

中華民國第 55 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組 數學科

第三名

080403

埋雷奇兵

學校名稱：彰化縣彰化市中山國民小學

作者：	指導老師：
小六 洪紫葳	陳瑩柔
小五 林予加	
小四 李承芸	
小四 莊艾琳	

關鍵詞：埋雷、抽屜原理、奇偶性

摘要

本研究探討在 $n \times n$ 的方格表中，置入 $f(n)$ 個地雷， $f(n)$ 代表在 $n \times n$ 的方格表中，依掃雷方式進行後，能確保至少剩下一個地雷，所要置放地雷的最少個數。我們透過觀察、尋找關係、猜測、檢驗、證明及公式的探究過程，發現方格表邊長為奇、偶數是討論的關鍵，我們運用抽屜原理找出在 $n \times n$ 的方格表中，所置入地雷最少個數的公式並加以證明，結果如下：

(一)若 n 為偶數($n=2k$ ， $k \geq 1$)，則 $f(n)=3k+1$ 。

(二)若 n 為奇數($n=2k+1$ ， $k \geq 1$)，則 $f(n)=3k+3$ 。

此外，我們也找到了 $n \times n$ 的方格表中，置放地雷的快速完成法及快速檢查法。為了更多人能了解埋雷遊戲及體驗我們的研究歷程，我們則在老師的協助下著手設計flash教學遊戲，希望能推廣埋雷遊戲及展示研究發現。

壹、研究動機

有一天，老師在數學課堂上提出一個「埋地雷」的題目。題目內容是：在 4×4 的方格中，最少必須置入多少個地雷，才能使地雷經過兩行及兩列的清掃後，最少剩下一個？其擺法為何？這題數學引發了熱烈討論，但卻沒有人想出答案。於是，我們決定深入探討，以了解其奧秘。

貳、名詞釋義

一、遊戲規則說明：

在 $n \times n$ 的方格中，置入 $f(n)$ 個地雷，在依掃雷方式進行後，必須剩下至少一個地雷。

二、掃雷方式依據邊長數可分為以下兩種：

(一) 若邊長為偶數(n)($n=2k$ ， $k \geq 1$)，則掃雷方式只有一種：任選 k 行、 k 列進行掃雷，如圖2-2-1~2-2-3所示。

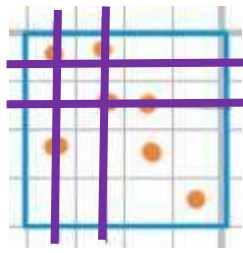


圖2-2-1

掃橫1、2列

縱1、2行

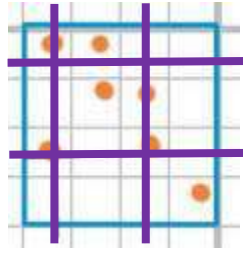


圖2-2-2

掃橫1、3列

縱1、3行

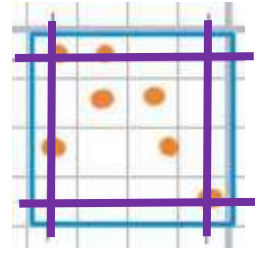


圖2-2-3

掃橫1、4列

縱1、4行

(二) 若邊長為奇數(n)($n=2k+1, k \geq 1$), 則掃雷方式分為兩種：

1. 任選橫掃 k 列，縱掃 $k+1$ 行，如圖2-2-4、2-2-6所示。

2. 任選橫掃 $k+1$ 列，縱掃 k 行，如圖2-2-5所示。

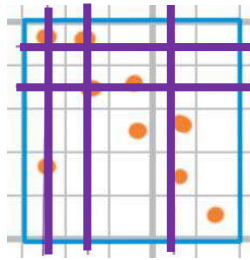


圖2-2-4

掃橫1、2列

縱1、2、4行

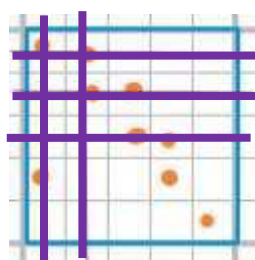


圖2-2-5

掃橫1、2、3列

縱1、2行

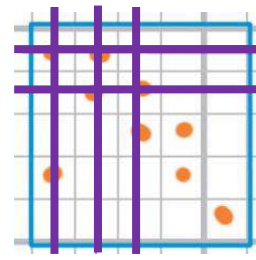


圖2-2-6

掃橫1、2列

縱1、2、3行

三、 $f(n)$ 代表在 $n \times n$ 的方格表中，在依掃雷方式進行後，能確保至少剩下一個地雷，所要置放地雷的最少個數。

四、抽屜原理：又名鴿籠原理，假設每個抽屜代表一個集合，每一個蘋果就可以代表一個元素，如果有 $n+1$ 或多於 $n+1$ 個元素放到 n 個集合中去，其中必定至少有一個集合裡有兩個元素。

參、研究目的

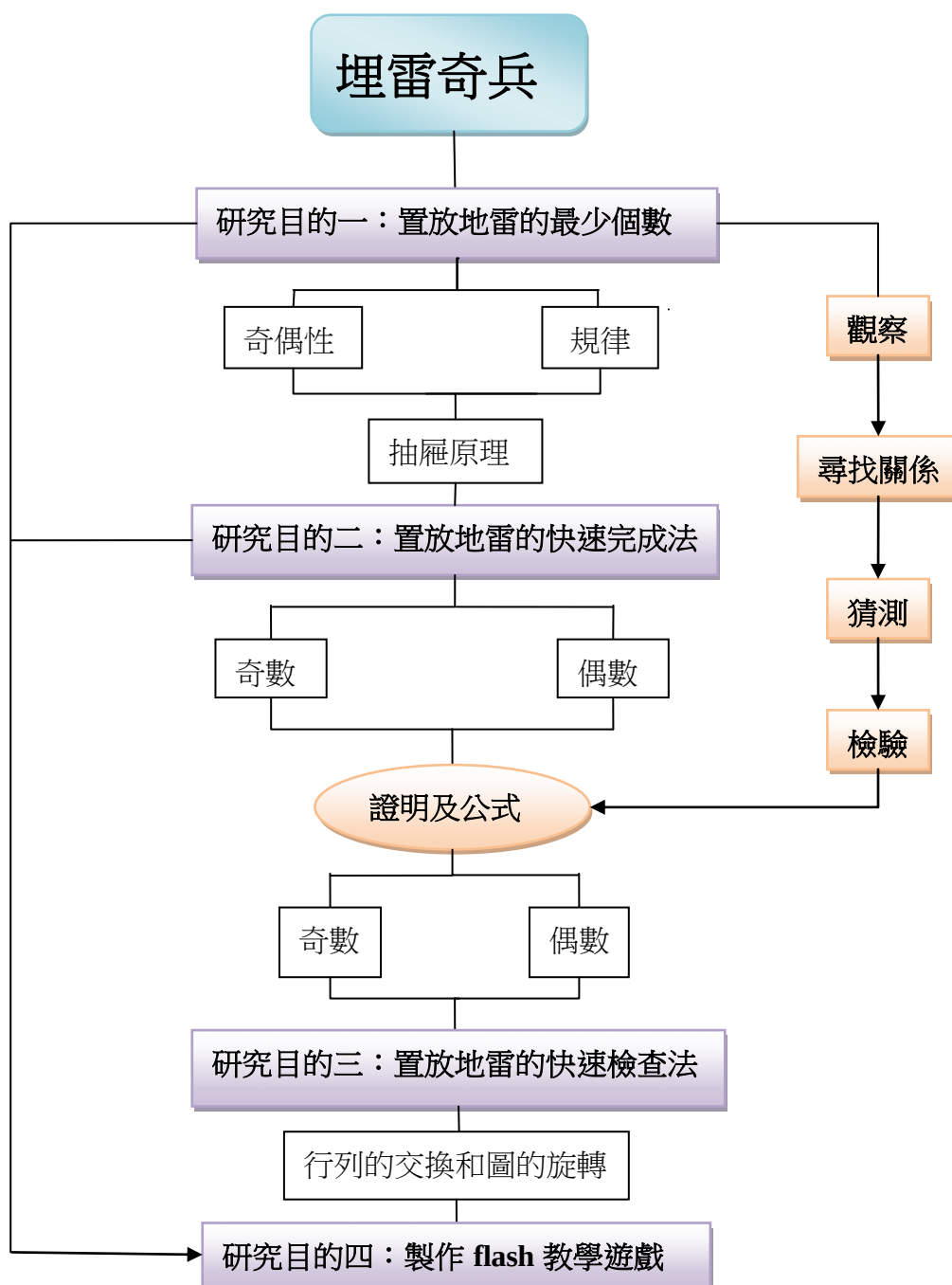
- 一、探討 3×3 、 4×4 、 5×5 、 $6 \times 6 \dots n \times n$ 方格表中最少放入幾個地雷，能使至少一個地雷不會被掃到，也就是找出 $f(n)$ 值。
- 二、探討 3×3 、 4×4 、 5×5 、 $6 \times 6 \dots n \times n$ 方格表中置放地雷的快速完成法。
- 三、探討 3×3 、 4×4 、 5×5 、 $6 \times 6 \dots n \times n$ 方格表中置放地雷的快速檢查法。
- 四、製作flash教學遊戲-埋雷奇兵。

肆、研究設備及器材

繪圖軟體、筆、電腦、平板電腦、方格紙

伍、研究過程及方法

一、 研究架構與流程圖



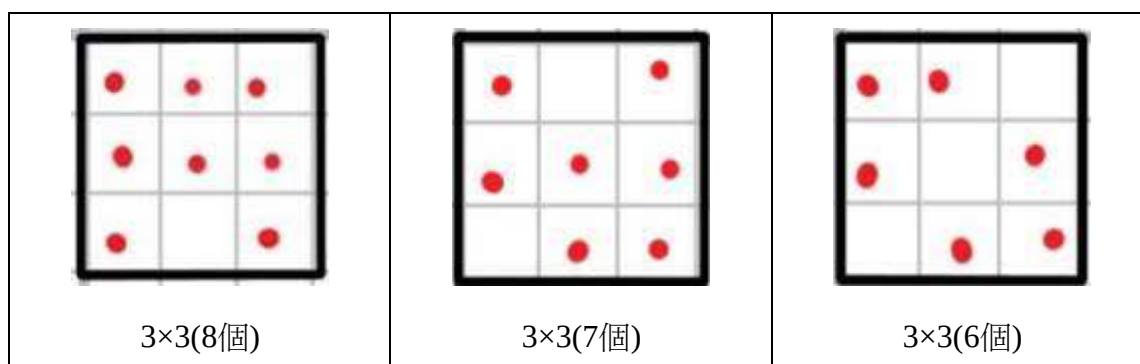
二、 研究期程

內容/月份	103.10	103.11	103.12	104.01	104.02	104.03	104.04
選定主題	■						
研究目的一	■	■	■				
研究目的二		■	■	■			
證明及公式			■	■	■		
研究目的三				■	■		
研究目的四					■	■	■
編輯說明書				■	■	■	■
練習報告						■	■

