中華民國第55屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

佳作

080405

滾動奇“積“～勒洛三角形與圓滾動的探究

學校名稱：臺南市鹽水區鹽水國民小學

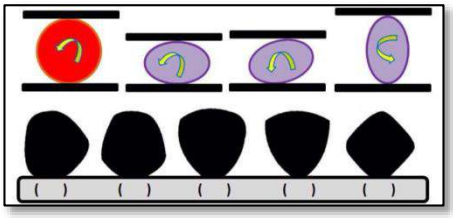
作者：	指導老師：
小六 李姵瑾 小六 邱偉榤 小六 沈倬宇	何鳳珠 沈冠君

關鍵詞：勒洛三角形、變軌多邊形、軌道拼圖

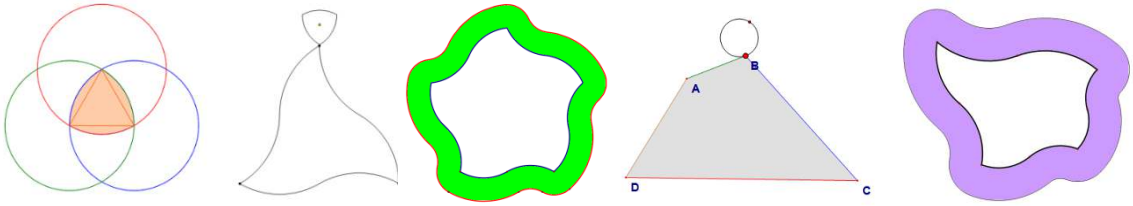
摘要

在我們的生活中所見到很多圓的應用，車輪、硬幣、井蓋……，似乎無處不在，大有不可替代之勢，但早在 19 世紀德國的一位科學家勒洛的出現，從此打破了這個一成不變的傳說。因為勒洛三角形滾動時可以實現上下區間高度一致，這與圓在直線上滾動時是完全一樣的，因此本活動以小學的複合圖形面積為根基，拓展到圓和勒洛三角形在多邊形或變軌曲線圖形外滾動的區域面積，藉由剪拼及尺規作圖分解不規則的區域面積，看似複雜的問題竟然變簡單了，並且找到面積求解的一般式，不但讓我們學會如何把未知的問題轉化為已知的問題來進行解決，還能進一步將我們的研究轉化成好玩且具挑戰性的軌道拼圖，由長方形、扇形、環形扇組合出多種不同的軌道，並反推出原型。

壹、研究動機



曾在 youtube 的影片中看到一輛奇怪的車子，它的輪子不是圓形，而是類似三角形和五邊形，我們疑惑著：這樣的車子能騎嗎？怎能平穩呢？無獨有偶，曾有一位老師出了這樣一道數學題，如下圖：“哪個圖形能像圓一樣，在滾動時保持上下軌道不動？”諸如此類現象與應用還有很多，這讓我們不得不產生強烈的好奇心，聯繫上述兩件事，我們開始著手廣泛搜尋相關資料，意外地認識了平凡而又顯奇特的勒洛三角形[1]，沒想到它就一直存在我們的幾何圖形學習當中，於是我們針對圓和勒洛三角形的滾動問題進行了深入探究，主軸聚焦在繞行的區域面積，期望在幾何的探索中擦出美麗且驚奇的火花。



貳、研究目的

一、探究圓和等徑輪的關係。

二、探究圓和等徑輪在 N 邊形外滾動一圈所掃過的區域面積。

三、探究圓和等徑輪在變軌 N 邊形外滾動一圈所掃過的區域面積。

四、探究圓在其它圖形外滾動一圈所掃過的區域面積。

五、圓或等徑輪滾動的拓展與應用

參、實驗研究器材

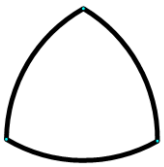
圓規、量角器、直尺、軟墊、方格紙、實驗單、電腦、厚泡棉、圓規刀、幾何畫板

肆、名詞釋義

我們定義下列名詞在本研究的意義：

一、等徑三角形：也就是勒洛三角形，以等邊三角形每個頂點為圓心，以邊長為半徑，在另兩個頂點間作一段弧，三段弧圍成的曲邊三角形就是勒洛三角形。由於本研究是探索滾動的情況，因此將它簡稱為”等徑輪”或”等徑三角形”方便理解。

[1] 以等邊三角形每個頂點為圓心，以邊長為半徑，在另兩個頂點間作一段弧，三段弧圍成的曲邊三角形就是勒洛三角形（reuleaux triangle ），也稱萊洛三角形。

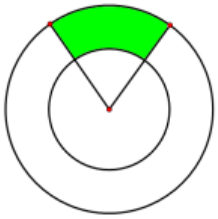


二、 變軌N邊形:本活動以凸多邊形為主,將圖形的長度做二等分弧形變化，採等徑三角形的曲線做變軌，遇到直角三角形我們也嘗試做等腰直角形的曲線變軌。

三、 二邊形：本活動中也嘗試在２點的連線上下兩邊做滾動，因此將此線也以”二邊形”的稱呼來做辨識。

四、 定寬曲線：指幾何圖形中在任何方向上的直徑（或稱寬度）都是定值。

五、 徑長：指的是圓的直徑或等徑輪的寬度，為了搭配等徑輪，因此活動皆以直徑長度來記錄進行。



六、 動輪與母體：動輪指滾動的圖形，母體指定住不動被滾動的圖形。

七、 環形扇：相同的圓心角不同半徑長的兩條弧線所形成的圖形。

伍、研究歷程、討論與結果

活動一：探究圓和等徑輪的關係

在進行滾動之前，我們先對勒洛三角形有個前置性的了解，然後再進行圓和等徑輪滾動面積的探究。

【實驗 1－1】：認識勒洛三角形（等徑三角形）的基本性質。

一、 當以三角形的三邊頂點為圓心，邊長為半徑，分別畫出三個圓，中間會出現一個交集，這個圖形即為勒洛三角形，它是由德國機械工程專家勒洛[2]首先發現，因此以他的名字命名。由於是翻譯的名稱，也有人譯作萊洛三角形、弧三角形或曲邊三角形，為了較好區辨，**本實驗將它稱之為“等徑輪“**。(圓也可以算是一種等徑輪)

二、 勒洛三角形和圓都是屬於定寬曲線的幾何圖形，其邊上的每個點到對應頂點的距離都相等，因此，將圓和勒洛三角形放在兩條平行線中間，使之與這兩平行線相切，則可以做到：無論這個曲線圖形如何運動，只要它還是在這兩條平行線內，就始終與這兩條平行線相切。(資料來源：維基百科)

三、 根據推算同樣徑長的圓和勒洛三角形，其周長相等，但面積則是勒洛三角形較小。這與我們課程內學習的知識～周長相等的正多邊形，其邊數愈多，則面積愈大，當正多邊形趨近於圓形時，面積最大的道理是一樣的。

[2] 勒洛生於 1829 年卒於 1905 年。

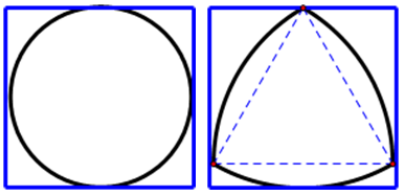


圖 1－1－1

設正方形邊長為 a，則：　　表 1－1－1

圓	勒洛三角形
周長：aπ	周長：aπ
面積：$\frac{1}{4}a^2\pi$	面積：$\frac{1}{2}a^2\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$

四、　由於勒洛三角形和圓皆是定寬的曲線圖形，因此有人利用勒洛三角形來取代車輪，**但因其中心並不穩定，每旋轉一圈會有三次跳動**。而作為滾軸使用則是相當平穩，很多名車的滾軸發電機發動機也是這個原理，因為勒洛三角形是定寬曲線中面積最小的。

圖 1－1－2

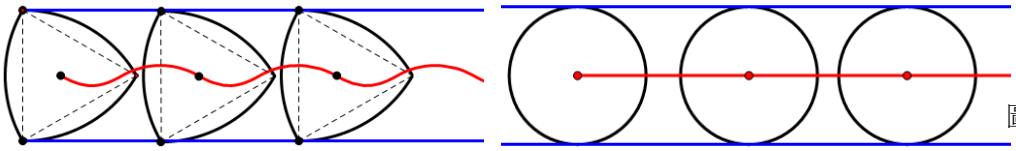


圖 1－1－3

五、等徑輪也可以在與徑長相等邊的正方形內旋轉，因此一位美國工程師根據此發明了方孔鑽頭，方孔鑽頭的截面是一個勒洛三角形，在工作時鑽頭的中心隨著鑽頭的轉動同時繞軸做似圓周的運動，如此可以鑽出四角略圓的正方形。（資料來源：科學人）

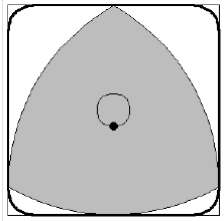


圖 1－1－4

【實驗 1－2】：探究<u>圓滾圓</u>、<u>等徑輪滾等徑輪</u>以及<u>圓和等徑輪互滾</u>其掃過的區域面積，並比較其關聯性。

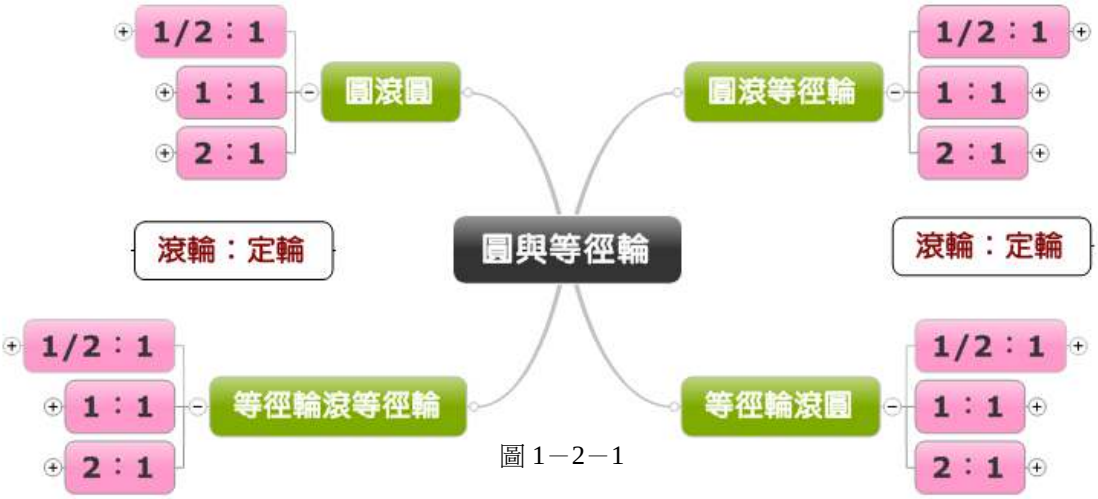


圖 1－2－1

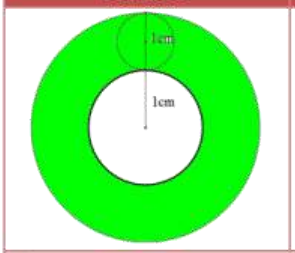
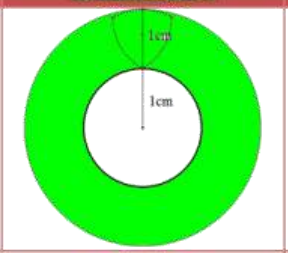
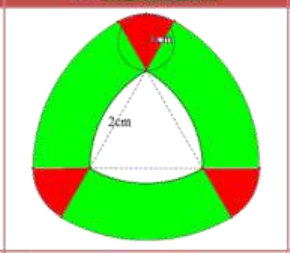
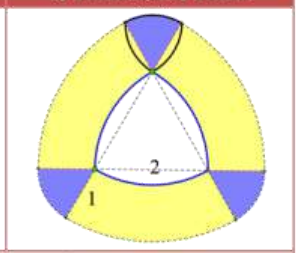
為了觀察圓和等徑輪轉動的情況，我們一開始先試著用厚泡棉及圓規刀切出模型（因為厚泡棉的摩擦力比較大，不容易滑動而造成測量誤差），然後模擬轉動畫出它的軌

跡並觀察之，幾次之後發現都會出現誤差，因此借助幾何畫板來生成模擬的軌跡，然後進行切割拼組。

註 1：**徑長比為“動輪的徑長：母體的徑長”**，為方便運算，所以將母體的圓半徑設計為 1，徑長為 2。

註 2：由於版面有限，我們只呈現徑長比為$\frac{1}{2}$：1 的那組圖形。

表 1－2－1

圓滾圓	等徑輪滾圓	圓滾等徑輪	等徑輪滾等徑輪
			
$\frac{1}{2}:1 \rightarrow (2^2-1^2)\times\pi=3\pi$(如下圖) $1:1 \rightarrow (3^2-1^2)\times\pi=8\pi$ $2:1 \rightarrow (5^2-1^2)\times\pi=24\pi$		$\frac{1}{2}:1 \rightarrow (3^2-2^2+1^2)\times\pi\times\frac{1}{2}=3\pi$(如下圖) $1:1 \rightarrow (4^2-2^2+2^2)\times\pi\times\frac{1}{2}=8\pi$ $2:1 \rightarrow (6^2-2^2+4^2)\times\pi\times\frac{1}{2}=24\pi$	

《我們發現》

1. 若**以等徑輪當母體**，不管動輪是圓或等徑輪，其滾過的區域**似“御飯團壽司”的環形**（如圖 1－2－2）；若**以圓當母體**，不管動輪是圓或等徑輪其滾過的區域是個**環形**，所不同的地方是圓中心點的移動軌跡與輪廓邊緣皆成等距，而等徑輪中心點會形成曲線。

