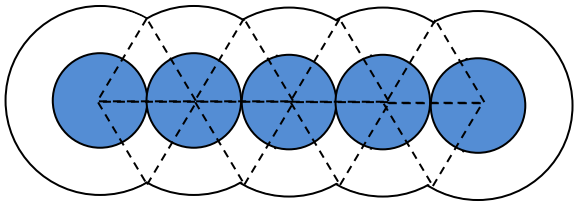
圖二十六



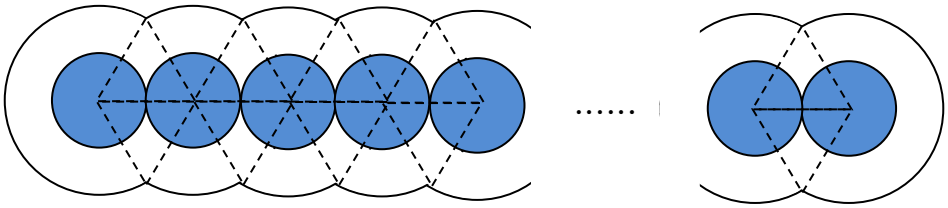
圖二十七



圖二十八



圖二十九



圖三十

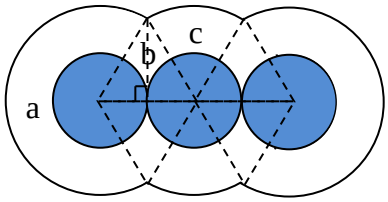
我們發現增加圓，所增加的牛吃草的面積可以分解成幾個相同的部分，我們用 3 個直線上的圓來計算出各個部分的面積(如圖三十一)，牛吃草所形成的面積由 a、b、c 三種面積所組合而成。

a 面積：完整一個環形面積為大圓減去小圓，即 $4\pi - \pi = 3\pi$

三角形的邊長皆為 2，故為正三角形，

360-60-60=240，240÷360=$\frac{2}{3}$ ，a 為$\frac{2}{3}$ 的環形，

$a=\frac{2}{3}\times 3\pi = 2\pi$



圖三十一

b 面積：在正三角形中我們畫一條高，正三角形邊長 2，

利用畢氏定理，我們得知高為$\sqrt{3}$，

正三角形面積為 $2\times\sqrt{3}\div 2=\sqrt{3}$

60°的扇形面積為$\frac{1}{6}\pi$

$b=\sqrt{3}-2\times\frac{1}{6}\pi=\sqrt{3}-\frac{1}{3}\pi$

c 面積：c 為$\frac{1}{6}$ 的環形

$c=\frac{1}{6}\times 3\pi=\frac{1}{2}\pi$

利用上面的結果，我們整理出直線的面積如表十四

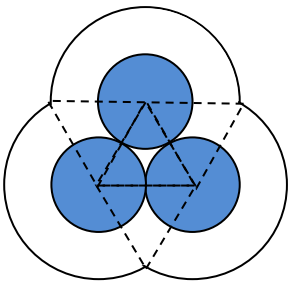
直線、R=1、r=1(表示圓形房子以直線排列、房子半徑為 R、繩子長度為 r)			
n(圓形房子數)	圖形	面積	每增加一間房子面積增加量
1	圖二十五	3π	$\frac{1}{3}\pi+2\sqrt{3}$
2	圖二十六	$3\frac{1}{3}\pi+2\sqrt{3}$	

3	圖二十七	$3\frac{2}{3}\pi+4\sqrt{3}$	
4	圖二十八	$4\pi+6\sqrt{3}$	
5	圖二十九	$4\frac{1}{3}\pi+8\sqrt{3}$	
n	圖三十	$\frac{1}{3}n\pi+2(n-1)\sqrt{3}+2\frac{2}{3}\pi$	