三、 研究過程

一、 3×3 、 4×4 、 $5 \times 5 \dots n \times n$ 的方格表中最少要放入幾個地雷，能使至少有一個地雷不會被掃到，也就是找出 $f(n)$ 值。

(一)觀察：首先，我們嘗試在 3×3 方格表中最少要放入幾個地雷，才能使至少有一個地雷不會被掃到。一開始，我們嘗試成功的最少個數為8個，但是我們猜測這可能不是最少個數，因此在多次嘗試中試圖減少地雷個數，後來我們成功將地雷個數由8個減少至7個，最後甚至發現只要6個就能成功，嘗試的過程如圖5-1-1。接著，我們繼續嘗試在 4×4 方格表中最少要放入幾個地雷，才能使至少有一個地雷不會被掃到。一開始，我們嘗試成功的最少個數為9個，但是我們猜測這可能不是最少的個數，因此試圖減少地雷個數，後來我們成功將地雷個數由9個減少至8個最後甚至是7個，嘗試的過程如圖5-1-1。在嘗試的過程中，我們遇到了以下障礙：1.花費許多時間擺放的地雷，往往會被掃光。2.檢查是否成功需要花費很多時間。3.需要花許多時間一再嘗試，才能確認結果是否為最少個數。



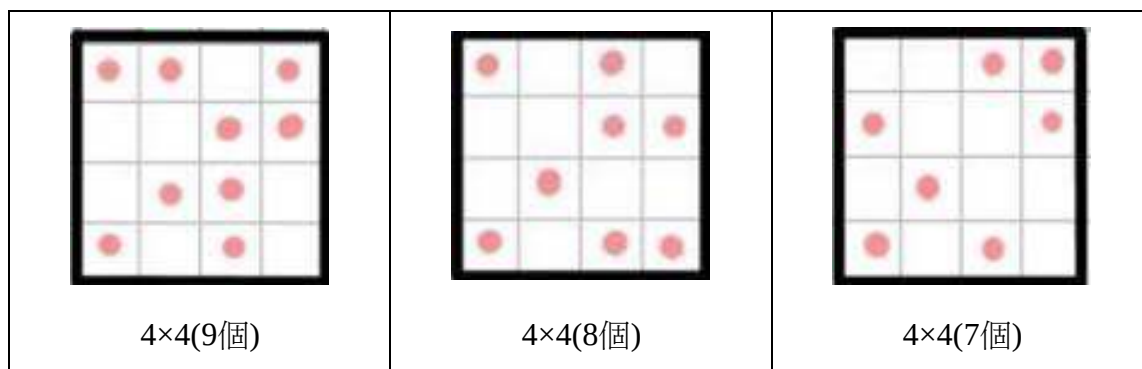


圖5-1-1 3×3及4×4方格表最少地雷個數嘗試過程

(二)尋找關係：接著，我們繼續嘗試在4×4、5×5、6×6...20×20的方格中最少必須置入多少個地雷，才能使地雷不被掃光，我們發現最少個數會隨著方格表邊長數的變化，最少個數逐漸依序+1、+2，如表5-1-1所示，在3×3、4×4、5×5、6×6...20×20方格中，置入多少個地雷最少個數的圖，則如圖5-1-3所示。此外，我們也觀察到最少個數的變化似乎與方格表邊長為奇數或偶數有關連，於是將奇數方格表與偶數方格表進行分類討論，如表5-1-2：

表5-1-1

3×3~20×20最少個數關係

規格	最少個數	
3×3	6個	
4×4	7個	+1
5×5	9個	+2
6×6	10個	+1
7×7	12個	+2
8×8	13個	+1
9×9	15個	+2
10×10	16個	+1
11×11	18個	+2
12×12	19個	+1
13×13	21個	+2
		+1 (續下頁)

14×14	22個		
15×15	24個		+2
16×16	25個		+1
17×17	27個		+2
18×18	28個		+1
19×19	30個		+2
20×20	31個		+1

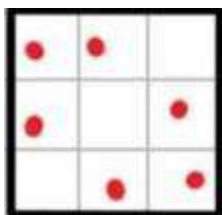
表5-1-2

3×3~20×20放置地雷的最少個數

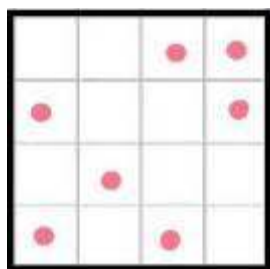
奇數($n = 2k+1$)($k \geq 1$)		偶數($n = 2k$)($k \geq 2$)	
規格	最少個數	規格	最少個數
3×3	6個	4×4	7個
5×5	9個	6×6	10個
7×7	12個	8×8	13個
9×9	15個	10×10	16個
11×11	18個	12×12	19個
13×13	21個	14×14	22個
15×15	24個	16×16	25個
17×17	27個	18×18	28個
19×19	30個	20×20	31個

從以上的數據資料可以推論以下兩點：

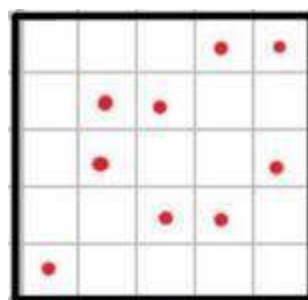
- 1.若兩方格表邊長皆為奇數且相差2，則最少個數相差3。舉例：3×3及5×5最少地雷個數相差3(9-6)。
- 2.若兩方格表邊長皆為偶數且相差2，則最少個數相差3。舉例：4×4及6×6最少地雷個數相差3(10-7)。



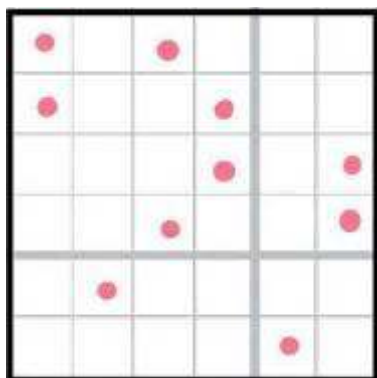
3×3



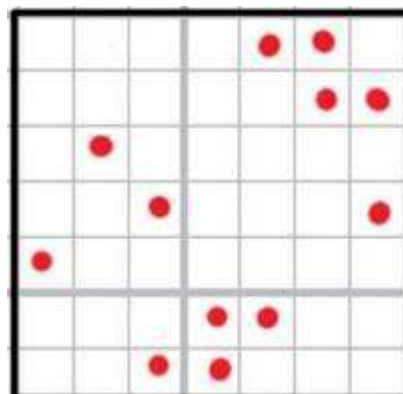
4×4



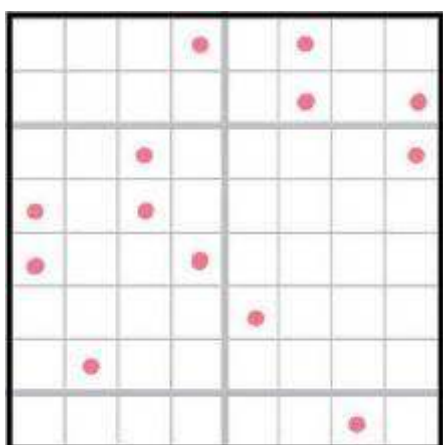
5×5



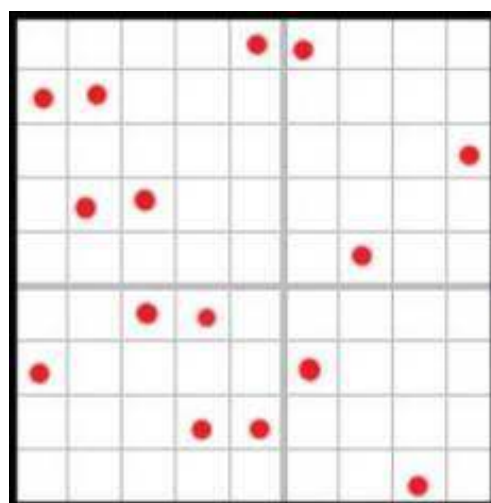
6×6



7×7



8×8



9×9

(續下頁)

