中華民國第55屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

第一名

080402

魚與熊不可兼得?!

學校名稱：高雄市三民區十全國民小學

作者：	指導老師：
小五 王子儀	宋雅筠
小五 蔡承佑	侯淑芬
小六 沈睿宏	
小五 曾稚朗	
小五 沈怡岑	

關鍵詞：排列、對稱

得獎感言

圓一個冠軍夢

在一次偶然機會中我們接觸到這個遊戲，經過討論後決定將此遊戲作為研究主題。過程中我們依六大研究目的實際操作，雖然困難重重，免不了因不同意見而產生摩擦，幸好有老師從中協調並加以指導。研究裡我們不斷得到新的知識，但也不斷產生新的問題和錯誤，這使研究內容不斷更新，更接近完美。研究的磨練增進我們的判斷力、理解力及耐力。我明白「做一個認真努力的人，是人生最切實際的目標，甚至可以讓自己的能力發揮到極限；一個團隊，領導統御能力決定一個團隊的成就，這次科展讓我學習到的知識及能力，對我日後求學將有巨大幫助」。（王子儀）

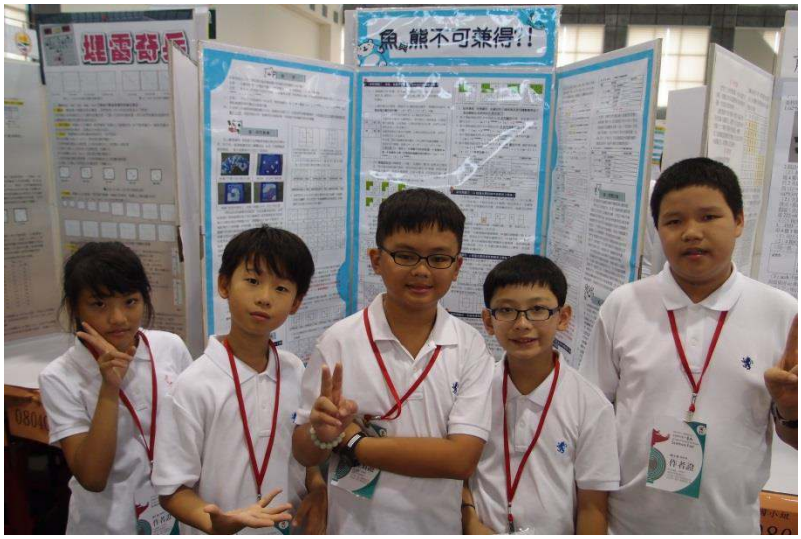
這次是我首次參加科展，我們研究的小團體就像是縮小版的社會一樣，讓我學到許多日常生活所遇到的問題應如何克服。一開始大家因為意見不合常常吵架，但在我們一次又一次的討論中，才慢慢學習到意見不同時可以使用圖解或窮舉法的方式來驗證，當我們互相體諒對方的想法後才逐漸擁有團隊分工合作及團結合作的精神；學會欣賞別人的優點，藉此也發掘自己的優點和缺點，並使缺點成為自己的優點，找到自己的學習興趣。這樣求真求美的研究過程，使我們的研究成果更正確與完美了。（蔡承佑）

在過去努力的 300 多天裡，我們奮發圖強，希望能爭取到好成績。我們用心的專精於科展，即使有多麼的累、多麼的辛苦，大家的努力總算有值得。想當初，我們從最基本的遊戲玩法開始，研究過程遇到不少的挫折，當我們慢慢去改進時就更了解研究內容。比賽結束了，我們得了第一名，大家興奮不已，這個榮耀在我們心中將會是一個永恆的回憶。（沈睿宏）

研究期間常利用假日時間討論，我們會因意見不合而起爭執，但是經過研討後就有新的發現和結果，內心喜悅便一湧而出，此也支持著我們不斷往前邁進、努力鑽研。暑假期間我們也善用時間，繼續努力研究以及練習發表，大家全力以赴只為了得到好成績。比賽當天我們每個人精神抖擻、戰戰兢兢迎接挑戰，面對評審從容不迫，最終，公佈成績時獲得最高榮譽，勇奪第一名，獲邀至市府與教育局長、陳菊市長合照留念。7 月 30 日總統接見，第一次與總統握手心情好興奮，為這次的國展畫下完美的句點。（曾稚朗）

首先我要先謝謝老師，因為有老師的努力教導，我們才有今天的成績。平常老師對我們很嚴格，不過同學發生爭執時，會適時幫助我們解決問題；有時在討論問題遇到困難時，老師也會給予我們思考的方向，我很謝謝老師！另外，我也要謝謝一路和我一起努力的同學們，這件作品如果沒有大家一起思考、解決問題，不可能在這麼多件優秀作品中脫穎而出，我要謝謝你們的陪伴，讓我對數學產生更大的興趣！（沈怡岑）

很榮幸我們有機會能夠參與中華民國第 55 屆中小學科學展覽會



我們在自己感到驕傲又有自信的參賽作品前合影留念

「十年寒窗無人問，一舉得名天下知」-這是我們平時練功的模樣

摘要

本研究找出三大主要定理討論拼圖遊戲中板塊形狀與圖形的排列數：

一、定理一：完整矩形空白板塊排列數〔（模組類型）^{2}－點對稱模組〕÷2＋點對稱模組。

二、定理二：當有 A、B 兩種不同形狀板塊，A 板塊有 m 個、B 板塊有 n 個，計算兩板塊圖形總排列算式＝（m！ × 2 ^{可旋轉個數}）× （n！ × 2 ^{可旋轉個數}）。

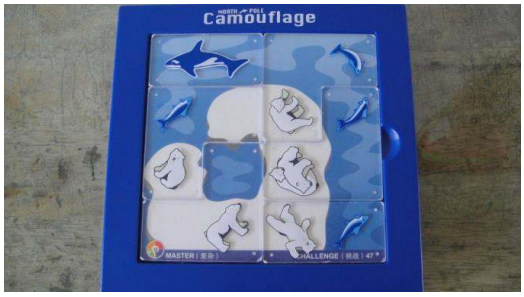
三、定理三：可從三大限制條件→點對稱圖形、2I 並列、bf 之 5P，觀察（m！ × 2 ^{可旋轉個數}）× （n！ × 2 ^{可旋轉個數}）在計算板塊圖形排列數是否重複計數。

四、目前努力全盤掌握拼圖遊戲中只有一組解的命題方式，但當我們改變遊戲條件，如板塊形狀的改變或調整圖形的數目比例，卻能突破只有一組解答的命題限制，同時提升板塊圖形排列的總數。

壹、 研究動機

在上數學課時，老師請大家帶數學遊戲到教室和同學分享，其中有一組遊戲讓每個人躍躍欲試，此為「北極歷險拼圖遊戲組」，基本遊戲條件分別以表 1 描述。

表 1：「北極歷險拼圖遊戲組」概述表

	
48 關遊戲圖卡	熊和魚、空白等 3 種圖形之 6 塊不同形狀板塊
	
熊圖只能放在浮冰上；魚圖只能擺在海水；空白不限位置（但有雪人，該處不能有熊、魚兩圖）	

一開始試玩時總覺得很簡單，但是當難度提高時，我們絞盡腦汁想破頭還是找不到正確解答，這時便開始思考如何做可以較快速找到解題方法。遊戲圖卡以 4x4 方格表示，6 塊板塊有 5 格熊圖、6 格魚圖、5 格空白圖等合計 16 格。遊戲圖卡的設計就是由海水、浮冰所佔格數來做變化，海水指魚圖可放的位置、浮冰指熊圖可放的位置、空白則可放在海水或浮冰上。這學期課本有教到對稱圖形，而本遊戲圖卡中海水、浮冰的出現方式也會形成對稱圖形，或許從圖形組合或排列的過程中可幫助我們更了解遊戲解法，於是我們決定針對此數學問題進行探究，希望能發現其中的奧秘。

貳、 研究目的

一、 探討遊戲板塊排列數、遊戲圖卡海水/浮冰所佔格數與解答的關係。

（一）研究問題一：空白六塊板塊（4 塊 L 形板塊＋2 塊 I 形板塊）有多少排列方法？

（二）研究問題二：有熊、魚圖形的六塊板塊其排列數有多少組？

（三）研究問題三：11 格海水（意即討論 11 魚＋5 隻熊）的題目條件與解答之關係？

（四）研究問題四：6 格海水（意即討論 6 魚＋10 隻熊）的題目條件與解答之關係？

二、 探究改變遊戲條件後其對應的數學關係。

（一）研究問題五：改變板塊形狀，其結果有何發現？

（二）研究問題六：改變熊、魚、空白所佔格數比例，其結果有何發現？

參、 研究器材

一、 北極歷險拼圖遊戲組。

（一）遊戲圖卡 24 張（詳見表 2），正反兩面共有 48 關不同的題目。

（二）6 塊遊戲板塊，其中 4 塊是 L 形板塊、2 塊是 I 形板塊（詳見表 2）。

表 2：「北極歷險拼圖遊戲組」遊戲組

	
遊戲圖卡	6 塊遊戲板塊

肆、 名詞定義與遊戲規則

一、 名詞定義

（一）以連塊概念取名六塊遊戲板塊，L 形板塊簡稱 3L；I 形板塊簡稱 2I。

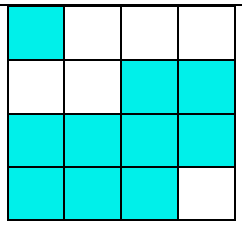
（二）以英文符號 f 表示板塊的魚圖、以英文符號 b 表示板塊的熊圖。

（三）以模組代稱板塊的排列方式，如 4 個 3L＋2 個 2I 所排列的 4×4 模組。

（四）以數字符號表示遊戲圖卡中海水（藍色）所佔格數。以下表 3 說明：原 A 圖有 10 格海水，經過重製後成 B 圖，A 圖＝B 圖，稱此遊戲圖卡為 10 水圖形。