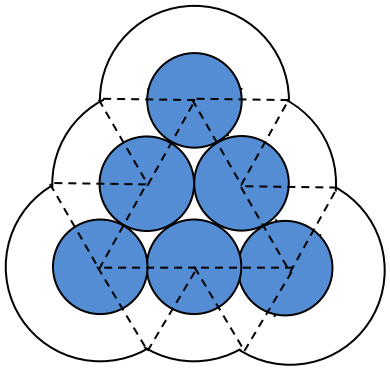
表十四

註：從 2 個圓開始，每增加一個圓即增加 2 個面積 b 及 2 個面積 c，故增加量為$\frac{1}{3}\pi+2\sqrt{3}$

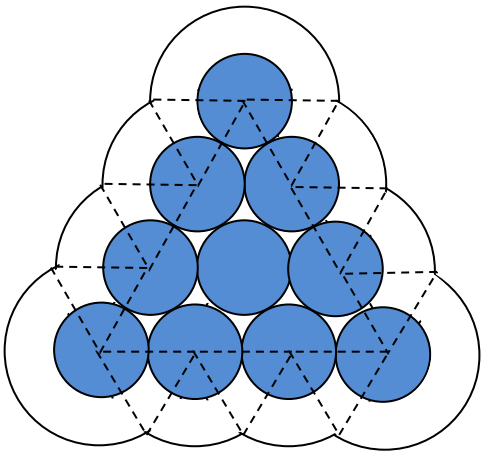
2.三角形數：將圓形的房子排成三角形，(如圖三十二~三十六)，依序增加，計算面積如表十五。



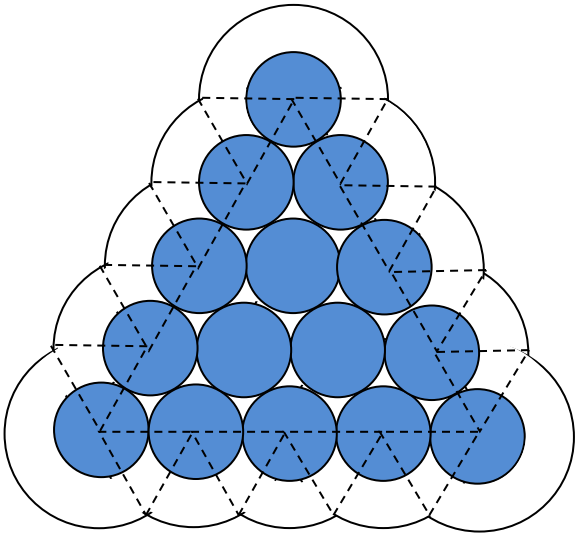
圖三十二



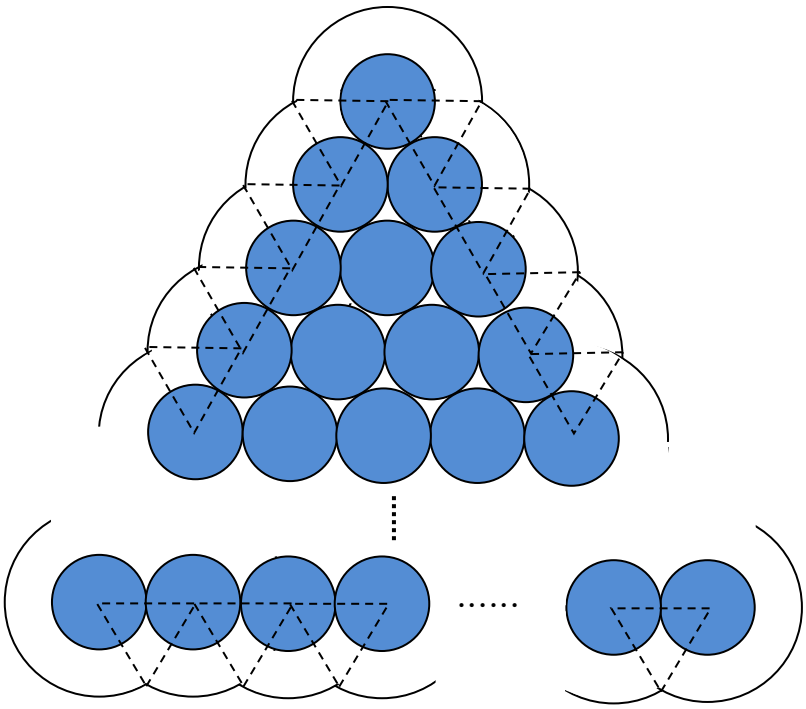
圖三十三



圖三十四



圖三十五



圖三十六

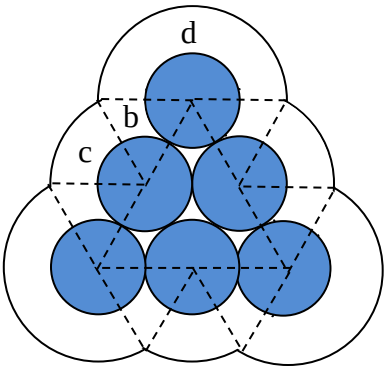
三角形數的面積也可以分成三種部分，如圖三十七，b、c 的面積和之前的相同，d 部分計算如下：