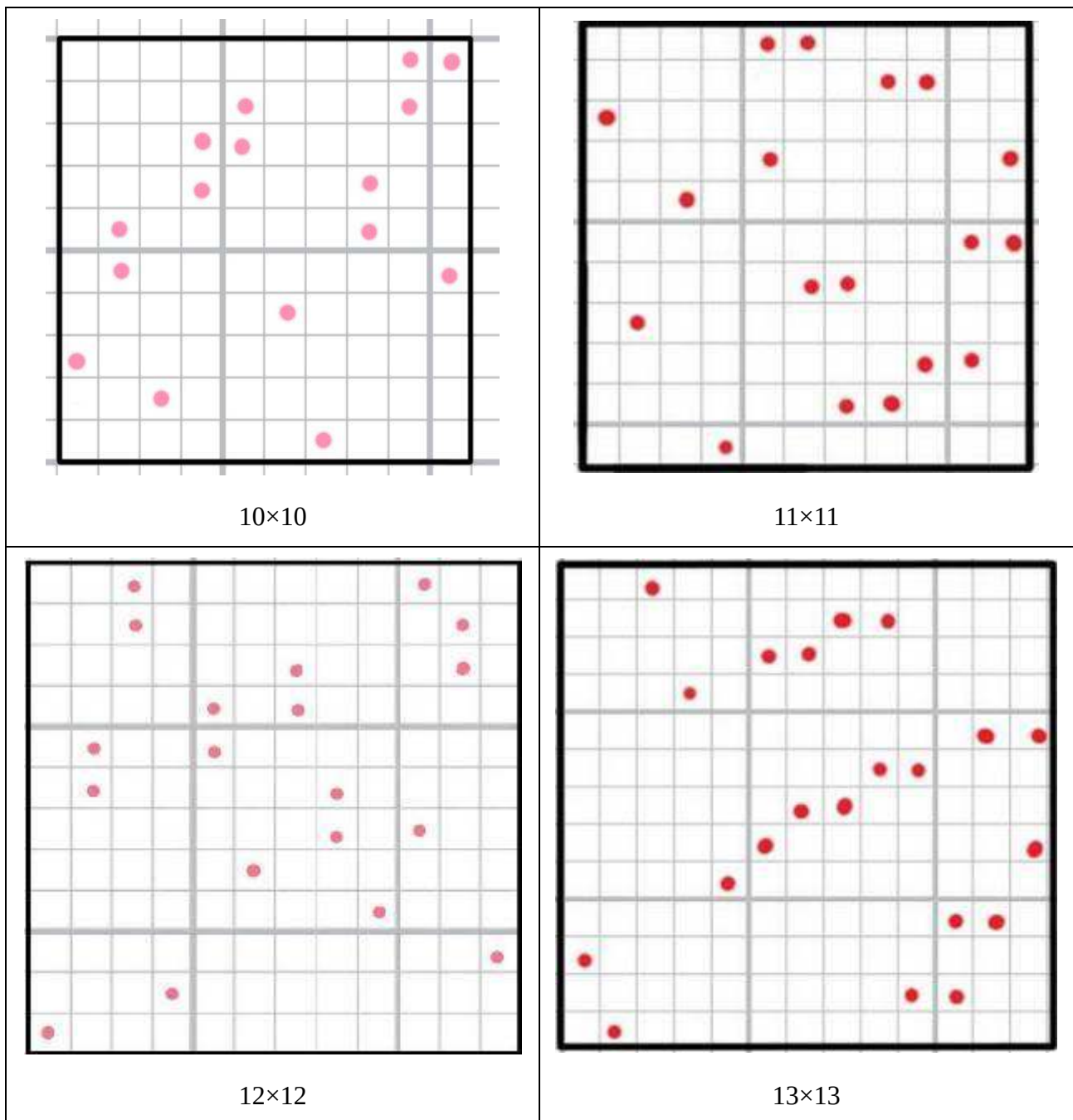
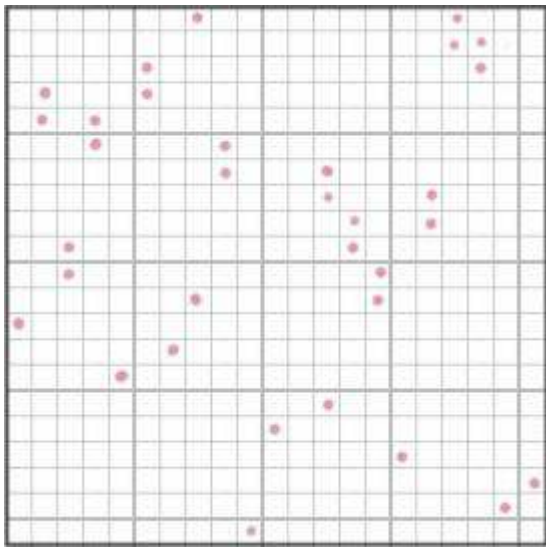


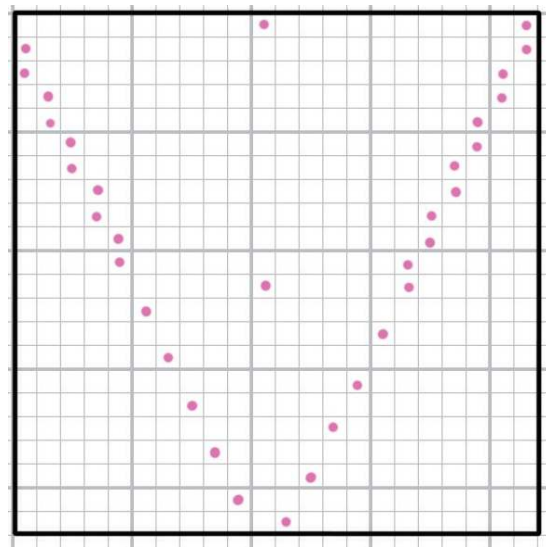
圖5-1-3 3×3~13×13最少個數結果圖

(三) **猜測**：根據我們在觀察與尋找關係所發現的規律，我們猜測21×21的個數為33(30+3)個、22×22的個數為34個(31+3)、23×23的個數為36(33+3)個、24×24的個數為37(34+3)個。

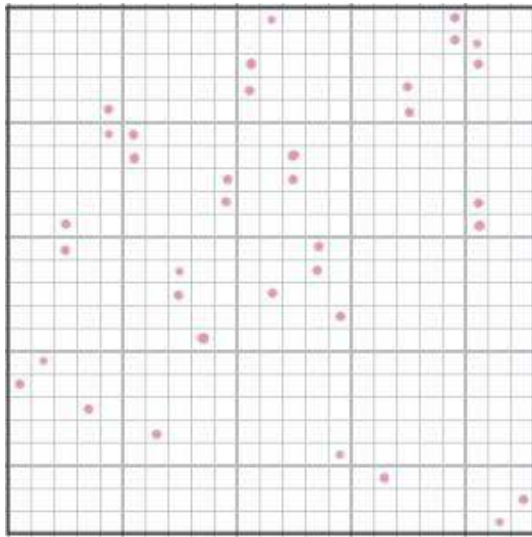
(四) **檢驗**：根據以上的推論，我們猜測21×21的個數為33(30+3)個、22×22的個數為34個(31+3)、23×23的個數為36(33+3)個、24×24的個數為37(34+3)個，詳細檢驗後發現我們的推論符合所前述所猜測的規律，如圖5-1-4及5-1-5。



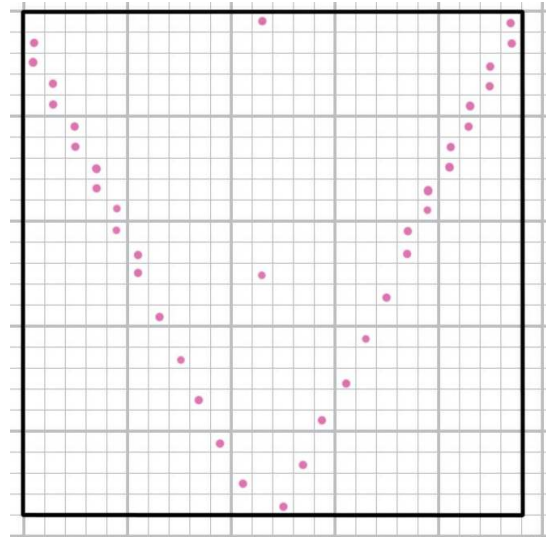
21×21(33個)



22×22(34個)



23×23(36個)



24×24(37個)

圖5-1-4 21×21~24×24最少個數結果圖-畫法1

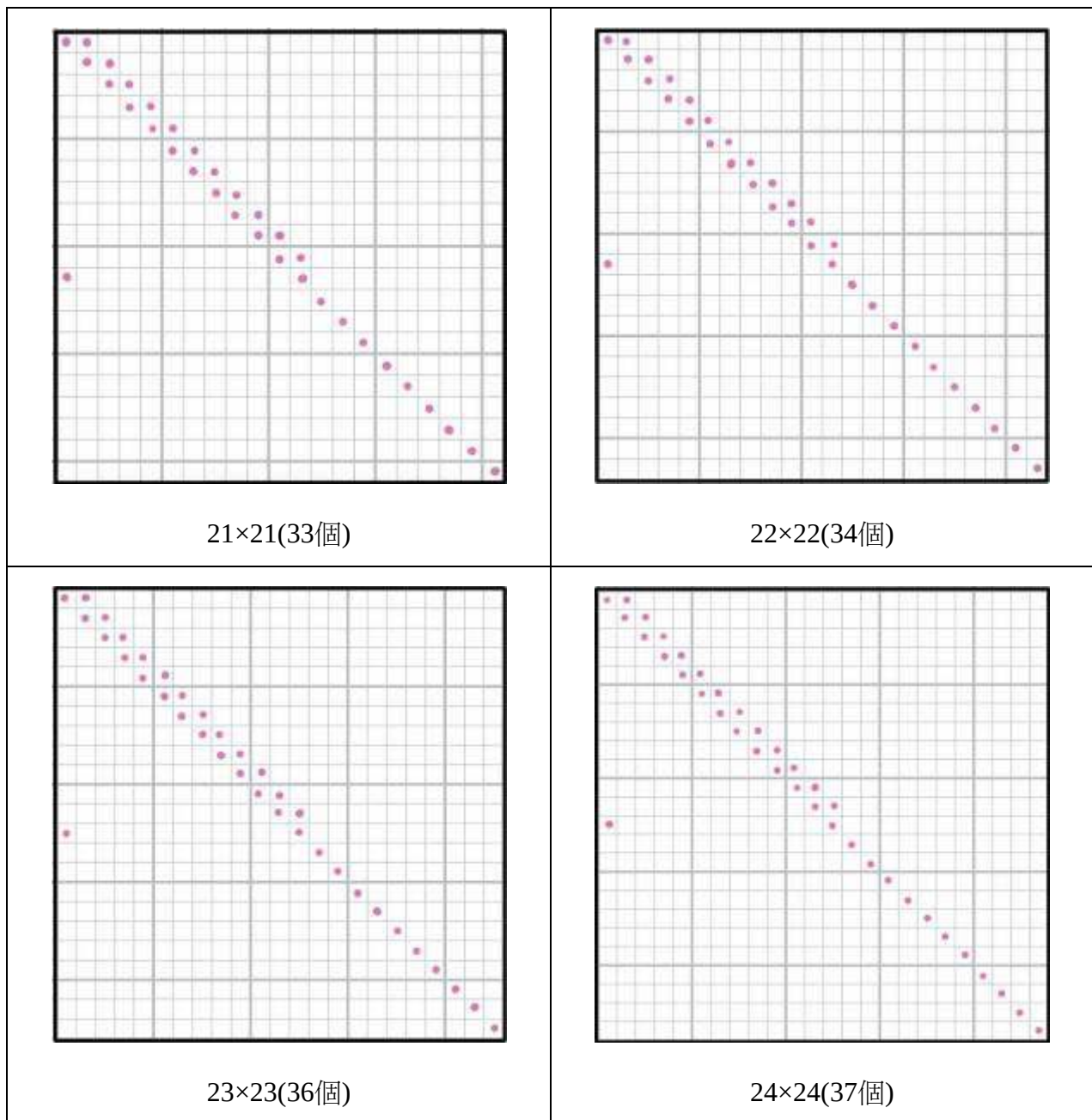


圖5-1-5 21×21~24×24最少個數結果圖-畫法2

二、探討3×3、4×4、5×5、6×6... $n \times n$ 方格表中置放地雷的快速完成法。

(一)觀察：為了能夠快速的在方格表中置放地雷而不被掃雷者掃光，我們觀察最少個數的結果圖，發現大部分的結果都具以下特性：

- 1.對角線及對角線的右上方都有放置地雷。
- 2.第一行都有2個地雷。所以我們根據這兩個特性試圖歸納出置放地雷的快速完成法。

(二)尋找關係：根據以上的觀察，我們發現：根據以上兩種特性，似乎能夠畫出一種新的擺法，於是我們便開始嘗試，試圖找出快速完成法。

(三)猜測：根據觀察及尋找關係兩個部份，我們猜測：

若 n 為奇數($n=2k+1, k \geq 1$)，則地雷放置步驟如下：

- 1.在對角線放置 $2k+1$ 個地雷
- 2.在對角線的右上方放置 $k+1$ 個地雷
- 3.在第1行第 $k+1+1$ 列的地方放置地雷，範例如圖5-2-1中 5×5 快速擺法步驟分解。