表 3：遊戲圖卡轉製成 10 水圖形示範說明

A 圖

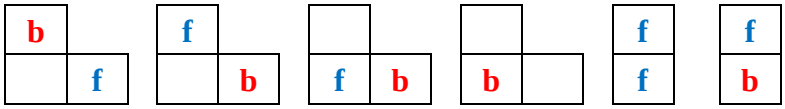


B 圖

二、 遊戲規則

（一）六塊板塊有 5 隻熊圖（用紅色表示）、6 隻魚圖（用藍色表示）和 5 個空白格。

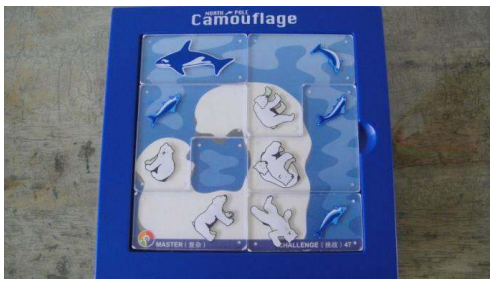
表 4：6 塊板塊示意圖



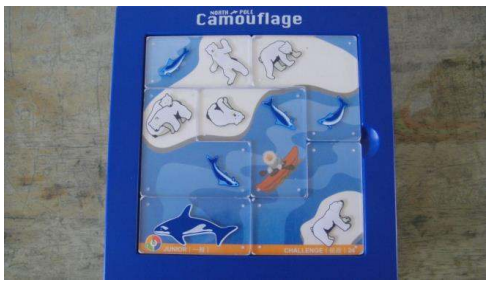
（二）每個遊戲圖卡都設計在一張 4x4 的方格圖內。

（三）熊圖只能在放遊戲圖卡的浮冰上（白色底）；魚圖只能放在遊戲圖卡的海水上（藍色底）；空白可放在浮冰或海水上，唯遊戲圖卡中出現雪人，則該處只能放空白。為方便研究，將解答改寫成以下記錄方式（表 5）：

表 5：遊戲規則與解答記錄方式說明



f	f		f
f		b	f
b		b	
	b	b	f



f	b	b	
b	b	f	f
	f	☺	
f	f		b

☺表示雪人

伍、文獻探討

一、預備定理一：「先將正方形切成兩半來看」概念。

取自梁予芊、方紀惟、林盈臻、吉思翰、楊明峰、魏楨誠（2012）第 52 屆科展作品-大地主分土地-將正方形切割為四個全等的圖形之方法。研究中將圖形切割成兩個全等圖形，再複製成四個全等圖形，以利尋找 NxN 正方形四個全等圖形。

二、預備定理二：線對稱圖形與點對稱圖形。

在平面的某個圖形可以找到一條直線將此圖形分成兩個部分，使兩圖形全等並以此直線對摺而使兩圖形完全疊合，此圖形稱為線對稱圖形。

在平面上以某圖形的旋轉中心旋轉 180°後，能與原來圖形完全疊合，稱點對稱圖形。

三、預備定理三：直線排列。

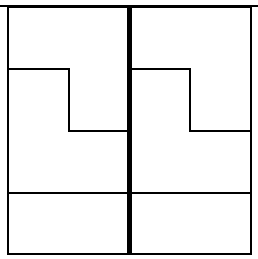
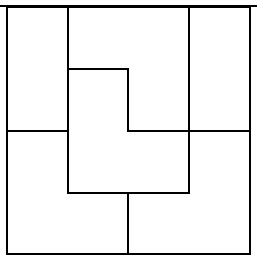
直線排列的定義指從 n 個不同的物件中，選取 m 個物件（1≦m≦n）排列到不同的位置。若 m＝n，其排列方法共有 n×（n-1）×（n-2）×….x2x1，稱為 1 到 n 的連乘，又簡稱 n！；若 m≦n，其排列方法共有 n×（n-1）×（n-2）×…×（n－m＋1）。

陸、 研究過程與發現

一、 研究問題一：空白六塊板塊（4 塊 L 形板塊＋2 塊 I 形板塊）有多少排列方法？

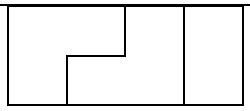
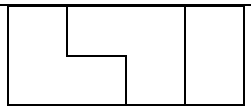
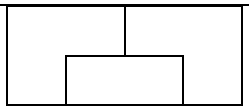
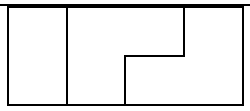
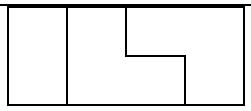
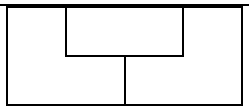
（一）預備定理一「先將正方形切成兩半來看」的啟發：我們以此發展出「折半切割完整矩形」與「不完整矩形切割」兩部分來討論六塊空白板塊的排列。

表 6：「折半切割完整矩形」與「不完整矩形切割」操作定義說明

	
折半切割完整矩形：能以中線切割成兩個完整 2×4 矩形。	不完整矩形切割：無法以中線切割成兩個完整 2×4 矩形。

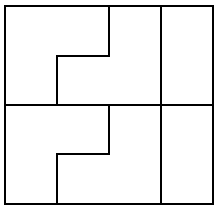
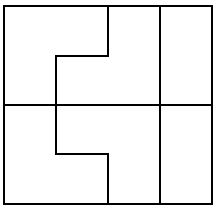
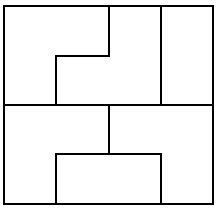
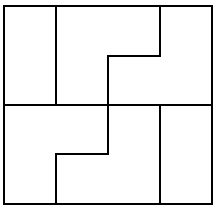
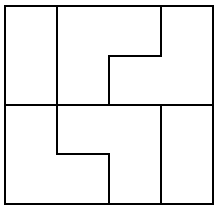
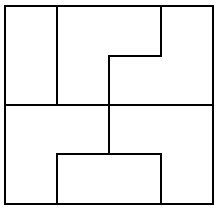
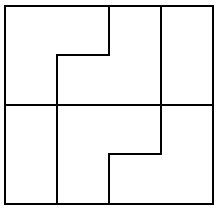
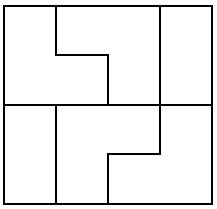
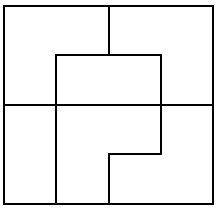
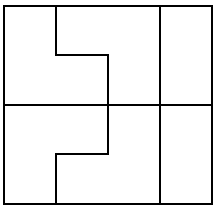
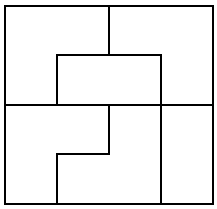
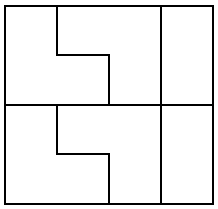
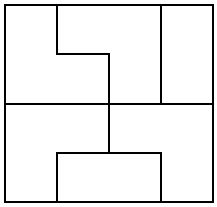
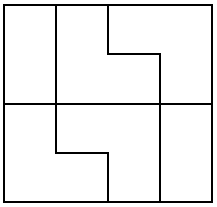
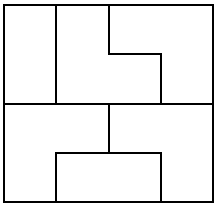
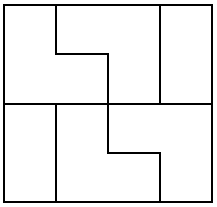
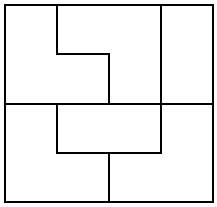
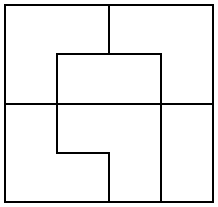
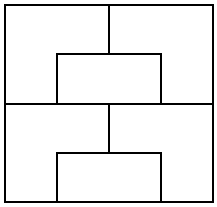
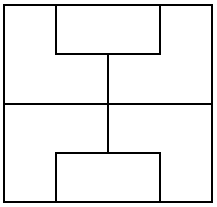
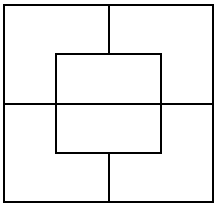
1. 2×4 折半切割完整矩形是由 2 的 3L 和 1 個 2I 所構成，其變化有六種模組：

表 7：6 組 2×4 折半切割完整矩形的變化模組

		
稱此圖為 A 模組	稱此圖為 B 模組	稱此圖為 C 模組
		
旋轉後稱此圖為 A’ 模組	旋轉後稱此圖為 B’ 模組	旋轉後稱此圖為 C’ 模組

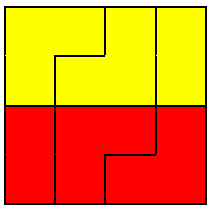
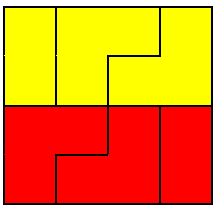
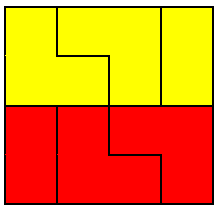
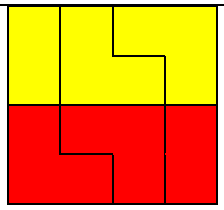
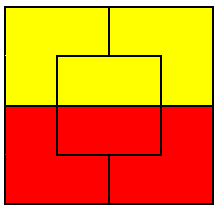
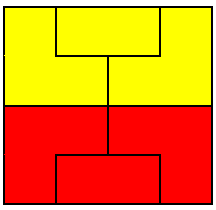
2. 將兩組 2×4 折半切割完整矩形進行旋轉（遊戲板塊因無法翻轉，所以不考慮翻轉後的重複性）再複製的方法組合成各式 4×4 模組，如下表 8 所示。