d 面積：3 個正三角形的內角組成一個平角，

$360^\circ-180^\circ=180^\circ$

所以環形 d 的角度為 180°

$d=\frac{1}{2}\times 3\pi=1\frac{1}{2}\pi$



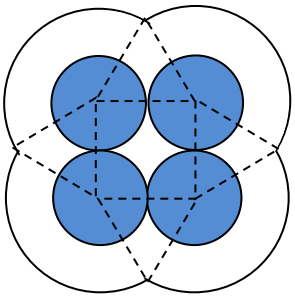
圖三十七

三角形數、R=1、r=1			
n(每邊數量)	圖形	面積	每邊增加一間房子面積增加量
1	圖二十五	3π	$\frac{1}{2}\pi+3\sqrt{3}$
2	圖三十二	$3\frac{1}{2}\pi+3\sqrt{3}$	
3	圖三十三	$4\pi+6\sqrt{3}$	
4	圖三十四	$4\frac{1}{2}\pi+9\sqrt{3}$	
5	圖三十五	$5\pi+12\sqrt{3}$	
n	圖三十六	$\frac{1}{2}n\pi+2\frac{1}{2}\pi+3n\sqrt{3}-3\sqrt{3}$	

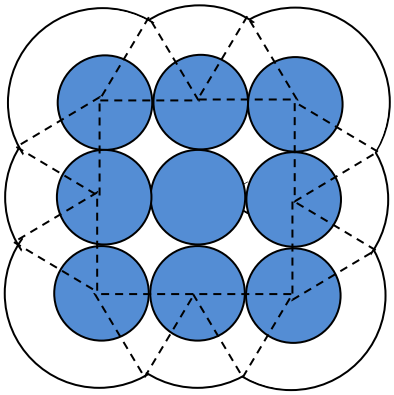
表十五

註：從每邊 2 個圓開始，每增加一個圓即增加 3 個面積 b 及 3 個面積 c，故增加量為 $\frac{1}{2}\pi+3\sqrt{3}$

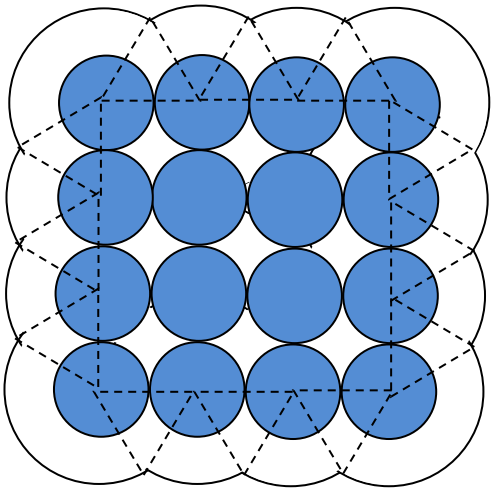
3.正方形數：將圓形的房子排成正方形，(如圖三十八~四十一)，依序增加，計算面積如表十六。