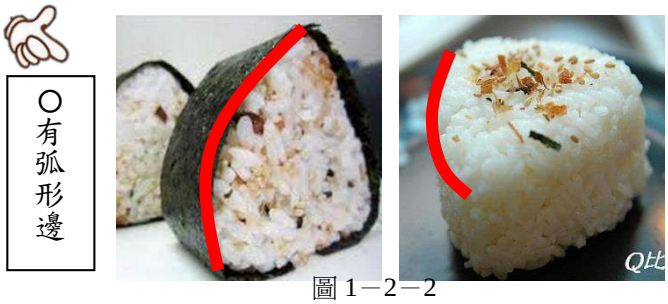


圖 1－2－2

圖 1－2－3

2. “御飯團”的環形面積看似非我們所學習的幾何圖形，但經過切割後發現，它可以分成一個半環形扇和一個半圓，就能用我們已知的扇形面積公式來推導。

3. **由上述實驗，我們發現“等徑輪與圓”互滾或“等徑輪滾等徑輪”皆可回歸到“圓滾圓”的問題**，求環形面積即為〔$(2r_2+r_1)^2-{r_1}^2$〕$\times\pi$。（r_1為母體的半徑，r_2為動輪的半徑）

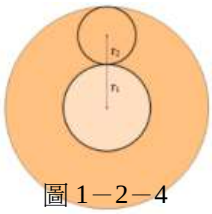


圖 1－2－4

圖 1－2－5

活動二：探究圓和等徑輪在 N 邊形外滾動一圈所掃過的區域面積。

在活動一中我們知道母體（圓或等徑輪）固定，圓和等徑輪在外滾動其所掃過的區域面積一樣，那麼若在正 N 邊形與非正 N 邊形外滾動，面積還會是一樣的嗎？要如何計算其面積呢？因此活動二我們針對正 N 邊形及非正 N 邊形進行探究圓和等徑輪滾動的情形，並且試著找出區域面積求法的一般式。

註：滾動的區域面積不考慮重疊處。

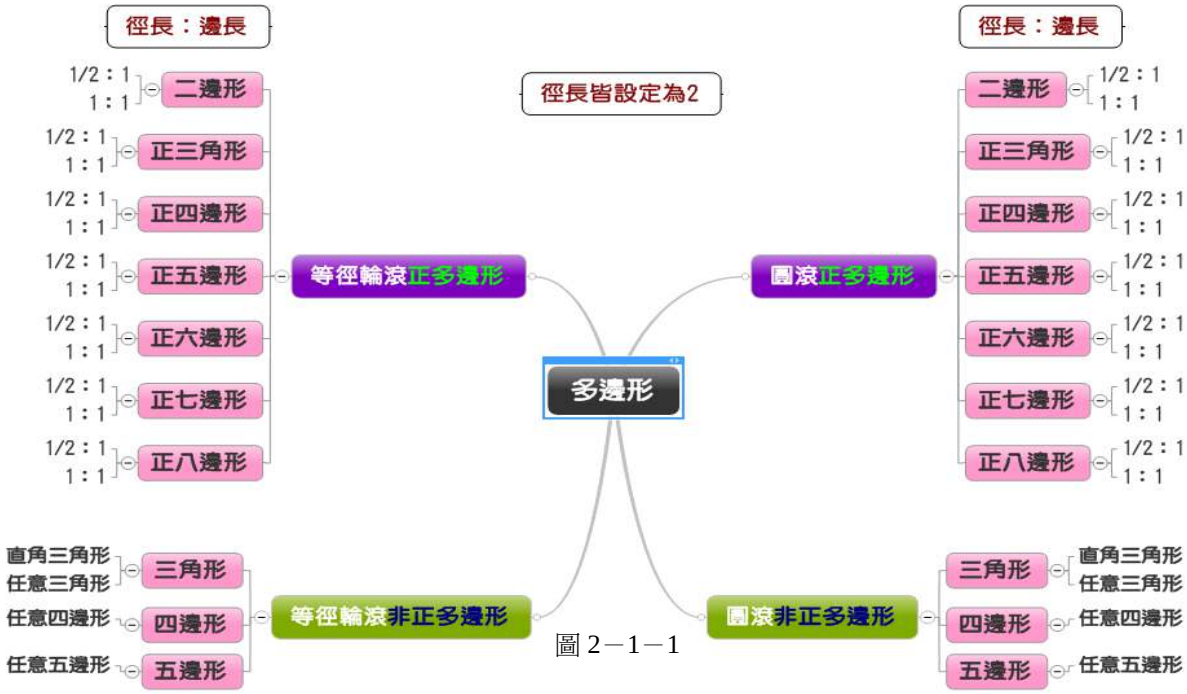


圖 2－1－1

【實驗 2－1】：圓與等徑輪在正 N 邊形外滾動的區域面積。

研究設定在正三角形到正八邊形，希望藉由剪拼及數據推算找到圓或等徑輪在正 N 邊形外滾動的區域面積一般化公式。

一、圓在正 N 邊形外滾動的區域面積探究

註：此比例是指**圓的直徑 d** 與**正 N 邊形的邊長 a** 之比。

《圓》在正 N 邊形外滾動的區域面積　　表 2－1－1

比例	1：2	1：3	1：4	2：5	2：7
二邊形	$1\times2\times2+\pi$	$1\times3\times2+\pi$	$1\times4\times2+\pi$	$2\times5\times2+4\pi$	$2\times7\times2+4\pi$
正三角形	$1\times2\times3+\pi$	$1\times3\times3+\pi$	$1\times4\times3+\pi$	$2\times5\times3+4\pi$	$2\times7\times3+4\pi$
正四邊形	$1\times2\times4+\pi$	$1\times3\times4+\pi$	$1\times4\times4+\pi$	$2\times5\times4+4\pi$	$2\times7\times4+4\pi$
正五邊形	$1\times2\times5+\pi$	$1\times3\times5+\pi$	$1\times4\times5+\pi$	$2\times5\times5+4\pi$	$2\times7\times5+4\pi$
正六邊形	$1\times2\times6+\pi$	$1\times3\times6+\pi$	$1\times4\times6+\pi$	$2\times5\times6+4\pi$	$2\times7\times6+4\pi$
正七邊形	$1\times2\times7+\pi$	$1\times3\times7+\pi$	$1\times4\times7+\pi$	$2\times5\times7+4\pi$	$2\times7\times7+4\pi$
正八邊形	$1\times2\times8+\pi$	$1\times3\times8+\pi$	$1\times4\times8+\pi$	$2\times5\times8+4\pi$	$2\times7\times8+4\pi$

圓在正 N 邊形外滾動一圈，所形成區域可以分割成 N 個長方形及 N 個扇形，而這 N 個扇形剛好又可以拼成一個圓形，以正五邊形為例，內角是108°，所以對面形成的就是

一個 72°的扇形，而 5 個 72°的扇形又可以組合成一個圓。因此由上表可以推導一般式：

（直徑 d、半徑 r、邊長 a）

$daN+d^2\pi$ （或 $2raN+4r^2\pi$）→直徑×正 N 邊形周長＋1 個大圓面積

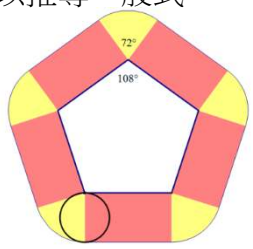


圖 2－1－2

二、等徑輪在正 N 邊形外滾動的區域面積探究

註：此比例是指**等徑輪的徑長 d 與正 N 邊形的邊長 a** 的比。

《等徑輪》在正 N 邊形外滾動的區域面積					表 2－1－2
比例	1：2	1：3	1：4	2：5	2：7
二邊形	1×2×2＋π	1×3×2＋π	1×4×2＋π	2×5×2＋4π	2×7×2＋4π
正三角形	1×2×3＋π	1×3×3＋π	1×4×3＋π	2×5×3＋4π	2×7×3＋4π
正四邊形	1×2×4＋π	1×3×4＋π	1×4×4＋π	2×5×4＋4π	2×7×4＋4π
正五邊形	1×2×5＋π	1×3×5＋π	1×4×5＋π	2×5×5＋4π	2×7×5＋4π
正六邊形	1×2×6＋π	1×3×6＋π	1×4×6＋π	2×5×6＋4π	2×7×6＋4π
正七邊形	1×2×7＋π	1×3×7＋π	1×4×7＋π	2×5×7＋4π	2×7×7＋4π
正八邊形	1×2×8＋π	1×3×8＋π	1×4×8＋π	2×5×8＋4π	2×7×8＋4π

我們發現等徑輪在正 N 多邊形外滾動一圈，所形成的區域面積一樣和圓一樣，皆可以分割成 N 個長方形及一個圓形，因此所推得的一般式也是**$daN+d^2\pi$**。

圖 2－1－4

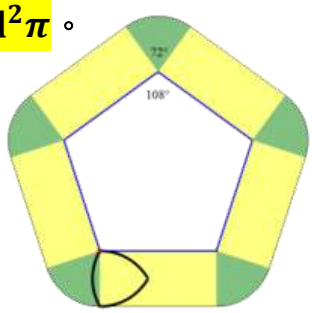


圖 2－1－3

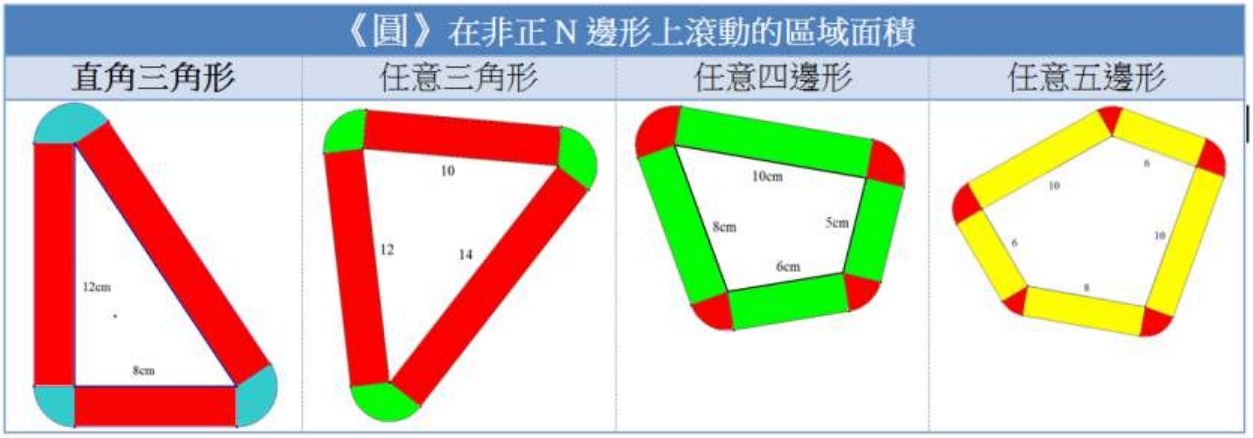
【實驗 2－2】：圓與等徑輪在**非正 N 邊形**外滾動的區域面積。

研究設定為不等邊的 N 邊形（以凸 N 邊形為主），希望藉由剪拼及數據推算找到圓或等徑輪在非正 N 邊形外滾動的區域面積一般化公式。

一、圓在非正 N 邊形外滾動的區域面積探究

註：此實驗將**圓直徑 d 固定為 2**，在不等邊不等角的 N 邊形上進行滾動

表 2－2－1



$(12+8+4\sqrt{13})\times 2+2^2\pi$ $=40+8\sqrt{13}+4\pi$	$(12+10+14)\times 2+2^2\pi$ $=72+4\pi$	$(5+6+8+10)\times 2+2^2\pi$ $=58+4\pi$	$(6\times 2+8+10\times 2)\times 2+2^2\pi$ $=80+4\pi$

《我們發現》

1. 在沒有給出直角三角形斜邊長度時，我們可以用畢氏定理求出邊 AC 的長為$4\sqrt{13}$，進而求出長條形面積總和，即三角形周長×徑長，但扇形我們並不知道角度，所以我們將它進行剪拼，發現也可以形成一個圓，**但真是一個圓嗎？會不會在剪拼中有誤差呢？**圖形只給了一個直角的線索，因此我們思考了一個方法，用**【三個周角】－【三角形內角和】－【6 個直角】**即可算出三個扇形圓心角度數和為$360°\times 3-180°-90°\times 6=360°$。

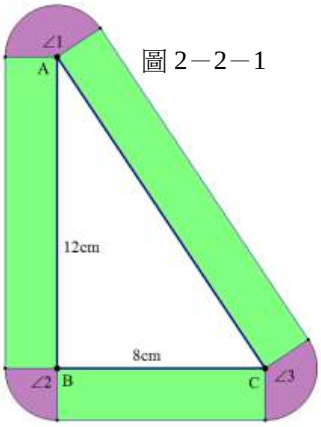


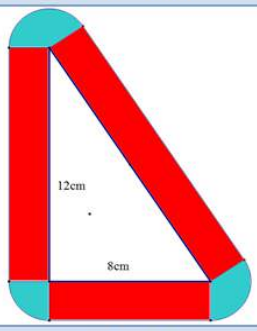
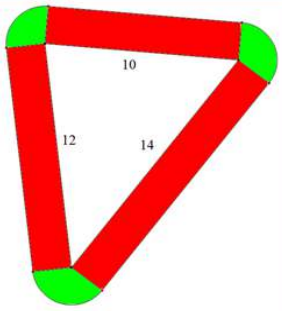
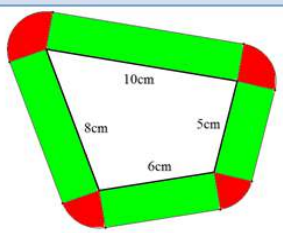
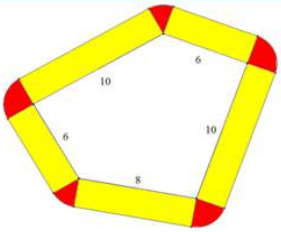
圖 2－2－1