表 8：4×4 折半切割完整矩形等 21 種模組

					
AA＝A’A’	AB＝B’A’	AC＝C’A’	A’A	A’B＝B’A	A’C＝C’A
					
AA’	BA’＝AB’	CA’＝AC’	BA＝A’B’	CA＝A’C’	BB＝B’B’
					
BC＝C’B’	B’B	B’C＝C’B	BB’	BC’＝CB’	CB＝B’C’
					
CC＝C’C	C’C	CC’			

（1） 由上表可發現：非重複配對的折半切割完整矩形因中心點旋轉 180°後，紅色處板塊會和黃色處板塊圖形完全疊合（下表 9），如 A'A、AA’、B’B、BB’、C’C、CC’等 6 組模組，皆為點對稱圖形。

表 9：4×4 折半切割完整矩形等 6 組點對稱模組

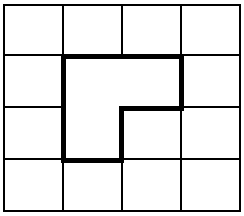
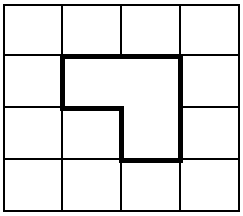
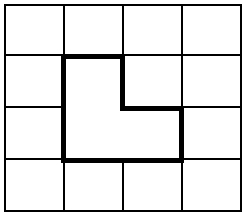
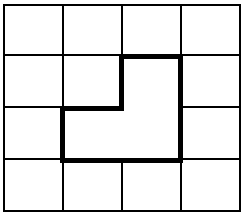
					
AA’	A’A	BB’	B’B	CC’	C’C

（2） 任意選取 6 組中的 2 組 2×4 折半切割完整矩形做搭配形成 4×4 模組，共有 6^2 種配對方式，但扣除 6 組點對稱模組，剩餘 30 種 4×4 模組經旋轉 180°會相互重複，因此實際組數只有 15 種排列方法。

（3） 主要定理一：6 塊空白板塊所形成 4×4 折半切割完整矩形之排列數＝〔6^2－6（點對稱模組）〕÷2＋6（點對稱模組）＝21。

3. 不完整矩形切割圖形以中央 2×2 格子內 3L 放置方法來討論（表 10）。

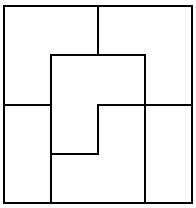
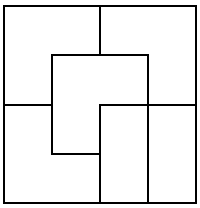
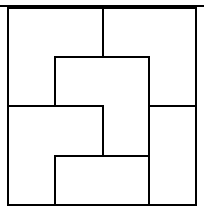
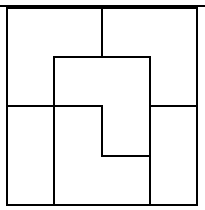
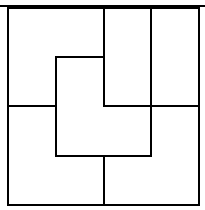
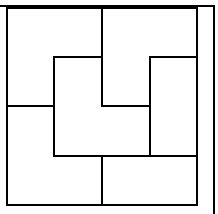
表 10：4×4 不完整矩形切割圖形等 4 種變化模組

			
稱此圖 D1 模組	稱此圖 D2 模組	稱此圖 D3 模組	稱此圖 D4 模組

（1） 決定 D 的位置後還需討論 2 塊 2I 排列， 2I 有平行、垂直或並列等三種出現方式。

（2） 在不完整矩形切割的條件下，六塊板塊共有 6 種不同的模組（表 11）。

表 11：4×4 不完整矩形切割圖形等 6 種模組

					
D1 平行	D1 並列	D2 垂直	D2 平行	D3 並列	D3 垂直

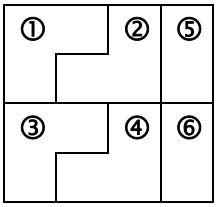
（二）結果發現：利用 **4** 個 **3L** 和 **2** 個 **2I** 之 **6** 塊空白板塊拼組 **4×4** 方格圖，折半切割完整矩形的排列模組有 **21** 種、不完整矩形切割的排列模組有 **6** 種，總共有 **27** 種的模組排列方法。

二、 研究問題二：有熊、魚圖形的六塊板塊其排列數有多少組？

（一）遊戲圖卡有 48 關，但 6 塊板塊模組只有 27 種，表示同一種模組會因 3L 選取的不同，使板塊上熊、魚圖形的排列產生不同的變化（附件資料 1，p26~27）。

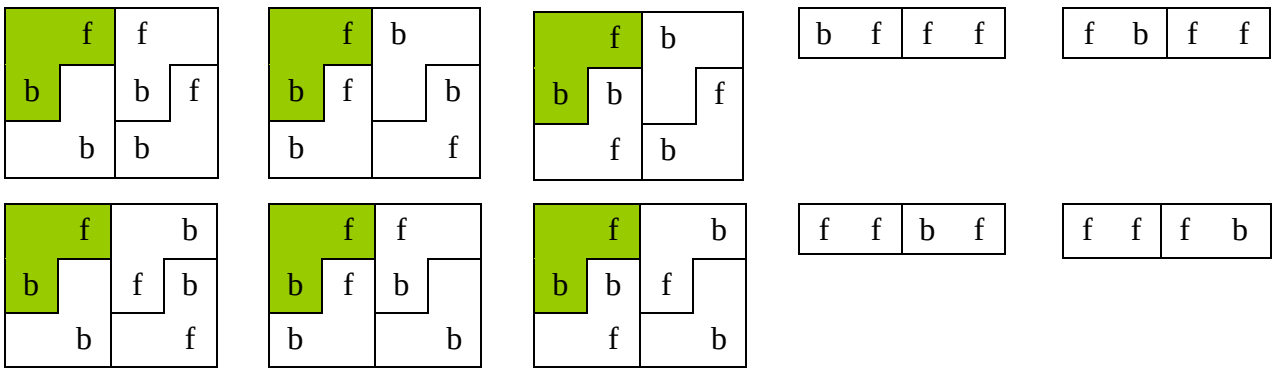
（二）以選取概念計算每一模組內 6 塊板塊魚圖形、熊圖形的排列，**6 塊板塊的圖形排列數＝（4！×2^0）×（2！×2^1）＝96**。

表 12：4×4 折半切割完整矩形 AA 模組選取數計算方式

	以 4 × 4 折半切割完整矩形 AA 模組排列為例： 位置①有 4 個 3L 可選擇放入，當①選完 1 個板塊後，位置②剩 3 個板塊，以此類推，以乘法原理加以計算，我們可以得到 4x3x2x1＝24 的算式。 位置⑤和⑥有 2 個 2I 可選擇，以乘法原理加以計算，我們可以得到 2x1＝2 的算式。 2I 的 b f 因可旋轉而增加變化，所以應再考慮旋轉數 ×2。 透過計算可歸納一個算式⇨（4！×2^0）×（2！×2^1）＝96。 主要定理二⇨：**當有 A、B 兩種不同形狀板塊，A 板塊有 m 個、B 板塊有 n 個，計算兩板塊圖形排列算式＝（m！ × $2^{可旋轉個數}$）×（n！ × $2^{可旋轉個數}$）。**

（三）再以<u>單塊固定法</u>作圖驗證（下圖 1）：先選取一塊 3L 並將其位置固定，再討論其他板塊的選取，例如先固定綠色 3L 板塊，再依序選取其他 3 塊 3L，其有 6 種選擇，共有 4 塊 3L 可先固定討論，總計圖形排列數有 6＋6＋6＋6＝6×4＝24；2 塊 2I 有 4 種變化，所以一組模組 6 塊板塊圖形總排列數 6x4x4＝96。