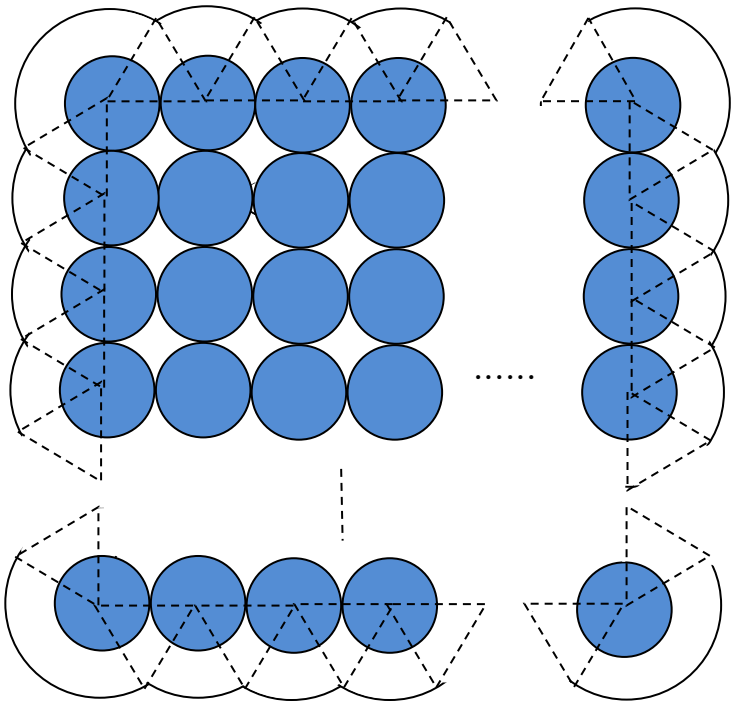
圖三十八



圖三十九



圖四十



圖四十一

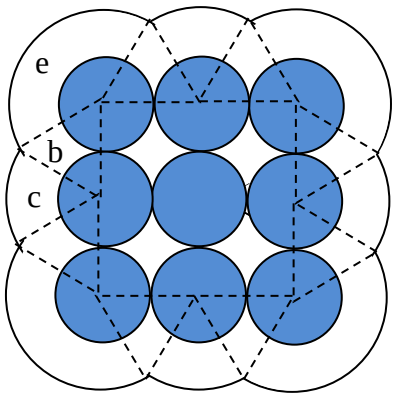
正方形數的面積也可以分成三種部分，如圖四十二，b、c 的面積和之前的相同，e 部分計算如下：

e 面積：$60^\circ \times 2+90^\circ=210^\circ$

$360^\circ-210^\circ=150^\circ$

$150\div 360=\frac{5}{12}$

$e=3\pi\times\frac{5}{12}=1\frac{1}{4}\pi$



圖四十二

正方形數、R=1、r=1			
n(每邊數量)	圖形	面積	每邊增加一間房子面積增加量
1	圖二十五	3π	$\frac{2}{3}\pi+4\sqrt{3}$
2	圖三十八	$3\frac{2}{3}\pi+4\sqrt{3}$	
3	圖三十九	$4\frac{1}{3}\pi+8\sqrt{3}$	
4	圖四十	$5\pi+12\sqrt{3}$	
n	圖四十一	$\frac{2}{3}n\pi+2\frac{1}{3}\pi+4n\sqrt{3}-4\sqrt{3}$	

表十六

註：從每邊 2 個圓開始，每增加一個圓即增加 4 個面積 b 及 4 個面積 c，故增加量為$\frac{2}{3}\pi+4\sqrt{3}$

四、找出生活中的應用

我們研究過牛吃草的問題後，發現生活中以固定點可以移動的牛吃草掃出面積的應用滿多的。

(一)自動掃地機(以 LG VR64702LVM 為例)

自動掃地機在前方左右兩側各有一組旋轉式刷頭(如圖四十三、四十四)，在較空曠和無障礙的空間，掃地機會以 Z 字形(如圖四十五)來回掃地，提高掃地效率，掃地機所掃出的範圍和我們的研究相同。

圖四十三 掃地機正面

圖四十四 掃地機反面

掃地機照片來源：http://www.lg.com/tw/small-appliances/lg-VR64702LVM

圖四十五

(二)農夫噴灑農藥

農夫在噴農藥時以幫浦將農藥水打進塑膠管，進入以竹子和鐵製成的噴灑器(如圖四十六)，噴灑器分為竹子部分及鐵製噴頭部分(如圖四十七)，只有鐵製噴頭部分會噴出藥水，在噴灑農藥時，農夫為了不讓自己被農藥噴到，會手持噴灑器以半圓形來回揮動，並以後退的方式噴灑，也以 Z 字形來回噴灑，產生的噴灑範圍如圖四十八。