若 n 為偶數($n=2k, k \geq 1$)，則地雷放置步驟如下：

- 1.在對角線放置 $2k$ 個地雷
- 2.在對角線的右上方放置 k 個地雷
- 3.在第一行第 $k+1$ 列的地方放置地雷，範例如圖5-2-1中 4×4 快速擺法步驟分解。

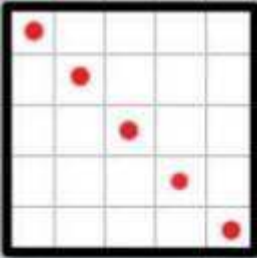
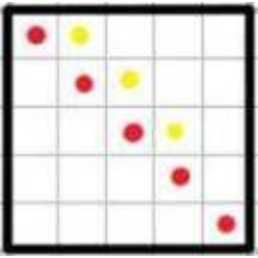
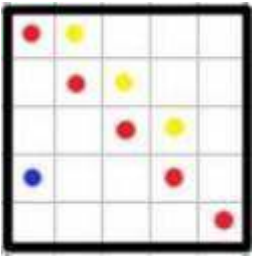
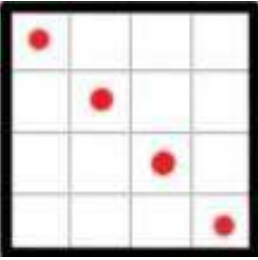
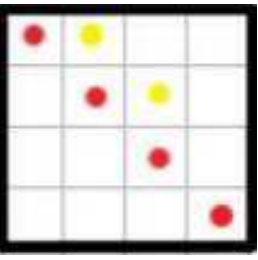
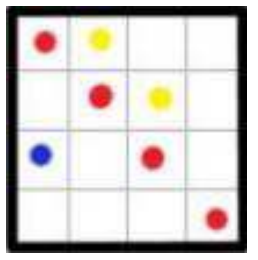
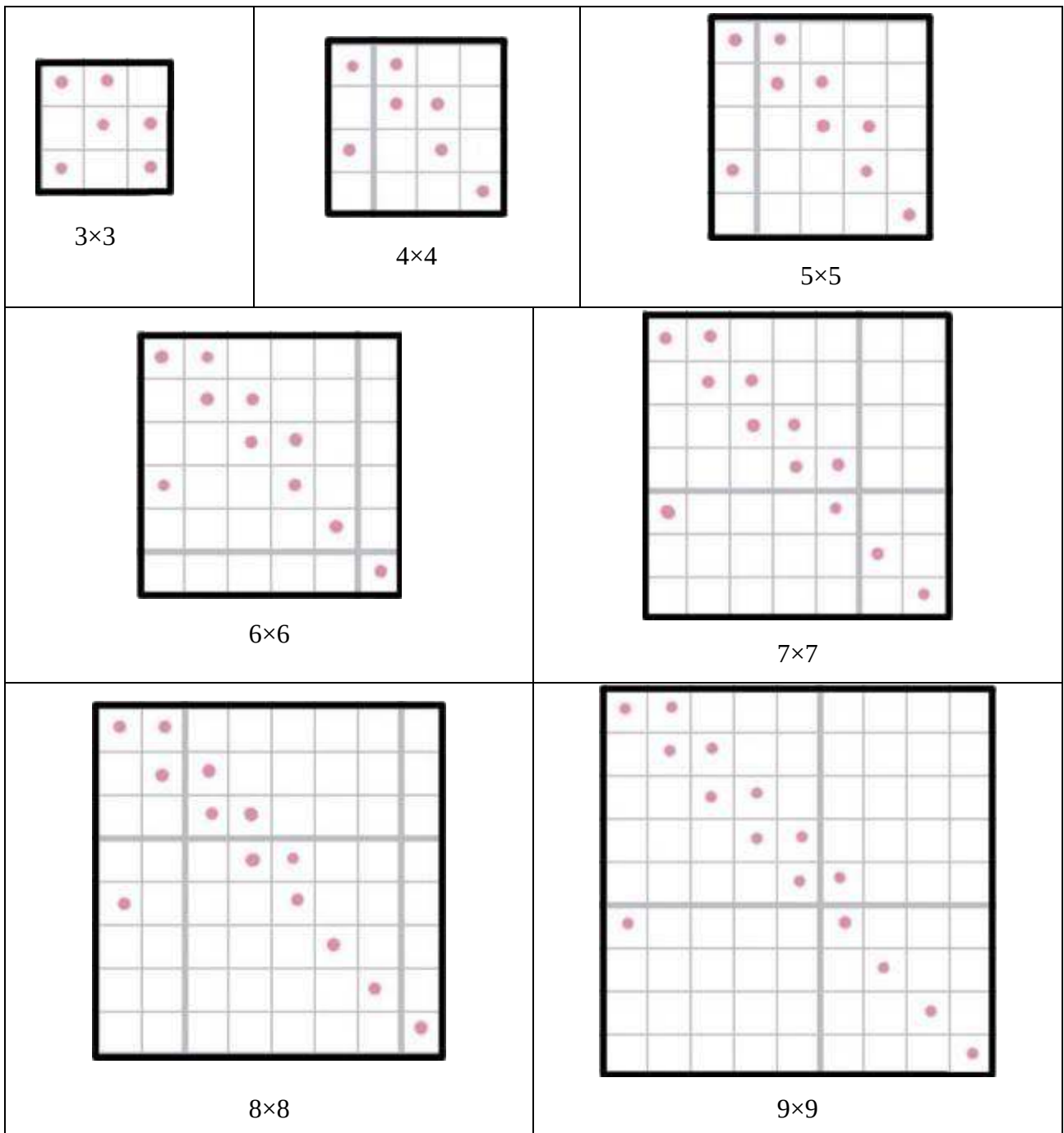
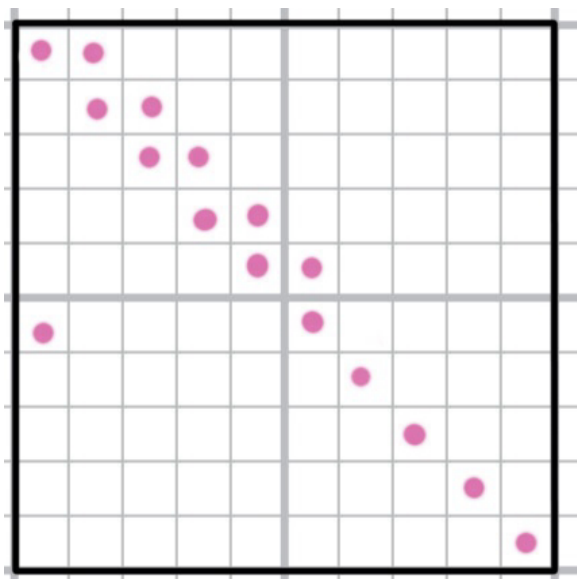
5×5快速擺法步驟分解		
對角線	對角線右上方	第一行第K+1+1列
		
4×4快速擺法步驟分解		
對角線	對角線右上方	第一行第K+1列
		

圖5-2-1 以 4×4 、 5×5 的方格表為例

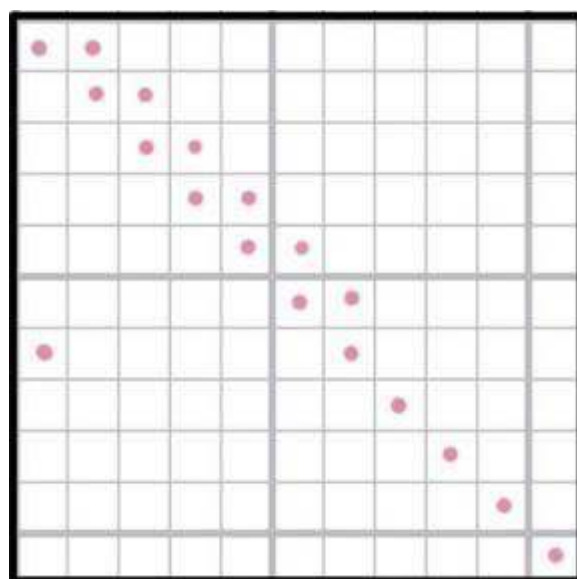
(四)檢驗：根據以上的推論，我們進行檢驗。檢驗結果發現，根據以上擺法畫出來的圖形都成功了， 3×3 、 4×4 、 5×5 、 6×6 ... 20×20 的結果如圖5-2-2。



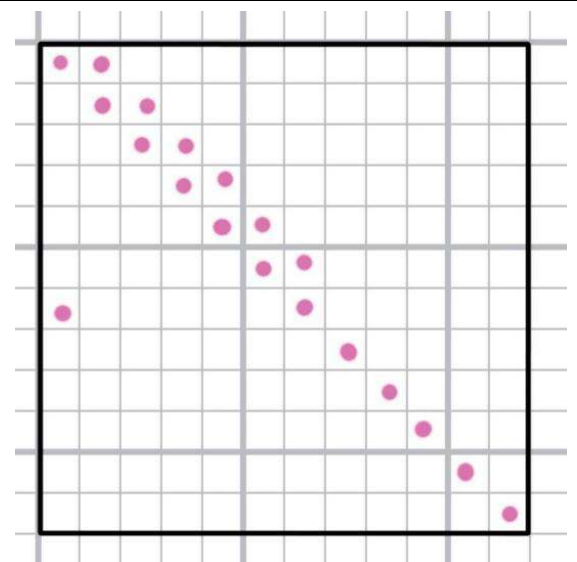
(續下頁)