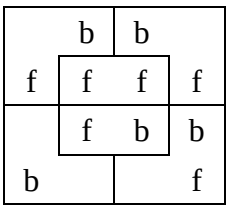
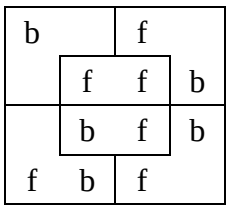
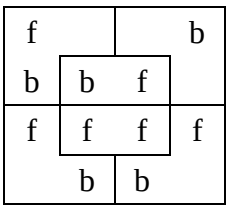
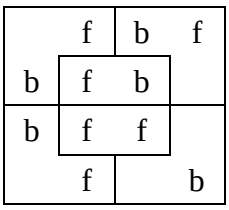
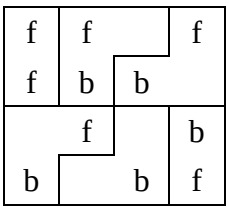
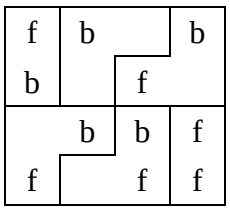
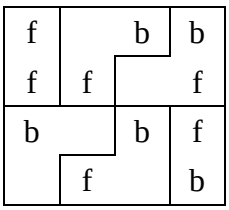
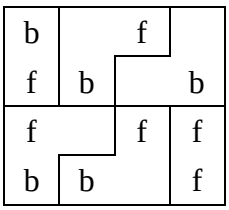
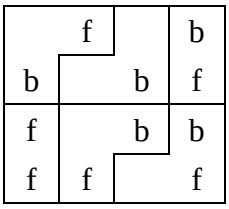
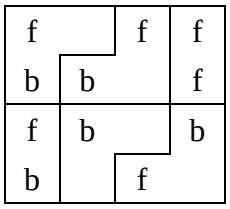
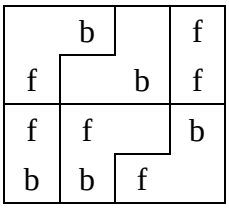
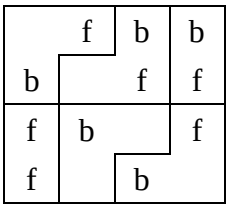
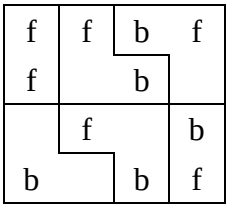
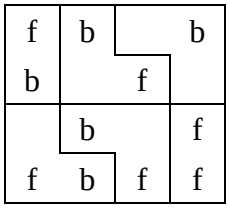
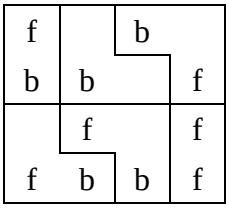
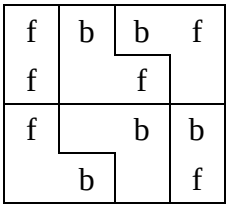
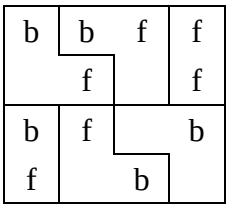
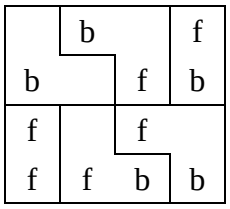
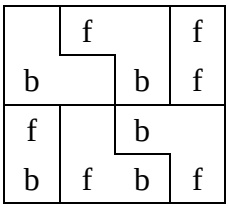
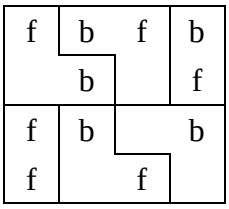
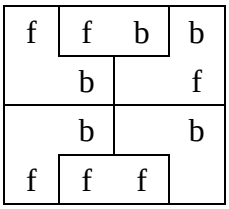
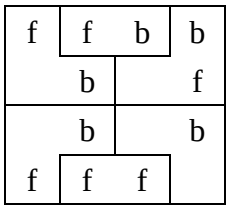
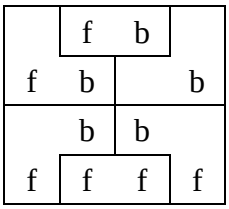
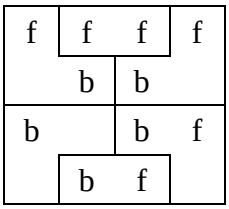
圖 1：單塊固定法操作說明



（四）討論 27 組模組內熊圖、魚圖重複出現的問題並討論刪除重複計數的條件：

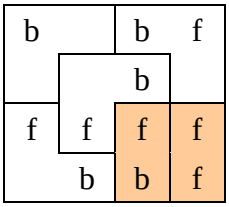
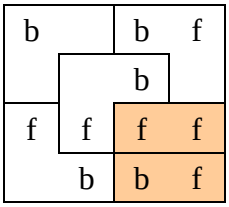
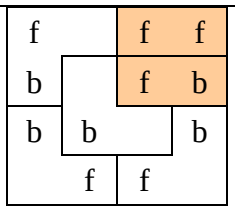
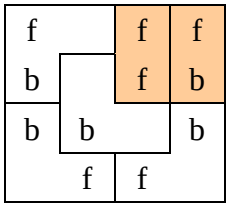
1. **點對稱模組限制條件**：點對稱模組內熊圖、魚圖會因板塊旋轉後出現相同的排列方式，另 **CC’ 模組同時是線對稱與點對稱**，所以自成一種計數方法。

表 13：點對稱圖形限制條件的選取數計算方式說明

名稱	熊、魚圖形位置重複出現的舉例				6 塊板塊排列數
CC’	 原排列	 右旋 90°	 右旋 180°	 右旋 270°	每 1 種排列經 360°旋轉後，都有 4 種重複，96 ÷4=24，所以 **CC' 只有 24 種**。
AA’	 原排列 I	 旋轉 180°	 原排列 II	 旋轉 180°	每 1 種排列經 180°旋轉後，都有 2 種重複，96 ÷2=48，所以 **AA'有 48 種**。
A’A	 原排列 I	 旋轉 180°	 原排列 II	 旋轉 180°	每 1 種排列經 180°旋轉後，都有 2 種重複，96 ÷2=48，所以 **A'A 有 48 種**。
BB’	 原排列 I	 旋轉 180°	 原排列 II	 旋轉 180°	每 1 種排列經 180°旋轉後，都有 2 種重複，96 ÷2=48，所以 **BB'有 48 種**。
B’B	 原排列 I	 旋轉 180°	 原排列 II	 旋轉 180°	每 1 種排列經 180°旋轉後，都有 2 種重複，96 ÷2=48，所以 **B'B 有 48 種**。
C’C	 原排列 I	 旋轉 180°	 原排列 II	 旋轉 180°	每 1 種排列經 180°旋轉後，都有 2 種重複，96 ÷2=48，所以 **C’C 有 48 種**。

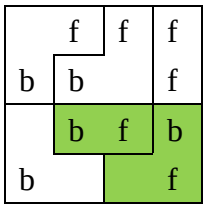
2. **2I 並列限制條件**： D1 並列與 D3 並列此兩個模組的差別在於 2I 板塊並列的方向不同，但實際上其圖形的排列方式一樣，所以 6 塊板塊圖形總排列數應是（4！×2^0×2！×2^1）×2÷2＝96。

表 14：2I 並列限制條件的選取數計算方式說明

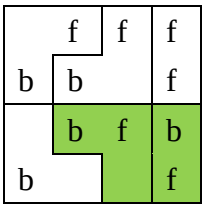
熊、魚圖形位置出現的重複舉例				6 塊板塊排列數
 D1 並列	 D3 並列	 D1 並列	 D3 並列	D1 並列每 1 種 2I 排列換個方向排列，都等於 D3 並列，所以 **D1 並列與 D3 並列合計 96 種**。

3. **bf 之 5P 限制條件**：下圖 2 綠色部分 3L 和 2I 可組合成 bf 之 5P 圖形，能同時由 C’A 模組和 AB 模組所拼組，因有 bf 之 5P 圖形的條件使魚圖、熊圖有 2 組以上的模組排列，所以其 6 塊板塊總排列數並非 4！×2^0×2！×2^1＝96。

圖 2：bf 之 5P 限制條件定義說明

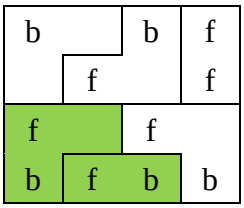
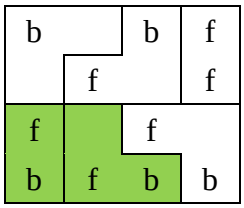
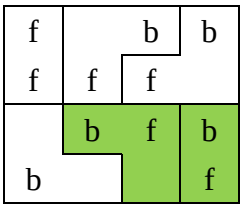
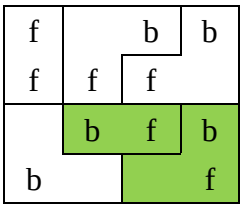
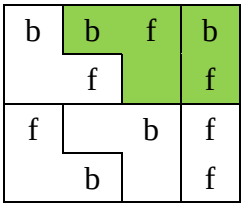
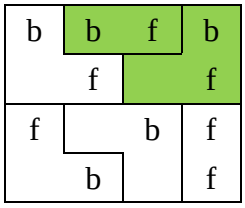
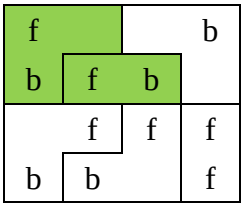
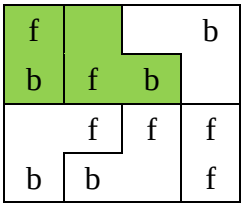


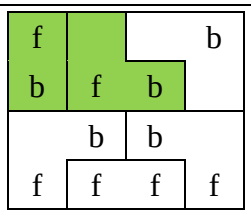
CA’ 模組



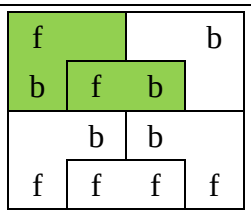
AB 模組

表 15：bf 之 5P 限制條件的重複選取數舉例說明

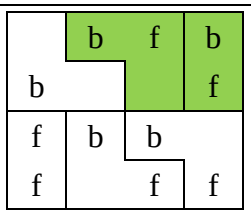
 AC 折半切割完整矩形	 AB’折半切割完整矩形	 A’B 折半切割完整矩形	 AC’ 折半切割完整矩形
 BB 折半切割完整矩形	 C’B 折半切割完整矩形	 CA 折半切割完整矩形	 B’A’ 折半切割完整矩形



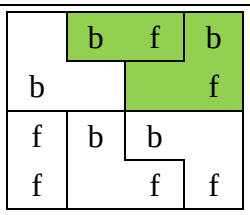
B’C 折半切割完整矩形



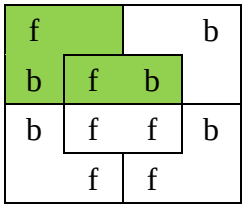
CC 折半切割完整矩形



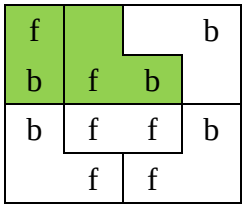
BB’折半切割完整矩形



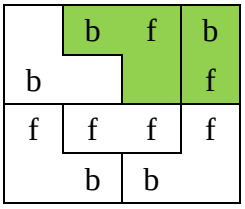
C’B’折半切割完整矩形



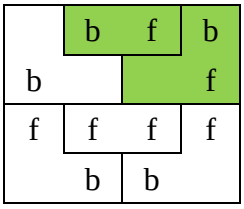
CC’折半切割完整矩形



B’C’折半切割完整矩形



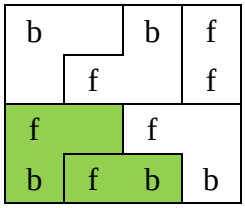
BC’折半切割完整矩形



C’C’折半切割完整矩形

（1） 依據發現，27 組排列模組中，共有 18 組有 bf 之 5P 圖形條件（AB、AC、A’B、A’C、BA’、CA’、BA、CA、BB、BC、B’B、B’C、BB’、BC’、CB、CC、C’C、CC’），但其中 B’B、BB’、C’C、CC’（此四種為點對稱模組）與其他 14 種模組的特色不同而需分開討論。