加壓幫浦

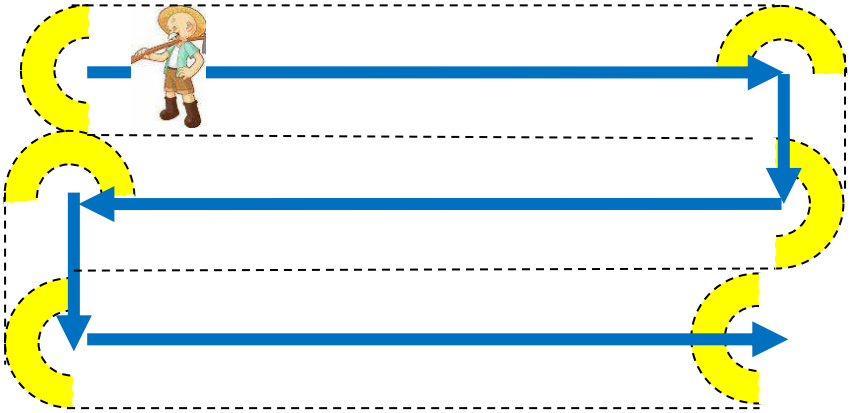
塑膠管

為我們親自示範的指導老師

圖四十六

鐵製噴頭部分　　手持竹子部分

圖四十七



圖四十八

(三)自動灑水器

自動灑水器的灑水頭(如圖四十九)會將水以圓形平均噴灑在草地上，我們利用水管組裝成可以移動的自動灑水器(如圖五十)，以便比較固定式灑水器和移動式灑水器的差別。

圖四十九

圖五十

1.實驗流程：

讓自製灑水器灑水成一個圓形

測量圓的半徑，算出直徑

以圓的直徑當作正方形的邊長，將正方形畫在地上

用強力膠帶將自製灑水器固定在板車上

打開水，讓板車沿著正方形邊線前進、灑水

灑水產生的圖形果然是四個角為圓弧的正方形，測量長度

2.實驗結果：

(1)我們將自製的灑水器放置在學校籃球場，打開水龍頭開始灑水，灑水的區域成圓形，我們測量圓形的半徑長為 340 公分，這樣的灑水器 4 個分別擺在邊長為 680 公分的正方形的 4 個頂點，開始灑水(如圖五十一)，灑水產生的面積為 $340\times340\times\pi\times4=46.24$ 平方公尺。

(2)在邊長同為 680 公分的正方形上，改將灑水器沿著邊線上移動，繞完一整圈後，我們測量水灑出來的範圍的邊長(如圖五十二)，量出來的邊長為 1360 公分。

(3)我們比較兩種灑水方的面積差(如圖五十三)

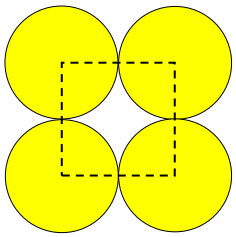
$680\times680=46.24$ 平方公尺(正方形面積)

$340\times340\times\pi=11.56\pi$ 平方公尺(圓面積)

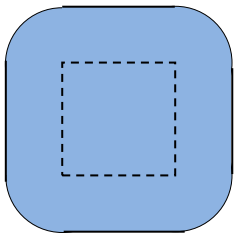
$46.24-11.56\pi\fallingdotseq9.94$(圖五十三中間淡藍色面積)

$9.94\div4\times12\fallingdotseq29.82$ 平方公尺(面積差)

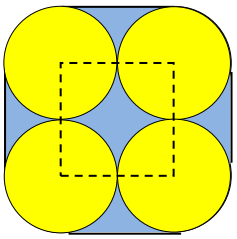
(4)我們發現以傳統灑水器灑出來的範圍會有許多地方是灑不到水的，如圖五十一的空白處，而以移動式的灑水器，灑出來的範圍為四個角為圓弧的正方形，內部亦可平均的灑到水，灑水的面積也比傳統固定式灑水器多約 29.82 平方公尺。



圖五十一



圖五十二



圖五十三

註：我們實驗用的自製灑水器，目前加上定時器後，
專責照顧我們學校的愛樹—青松、梅樹(輕鬆、沒事)