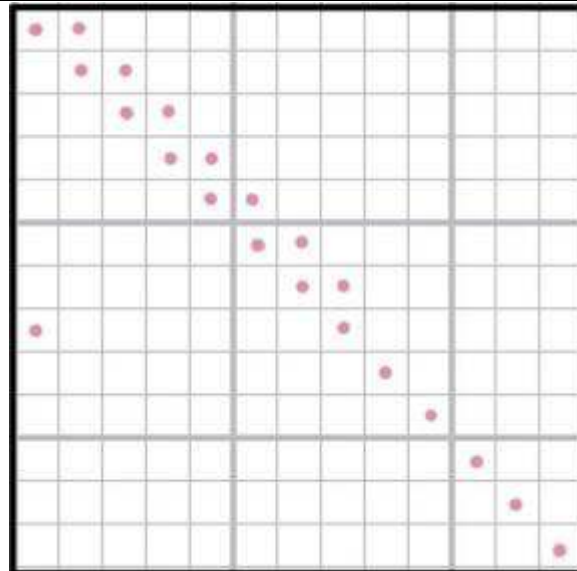
10×10



11×11

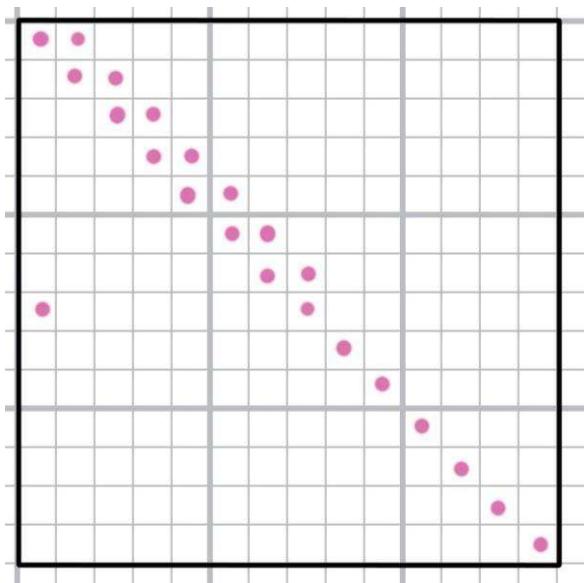


12×12

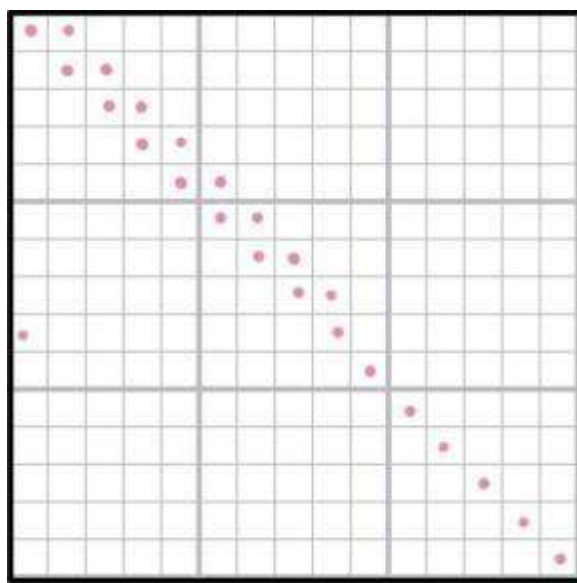


13×13

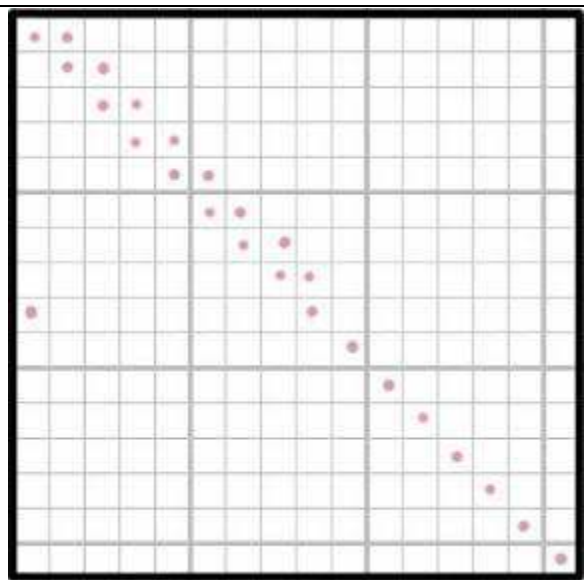
(續下頁)



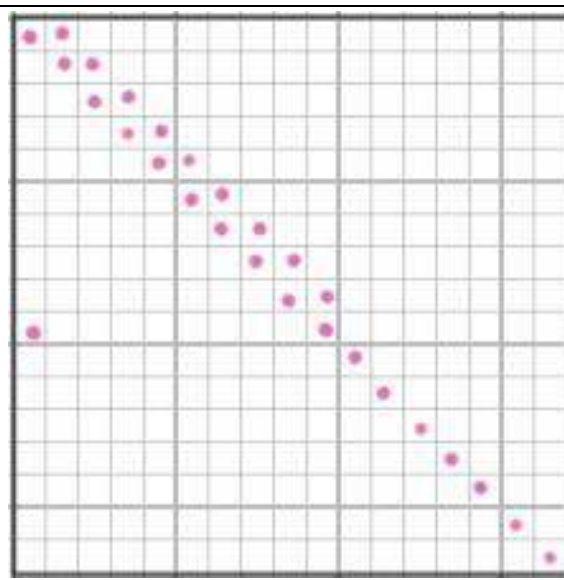
14×14



15×15



16×16



17×17

(續下頁)

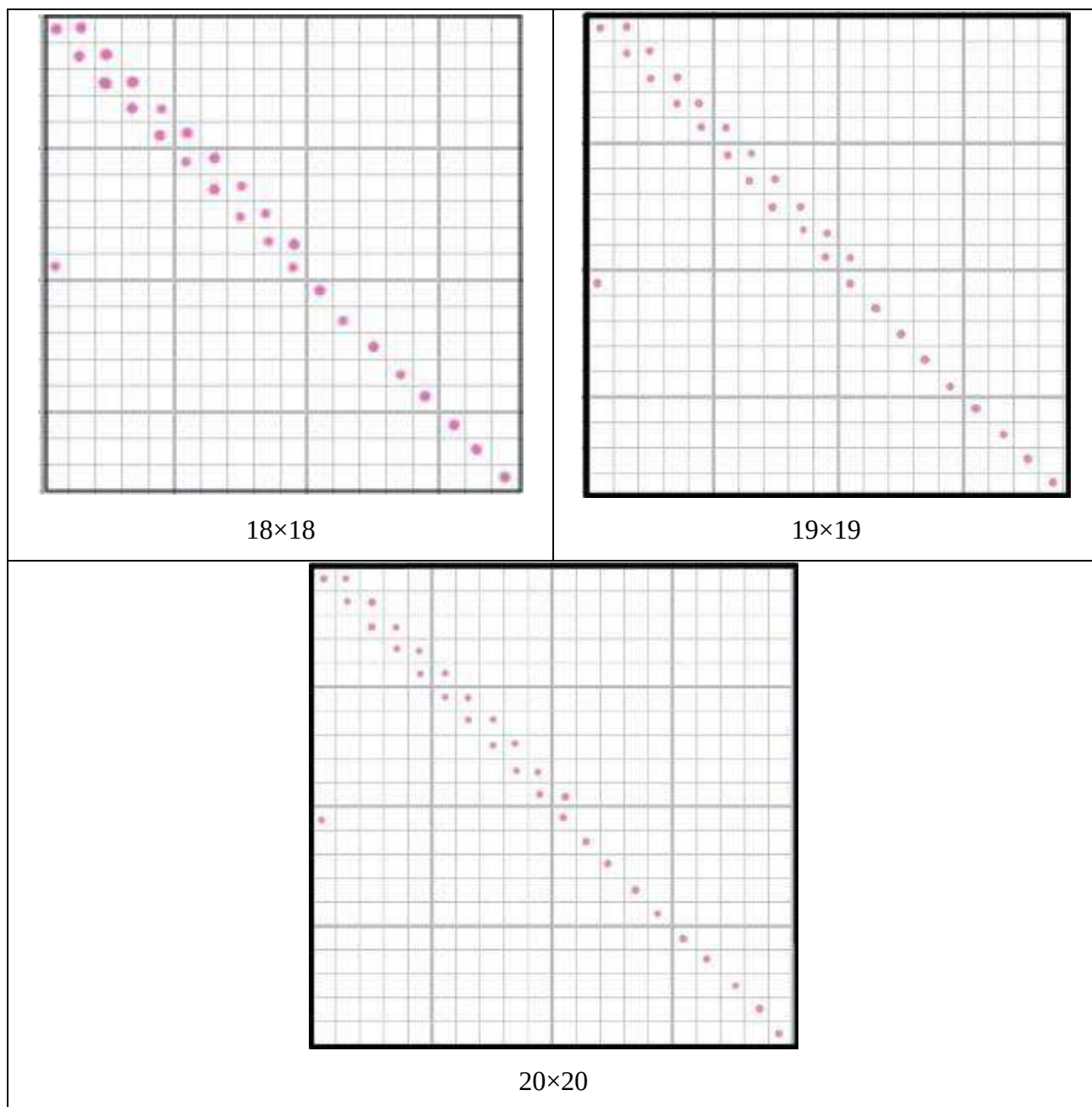


圖5-2-2 3×3~20×20最少個數結果圖

三、證明及公式

在試圖對前述研究結果提出證明時，我們遇到了困難：奇數和偶數最少個數的公式是什麼？要怎麼證明？這個問題困擾我們許久，於是我們去問老師，老師建議我們可以運用抽屜原理來找出最少個數的公式及證明。我們運用抽屜原理找出的公式和證明如下：

- (一) **命題**：在 $n \times n$ 方格表 ($n=2k+1$, $k \geq 1$)，若依掃雷方式進行掃雷的條件下，其 $f(n)$ 值必等於 $3k+3$ 。

證明：

若方格表邊長為奇數(n) ($n=2k+1, k \geq 1$) 時，放置地雷的最少個數為 $3k+3$ 個。因為，掃雷規則是掃 k 列、 $k+1$ 行或是 $k+1$ 列、 k 行。根據抽屜原理，在最平均分配的情況下，至少會有 $k+1+1$ 個抽屜中放入兩個地雷。因此，依圖5-3-1的對角線擺法，在第一列至第 $k+2$ 列各擺上2個地雷。掃雷時，先掃 $k+1$ 列，最多會掃掉 $2k+2$ 個地雷，還剩下 $k+1$ 個，且分別位於不同行中。現在還有 k 行可掃的機會，最多可以掃掉 k 個地雷，至少還會剩下一個，擺法如圖5-3-1。若放置地雷的最少個數少於 $3k+3$ 個，例如： $3k+2$ 個，則在第一次先掃 $k+1$ 列後，就只剩下 k 個地雷，接著，還有 k 行可掃的機會，因此，此 k 個地雷便會被全部掃掉，所以 $f(n)$ 值必等於 $3k+3$ 。擺法如圖5-3-1。

(二)**命題**：在 $n \times n$ 方格表($n=2k, k \geq 1$)，若依掃雷方式進行掃雷的條件下，其 $f(n)$ 值必等於 $3k+1$ 。