2. 雖然任意 N 邊形並沒有給出各角的角度，但我們也可以利用上述的方法算出來，且發現所有圓在正 N 邊形外滾動一圈，所形成的扇形皆可以組合成一個圓。
3. 綜合上述，要算圓在 N 邊形外滾動一圈的區域面積，可以總結下列方法：

圓在 N 邊形外滾動一圈的面積＝N邊形周長×d＋$d^2\pi$

二、<u>等徑輪在非正 N 邊形外滾動的區域面積探究</u>

<u>註</u>：此實驗將<u>等徑輪的徑寬 d 固定為 2</u>，在不等邊不等角的 N 邊形上進行滾動。 表 2－2－2

《圓》在非正 N 邊形上滾動的區域面積			
直角三角形	任意三角形	任意四邊形	任意五邊形
			
$(12+8+4\sqrt{13})\times 2+2^2\pi$ $=40+8\sqrt{13}+4\pi$	$(12+10+14)\times 2+2^2\pi$ $=72+4\pi$	$(5+6+8+10)\times 2+2^2\pi$ $=58+4\pi$	$(6\times 2+8+10\times 2)\times 2+2^2\pi$ $=80+4\pi$

《我們發現》

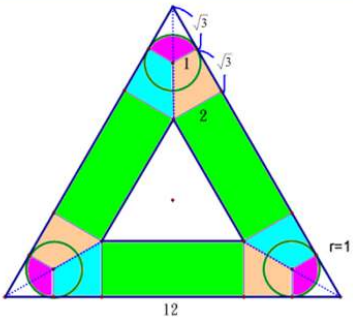
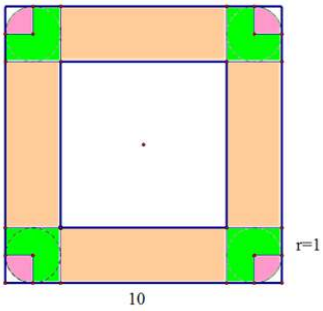
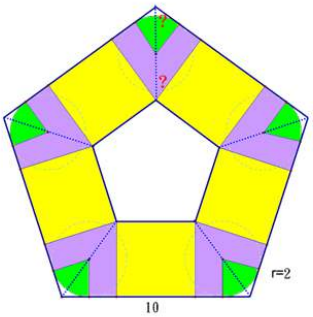
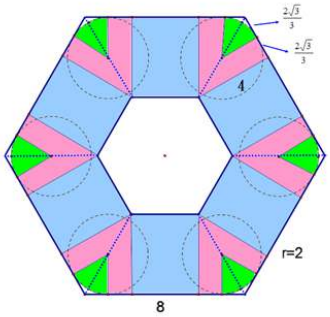
以非正 N 邊形為母體，等徑輪在其周圍滾動，其掃過的區域面積和圓滾動是一樣的，可以利用N 邊形周長×d＋$d^2\pi$（即$dc+d^2\pi$）求出區域面積。

附註 1：在一開始研究圓在<u>**正 N 邊形外部**</u>滾動時，我們也同時研究圓在<u>**內部**</u>滾動的情形，

設定研究對象為正三角形到正八邊形，但只有正三角形、正四邊形、正六邊形成功，而正五邊形、正七邊形、正八邊形皆無法成功，因為無法像外部滾動那樣切割成單純的長方形和扇形，反而會出現箏形的小區塊，遇到非特殊角時，我們就無法用特殊角的邊長比來求出長度，因此，接下來的活動**<u>我們就不研究圓或等徑輪在內部滾動的情形了</u>**。(如表 2－2－2)

圖 2－2－2

正 N 邊形內部滾動初探 表 2－2－2

	
面積分三部分：長方形＋圓＋6 個梯形 長方形：$2\times(12-4\sqrt{3})\times 3=72-24\sqrt{3}$ 圓：$1\times 1\times\pi=\pi$ 梯形：$3\times\sqrt{3}\times 3=9\sqrt{3}$……兩個梯形變長方形 面積總和為：$72-15\sqrt{3}+\pi$	面積分三部分：長方形＋圓＋4 個 L 形 長方形：$2\times 6\times 4=48$ 圓：$1\times 1\times\pi=\pi$ L 形：$2\times 2\times 3=12$……4 個 L 形變成 3 個正方形 面積總和為：$60+\pi$
	
由於正五邊形的內角是 108 度，平分一半則是 54 度，它不是特殊角，所以只知道一股的長度是 4，無法知道其它兩邊的長度，所以目前我們無法推算。	面積分三部分：長方形＋圓＋6 組梯形 長方形：$4\times\left(8-\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)\times 6=192-64\sqrt{3}$ 圓：$2\times 2\times\pi=4\pi$ 梯形：$6\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times 6=24\sqrt{3}$……兩個梯形變長方形 面積總和為：$192-40\sqrt{3}+4\pi$

附註 2：當圓形在正 N 邊形內部滾動時，圓的直徑若比**<u>正 N 邊形底邊長到中心點的距離</u>**還長，這樣會造成面積重疊的狀況（如圖 2－2－3），因此在設定圓的直徑時要注意長度；若直徑剛好和**<u>正 N 邊形底邊長到中心點的距離</u>**等長，則中心內部都會被圓形所掃過，但要注意的是，**它又與圓形繞著一個圓點滾動所掃過的區塊不同**。

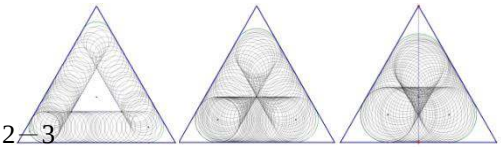


圖 2－2－3

附註 3：若圓在正 N 邊形外滾動，則滾過的區域外圍是一個圓角的正 N 邊形，且圓愈大，則形體愈趨於圓形（如圖 2－2－4）；若圓在正 N 邊形內滾動，則滾過的區域外圍也是一個圓角的 N 邊形，所不同的是，外滾圓滾出的軌跡都是等寬，而內滾圓則非全部等寬，在轉角處相對會比較寬（如圖 2－2－5）。

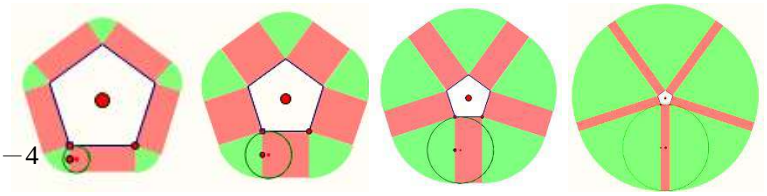


圖 2－2－4

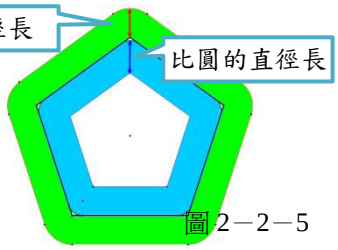


圖 2－2－5

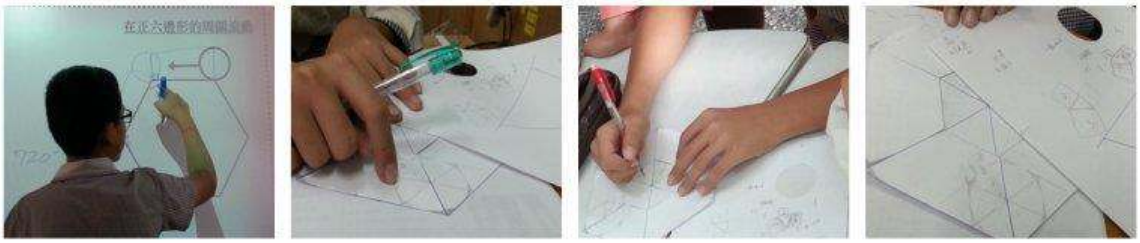


圖 2－2－6

活動三：探究圓和等徑輪在變軌 N 邊形外滾動一圈所掃過的區域面積。

等徑輪因其與特殊的 60 度扇形弧有關，因此我們將活動二所探究的相關圖形進行二等分的變軌，再觀察其圓和等徑輪在變軌 N 邊形上滾動的區域，並利用剪拼方式及數據推算找到推算區域面積的一般化公式。

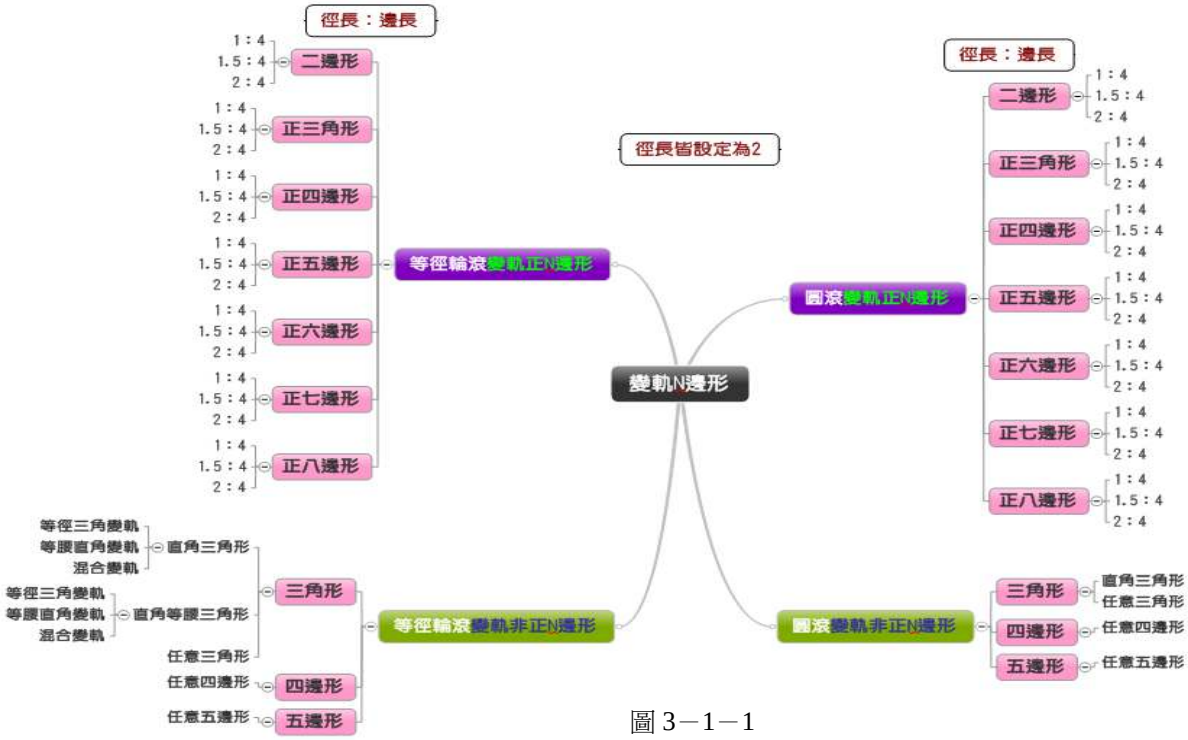
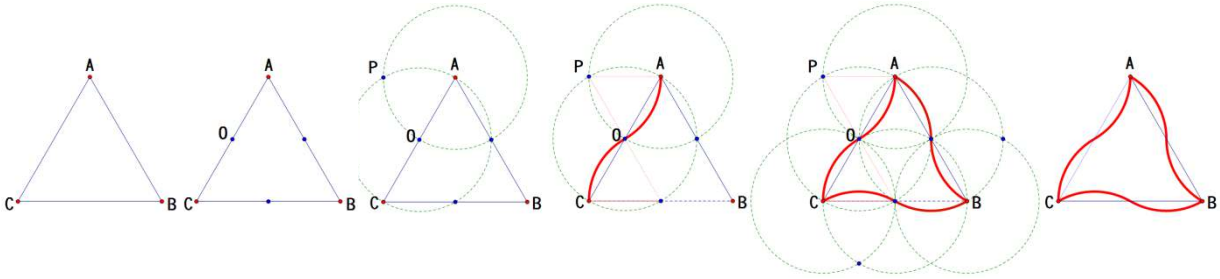


圖 3－1－1

有關所謂的“變軌 N 邊形”，我們是採<u>邊長二等分</u>的方式來進行變軌，以下說明兩種變軌的方式：

1. <u>**等徑三角變軌**</u>：先將邊線二等分，取其中一段 OA 為長度，利用尺規作圖做出一個正三角形 OAP，再以點 P 為圓心，線段 PO 為半徑，通過點 O 和點 A 畫出弧長，另一邊則反方向，用同樣的方法繪製出一段弧長，依序完成 N 邊形的變軌圖形。



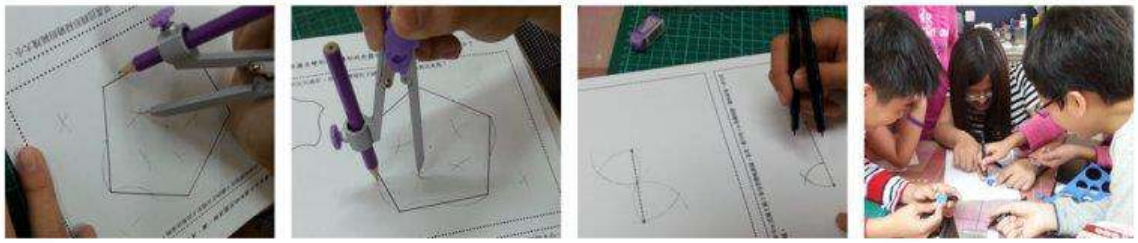
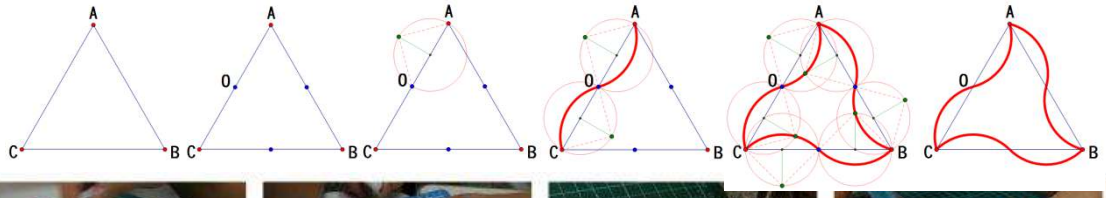