陸、研究結果

一、我們研究影響牛吃草的面積因素有三個：

(一)固定點的位置：

我們發現在正 n 邊形的邊上當作固定點，當固定點在中點時產生的牛吃草面積會最小，固定點在頂點時面積會最大，將固定點從中點往頂點每一移動一個單位，面積差之間皆相差 $\frac{2}{n}\pi$

(二)繩子的長度：

在正 n 邊形的邊上當作固定點，改變綁牛的繩長，繩子越長，產生的牛吃草面積越大，而且繩子每增加一個單位，面積差之間有固定的規律。

(三)房子的形狀：

不論固定點的位置在中點或頂點，當繩長相同時，房子為正 n 邊形，n 越小，圍成的面積越大。

二、我們讓固定點改成可移動，進行研究，我們發現：

(一) 任意凸 n 邊形的房子，所圍出來的牛吃草圖形為 n 個長方形和 1 個圓形，面積為凸多邊形的邊長和×繩長+1 個以繩長為半徑的圓面積。

(二)將房子改成圓形，以直線形擺放圓形房子，每增加一間房子，面積增加$\frac{1}{3}\pi+2\sqrt{3}$。以三角形數擺放圓形房子，每邊增加一間房子，面積增加$\frac{1}{2}\pi+3\sqrt{3}$。

以正方形數擺放圓形房子，每邊增加一間房子，面積增加$\frac{2}{3}\pi+4\sqrt{3}$

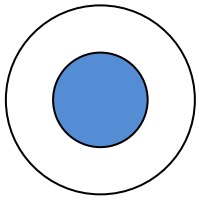
三、我們找出固定點可以移動牛吃草問題的生活應用，自動掃地機和農夫噴灑農藥都是利用移動固定點，畫出圓形或半圓形來提高工作效率。另外我們利用水管自製灑水器，比較一般將灑水器固定和移動灑水器，移動式的灑水器，灑出來的範圍為四個角為圓弧的正方形，內部亦可平均的灑到水，灑水的面積也比傳統固定式灑水器多約 29.82 平方公尺。

柒、討論

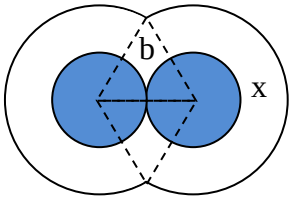
討論一：圓形房子排列成環形

在固定點可以移動的研究中，我們研究了圓形排列成直線、三角形數、正方形數牛吃草所圍出來的圖形，若把圓形排列成環形，牛吃草所圍出來的面積會有什麼變化呢？

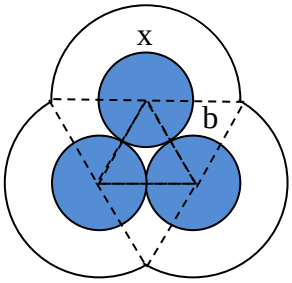
一、我們將 n=1~n=6(即 1 個圓~6 個圓)所圍成的環形繪製如圖五十四~五十九。



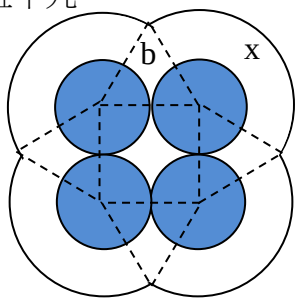
圖五十四



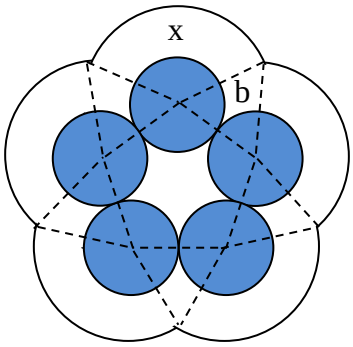
圖五十五



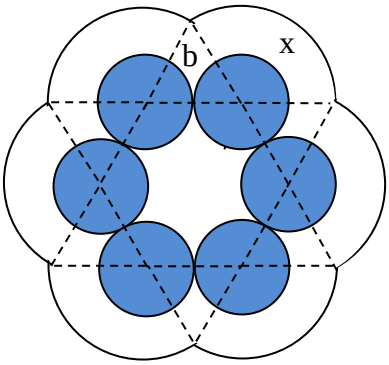
圖五十六



圖五十七



圖五十八



圖五十九

二、在圓形排列成直線、三角形數、正方形數牛吃草所圍出來的圖形中，我們發現每增加一個圓形的房子，增加的面積都是固定的，所以我們可以推論出任意 n 個圓形房子經由牛吃草圍成的面積是多少，但若將圓形排列成環形時，除了 b 部分的面積和之前計算一樣外，每增加一間圓形房子，x 部分面積的大小都不一樣，無法用之前的方式推論出來任意 n 個圓形排出來的面積。