表 16：bf 之 5P 限制條件的重複選取數計算說明



AC 折半切割完整矩形

bf 之 5P 限制條件之重複數計算

固定 1 塊 3L 和 1 塊 2I，剩餘選取數為 3！（3 塊 3L 排列數）×1（1 塊 2L 排列數）×重複組數÷2

（2） 點對稱模組（B’B、BB’、C’C、CC’）之 6 塊板塊總排列數＝（48＋48＋48＋24）－（3！×1×4÷2）＝156。

（3） 其他 14 組 6 塊板塊總排列數＝（96×14）－（3！×1×14÷2）＝1302。

（五）結果發現：有熊圖形、魚圖形的六塊板塊其排列總數整理成下表 17，並歸納出本研究的主要定理三。

（1） 當 6 塊板塊組成的 4×4 模組具有**線對稱與點對稱**特徵，圖形排列數＝〔（**m！×2** 可旋轉個數）×（**n！ ×2** 可旋轉個數）〕**÷4**。

（2） 當 6 塊板塊組成的 4×4 模組具有**點對稱**特徵，圖形排列數＝〔（**m！×2** 可旋轉個數）×（**n！ ×2** 可旋轉個數）〕**÷2**。

（3） 當 6 塊板塊組成的 4×4 模組具 **2I 並列圖形**特徵，圖形排列數＝〔（**m！×2** 可旋轉個數）×（**n！ ×2** 可旋轉個數）〕**÷2**。

（4） 當 6 塊板塊組成的 4×4 模組具有 **bf 之 5P 圖形**特徵，圖形排列數＝

〔（**m**！× **2** 可旋轉個數）×（**n**！ × **2** 可旋轉個數）〕－〔（**m**－**1**）！×（**n**－**1**）！

×重複組數÷**2**〕。

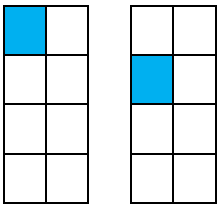
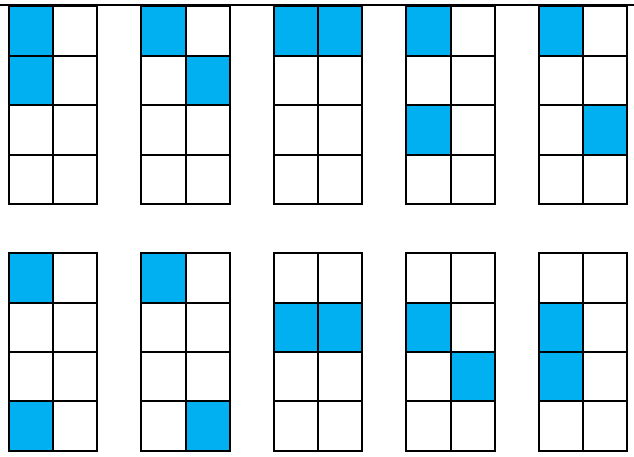
表 17：討論熊、魚圖形的六塊板塊總排列數

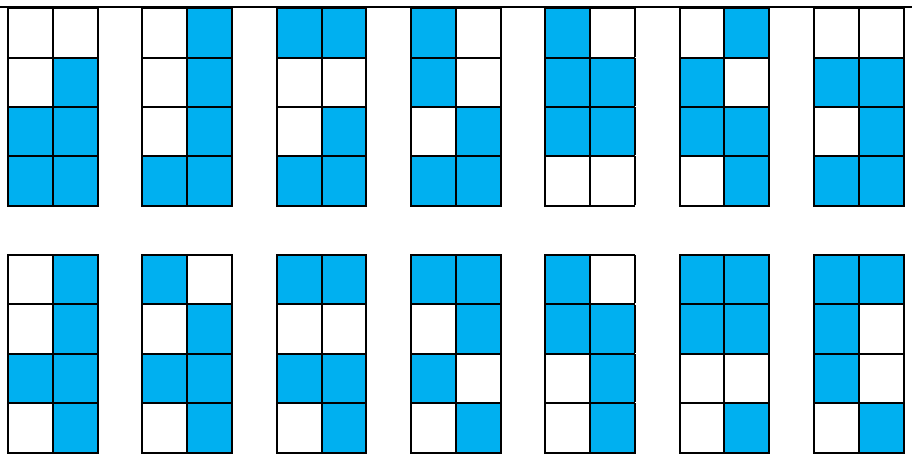
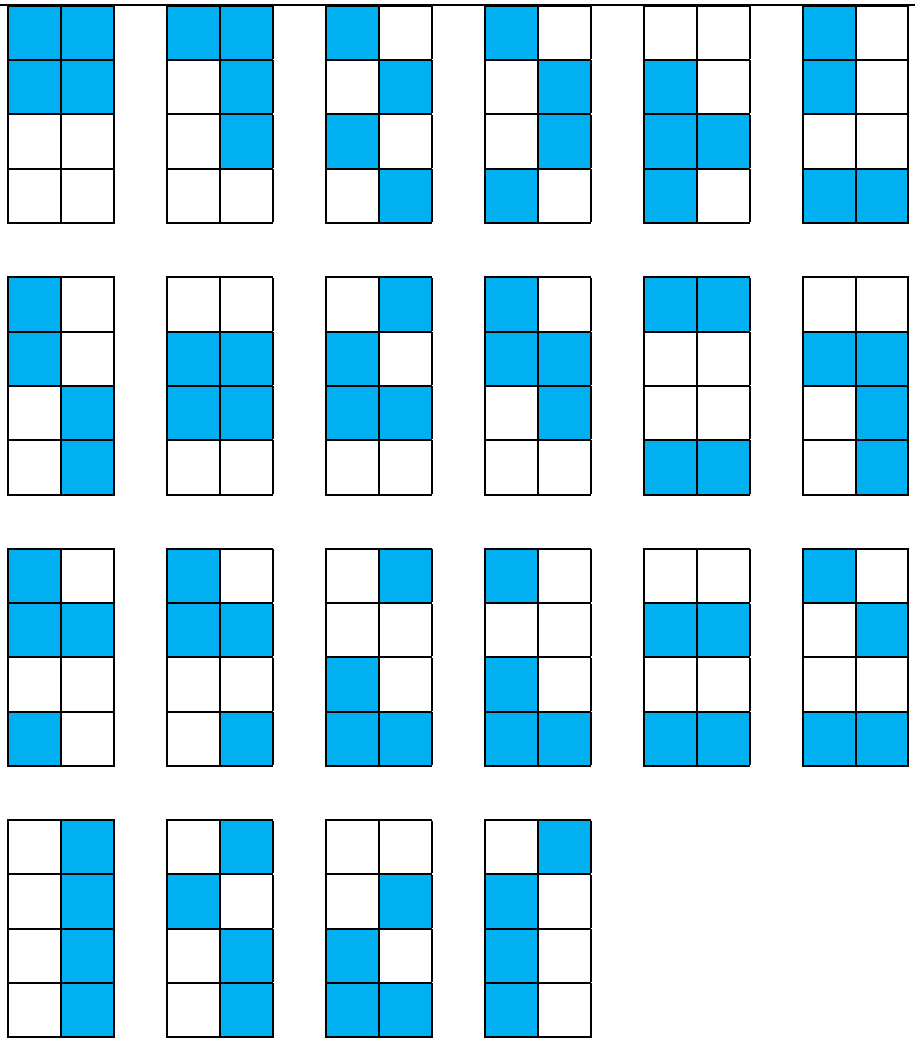
總數	圖形特徵		4×4 模組	六塊總排列數
27	bf 之 5P 圖形	線對稱、點對稱圖形	CC’	〔（96÷4）+（96÷2）×3〕－（3！×1×4÷2）＝156
		點對稱圖形	BB’、B’B、C’C	
		bf 之 5P 圖形	AB、AC、A’B、A’C、BA’、CA’、BA、CA、BB、BC、B’C’、BC’、CB、CC	（96×14）－（3！×1×14÷2）＝1302
	非 bf 之 5P 圖形	點對稱圖形	AA’、A’A	（96÷2）×2＝96
		2I 並列圖形	D1 並列、D3 並列	（96x2）÷2＝96
		以上皆非	AA、D1 平行、D2 平行、D1 垂直、D3 垂直	96×5＝480
合計	**156＋1302＋96＋96＋480＝2130**			

三、 研究問題三：11 格海水（意即討論 11 魚＋5 隻熊）的題目條件與解答之關係？

（一）沿用『折半切割完整矩形』概念，將 2×4 方格圖，依序畫出 1 水、2 水、3 水、4 水、5 水、6 水的圖形，再加以組合、分析 11 水的題目設計。

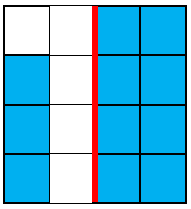
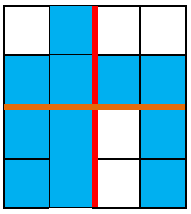
表 18：1 水~6 水的 2×4 方格圖例