圖 3－1－2

2. 等腰直角變軌：**因為等腰直角三角形是特殊角，我們也嘗試在等腰直角三角形上進行等腰直角變軌**，先將邊線二等分，取其中的一段為斜邊，利用尺規作圖做出一個等腰直角三角形，再以直角點為圓心，股長為半徑分別畫弧，完成 N 邊形的變軌圖形，但採用此法做變軌滾動的研究會碰上無理數的運算，但由於 45 度是特殊角，運用 1：1：$\sqrt{2}$還是能解決問題的。



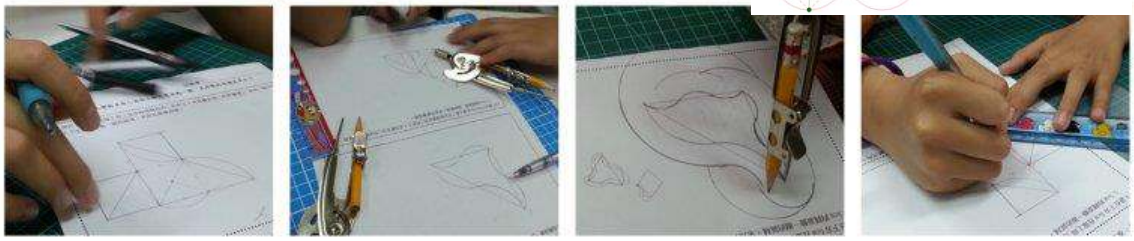


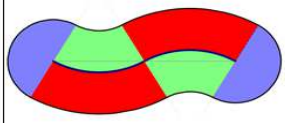
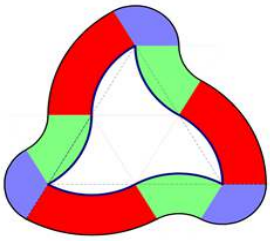
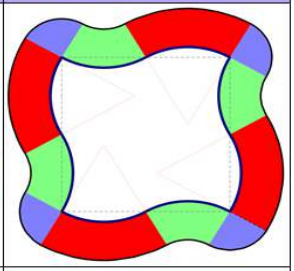
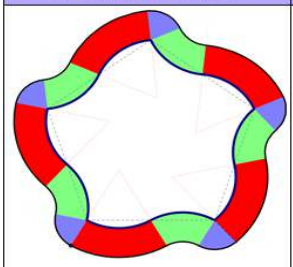
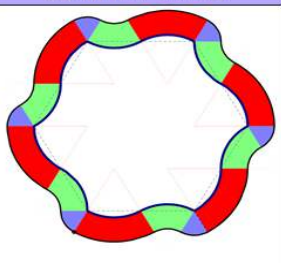
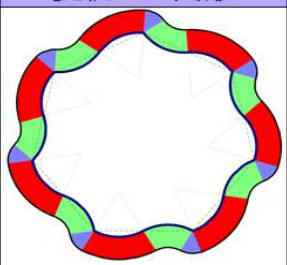
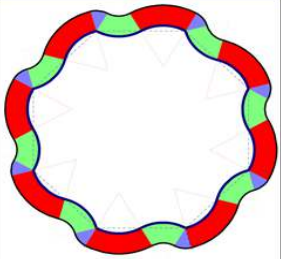
圖 3－1－3

【實驗 3－1】：圓與等徑輪在<u>**變軌正 N 邊形外**</u>滾動的區域面積。

研究設定在正二邊形（以一維的線為主，繞線周圍一圈）到正八邊形的變軌圖形（採等徑三角形變軌），<u>**我們先進行尺規作圖，做出正 N 邊形的變軌圖形，再繪製出圓滾動後的區域畫出切割線，**</u>藉由剪拼及數據推算找到圓或等徑輪在變軌正 N 邊形外滾動的區域面積一般化公式。

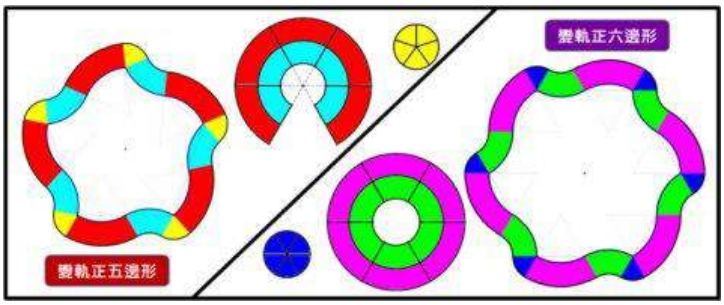
<u>***註 1***</u>：此比例指的是圓的直徑 d 與正 N 邊形的邊長 a 之比，正 N 邊形的邊長皆設定為 4。

表 3－1－1

《圓》與《等徑輪》在變軌正 N 邊形上滾動的區域面積				
形體→		變軌正二邊形	變軌正三角形	變軌正四邊形
繞行的軌跡圖				
比 例	1：4→	$(3^2-1^2)\times\pi\times\frac{2}{6}+1^2\pi=\frac{22}{6}\pi$	$(3^2-1^2)\times\pi\times\frac{3}{6}+1^2\pi=\frac{30}{6}\pi$	$(3^2-1^2)\times\pi\times\frac{4}{6}+1^2\pi=\frac{38}{6}\pi$
	1.5：4→	$\left(\frac{7^2}{2}-\frac{1^2}{2}\right)\times\pi\times\frac{2}{6}+\frac{3^2}{2}\pi=\frac{25}{4}\pi$	$\left(\frac{7^2}{2}-\frac{1^2}{2}\right)\times\pi\times\frac{3}{6}+\frac{3^2}{2}\pi=\frac{33}{4}\pi$	$\left(\frac{7^2}{2}-\frac{1^2}{2}\right)\times\pi\times\frac{4}{6}+\frac{3^2}{2}\pi=\frac{41}{4}\pi$
	2：4→	$4^2\times\pi\times\frac{2}{6}+2^2\pi=\frac{56}{6}\pi$	$4^2\times\pi\times\frac{3}{6}+2^2\pi=\frac{72}{6}\pi$	$4^2\times\pi\times\frac{4}{6}+2^2\pi=\frac{88}{6}\pi$
變軌正五邊形		變軌正六邊形	變軌正七角形	變軌正八邊形
				
$(3^2-1^2)\times\pi\times\frac{5}{6}+1^2\pi=\frac{46}{6}\pi$		$(3^2-1^2)\times\pi\times\frac{6}{6}+1^2\pi=\frac{54}{6}\pi$	$(3^2-1^2)\times\pi\times\frac{7}{6}+1^2\pi=\frac{62}{6}\pi$	$(3^2-1^2)\times\pi\times\frac{8}{6}+1^2\pi=\frac{70}{6}\pi$
$\left(\frac{7^2}{2}-\frac{1^2}{2}\right)\times\pi\times\frac{5}{6}+\frac{3^2}{2}\pi=\frac{49}{4}\pi$		$\left(\frac{7^2}{2}-\frac{1^2}{2}\right)\times\pi\times\frac{6}{6}+\frac{3^2}{2}\pi=\frac{57}{4}\pi$	$\left(\frac{7^2}{2}-\frac{1^2}{2}\right)\times\pi\times\frac{7}{6}+\frac{3^2}{2}\pi=\frac{65}{4}\pi$	$\left(\frac{7^2}{2}-\frac{1^2}{2}\right)\times\pi\times\frac{8}{6}+\frac{3^2}{2}\pi=\frac{73}{4}\pi$
$4^2\times\pi\times\frac{5}{6}+2^2\pi=\frac{104}{6}\pi$		$4^2\times\pi\times\frac{6}{6}+2^2\pi=\frac{120}{6}\pi$	$4^2\times\pi\times\frac{7}{6}+2^2\pi=\frac{136}{6}\pi$	$4^2\times\pi\times\frac{8}{6}+2^2\pi=\frac{152}{6}\pi$

《我們發現》

1. 當圓在變軌正 N 邊形上滾動時，圖形變複雜了，我們開始順著圓滾動的軌跡嘗試先將圖形進行切割，發現被分割成許多**環形扇**，且<u>往內變軌的環形扇比往外變軌的環形扇小，而且兩個圖形剛好可以合而為一，變成一個60°雙層環形扇</u>，且依據邊數的不同雙層環數也不同，正五邊形有 5 個，就是相當於是$\frac{5}{6}$個60°的雙層環形扇，若是正六邊形，就有$\frac{6}{6}$個60°的雙層環形扇，若是正八邊形，就有$\frac{8}{6}$個60°的雙層環形扇，



以此類推。得出結論：圓或等徑輪在變軌正 N 邊形外滾動，其可利用$\frac{N}{6}$個雙層環形扇＋1 個圓算出來→得出一般公式為$\frac{daN}{3}\pi+d^2\pi$。（註：d 為直徑、a 為邊長）

2. 剩下零散的扇形拼組的結果也是個圓，我們也進一步做了角度的推算，其中涉及了<u>平角、內角、外角</u>，推算結果確實是個完整的圓。在此，我們幾乎可以確認**任意凸多邊形或凸變軌多邊形，其轉角處的扇形面積剛好是一個圓的大小。**

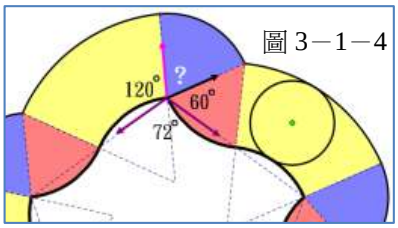


圖 3－1－4

3. 由正 N 邊形，搭配直徑與邊長的比 d：a，我們可以推出一般式圓在變軌正 N 邊形的外面滾動一圈的區域面積 S 公式為：<註:aN 即為周長，也可以用 c 替代>

$$S = 〔(\frac{a}{2}+d)^2-(\frac{a}{2}-d)^2〕\times\pi\times\frac{N}{6}+d^2\pi = 2ad\times\pi\times\frac{N}{6}+d^2\pi = \frac{daN}{3}\pi+d^2\pi$$

4. 以變軌正N邊形為母體，等徑輪在其周圍滾動，其掃過的區域面積和圓滾動是一樣的，所以在此我們省略不重覆了。

5. 變軌正 N 邊形不同比例所出現的繞軌區塊就不一樣，當直徑與邊長的比例小於$\frac{1}{2}$時，則滾動的區域切割後會形成兩種環形扇，分別可以組成一組組的雙層環形扇；但當徑長與邊長的比剛好為 1：2 時，內外兩個變軌處生成的圖形一個是扇形及一個環形扇，兩者合而為一剛好形成**一個$\frac{1}{6}$的扇形**，當直徑與邊長的比例大於$\frac{1}{2}$時，發現出現了交疊的部分（如下圖右），我們無法求出其面積，也無法使用拼組的方式找到解，因此我們設計的徑長是在不大於$\frac{1}{2}$的範圍下進行。

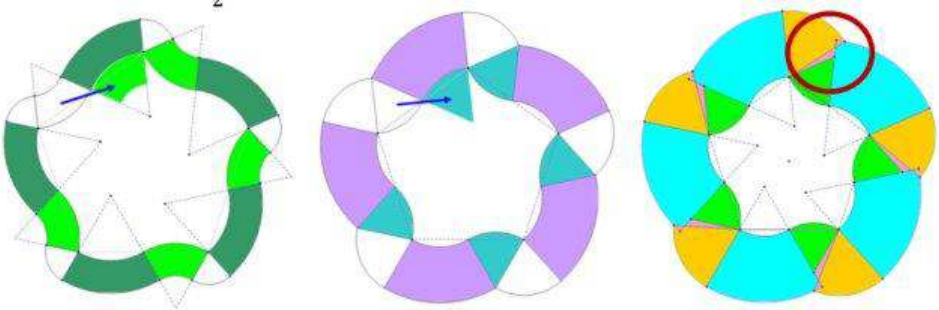


圖 3－1－5

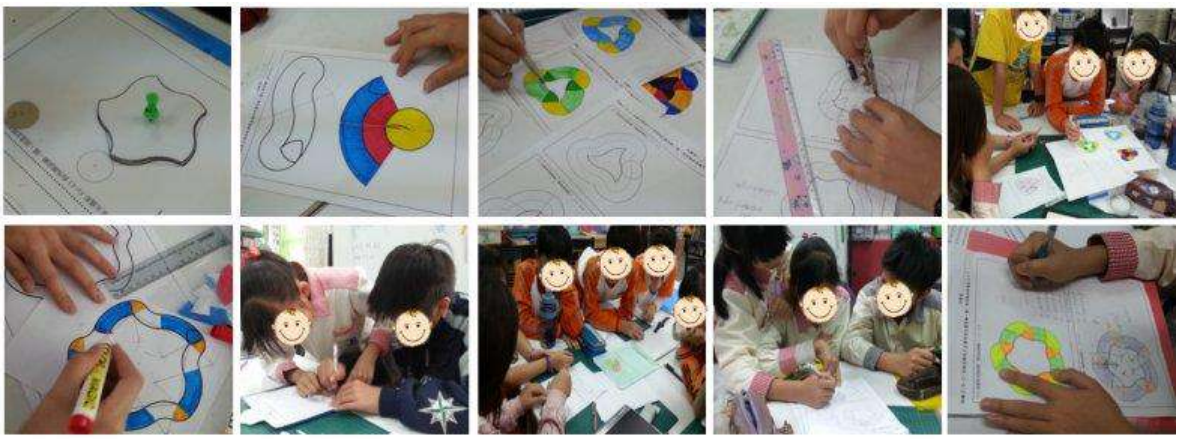
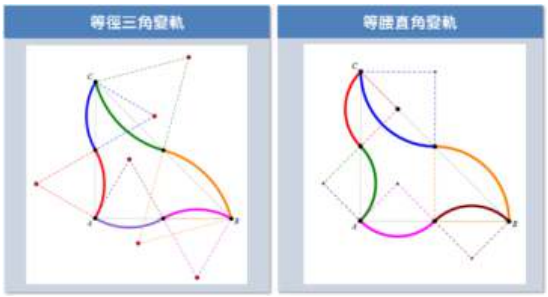