三、我們列出環形排列 n=1~n=6 的牛吃草所圍出來面積如表十七

環形、R=1、r=1			
n(每邊數量)	圖形	面積	每邊增加一間房子面積增加量
1	圖五十四	3π	
2	圖五十五	$3\frac{1}{3}\pi+2\sqrt{3}$	$\frac{1}{6}\pi+\sqrt{3}$
3	圖五十六	$3\frac{1}{2}\pi+3\sqrt{3}$	
4	圖五十七	$3\frac{2}{3}\pi+4\sqrt{3}$	
5	圖五十八	$3\frac{5}{6}\pi+5\sqrt{3}$	
6	圖五十九	$4\pi+6\sqrt{3}$	

表十七

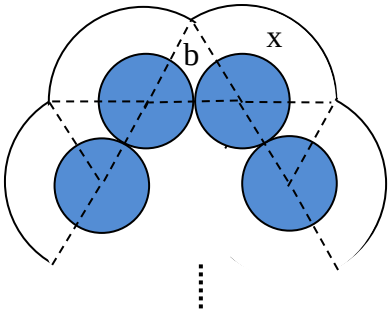
四、推論任意 n 個圓形排成環形的牛吃草圍出來的面積(如圖六十)

1.因為每個圓形的半徑都相等，我們將 n 個圓形的圓心連在一起($n \geq 3$)，會形成一個正 n 邊形。

2.這個正 n 邊形的每一內角為$(n-2)\times 180\div n=180-\frac{360}{n}$

3.x 所在的圓心角為一個周角扣掉正 n 邊形的一個內角及扣掉 2 個正三角形的內角。即為 $360-(180-\frac{360}{n})-60\times 2$

$=60+\frac{360}{n}$



圖六十

4.一個完整的環形面積為 3π，由之前計算得知 $b=\sqrt{3}-\frac{1}{3}\pi$，

任意正 n 邊形有 n 個 x 部分及 n 個 b 部分

任意 n 個圓形排成環形牛吃草圍出來的面積為$(60+\frac{360}{n})\div 360\times 3\pi\times n+(\sqrt{3}-\frac{1}{3}\pi)\times n$

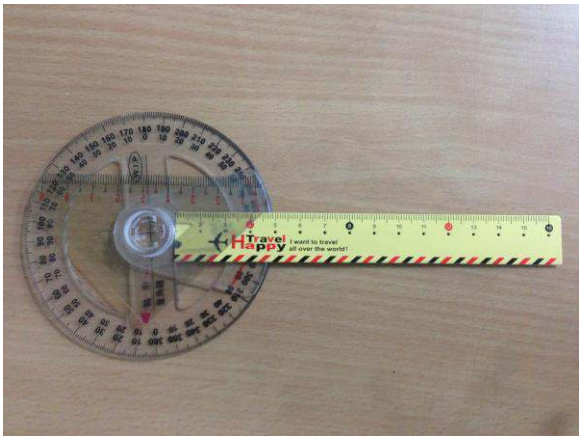
$=\frac{1}{6}n\pi+3\pi+n\sqrt{3}$

討論二：研究中的插曲

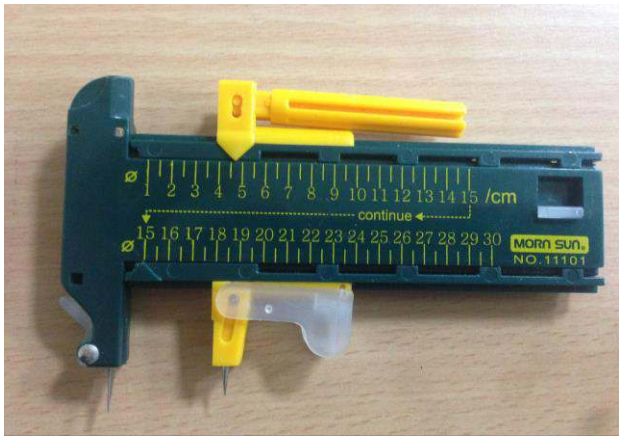
在研究的過程中，嘗試錯誤是必經的歷程，錯誤也有它的價值，特別將我們雖然有嘗試過，但沒有納入正式研究結果的歷程記錄下來。