證明：

若方格表邊長為奇數(n) ($n=2k, k \geq 1$) 時，放置地雷的最少個數為 $3k+1$ 個。因為，掃雷規則是掃 k 列、 k 行。根據抽屜原理，在最平均分配的情況下，至少會有 $k+1$ 個抽屜中放入兩個地雷。因此，依圖5-3-1的對角線擺法，在第一列至第 $k+1$ 列各擺上2個地雷。掃雷時，先掃 k 列，最多會掃掉 $2k$ 個地雷，還剩下 $k+1$ 個，且分別位於不同行中。現在還有 k 行可掃的機會，最多可以掃掉 k 個地雷，至少還會剩下一個，擺法如圖5-3-1。若放置地雷的最少個數少於 $3k+1$ ，例如： $3k$ 個，則在第一次先掃 k 列後，就只剩下 k 個地雷。接著，還有 k 行可掃的機會，因此，此 k 個地雷便會被全部掃掉，所以 $f(n)$ 值必等於 $3k+1$ 。擺法如圖5-3-1。

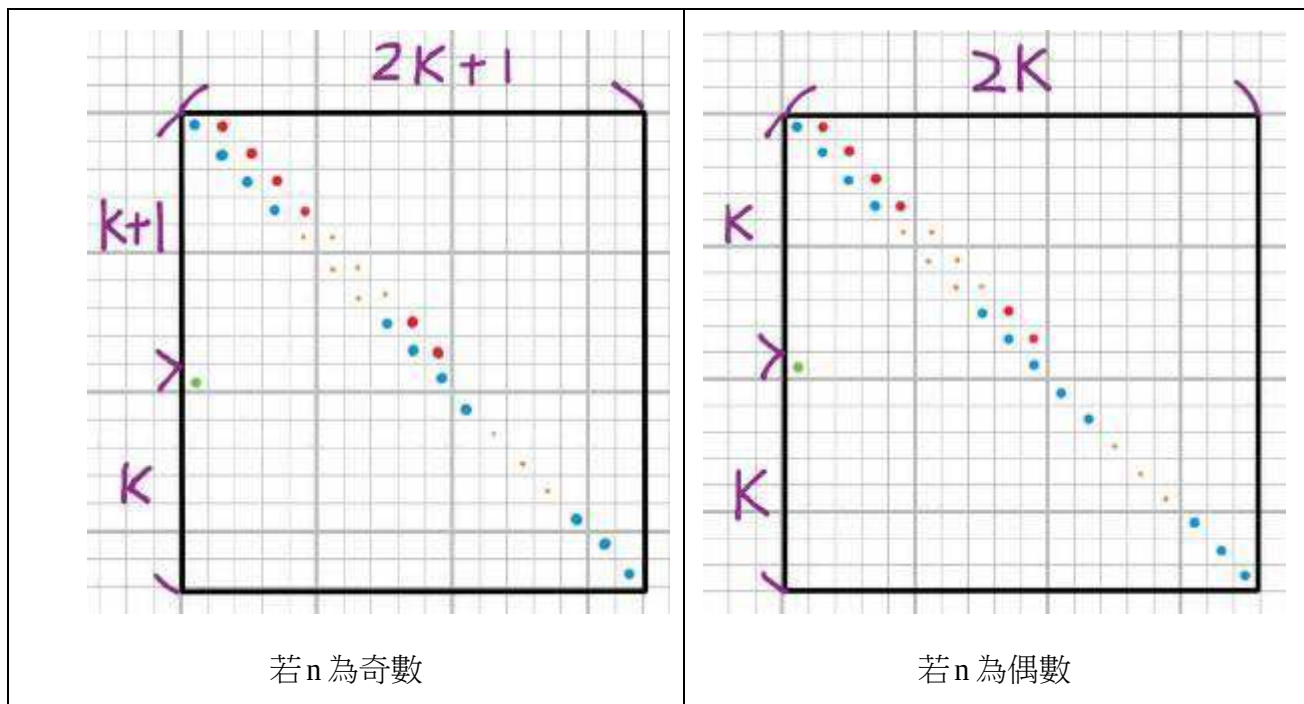


圖5-3-1 最少個數證明

(三)公式：根據觀察及尋找關係，我們歸納出下列的公式：

1. 若 n 為奇數($n=2k+1$, $k \geq 1$)時, $f(n)=3k+3$ 。
2. 若 n 為偶數($n=2k$, $k \geq 1$)時, $f(n)=3k+1$ 。

四、探討 3×3 、 4×4 、 5×5 、 $6 \times 6 \dots n \times n$ 方格表中置放地雷的快速檢查法。

(一)觀察：為了可以在置放地雷後快速的檢查是否為成功的圖形，我們根據前述的快速完成法完成 4×4 的快速完成圖，並經由行列的調換嘗試找出所有 4×4 的置放地雷方式，如圖5-4-1。但我們發現似乎有其他擺法的圖，如圖5-4-2中 4×4 的異類，並不在這24個 4×4 的置放地雷方式裡面。

(二)尋找關係：我們把 4×4 的異類，經由行列的交換和圖的翻轉還原成快速完成法的圖，發現所有 4×4 的地雷擺法都可由經過行列的交換和圖的翻轉還原成快速完成法的結果圖，如圖5-4-2。接著我們進一步嘗試 5×5 的圖，同樣發現當我們把不在所有 5×5 置放地雷方式中的圖，經由行列的交換和圖的翻轉，也可還原成快速完成法的圖，如圖5-4-3。

(三)猜測：我們猜測所有 4×4 、 5×5 、 $6 \times 6 \dots n \times n$ 的地雷擺放位置都可由經過行列的交換和

圖的翻轉還原成快速完成法的圖，檢查擺法是否成功。

(四)檢驗：根據以上推論，我們持續對6×6、7×7及8×8的圖進行檢驗，都發現可經由行列的交換和圖的翻轉還原成快速完成法的圖，達成快速檢查的目的，如圖5-4-4~5-4-6。