圖 3－1－6

【實驗 3－2】：圓與等徑輪在變軌非 N 邊形外滾動的區域面積。

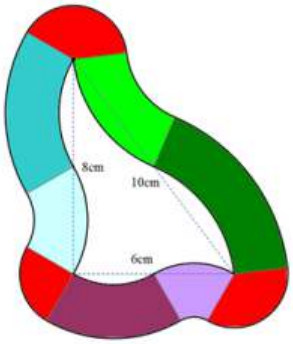
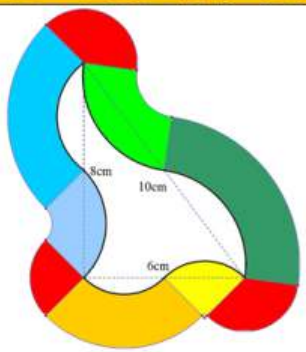
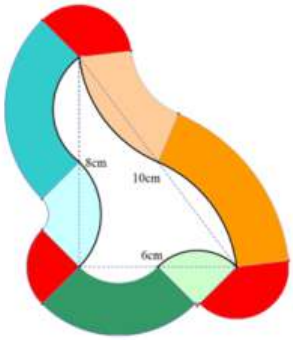
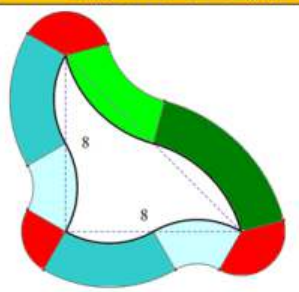
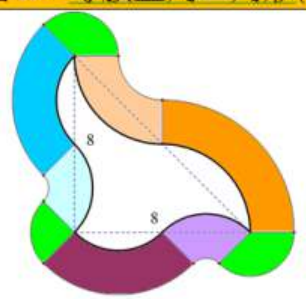
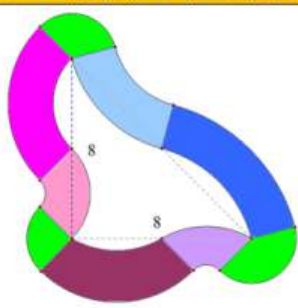
研究設定為不等邊的 N 邊形（以凸 N 邊形為主），採等徑三角形的方式變軌，希望藉由剪拼及數據推算找到圓或等徑輪在非正 N 邊形外滾動的區域面積一般化公式，其中我們也對等腰直角三角形進行了等腰直角變軌方式進行再探究。

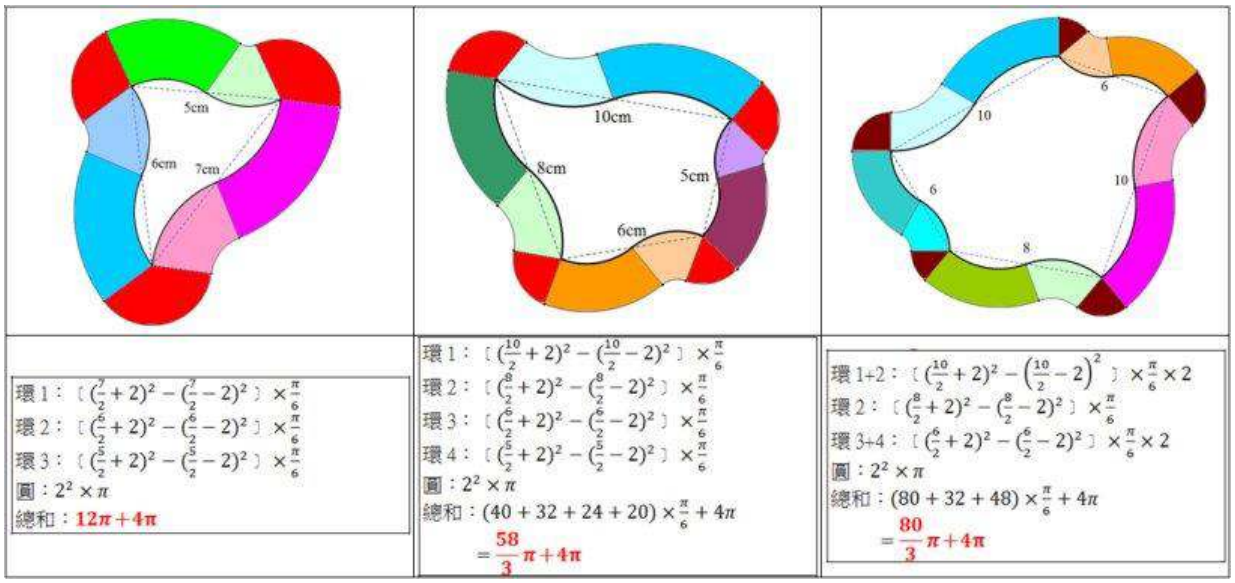


註 1：此實驗將圓或等徑輪的徑長固定為 2（徑長不大於最短邊的$\frac{1}{2}$）。

註 2：直角三角形及等腰直角三角形是特殊的三角形，所以我們針對此圖形進行不同的變軌方式來探究：(1) 採等徑三角變軌。(2) 採等腰直角變軌。(3) 採混合變軌

《等徑輪》在非正 N 邊形上滾動的區域面積　　表 3－2－1

圖 A：直角三角形（1）	圖 B：直角三角形（2）	圖 C：直角三角形（3）
		
環 1：$[(5+2)^2-(5-2)^2]\times\frac{\pi}{6}$ 環 2：$[(4+2)^2-(4-2)^2]\times\frac{\pi}{6}$ 環 3：$[(3+2)^2-(3-2)^2]\times\frac{\pi}{6}$ 圓：$2^2\times\pi$ 總和：$16\pi+4\pi$	環 1：$[(\frac{5}{2}\sqrt{2}+2)^2-(\frac{5}{2}\sqrt{2}-2)^2]\times\frac{\pi}{4}$ 環 2：$[(2\sqrt{2}+2)^2-(2\sqrt{2}-2)^2]\times\frac{\pi}{4}$ 環 3：$[(\frac{3}{2}\sqrt{2}+2)^2-(\frac{3}{2}\sqrt{2}-2)^2]\times\frac{\pi}{4}$ 圓：$2^2\times\pi$ 總和：$(20\sqrt{2}+16\sqrt{2}+12\sqrt{2})\times\frac{\pi}{4}+4\pi$ $=12\sqrt{2}\pi+4\pi$	環 1：$[(5+2)^2-(5-2)^2]\times\frac{\pi}{6}$ 環 2：$[(2\sqrt{2}+2)^2-(2\sqrt{2}-2)^2]\times\frac{\pi}{4}$ 環 3：$[(\frac{3}{2}\sqrt{2}+2)^2-(\frac{3}{2}\sqrt{2}-4)^2]\times\frac{\pi}{4}$ 圓：$2^2\times\pi$ 總和：$\frac{40}{6}\pi+(16\sqrt{2}+12\sqrt{2})\times\frac{\pi}{4}+4\pi$ $=\frac{20}{3}\pi+7\sqrt{2}\pi+4\pi$
圖 D：等腰直角三角形(1)	**圖 E：等腰直角三角形(2)**	**圖 F：等腰直角三角形(3)**
		
環 1：$[(4\sqrt{2}+2)^2-(4\sqrt{2}-2)^2]\times\frac{\pi}{6}$ 環 2：$[(4+2)^2-(4-2)^2]\times\frac{\pi}{6}$ 環 3：$[(4+2)^2-(4-2)^2]\times\frac{\pi}{6}$ 圓：$2^2\times\pi$ 總和：$\frac{32+16\sqrt{2}}{3}\pi+4\pi$	環 1：$[(4+2)^2-(4-2)^2]\times\frac{\pi}{4}$ 環 2：$[(2\sqrt{2}+2)^2-(2\sqrt{2}-2)^2]\times\frac{\pi}{4}$ 環 3：$[(2\sqrt{2}+2)^2-(2\sqrt{2}-2)^2]\times\frac{\pi}{4}$ 圓：$2^2\times\pi$ 總和：$(8+8\sqrt{2})\pi+4\pi$	環 1：$[(4+2)^2-(4-2)^2]\times\frac{\pi}{4}$ 環 2：$[(2\sqrt{2}+2)^2-(2\sqrt{2}-2)^2]\times\frac{\pi}{4}$ 環 3：$[(2\sqrt{2}+2)^2-(2\sqrt{2}-2)^2]\times\frac{\pi}{4}$ 圓：$2^2\times\pi$ 總和：$\frac{16\sqrt{2}}{3}\pi+8\sqrt{2}\pi+4\pi$
圖 G：任意三角形	**圖 H：任意四邊形**	**圖 I：任意五邊形**



《我們發現》

1. 不等邊圖形的變軌，相對就複雜些，邊長不等長 N 邊形要畫出變軌圖形，在尺規作圖上就有一些麻煩，需找到變軌的中心位置，因為那個中心點將會牽引著接下來圓繞行的軌跡以及爾後的切割線，因此“尺規作圖”也成了我們這次研究的附加學習。
2. 依照依各個環形扇來分開算，再利用分配律結合時，我們發現了，它也與【實驗 3－1】一樣，只要是等徑三角變軌的圖形似乎都可以用周長來處理，例如：圖 H，周長為 29，我們套用前面的公式$\frac{dc}{3}\pi+d^2\pi$，得出$\frac{2\times29}{3}\pi+4\pi$；又圖 D，周長為$16+8\sqrt{2}$，套用公式得出$\frac{2\times(16+8\sqrt{2})}{3}\pi+4\pi=\frac{32+16\sqrt{2}}{3}\pi+4\pi$，答案完全相同，因此可以得出一個結論，不等邊的變軌 N 邊形也可以運用$\frac{dc}{3}\pi+d^2\pi$求出圓或等徑輪滾動所繞行的面積。
3. 我們思考著等徑三角變軌有規律可以算出，那麼等腰直角變軌是否也有規律可循呢？它與周長有何相關呢？經歸納得出一般式是：$dc\times\frac{\pi}{2\sqrt{2}}+d^2\pi$，那麼混合變軌也可以搭著這兩個公式分別代入了。
4. 綜合上述活動二及活動三，圓或等徑輪在 N 邊形及變軌 N 邊形外滾動的區域面積所歸納出來的一般式，再進行整理如下：

   甲、在 N 邊形上：$dc+d^2\pi$

   乙、在等徑三角變軌 N 邊形上：$dc\times\frac{\pi}{3}+d^2\pi$

   丙、在等腰直角變軌 N 邊形上：$dc\times\frac{\pi}{2\sqrt{2}}+d^2\pi$

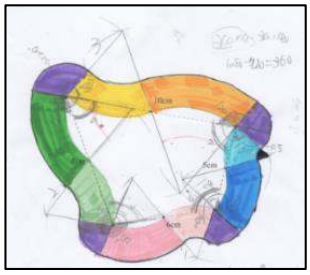


圖 3－2－1

   我們發現，都是以原有的$dc+d^2\pi$來進行變化的，依其不同的變軌方式，其面積推算會再乘上倍率（如$\frac{\pi}{3}$及$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$），那麼若我們繼續往下推想，倘若採120°或 45°變

軌是否也能找出解題的一般式呢？我們將繼續努力。

5. 當直角三角形遇上變軌時，圓的徑長不能大於最短邊的$\frac{\sqrt{2}}{4}$，否則會出現交疊的現象，我們目前無法處理這樣的運算問題。
6. 即使是不等邊的變軌圖形，其切割後的所有扇形組合起來還是一個完整的圓，這也可以用角度來驗証。

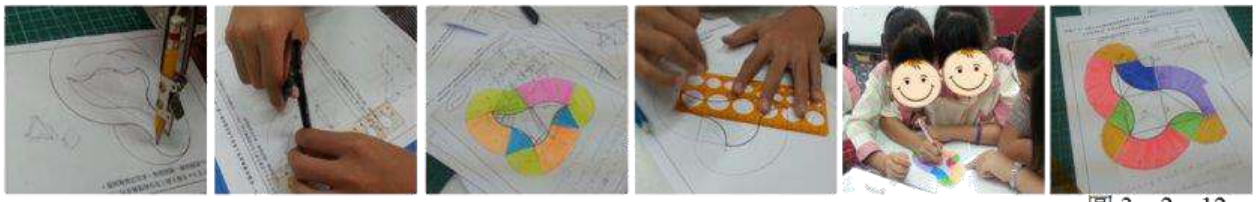


圖 3－2－12

活動四：探究圓在其它圖形滾動一圈所掃過的區域面積。

活動四我們想探究圓在其它變化圖形上滾動，其所掃過的區域面積能否也是有規律可循，因此我們選擇了直角轉的圖形（包含字母篇、數字篇、圖形篇）以及特殊角的折線及曲線圖形來進行圓滾動的探究。