出現條件	2×4 方格圖的水出現圖例	組數
1 水 （白色表示 7 水）		2
2 水 （白色表示 6 水）		10

5 水 （白色表示 3 水）		14
4 水模組		22

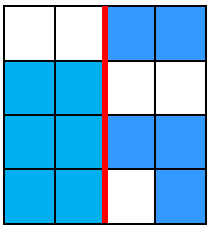
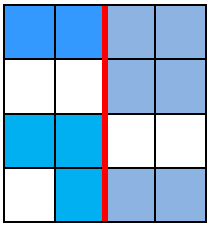
（二）2 個 2x4 折半切割完整矩形配對 11 水組合類型是 5 水＋6 水，如下表 19 說明：

表 19：3 水＋8 水、4 水＋7 水不討論之原因說明

 3 水+8 水	先不考慮 2x4 中的 3 水，只看 2x4 裡 8 水的組合（紅色裁切線右側），因為除了 2I 中 f f 板塊以外，沒有任一板塊沒有熊的符號，所以依照 21 種完整矩形模組的排法是無法成功，剩下就針對 6 組不完整矩形模組來判別。但依照這 6 種組合方式進行板塊旋轉、翻轉的試煉，都發現 2x4 裡 8 水的組合無法成功。
 4 水+7 水	原 4 水+7 水組合（紅色切割線）因為不同方向的旋轉，導致有不同的結果，如橫切（橘色切割線）變成 5 水+6 水；換句話說，5 水+6 水組合的橫切、直切變化也會有 4 水+7 水組合，因此 11 水只要計算其中一組變化即可，於是我們計算 5 水+6 水。

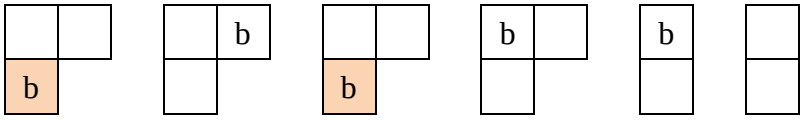
其中因為 2x4 折半切割完整矩形中 6 水有 2 個模組（下表 20 中 A、B）位置因線對稱因素，所以旋轉會造成 4 次圖形變化、翻轉形成 2 次圖形變化。反之 2x4 折半切割完整矩形中 5 水無線對稱關係，所以旋轉或翻轉都是會有 4 次圖形變化。

表 20：6 水＋5 水線對稱圖形總變化數計算說明

 A：6 水　5 水  5 水　B：6 水	①A：14（5 水組合模組數）×2（6 水組合模組數）×2（翻轉）×4（旋轉）＝224 ②B：14（5 水組合模組數）×10（6 水組合模組數）＝140 （140－2×14）×4（翻轉）×4（旋轉）＝1792 ③224＋1792＝2016 ④11 水圖形位置變化共有 2016 組

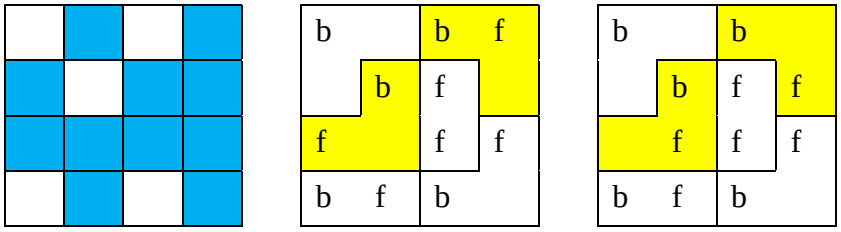
（三）11 格海水的條件，4×4 有 16 格，16（空白格）－11（水/格）＝5（浮冰/格），5 格浮冰表示 5 隻熊，所以浮冰上一定要放熊，等於不用考慮魚的位置，把魚變成空白，也就可以將板塊視為下圖 3：

圖 3：11 水條件下的板塊



第 1 塊跟第 3 塊熊的位置（淺橘色處）一樣，則表示在 11 水的條件下有兩種以上的做法（因為此 2 塊板塊可以互換，如下圖黃色兩塊 3L 板塊可互換）。

圖 4：11 水條件下同一組題目有兩種解法示範

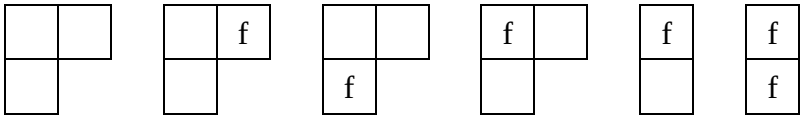


（四）結果發現：「北極歷險拼圖遊戲組」48 關的遊戲圖卡無 11 水的條件，原因在於不考慮魚圖與空白，16 格空格－11 格水＝5 格熊，其中有兩塊板塊的熊圖形位置重複，造成兩板塊 3L 可互換因素，所以 11 水題目都有兩組以上解答，並沒有在本遊戲 48 關出現。

四、 研究問題四：6 格海水（意即討論 6 魚＋10 隻熊）的題目條件與解答之關係？

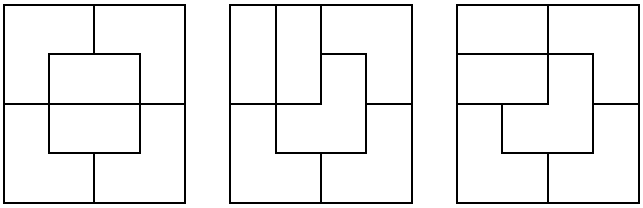
（一）遊戲圖卡中 6 水的條件下，4×4 有 16 格子，16（空白格）－6（水/格）＝10（浮冰/格），6 格海水表示 6 隻魚，所以海水上一定要放魚圖，等於不用考慮熊圖的位置，把熊圖變成空白，也就可以將板塊視為下圖 5：

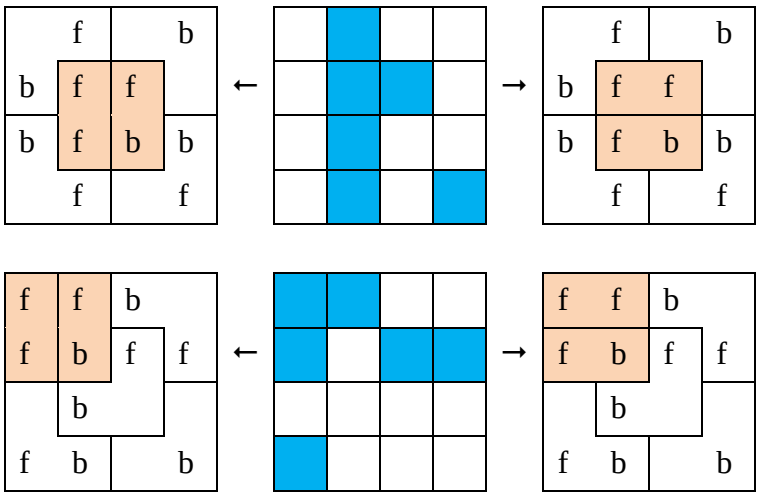
圖 5：6 水條件下的板塊



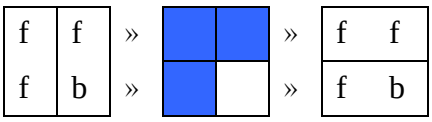
因為魚圖的位置沒有重複，所以對應其解答也會與 11 水的條件不同。在探討 6 水題目與解答的關係時，我們發現有三種模組其解答都有兩組解以上：

圖 6：三種模組的重複性之舉例說明



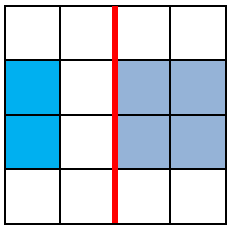
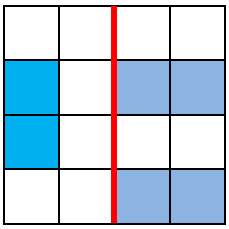
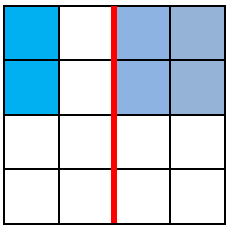
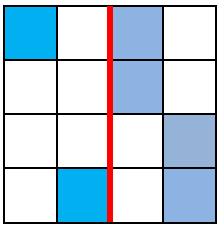


上面兩種圖例都是因為出現下述條件，板塊經旋轉可變成另一種模組的排列！



（二）2 個 2x4 折半切割完整矩形配對 6 水的組合類型是 1 水＋5 水、2 水＋4 水、3 水＋3 水，其中 2 水＋4 水的組合最為特別，4 水在 2x4 矩形的分布圖形有 6 種模組是線對稱模組（非線對稱模組為 22－6）；2 水在 2x4 矩形中有 6 個模組是線對稱模組，相關線對稱模組關係請見下表 21 說明。

表 21：6 水條件下海水出現的組合可能說明

 A B	 A B	 A B	 A B
B 圖為橫切、縱切線對稱 拼組結果 × 2	AB 兩圖皆為線對稱圖形 拼組結果 × 4	B 為線對稱圖形、A 則非 拼組結果 × 8	AB 兩圖皆非線對稱圖形 拼組結果 × 16

從研究過程中我們發現 2x4 折半切割完整矩形內若有線對稱圖形，其排列數的討論需考慮翻轉或旋轉的重複性，以免發生重複計數的結果。

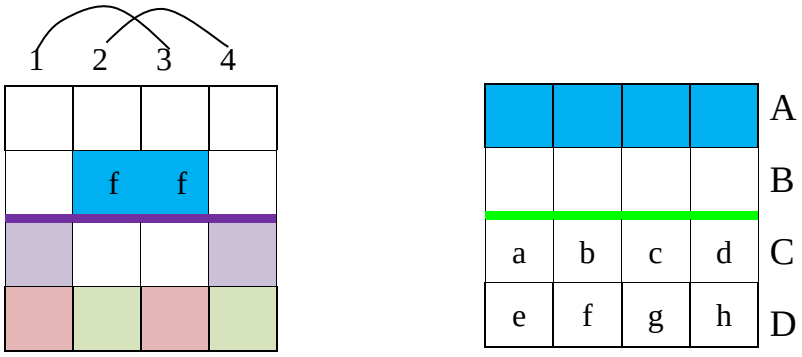
（三）遊戲圖卡中 11 水因 2 塊板塊中熊圖形位置重疊可以互相交換，所以都有兩組以上解答，而 6 水目前無法從板塊圖形的無重疊性來判斷解答特性，於是我們觀察原遊戲 48 題遊戲圖卡，我們發現若需設定 6 水的條件是唯一解，出題方式有以下關聯性：