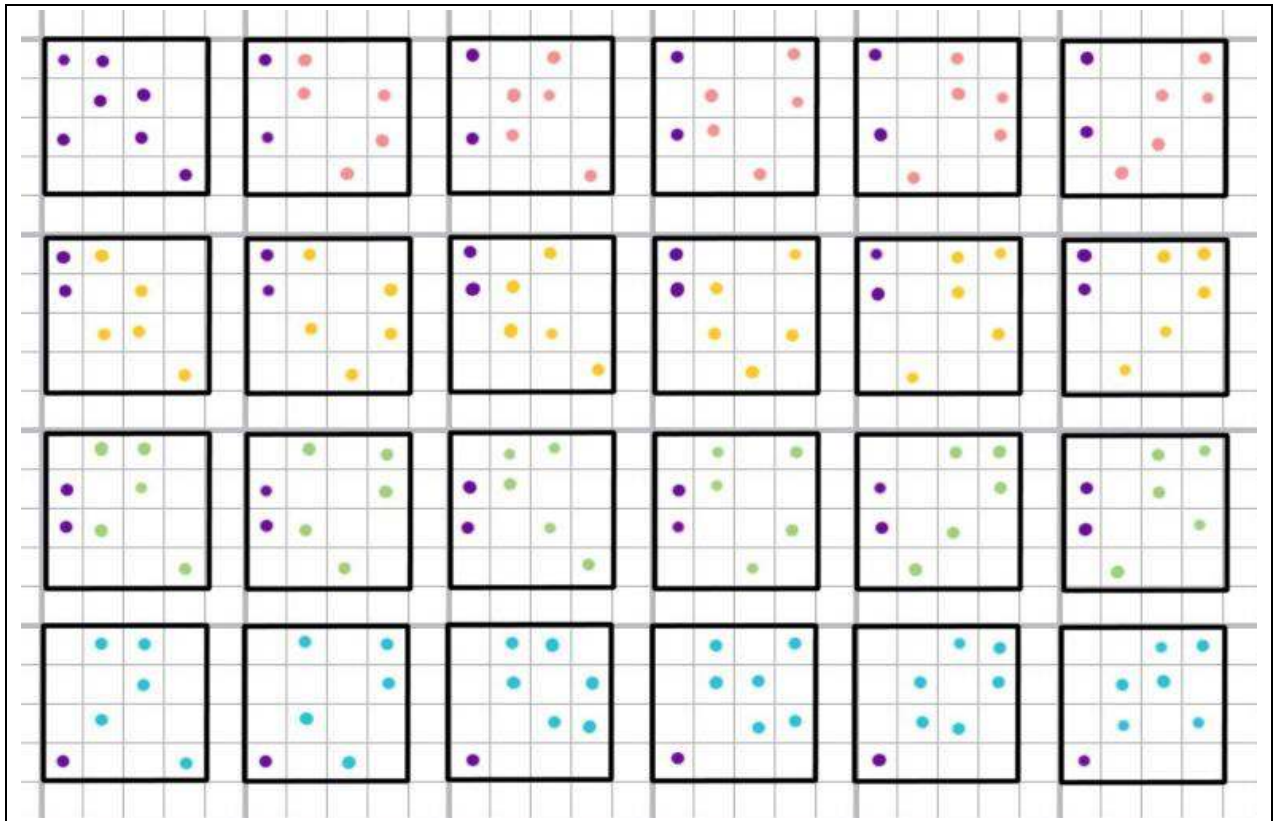


圖5-4-1 4×4所有排法共24個

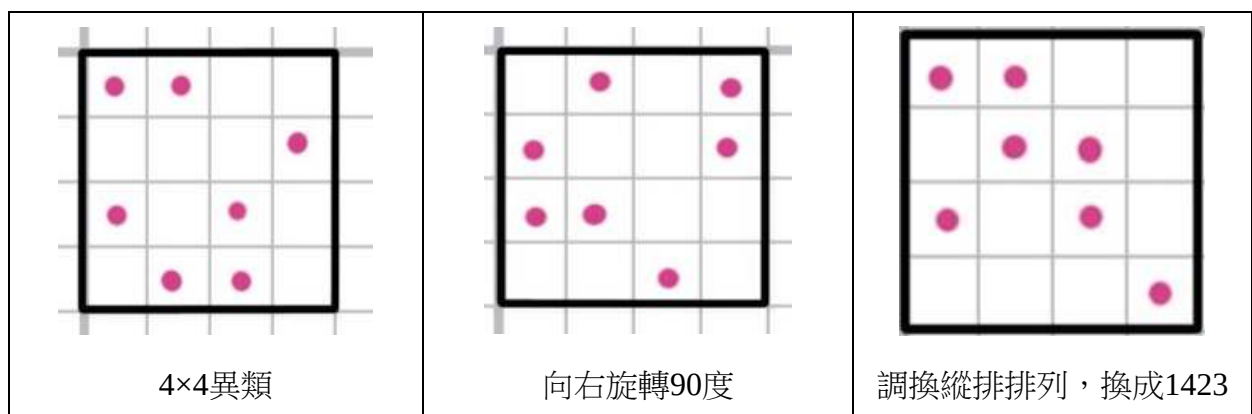


圖5-4-2 經由調換排列或旋轉，將4×4異類圖還原成快速擺法結果

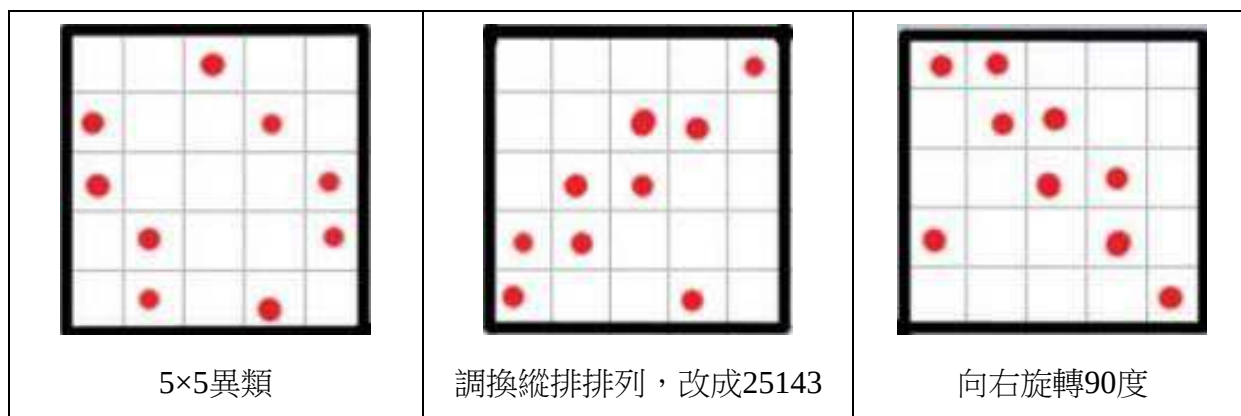


圖5-4-3 經由調換排列或旋轉，將5×5異類圖還原成快速擺法結果

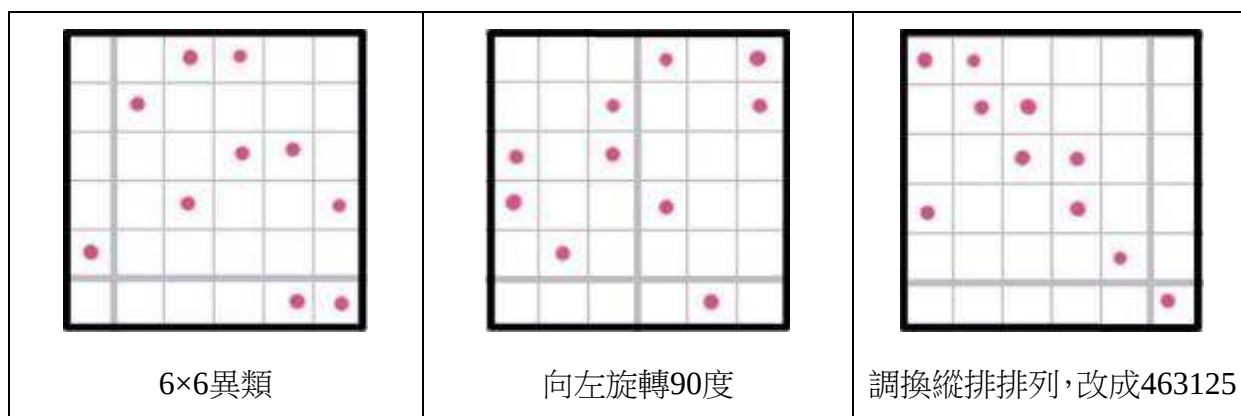


圖5-4-4 經由調換排列或旋轉，將6×6異類圖還原成快速擺法結果

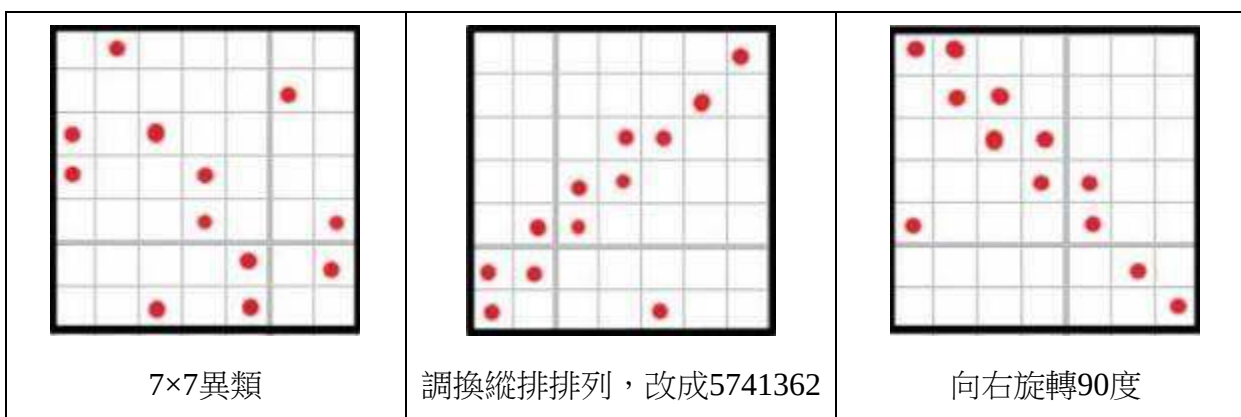


圖5-4-5 經由調換排列或旋轉，將7×7異類圖還原成快速擺法結果

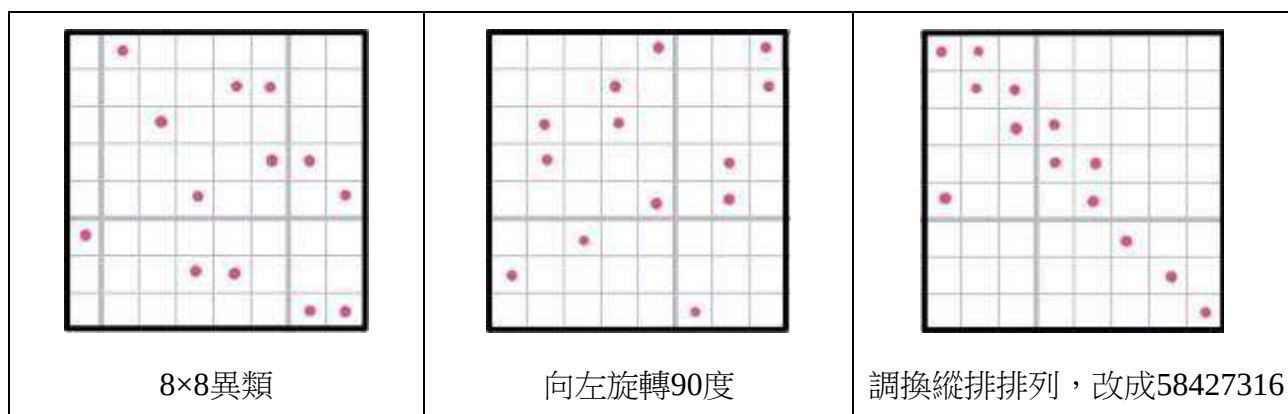


圖5-4-6 經由調換排列或旋轉，將8x8異類圖還原成快速擺法結果

陸、研究結果

一、探討3×3、4×4、5×5、6×6... $n \times n$ 方格表中最少放入幾個地雷，在依掃雷方式進行後，能使至少一個地雷不會被掃到，也就是找出 $f(n)$ 值，如表6-1-1所示。

表6-1-1

$f(n)$ 值數據

奇數($n = 2k + 1, k \geq 1$)		偶數($n = 2k, k \geq 2$)	
規格	最少個數 $f(n)$	規格	最少個數 $f(n)$
3×3	6個	4×4	7個
5×5	9個	6×6	10個
7×7	12個	8×8	13個
9×9	15個	10×10	16個
11×11	18個	12×12	19個
13×13	21個	14×14	22個
15×15	24個	16×16	25個
17×17	27個	18×18	28個
19×19	30個	20×20	31個

21×21	33個	22×22	34個
23×23	36個	24×24	37個
...	...	...	...
$n \times n$	$3k+3$	$n \times n$	$3k+1$

二、探討3×3、4×4、5×5、6×6... $n \times n$ 方格表中置放地雷的快速完成法。

(一) 若邊長為偶數 $n (n = 2k, k \geq 1)$ ，則快速擺法步驟如圖6-2-1：

步驟一：擺滿對角線($2k$ 個地雷)

步驟二：在對角線的斜上方擺放 k 個地雷

步驟三：在第一名、第 $k+1$ 列的地方放置一個地雷

(二) 若邊長為奇數 $n (n = 2k+1, k \geq 1)$ ，則快速擺法步驟如圖6-2-1：

步驟一：擺滿對角線($2k+1$ 個地雷)