一、自製繪製牛吃草圖形的尺規：

我們發現在繪製固定點可移動的牛吃草圖形時，房子是直線時畫出來會是平行線，房子的轉角處畫出來會是扇形，利用這個特性，我們用三角板、360°量角器和每個刻度有洞的直尺，自製了一個尺規(如圖六十一)，可以方便我們畫牛吃草的圖，但是使用後發覺不好操作，我們後來找到了市面上的一種割圓器(如圖六十二)，操作起來比較方便，而且可以將圖形割下，就改用市售的割圓器。



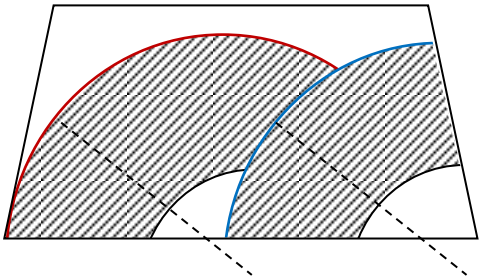
圖六十一



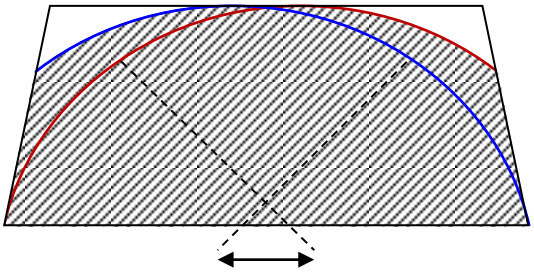
圖六十二

二、生活上的應用-車用雨刷：

我們發現車用雨刷是用 2 枝雨刷固定在玻璃下方偏右邊的位置，來回刷出 2 個扇形，如圖六十三，我們想如果將雨刷的圓心改為移動式，並只用一枝雨刷，將可增加刷到的面積，如圖六十四，我們也繪製了幾款車型的雨刷刷動的形式，如附件三，但我們後來發現市面上已有車輛裝設對刷式雨刷，如圖六十五，刷出來的面積和圓心可移動的相近，如圖六十六，構造也較為單純，我們決定放棄這個方向的研究，改研究其它的應用。

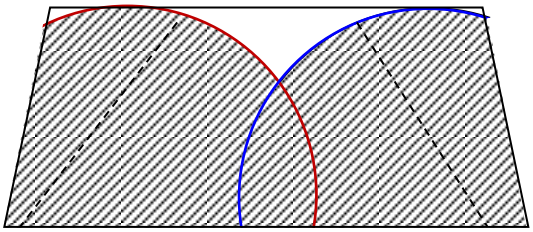


圖六十三



圖六十四 圓心可移動時所產生的圖形

圖六十五 對刷式雨刷



圖六十六 對刷式雨刷刷出來的圖形

捌、結論

一、由數學課本的牛吃草問題出發，我們找出影響牛吃草面積的因素，也找出面積增加的規律。將房子改成圓形，讓房子以特定的排列方式，也找出面積增加的規律。我們也找出生活中的應用。

二、研究的過程雖然很辛苦，但每次找到新的成果我們都覺得很開心，我們能從一個小問題開始，進而完成整個研究，覺得好有成就感。

玖、參考資料

一、國民小學數學領域部編本教課書 六年級上學期 (103 年版) 國家教育研究院。

二、LG Smart 生活家電網站(2014)。http://www.lg.com/tw/small-appliances/lg-VR64702LVM

【評語】080406

以課程中常見的數學問題出發，衍生出一系列的探究問題，並嘗試將結果一般化，且考慮到研究結果在生活中的應用性，值得鼓勵。惟數學的內涵可望再深化，有助於更提昇本研究的價值。