1. 第一種 6 水唯一解出題方式：限制 2I f　f 的位置。4×4 矩形區分成上、下兩個 2×4 矩形，上方 2×4 矩形應有 4 水、下方 2×4 矩形應有 2 水，合計 6 水。當上方 2×4 矩形已限制 2 水位置（f　f）時，此刻 2×4 矩形只剩 2 水可設計，2 水只能在第一列第 1 格配第 3 格或第 2 格配第 4 格，這時上方 2×4 矩形內已包含 4 水，剩餘 2 水的位置在下方 2×4 矩形有以下兩種選擇：

   （1） 下圖 7：下方 2×4 矩形內（紫色裁切線），2 水可在第四列第 1 格配第 3 格（指淺紅色兩格）或第 2 格配第 4 格（指淺綠色兩格）。

   （2） 下圖 7：下方 2×4 矩形（紫色裁切線），2 水在第三列的第 1 格配第 4 格（指淺紫色兩格）。

圖 7：6 水有唯一解的設計方式



2. 第二種 6 水唯一解出題方式：橫切上方 2x4 完整矩形內（綠色裁切線），A 排 4 格全部皆是海水（此時上方 2x4 矩形內已包含 4 水符號）；橫切下方 2x4 完整矩形內（綠色裁切線）剩餘 2 水的位置搭配有 a＋g、b＋h、c＋e、d＋f 四種。

五、 研究問題五：改變板塊形狀，其結果有何發現？

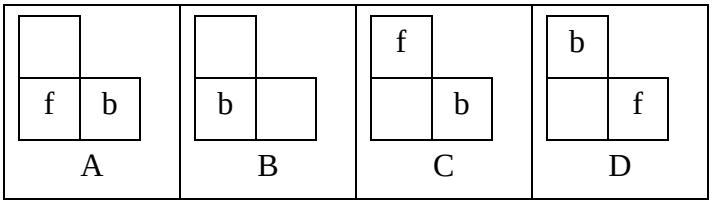
（一）我們提出一個問題：「為什麼遊戲設計板塊是 4 個 3L 和 2 個 2I 的組合呢？」如果改用其他板塊組合模式進行研究，是否可對應解釋原遊戲裡的數學意義？於是我們開始探究改變遊戲規則之後的結果。

1. 板塊由 3 連塊、2 連塊所組合而成，3 連塊有兩種變化類型：3I 和 3L，所以我們將板塊設計依 3I 和 3L 搭配方式分成四大類，其中我們發現

3L×2+3I×2+2I×2 的組合比原遊戲 3L×4+2I×2 的 27 種板塊排列還多 12 種（詳情請見附件資料 2，p28~30），因此我們針對 3L×2+3I×2+2I×2 做深入討論，以釐清兩者遊戲之間設計的差異。

2. 因考慮 3L 板塊 4 選取 2 變成 3I 因素，選取結果有 AB、AC、AD、BC、BD、CD 等 6 種方式，CD 兩種板塊從 3L 轉型成 3I 其翻轉後結果雷同，故只需討論前 5 種情形即可。

表 22：4 塊 3L 名詞定義



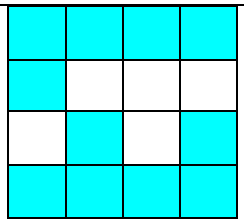
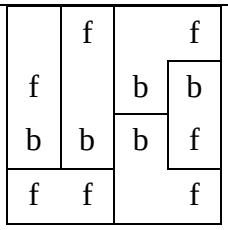
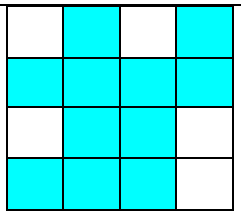
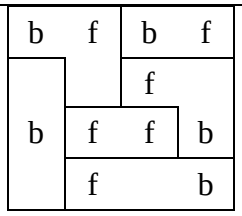
3. 我們利用 11 水的條件來檢視更換板塊形狀的相對應數學關係，我們發現若是相同板塊，其 b 符號的位置（或經旋轉）重疊，此板塊圖形在 11 水的題目中皆有兩組解。

表 23：板塊改變後 b 符號位置的結果解釋

種類	3L	3I	圖形				結果
1	AC	BD	f b	f b	b	b f	b 符號的位置重疊，所以有兩組解。
2	AD	BC	f b	b f	b	f b	無板塊符號位置重疊，有一組解。
3	BC	AD	b	f b	f b	b f	b 符號的位置重疊，所以有兩組解。
4	BD	AC	b	b f	f b	f b	b 符號的位置重疊，所以有兩組解。
5	CD	AB	f b	b f	f b	b	無板塊符號位置重疊，有一組解。

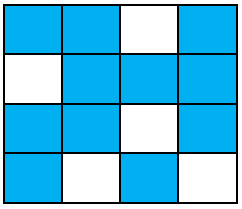
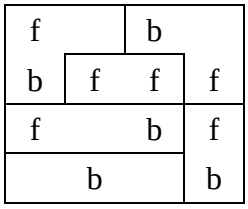
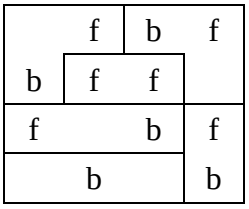
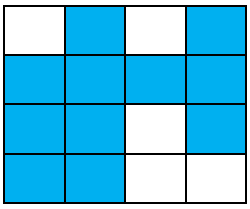
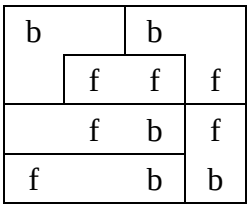
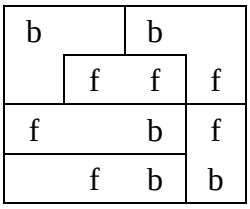
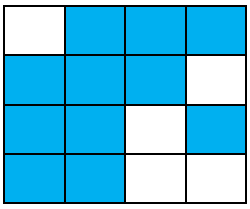
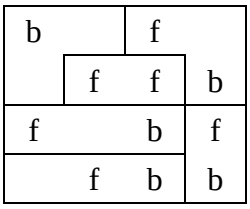
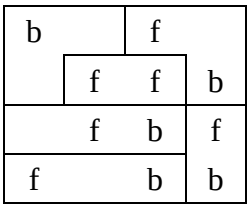
4. 呈上題所述，當 BC 或 AB 更改成 3I 時，因板塊符號位置無一重複，所以在 11 水的條件下便會形成一組解答的題目，以下表 24 所示：

表 24：板塊改變後 11 水產生新的解釋結果 I

BC→3I		
AB→3I		

5. 另因板塊符號位置有重複，所以在 11 水的條件下便也會形成兩組解答的題目，以下表 25 所示：

表 25：板塊改變後 11 水產生新的解釋結果 II

BD→3I			
AD→3I			
AC→3I			

（二）試算改變後的熊圖、魚圖六塊板塊排列數：

1. 3L×2+3I×2+2I×2 之 31 種模組中無 2I 並列圖形與線對稱模組，但有點對稱 6 組模組、AD（3L）-BC（3I）此改變類型有 bf 之 5P 圖形 8 組模組，如下圖 8、下圖 9 所示：

圖 8：3L×2+3I×2+2I×2 六組點對稱圖形

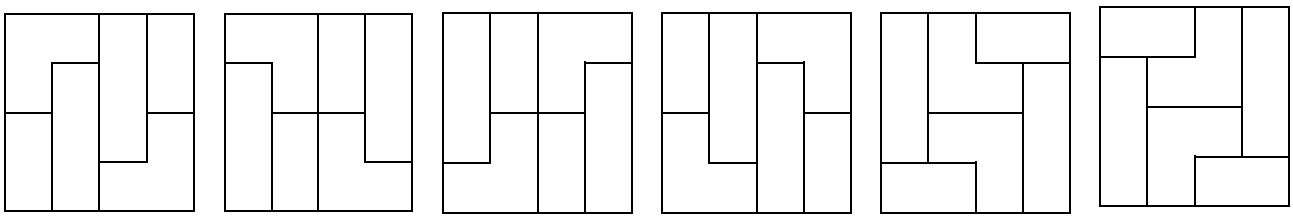
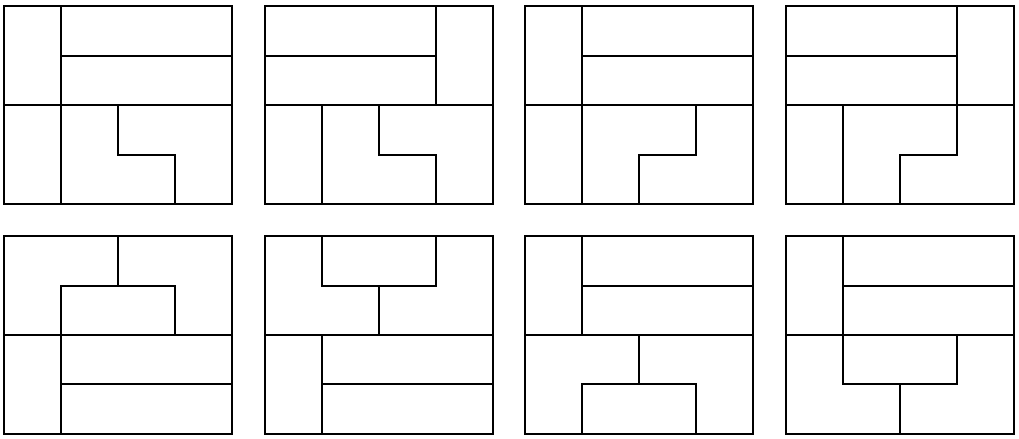