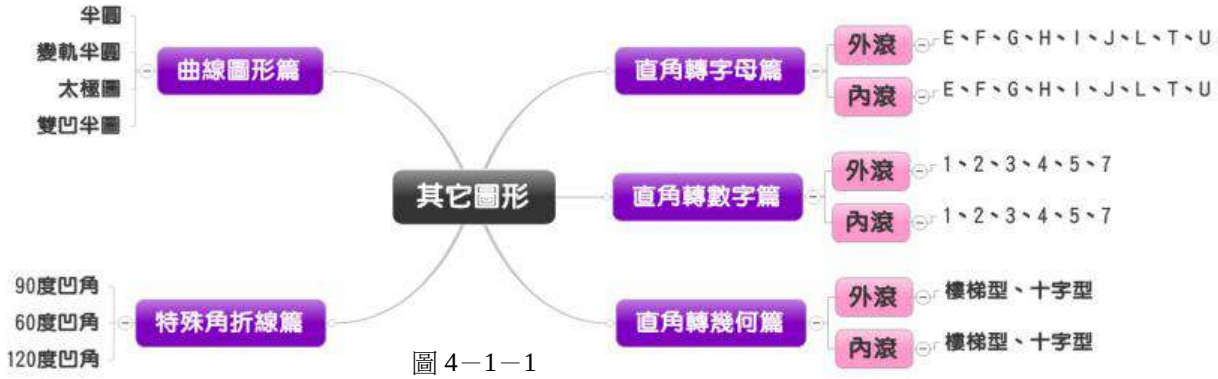
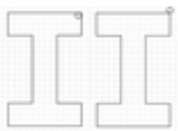
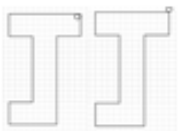


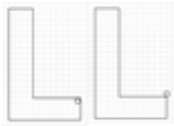
圖 4－1－1

【實驗 4－1】：圓在直角轉的字母圖內外滾動的區域面積。

註 1：因為在內滾動成直角轉或 270 度轉，我們都還能算出來其面積，因此實驗 4－1 我們增加了內滾動的探討，也希望能進一步探究內滾和外滾的差異性。

表 4－1－1

H		內滾	8 小 4 大 ＝24/4 小圓盤	(20x2＋10x2＋8x4) x4	368－(4－π)x6 ＝344＋6π	圖形周長為 96（384）－20 總面積相當 20＋3π
		外滾	4 小 8 大 ＝36/4 小圓盤	(22x2＋12x2＋8x4) x4	400－(4－π)x9 ＝364＋9π	
I		內滾	8 小 4 大 ＝24/4 小圓盤	(20x2＋10x2＋4x4) x4	304－(4－π)x6 ＝280＋6π	圖形周長為 80（320）－20 總面積相當 20＋3π
		外滾	4 小 8 大 ＝36/4 小圓盤	(22x2＋12x2＋4x4) x4	336－(4－π)x9 ＝300＋9π	
J		內滾	7 小 3 大 ＝19/4 小圓盤	(20x2＋10x2＋4x2) x4	272－(4－π)x$\frac{19}{4}$ ＝253＋$\frac{19}{4}$π	圖形周長為 72（288）－15 總面積相當 20＋3π
		外滾	3 小 7 大 ＝31/4 小圓盤	(22x2＋12x2＋4x2) x4	304－(4－π)x$\frac{31}{4}$ ＝273＋$\frac{31}{4}$π	

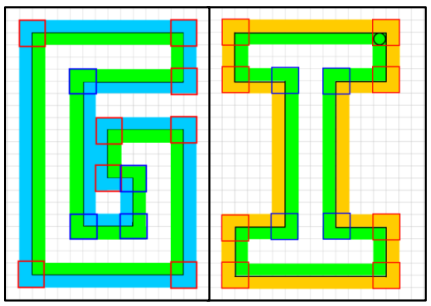
L		內滾	5小1大 =9/4小圓黑	(20x2+10x2)x4	$240-(4-\pi)\times\frac{9}{4}$ $=231+\frac{9}{4}\pi$	圖形周長為64（256）-5 總面積相差20+3π
		外滾	1小5大 =21/4小圓黑	(22x2+12x2)x4	$272-(4-\pi)\times\frac{21}{4}$ $=251+\frac{21}{4}\pi$	
T		內滾	6小2大 =14/4小圓黑	(20x2+10x2)x4	$240-(4-\pi)\times\frac{14}{4}$ $=226+\frac{14}{4}\pi$	圖形周長為64（256）-10 總面積相差20+3π
		外滾	2小6大 =26/4小圓黑	(22x2+12x2)x4	$272-(4-\pi)\times\frac{26}{4}$ $=246+\frac{26}{4}\pi$	
U		內滾	6小2大 =14/4小圓黑	(20x2+10x2+16x2)x4	$368-(4-\pi)\times\frac{14}{4}$ $=354+\frac{14}{4}\pi$	圖形周長為96（384）-10 總面積相差20+3π
		外滾	2小6大 =26/4小圓黑	(22x2+12x2+8x2)x4	$400-(4-\pi)\times\frac{26}{4}$ $=374+\frac{26}{4}\pi$	

《我們發現》

1. 觀察圓滾過的面積區塊，包含了長條形面積與轉彎處，轉彎處又分成兩種，一個是小轉彎（轉90°），是以滾圓的半徑為半徑所形成的,另一個是大轉彎（轉270°）（請見圖 4-1-2），是以滾圓的直徑為半徑所形成的，因此我們採用<u>算出總長條再扣除轉彎處的小區塊</u>來計算圓滾過的區域面積。而這大小兩個轉彎的小區塊，我們在活動中稱為“小圓黑“和“大圓黑“，大圓黑的面積是小圓黑的 4 倍，因此在計算中可轉換成小圓黑來計算，4 個小圓黑(如圖 4-1-3)可以用一個正方形剪掉一個圓面積形成” 一組小圓黑“求出來，即 4－π（實驗單中的每個方格邊長是 2，方格邊長為 a，則一組小圓黑的面積為$a^2-\frac{a}{2}\times\frac{a}{2}\times\pi=a^2\times(1-\frac{1}{4}\pi)$）。

圖 4－1－2

圖 4－1－3



2. 從表中可以看出內滾和外滾的<u>長條面積皆相差 8 個方格</u>，我們將內外圈滾過的區域合併在一起觀察，發現不管圖形怎麼拐彎，轉彎處一一對應後，永遠都是外圈多了 8 個方格，而外滾經過的大轉彎比較多所以相對要扣除的小圓黑比較多，因此相抵結果，<u>在直角轉的圖形中，外滾比內滾的面積多了 20＋3π。</u>為何如此？我們將圖形回歸到基本的矩形來觀察內外轉情形，發現外轉一角比內轉一角多了〔(4＋4)＋π〕－〔$4-\left(1-\frac{1}{4}\pi\right)$〕$=5+\frac{3}{4}\pi$，那麼 4 個轉角處就多了 20＋3π。

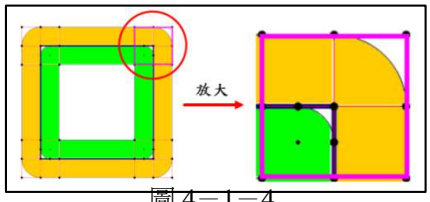
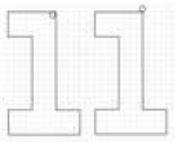
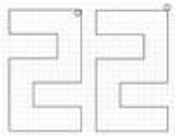
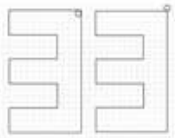
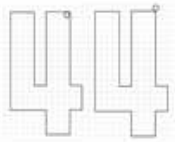
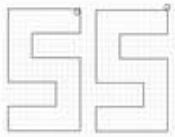
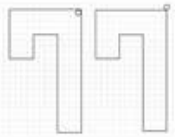
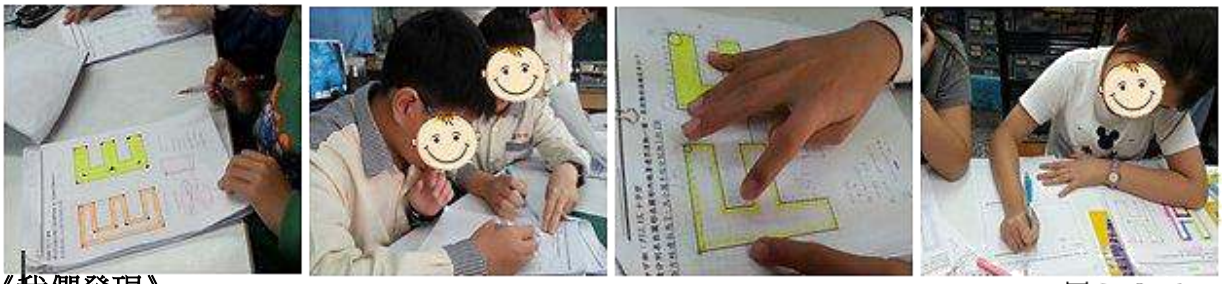


圖 4－1－4

【實驗 4－2】：圓在直角轉的數字圖內外滾動的區域面積。

表 4－2－1

	圖形		角落	長條總長	合併算式	
1		內滾	7 小 3 大 ＝19/4 小圓黑	（20x2＋10x2＋4x2）x4	$272-(4-\pi)\times\frac{19}{4}$ $=253+\frac{19}{4}\pi$	圖形周長為 72（288） －15 總面積相差 $20+3\pi$
		外滾	3 小 7 大 ＝31/4 小圓黑	（22x2＋12x2＋4x2）x4	$304-(4-\pi)\times\frac{31}{4}$ $=273+\frac{31}{4}\pi$	
2		內滾	8 小 4 大 ＝24/4 小圓黑	（20x2＋10x2＋8x4）x4	$368-(4-\pi)\times6$ $=344+6\pi$	圖形周長為 96（384） －20 總面積相差 $20+3\pi$
		外滾	4 小 8 大 ＝36/4 小圓黑	（22x2＋12x2＋8x4）x4	$400-(4-\pi)\times9$ $=364+9\pi$	
3		內滾	8 小 4 大 ＝24/4 小圓黑	（20x2＋10x2＋8x4）x4	$368-(4-\pi)\times6$ $=344+6\pi$	圖形周長為 96（384） －20 總面積相差 $20+3\pi$
		外滾	4 小 8 大 ＝36/4 小圓黑	（22x2＋12x2＋8x4）x4	$400-(4-\pi)\times9$ $=364+9\pi$	
4		內滾	9 小 5 大 ＝29/4 小圓黑	（20x2＋10x2＋12x2）x4	$336-(4-\pi)\times\frac{29}{4}$ $=307+\frac{29}{4}\pi$	圖形周長為 88（352） －25 總面積相差 $20+3\pi$
		外滾	5 小 9 大 ＝41/4 小圓黑	（22x2＋12x2＋12x2）x4	$368-(4-\pi)\times\frac{41}{4}$ $=327+\frac{41}{4}\pi$	
5		內滾	8 小 4 大 ＝24/4 小圓黑	（20x2＋10x2＋8x4）x4	$368-(4-\pi)\times6$ $=344+6\pi$	圖形周長為 96（384） －20 總面積相差 $20+3\pi$
		外滾	4 小 8 大 ＝36/4 小圓黑	（22x2＋12x2＋8x4）x4	$400-(4-\pi)\times9$ $=364+9\pi$	
7		內滾	6 小 2 大 ＝14/4 小圓黑	（20x2＋10x2＋4x2）x4	$272-(4-\pi)\times\frac{14}{4}$ $=258+\frac{14}{4}\pi$	圖形周長為 72（288） －10 總面積相差 $20+3\pi$
		外滾	2 小 6 大 ＝26/4 小圓黑	（22x2＋12x2＋4x2）x4	$304-(4-\pi)\times\frac{26}{4}$ $=278+\frac{26}{4}\pi$	



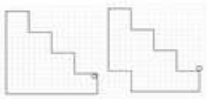
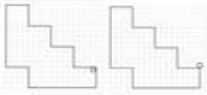
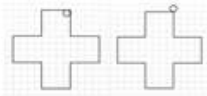
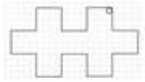
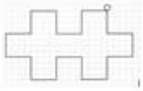
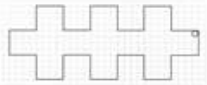
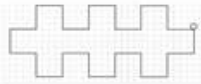
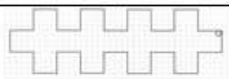
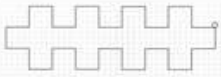
《我們發現》

圖 4—2—1

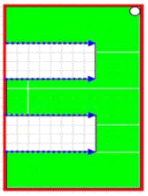
1. 圓在直角轉的數字圖中，外滾區比內滾區也是和英文圖一樣多了 $20+3\pi$，道理同前。
2. 在計算長條總面積時，我們盡量採“移花接木”的方式，先求完整的一個框邊（20×2＋10×2），再算多餘的長度，最後乘上每個單位是 4，就是面積總數了。