步驟二：在對角線的斜上方擺放 $k+1$ 個地雷

步驟三：在第一名、第 $k+1+1$ 列的地方放置一個地雷

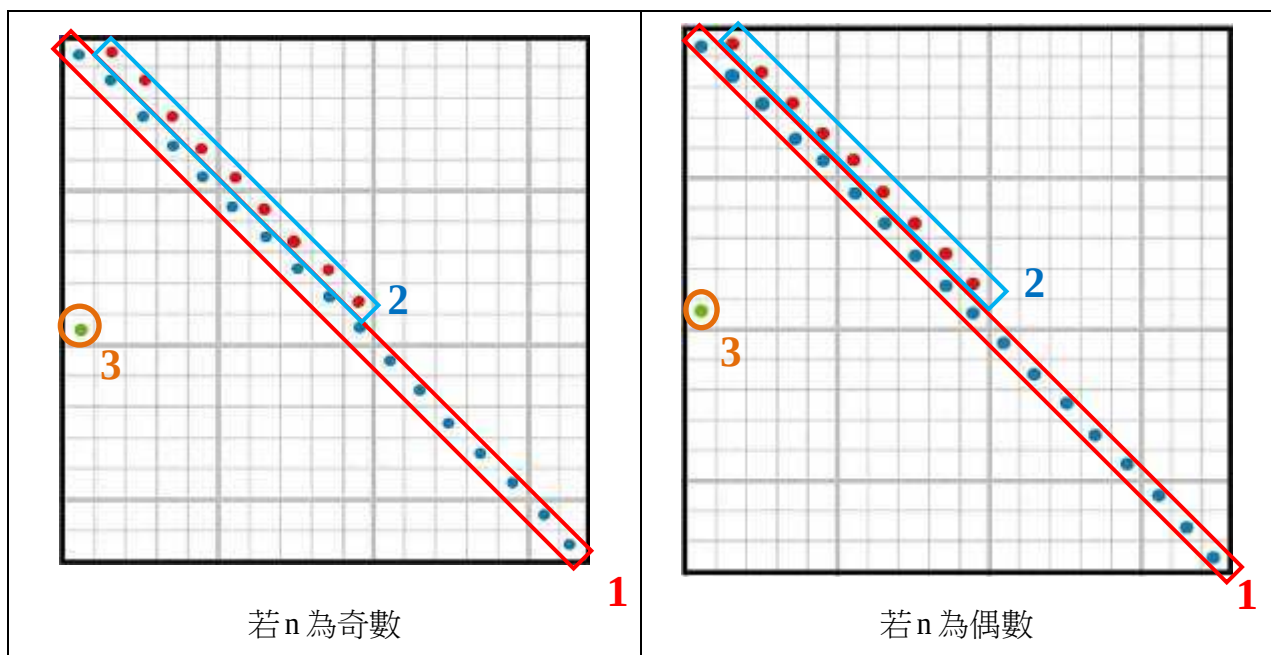


圖6-2-1 快速完成法圖例

三、探討3×3、4×4、5×5、6×6... $n \times n$ 方格表中置放地雷的快速檢查法。

經由以上的研究，我們發現：用快速完成法擺放的圖形，只要經過交換行列或旋轉，就能延伸出所有的完成法。

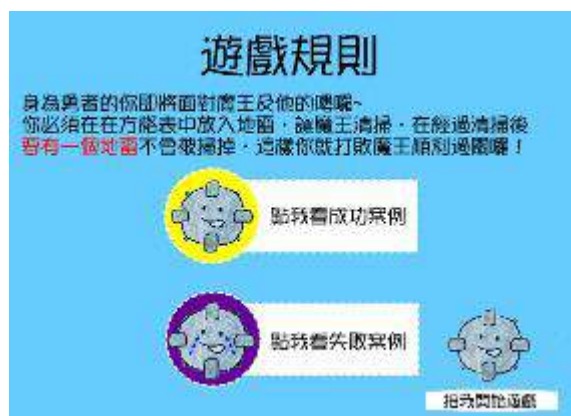
四、根據研究結果製作埋雷奇兵的flash教學遊戲。

我們發現運用抽屜原理可以推論出最少個數的公式、快速完成法和快速檢查法，然而當我們試圖將研究的成果與其他同學分享時，我們發現往往我們很賣力地解釋研究結果，但是，因為聽眾沒有親自嘗試置放地雷，他們往往一臉茫然、對我們的報告內容一頭霧水。因此，我們決定要在老師的協助下製作flash的教學遊戲，希望透過「埋雷奇兵」flash教學遊戲，讓大家能經過實際遊戲後更了解遊戲規則，並體驗到我們的研究過程，同時也能讓更多人能夠認識、喜愛埋雷遊戲並學會在 $n \times n$ 方格表中置放地雷的最少個數及快速完成法的祕笈。遊戲畫面及功能說明如下，如表6-1-2所示：

表6-1-2

埋雷奇兵的flash教學遊戲說明

遊戲畫面	名稱及功能說明
	名稱：首頁 功能：按Start可開始遊戲。



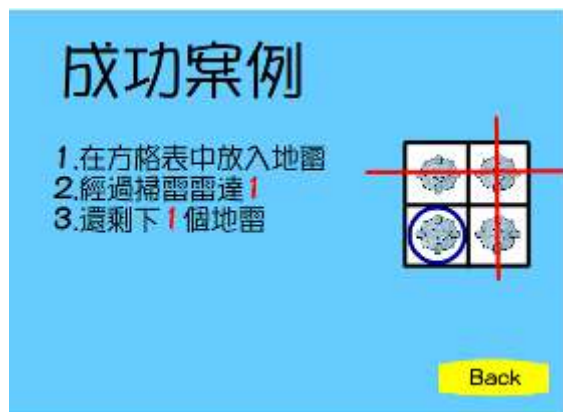
名稱：遊戲規則說明

功能：說明遊戲規則。按黃色按鈕可看成功案例。按紫色按鈕可看失敗案例。點選「按我開始遊戲」按鈕可開始遊戲。



名稱：關卡選擇暨掃雷方式說明

功能：說明各關卡的掃雷方式。有奇數嘍囉關(3×3)、偶數嘍囉關(4×4)、奇數魔王關(5×5)和偶數魔王關(6×6)，點選即可進行遊戲。

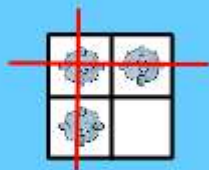


名稱：成功案例示範

功能：示範成功案例。按「Back」可回到遊戲規則說明頁。

失敗案例

- 1.在方格表中放入地雷
- 2.經過掃雷雷達!
- 3.全部死光光~哭哭~

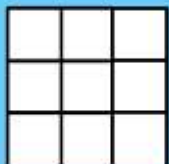


Back

名稱：失敗案例示範

功能：示範失敗案例。按「Back」可回到遊戲規則說明頁。

奇數嘜囉關



埋雷祕笈

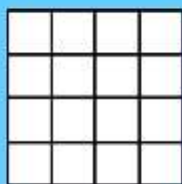
按我開始掃雷

再次挑戰

名稱：奇數嘜囉關(3×3)

功能：將地雷拖曳到3×3方格表中，再點選「按我開始掃雷」進行掃雷，掃雷過後即可顯示挑戰成功或失敗。按「再次挑戰」可回到選關畫面，按「埋雷祕笈」則可觀看奇數置放地雷的快速完成法教學。

偶數嘜囉關



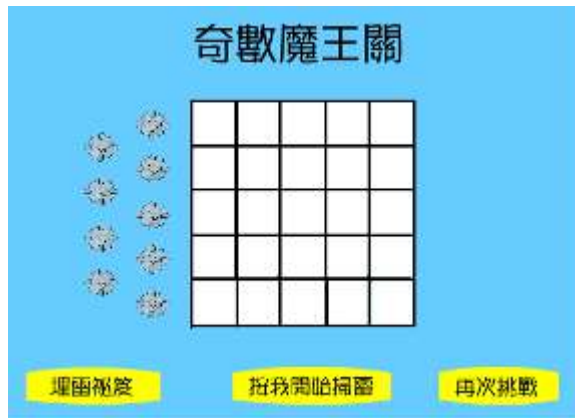
埋雷祕笈

按我開始掃雷

再次挑戰

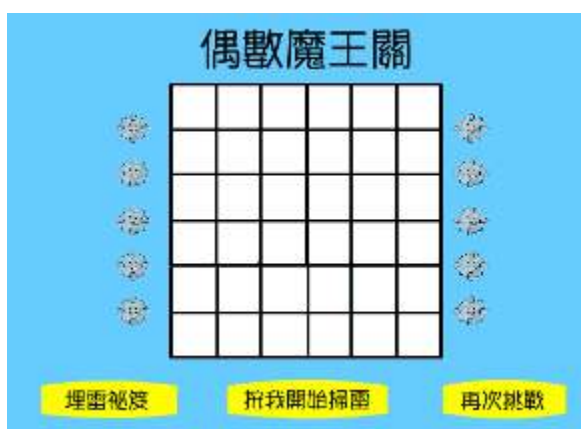
名稱：偶數嘜囉關(4×4)

功能：將地雷拖曳到4×4方格表中，再點選「按我開始掃雷」進行掃雷，掃雷過後即可顯示挑戰成功或失敗。按「再次挑戰」可回到選關畫面，按「埋雷祕笈」則可觀看偶數置放地雷的快速完成法教學。



名稱：奇數魔王關(5×5)

功能：將地雷拖曳到5×5方格表中，再點選「點我開始掃雷」進行掃雷，掃雷過後即可顯示挑戰成功或失敗。按「再次挑戰」可回到選關畫面，按「埋雷祕笈」則可觀看奇數置放地雷的快速完成法教學。



名稱：偶數魔王關(6×6)

功能：將地雷拖曳到6×6方格表中，再點選「點我開始掃雷」進行掃雷，掃雷過後即可顯示挑戰成功或失敗。按「再次挑戰」可回到選關畫面，按「埋雷祕笈」則可觀看偶數置放地雷的快速完成法教學。



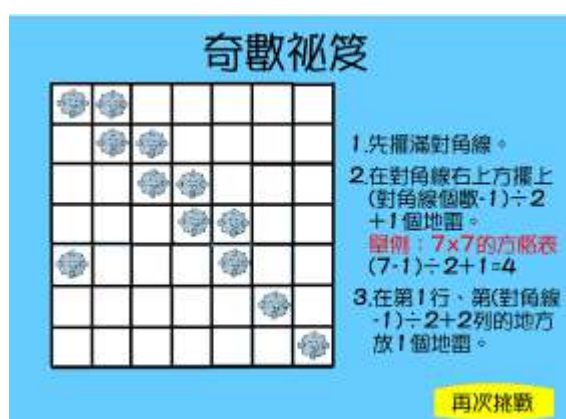
名稱：成功畫面

功能：得知挑戰成功。按「再次挑戰」可回到選關畫面。



名稱：失敗畫面

功能：得知挑戰失敗。按「我要報仇」，可回到選關畫面。



名稱：奇數祕笈

功能：說明奇數的快速完成法步驟。按「再次挑戰」可回到選關畫面。



名稱：偶數祕笈

功能：說明偶數的快速完成法步驟。按「再次挑戰」可回到選關畫面。

柒、結論

本研究探討在 $n \times n$ 的方格表中，置入 $f(n)$ 個地雷，在滿足掃雷規則的前提下，在清掃後必須剩下至少一個地雷。主要研究結果如下：

一、找出在 $n \times n$ 的方格表中，所置入地雷最少個數的公式，並加以證明。

(一)若 $n(n = 2k, k \geq 1)$ 為偶數，則 $f(n) = 3k + 1$ 。

(二)若 $n(n = 2k + 1, k \geq 1)$ 為奇數，則 $f(n) = 3k + 3$ 。

二、在 $n \times n$ 的方格表中，找到置入地雷的快速完成法。

三、在 $n \times n$ 的方格表中，找到置入地雷的快速檢查法。

四、依據研究過程中發現置放地雷的最少個數及快速完成法，設計、發展出 flash 教學遊戲-埋雷奇兵。

捌、參考資料

一、國民小學課本南一版第10冊。

二、國民小學課本南一版第11冊。

三、2012小學數學競賽選拔賽初試試題—第二試應用題—第十題。

四、許介彥（2005）。**數學悠哉遊**。臺北市，三民。

【評語】 080403

本件作品探討方格的埋雷及掃雷問題，雖然題目相當簡單易懂，但同學們作了一個相當完整的討論，分析的邏輯很清楚，是件不錯的作品。