【實驗 4－3】：圓在直角轉的幾何圖內外滾動的區域面積。

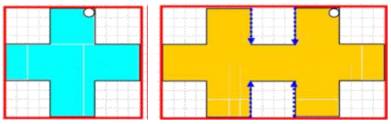
表 4－3－1

	圖形		角落	長條總長	合併算式	
1		內滾	7 小 3 大 ＝19/4 小圓黑	（16x2＋14x2）x4	$240-(4-\pi)\times\frac{19}{4}$ $=221+\frac{19}{4}\pi$	圖形周長為 64（256） －15 總面積相差 $20+3\pi$
		外滾	3 小 7 大 ＝31/4 小圓黑	（18x2＋16x2）x4	$272-(4-\pi)\times\frac{31}{4}$ $=241+\frac{31}{4}\pi$	
2		內滾	8 小 4 大 ＝24/4 小圓黑	（16x2＋14x2）x4	$240-(4-\pi)\times6$ $=216+6\pi$	圖形周長為 64（256） －20 總面積相差 $20+3\pi$
		外滾	4 小 8 大 ＝39/4 小圓黑	（18x2＋16x2）x4	$272-(4-\pi)\times9$ $=236+9\pi$	
3		內滾	8 小 4 大 ＝24/4 小圓黑	（12x2＋10x2）x4	$176-(4-\pi)\times6$ $=152+6\pi$	圖形周長為 48（192） －20 總面積相差 $20+3\pi$
		外滾	4 小 8 大 ＝39/4 小圓黑	（14x2＋12x2）x4	$208-(4-\pi)\times9$ $=172+9\pi$	
4	 	內滾	12 小 8 大 ＝44/4 小圓黑	（20x2＋10x2＋4x4）x4	$304-(4-\pi)\times11$ $=260+11\pi$	圖形周長為 80（320） －40 總面積相差 $20+3\pi$
		外滾	8 小 12 大 ＝56/4 小圓黑	（22x2＋12x2＋4x4）x4	$336-(4-\pi)\times14$ $=280+14\pi$	
5	 	內滾	16 小 12 大 ＝64/4 小圓黑	（28x2＋10x2＋4x8）x4	$432-(4-\pi)\times16$ $=368+16\pi$	圖形周長為 112 （448）－60 總面積相差 $20+3\pi$
		外滾	12 小 16 大 ＝76/4 小圓黑	（30x2＋12x2＋4x8）x4	$464-(4-\pi)\times19$ $=388+19\pi$	
6	 	內滾	20 小 16 大 ＝84/4 小圓黑	（36x2＋10x2＋4x12）x4	$560-(4-\pi)\times21$ $=476+21\pi$	圖形周長為 144 （576）－80 總面積相差 $20+3\pi$
		外滾	16 小 20 大 ＝96/4 小圓黑	（38x2＋12x2＋4x12）x4	$592-(4-\pi)\times24$ $=496+24\pi$	

《我們發現》



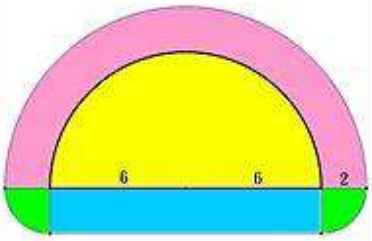
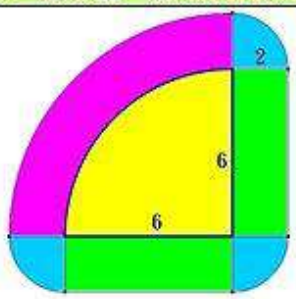
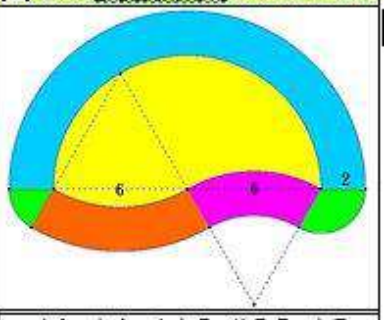
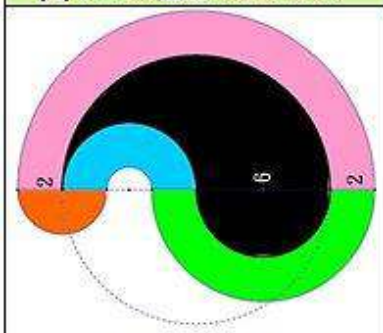
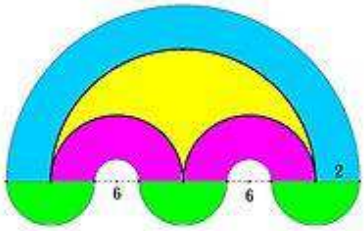
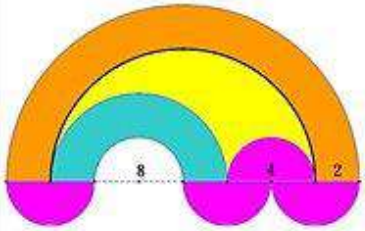
1. 圓在直角轉的圖形中，外滾區域比內滾區域也是和英文圖、數字圖一樣多了 $20+3\pi$ ，道理同前。
2. 在計算長條總面積時，四角的轉彎處都可以拉出成一個矩形，只要再算中間增加的長度再換算成面積就行了，前面的圖形也都可以如法炮製。



【實驗 4－4】：圓在**曲線圖形外**滾動的區域面積。

註 1：動圓直徑大小設定以不超過曲線徑長的一半，以免出現重疊的狀況。

《圓》在曲線圖形外滾動的區域面積 表 4－4－1

圖 A：半圓（周長 12＋6π）	圖 B：四分之一圓（周長 12＋3π）	圖 C：彎軌半圓（周長 10π）
		
面積分三部分：大半環＋半圓＋1 個長方形 大半環：$(8^2-6^2)\times\pi\times\frac{1}{2}=14\pi$ 半圓：$2\times2\times\pi\times\frac{1}{2}=2\pi$ 長方形：$12\times2=24$ 面積總和為：$24+16\pi$	面積分三部分：扇形環＋$\frac{3}{4}$圓＋2 個長方形 扇形環：$(8^2-6^2)\times\pi\times\frac{1}{4}=7\pi$ 圓：$2\times2\times\pi\times\frac{3}{4}=3\pi$ 長方形：$6\times2\times2=24$ 面積總和為：$24+10\pi$	面積分三部分：大半環＋雙層環＋半圓 大半環：$(8^2-6^2)\times\pi\times\frac{1}{2}=14\pi$ 雙層環：$(8^2-4^2)\times\pi\times\frac{1}{6}=8\pi$ 半圓：$2\times2\times\pi\times\frac{1}{2}=2\pi$ 面積總和為：24π
圖 D：太極圖（周長 12π）	**圖 E：雙凹半圓（1）（周長 12π）**	**圖 F：雙凹半圓（2）（周長 12π）**
		
面積分三部分：大半環＋雙層環＋半圓 大半環：$(8^2-6^2)\times\pi\times\frac{1}{2}=14\pi$ 雙層環：$(5^2-1^2)\times\pi\times\frac{1}{2}=12\pi$ 半圓：$2\times2\times\pi\times\frac{1}{2}=2\pi$ 面積總和為：28π	面積分三部分：大半環＋中環＋3 個半圓 大半環：$(8^2-6^2)\times\pi\times\frac{1}{2}=14\pi$ 中環：$(3^2-1^2)\times\pi=8\pi$ 半圓：$2\times2\times\pi\times\frac{3}{2}=6\pi$ 面積總和為：28π	面積分三部分：大半環＋中半環＋2 個圓 大環：$(8^2-6^2)\times\pi\times\frac{1}{2}=14\pi$ 雙層環：$(4^2-2^2)\times\pi\times\frac{1}{2}=6\pi$ 半圓：$2\times2\times\pi\times2=8\pi$ 面積總和為：28π

《我們發現》

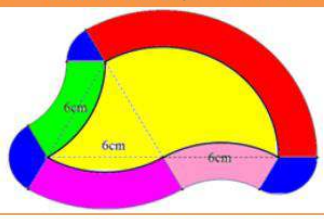
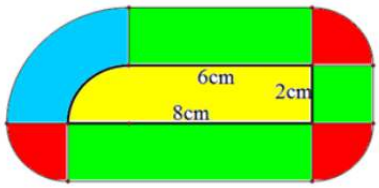
1. 由圖 D、E、F 三圖中我們可以得出母體以半圓形的方式繞轉，若圖形的圓周相等，則滾動的面積也會相同。
2. 由上述六個圖形中，我們發現繞行的區域面積與圓周有很大關係，且面積都是周長的 2 倍＋4π，再仔細探究，發現這個 2 倍其實就是動圓的直徑，而 4π 則是此動圓的面積，因此我們又畫了兩個改造圖（如表 4－4－2）相互比對如下，發現結果依舊是圖形周長的 2 倍＋4π，因此可以寫成的一般式為：$\mathbf{dc+d^2\pi}$。
3. 活動進行到此，似乎又與活動二及活動三所得的結果相呼應，都是圖形周長×徑長＋1 個圓，即$\mathbf{dc+d^2\pi}$，<u>這裡讓我們好奇的是，為何還是會出現多一個圓的面積呢？</u>我們

嘗試將母體圖形縮小再縮小到成為一個點，可以說已沒有圓周了，再拿一個直徑為 d 的圓繞著此點滾動一圈，發現其繞行的區域剛好是$d^2\pi$，當母體擴大為半徑 a 的圓時，所繞行形成的環形面積為$(d+a)^2\pi - a^2\pi = d^2\pi + 2da\pi + a^2\pi - a^2\pi = d^2\pi + 2da\pi = d^2\pi + d \times 2a\pi$，而$2a\pi$即為母體的圓周長，與我們前面的推測結論是一樣的：利用圓周長x動圓的徑長＋1 個圓即能求出面積。**因此，我們只要將圓曲線圖形的周長算出來即能推算其圓滾動的面積。**

總結一般式為：

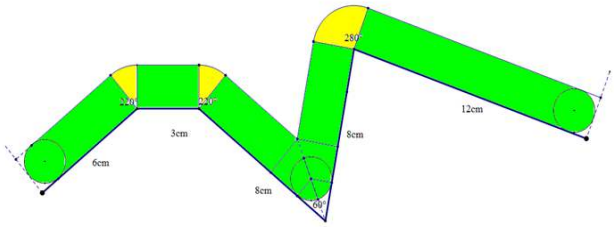
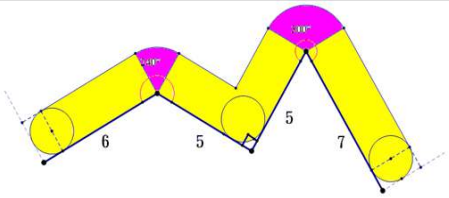
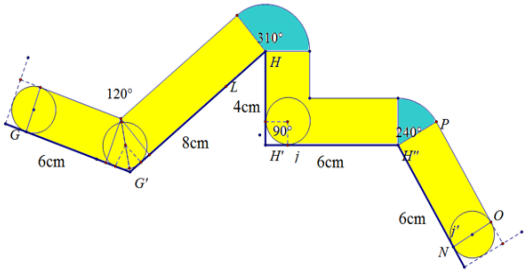
圓曲線圖形周長x$d + d^2\pi$（註：必要條件為圓需能接觸到整個圓曲線圖形的周圍）

表 4－4－2

圖 G：圓曲線變形（周長 10π）	圖 H：長方形變形（周長 $16+\pi$）
	
分析：與圖 C、D、E、F 相近，都是圓曲線 圖 C：周長 10π；面積 24π 圖 D：周長 12π；面積 28π 圖 E：周長 12π；面積 28π 圖 F：周長 12π；面積 28π 圖 G：周長 10π；面積 24π	分析：與圖 A 和圖 B 相近，有直線和圓曲線 圖 A：周長 $12+6\pi$；面積 $24+16\pi$ 圖 B：周長 $12+3\pi$；面積 $24+10\pi$ 圖 H：周長 $16+\pi$；面積 $32+6\pi$

【實驗 4－5】：圓在特殊角的折線上滾動的區域面積。

表 4－5－1

	特殊角折線圖形	面積
60° 凹角		長方形：〔$5+3+(8-2\sqrt{3})\times 2+11$〕$\times 2 = 70-8\sqrt{3}$ 扇形：$2\times 2\times \pi \times \frac{40+40+100}{360} = 2\pi$ 圓：$1\times 1\times \pi = \pi$ 其它：$3\times\sqrt{3}+1\times 1\times \pi\times\frac{1}{3} = 3\sqrt{3}+\frac{1}{3}\pi$ 總和：$70-5\sqrt{3}+3\frac{1}{3}\pi$
90° 凹角		長方形：〔$5+5+3+6$〕$\times 2 = 38$ 扇形：$2\times 2\times \pi \times \frac{60+120}{360} = 2\pi$ 圓：$1\times 1\times \pi = \pi$ 扣除：$1\times 1-\frac{1}{4}\pi = 1-\frac{1}{4}\pi$ 總和：$37+3\frac{1}{4}\pi$
120° 凹角		長方形：〔$\left(5-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)+\left(8-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)+4+4+5$〕$\times 2 = 52-\frac{8\sqrt{3}}{3}$ 扇形：$2\times 2\times \pi \times \frac{130+60}{360} = \frac{76}{36}\pi$ 圓：$1\times 1\times \pi = \pi$ 扣除：$1\times\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{6}\pi = \frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{6}\pi$ 總和：$52-\frac{7\sqrt{3}}{3}+3\frac{10}{36}\pi$

《我們發現》

1. 圓在折線上滾動會遇上內轉及外轉，外轉部分可以併成扇形來計算，而內滾的部分若是直角就好處理，若是遇上等殊角(30°、45°、60°、120°)，則運算上需要使用到特殊角邊長比例關係，如$1：1：\sqrt{2}$或$1：\sqrt{3}：2$，運算上比較麻煩些，但只要把握好原則，先算長方形和直角梯形部分，再算合併的扇形及兩邊的半圓，最後再減去轉彎處的小空白區域即可。

活動五：圓或等徑輪滾動的拓展與應用

在整個學期的探究歷程中，我們學習到了尺規作圖，藉由切割剪拼及運算求證，將看似無法解決的滾動面積問題簡單化，並找出一般式，在僅有的時間內我們還希望它能有所拓展或在生活上能有所應用，因此，我們又做了一些探究。

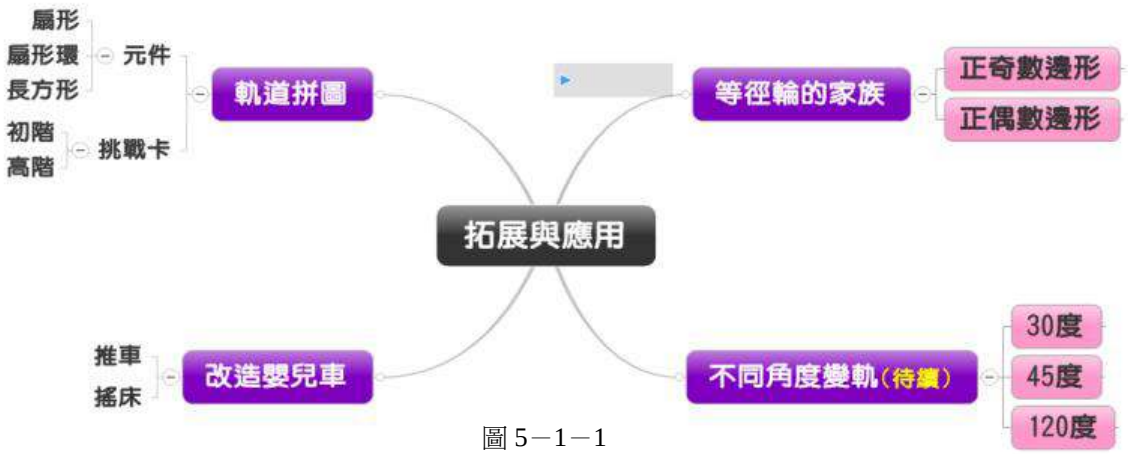
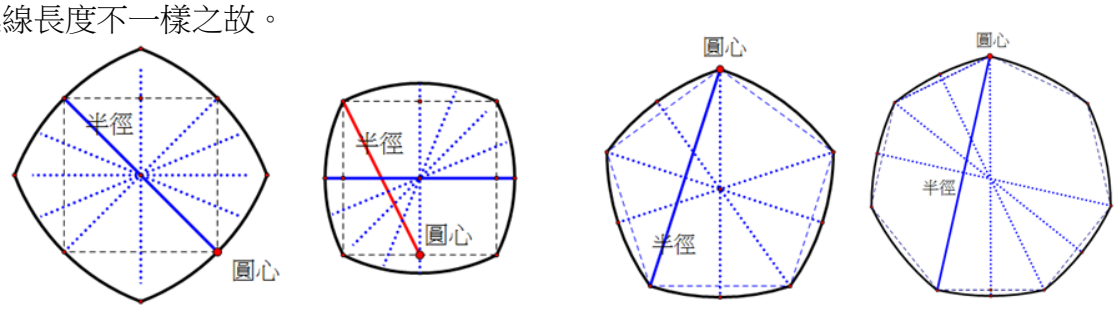


圖 5－1－1

【實驗 5－1】：除了等徑三角形有和圓滾動一樣的特徵外，還有沒有其它形狀也有相同的特徵嗎？

等徑三角形是由正三角形生成的，因此，我們思考著：那麼正 N 邊形是不是也都能比照辦理而做出等徑 N 邊形呢？**我們嘗試的結果發現正奇數邊形都可以做出來，因為正奇數邊形其是點和邊的對稱圖形，對稱軸皆等長，只要由頂點為圓心，頂點到對邊的其中一個端點為半徑**，即可畫出和圓及等徑三角形一樣的性質，在兩條平行線內滾動，始終與這兩條平行線相切。而正偶數邊形則無法繪製出來，因為相對頂點的連線與相對邊的連線長度不一樣之故。



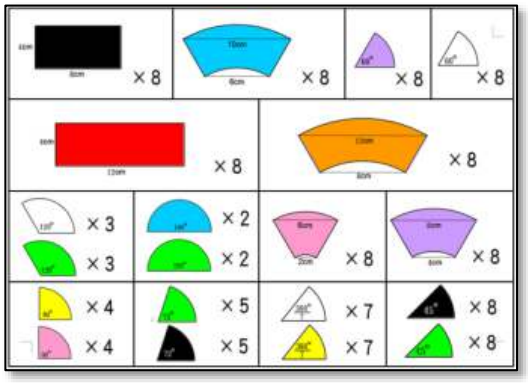
正偶數邊×　　圖 5－1－2　　正奇數邊✓

【實驗 5－2】：圓滾動研究在軌道拼圖上的應用。

實驗中我們發現圓和等徑輪其滾動有其固定的軌跡，在多邊形或變軌圖形滾動所形成的區域面積切割後，會形成長方形、扇形及環形扇，我們運用這些基本元件將它拓展成為“軌道拼圖“，利用有序的分割方式，挑戰將零碎的區塊拼組回原型，這有助於我們對較複雜的平面圖形面積的求解。

目標：能觀察圖形，判斷其邊數，並觀察轉角處的幅度選擇正確的元件，拼組出指定的圖形軌跡。

元件：12x4 的長方形、8x4 的長方形、下 2 上 6 環形扇、下 4 上 8 環形扇、下 6 上 10 環形扇、下 8 上 12 環形扇、$\frac{1}{2}$圓、$\frac{1}{3}$圓、$\frac{1}{4}$圓、$\frac{1}{5}$圓、$\frac{1}{6}$圓、$\frac{1}{7}$圓、$\frac{1}{8}$圓等元件。



圖卡：初級篇→呈現內環與外環，方便觀察拼組
高級篇→僅呈現外框，難度較高。

【實驗 5－3】：結合等徑輪的弧與平行軌道移動的特性**改造嬰兒推車的車輪**。

等徑輪能做到和圓輪平行滾動，但因為等徑輪找不到一個點使其到邊上的距離都相等，因此其“重心”（即三角形三邊中點的交點）會因前進滾動而形成曲線，**只要能像方孔鑽頭一樣隨轉動做繞軸的圓周運動，那麼將也能像圓輪一樣平穩，**用來當車輪騎時，會比較費力，那麼我們就聯想到嬰兒推車，媽媽推著嬰兒車出門採購逛街，遇下坡時較不會有不小心沒抓好嬰兒車導致嬰兒車往下滑的危險，另外，媽媽停下來和別人說話時，可以輕晃一下推車，**由於下方是較平穩的弧線，媽媽輕輕的搖動，寶寶就好像睡在搖籃裡一樣舒服**，下圖是我們的發想，也許有機會可以突破困難，創作出一輛不一樣的嬰兒推車讓媽媽們更便利。

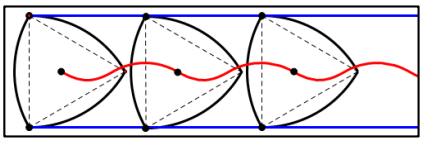


圖 5－3－1

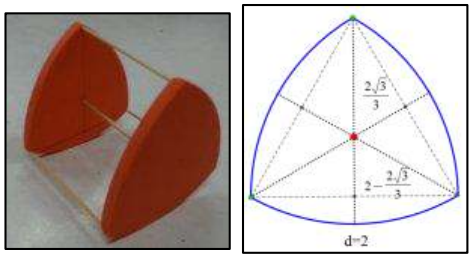


圖 5－3－2

圖 5－3－3

陸、結論

一、**等徑輪和圓在繞行封閉性圖形時，其滾動所形成的區域面積會一樣**，因為等徑輪和圓一樣，能在兩條平行線中進行滾動，其它等徑五邊形、等徑七邊形推理也會相同。

二、圓或等徑輪在凸多邊形的外圍滾動形成的區域，其轉彎處會是個以徑長為半徑的扇形，將這些扇形組合起來剛好形成一個圓。

三、圓或等徑輪在變軌 N 邊形外滾動，其徑長與邊長的比值不同其內彎處會有所不同：

1.徑長與邊長的比小於$\frac{1}{2}$時，圖形內凹處是個小環形扇。

2.徑長與邊長的比等於$\frac{1}{2}$時，圖形內凹處是個扇形。

3.徑長與邊長的比大於$\frac{1}{2}$時，圓形會出現重疊狀況。（目前我們沒有研究）

四、圓在直角轉的圖形內外滾動，外滾比內滾的面積多了 20＋3π 。（徑長為 2 時）

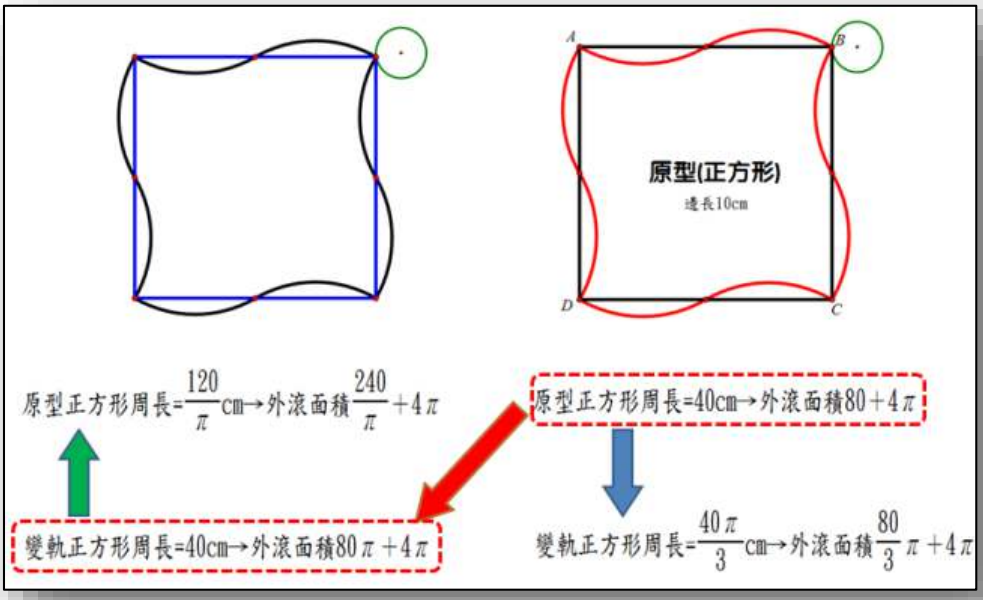
五、圓和等徑輪繞著下列各種不同圖形外圍滾動，其滾動的區域面積如下：

表 6－1－1

母體形狀	所形成的區域形狀	面積（徑長 d，邊長 a，母體半徑 r_1，動輪半徑 r_2，母體周長 c
圓形	環形	方法：一個環形 公式：〔$(2r_2+r_1)^2-r_1{}^2$〕× π_1
等徑輪	類似御飯團壽司形	方法：半個環形扇＋圓＝一個環形 公式：〔$(2r_2+r_1)^2-r_1{}^2$〕× π_1
N 邊形	圓角的多邊形	方法：N 個長方形＋圓 公式：$adN+d^2\pi$ 或 $cd+d^2\pi$
變軌正 N 邊形	單一有規律的扭曲形	方法：N 個相同的雙層環形扇（或扇形）＋圓 公式：$\frac{daN}{3}\pi+d^2\pi$
變軌非正 N 邊形	多種有規律的扭曲形	方法：數個不同的雙層環形扇（或扇形）＋圓 公式：$\frac{dc}{3}\pi+d^2\pi$（三角）、$\frac{dc}{2\sqrt{2}}\pi+d^2\pi$（直角）
直角轉圖形	與原圖相似轉彎處為扇形	方法：長條形面積總長－小圓黑部分 公式：$cd^2-(4-\pi)\times$ 小圓黑組數
圓曲線圖形	與原圖相似轉彎處為扇形	方法：周長x徑長＋大圓面積 公式：$cd+d^2\pi$
特殊角折線	與原圖相似轉彎處為扇形	方法：長方形＋轉彎合併扇形＋內凹區域 公式：目前無法整合出一個一般式

六、 圓或等徑輪在多邊形或圓曲線圖形外圍滾動區域面積皆可總結為：周長x徑長＋大圓面積，即$\mathbf{dc+d^2\pi}$。《由下方的圖示中可以看出周長與滾過區域面積間的關係》

1. 在 N 邊形上：$dc+d^2\pi$
2. 在等徑三角變軌 N 邊形上：$dc\times\frac{\pi}{3}+d^2\pi$
3. 在等腰直角變軌 N 邊形上：$dc\times\frac{\pi}{2\sqrt{2}}+d^2\pi$



七、變軌多邊形是以正三角形為原型轉化出來的，其對應的是的60°的弧，滾動區域都可

以切割成扇形及60°的環形扇，因此我們依據此滾圓的大小設計幾組環形扇、扇形及長方形，我們可以自由組裝出指定的圖形並推導出此圖的原型，或是利用這些拼圖元件搭配扇形找出可拼組的圖形，過程中可以提升我們對圖形的敏銳度。

八、利用尺規作圖，讓我們很容易看出這些看似不規則圖形中所蘊涵不變的原則～環形扇＋扇形的組合，接著再運用幾何畫板來製作報告書的圖形就非常得心應手了。

柒、展望未來

一、找出圓或等徑三角形在不同特殊角變軌 N 邊形外滾動的區域面積之運算規律。

二、圓和等徑三角形繞行多邊形的自轉圈數探究。

捌、參考資料

一、維基百科（http://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%8B%92%E6%B4%9B%E4%B8%89%E8%A7%92%E5%BD%A2）

二、祁斌。以不變應萬變滾動圓問題方法研究初探。（http://wenku.baidu.com/view/0636236ba98271fe910ef945.html）

【評語】080405

本件作品討論幾何圖形的滾動問題，並探討相關圖形的面積問題，討論分析的結果相當具有可讀性，問題的分析，在深度及廣度，都有一定的程度，是一件不錯的作品。