圖 9：3L×2+3I×2+2I×2 八組 bf 之 5P 圖形



2. 使用主要定理一計算 AD（3L）-BC（3I）、CD（3L）-AB（3I）兩種條件六塊圖形排列數：有 A、B、C 三種不同形狀板塊各 m、n、p 個＝（m！ × 2 ^{可旋轉個數}）× （n！ × 2 ^{可旋轉個數}）×（p！ × 2 ^{可旋轉個數}）＝（2！×2^0）（2 塊 3L 板塊）×（2！×2^1）（2 塊 3I 板塊）×（2！×2^1）（2 塊 2I 板塊）＝2^5＝32。

表 26：3L×2+3I×2+2I×2 六塊板塊總排列數在 AD（3L）-BC（3I）的條件下

總數	圖形特徵		六塊總排列數
39	bf 之 5P 圖形	是線對稱、點對稱圖形	
		點對稱圖形	32÷2×6＝96
		bf 之 5P 圖形	（32×8）－〔1×（2！×2^1）×1〕×8÷2＝240
	非 bf 之 5P 圖形	點對稱圖形	
		2I 並列圖形	
		以上皆非	32×25＝800
合計	**96＋240＋800＝1136**		

表 27：3L×2+3I×2+2I×2 六塊板塊總排列數在 CD（3L）-AB（3I）的條件下

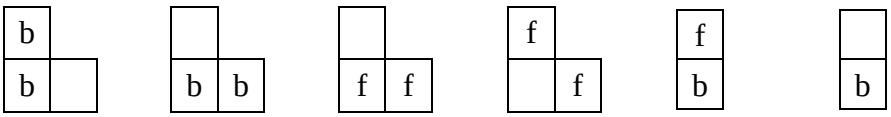
總數	圖形特徵		六塊總排列數
39	bf 之 5P 圖形	是線對稱、點對稱圖形	
		點對稱圖形	32÷2×6＝96
		bf 之 5P 圖形	
	非 bf 之 5P 圖形	點對稱圖形	
		2I 並列圖形	
		以上皆非	32×33＝1056
合計	**96＋1056＝1152**		

（三）結果發現：雖然 3L×2+3I×2+2I×2 的板塊形狀改變後可以增加板塊組合數，遊戲圖卡的設計也能在 11 水條件下只有一組解答，但其六塊圖形總排列數卻只有 1136 種或 1152 種，比原遊戲設計的總排列數低，主要原因是因為改變板塊形狀後的單一模組圖形排列數只有 32 種，比原遊戲設計的 96 種少所導致。

六、 研究問題六：改變熊、魚、空白所佔格數比例，其結果有何發現？

（一）我們也猜想，改變熊、魚、空白數的比例（由 5：6：5 改成 6：5：5），結果又會產生什麼影響？我們重新分配原板塊的熊、魚、空白分配位置，調整成目標的 6：5：5，新板塊配置如下圖 8：

圖 10：熊：魚：空白＝6： 5： 5 新板塊配置



1. 在新比例設計的熊圖形、魚圖形並不會造成線對稱（2 塊 2I 不相同）、bf 之 5P 圖形和 2I 並列圖形，避免許多熊圖、魚圖位置經旋轉後產生的重複問題。
2. 使用主要定理一計算六塊圖形排列數：有 A、B 兩種不同形狀板塊各有 m、n 個＝（m！ × 2 ^{可旋轉個數}）× （n！ × 2 ^{可旋轉個數}）＝（4！×2^0）（4 塊 3L 板塊）×（2！×2^2）（2 塊 2I 板塊）＝192。

表 28：熊：魚：空白＝6： 5： 5 新板塊之六塊板塊總排列數

總數	圖形特徵		六塊總排列數
27	bf 之 5P 圖形	是線對稱、點對稱圖形	
		點對稱圖形	192÷2×6＝576
		bf 之 5P 圖形	
	非 bf 之 5P 圖形	點對稱圖形	
		2I 並列圖形	
		以上皆非	192×21＝4032
合計	**576＋4032＝4608**		

3. 結果發現：將熊、魚、空白重新分配位置並調整成 6 熊、5 魚、5 空白格，熊圖、魚圖位置無重複，遊戲圖卡的設計使 11 水條件下有一組解答的產生。六塊圖形總排列數也提高到 4608 種，比原遊戲設計的總排列數高出許多。

（二）利用熊、魚圖新比例的概念融入板塊形狀改變的 3L×2+3I×2+2I×2，討論其結果的變化。

1. 因考慮 3L 板塊 4 選取 2 變成 3I 因素，選取結果有 AB、AC、AD、BC、BD、CD 等 6 種方式。

表 29：4 塊 3L 名詞定義

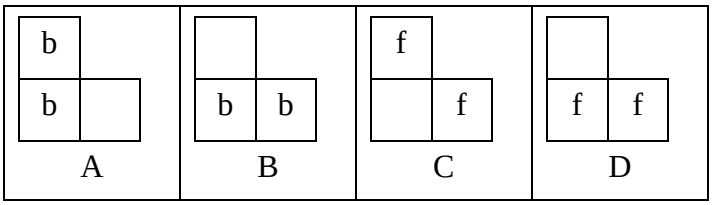


表 30：新比例與新板塊改變後 b 符號位置的結果解釋

種類	3L	3I	圖形				結果
1	AC	BD	b b	f f	b b	f f	無板塊符號位置重疊，有一組解。
2	AB	CD	b b	b b	f f	f f	b 符號位置雖有重疊，但另一 b 符號位置不同，有一組解。
3	AD	BC	b b	f f	b b	f f	無板塊符號位置重疊，有一組解。
4	BC	AD	b b	f f	b b	f f	無板塊符號位置重疊，有一組解。

5	BD	AC	b b	f f	b b	f f	無板塊符號位置重疊，有一組解。
6	CD	AB	f f	f f	b b	b b	b 符號的位置重疊，所以有兩組解。

2. 使用主要定理一計算扣除 CD（3L）-AB（3I）條件下，其餘五種新變化的六塊圖形總排列數：有 A、B、C 三種不同形狀板塊各有 m、n、p 個＝（m！× 2 ^{可旋轉個數}）× （n！ × 2 ^{可旋轉個數}）×（p！ × 2 ^{可旋轉個數}）＝（2！×2^0）（2 塊 3L 板塊）×（2！×2^2）（2 塊 3I 板塊）×（2！×2^2）（2 塊 2I 板塊）＝2^7＝128。

表 31：熊：魚：空白＝6： 5： 5 新比例與新形狀之六塊板塊總排列數

總數	圖形特徵		六塊總排列數
39	bf 之 5P 圖形	是線對稱、點對稱圖形	
		點對稱圖形	128÷2×6＝384
		bf 之 5P 圖形	
	非 bf 之 5P 圖形	點對稱圖形	
		2I 並列圖形	
		以上皆非	128×33＝4224
合計	**384＋4224＝4608**		

（三）結果發現：將熊、魚、空白重新分配至 3L×2+3I×2+2I×2 的新板塊中並調整成 6 熊、5 魚、5 空白格，共有 6 種不同的變化。其中 CD（3L）-AB（3I）條件下熊、魚的位置會重複，使 11 水條件下有兩組解答的產生，其餘五種在 11 水的題目中都能有一組解。另六塊總排列數也提高到 4608 種，比原遊戲設計的總排列數高，結果和只改變熊、魚圖形比例的板塊設計總排列數相同。

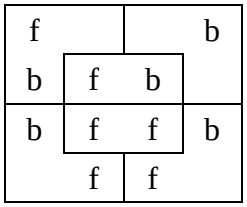
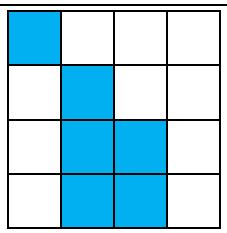
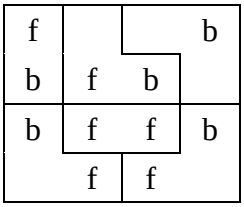
柒、 問題討論

一、 為什麼需要探究板塊圖形總排列數的重複計數問題？

板塊圖形總排列數的重複計數攸關遊戲圖卡的唯一解答與非唯一解答。研究之初，我們尋找 3L、2I 等六塊板塊的圖形排列數是以主要定理二為判斷的依據，主張以 96x27 解釋總圖形排列數的結論。接著我們進行研究問題四的討論並猜測遊戲的設計者是先將 6 塊板塊排好再進行遊戲圖卡的設計，不過當我們事先排好 6 塊拼圖時，

再設計遊戲圖卡以邀請第二位同學挑戰時，意外發現同學依照遊戲圖卡線索完成的解答與事先我們設定的答案並非相同（表 32），我們才發覺圖形的排列也會因不同模組板塊的排列而產生不一樣的解答，所以我們忽略因不同模組產生相同圖形位置的可能，而錯誤計算六塊總圖形排列數。

表 32：熊：魚：空白＝6： 5： 5 新比例與新形狀之六塊板塊總排列數

		
事先設計解答的拼組方式	根據解答擬訂遊戲圖卡	卻又發現符合圖卡條件

二、 為什麼需要先討論空白板塊排列數再討論圖形板塊總排列數？

因為板塊圖形的排列問題相當複雜，為了簡化條件方便記錄，我們先討論 6 塊空白板塊的排列方式，空白板塊因旋轉或翻轉都屬於同一種排列方式，比較能從列舉的方式中找到解釋的作法。再來，我們先計算每一種模組的圖形排列數，然後依據每種模組的圖形特徵開始討論當模組旋轉後圖形排列的可能重複問題，逐一找到策略或規律性，才能順利完成計算板塊的圖形排列總數。

三、 改變遊戲條件，其會造成的結果是什麼？

（一） 當改變板塊形狀時，首要產生變化的是板塊排列模組，爾後才間接影響板塊圖形排列的旋轉個數。如當 L 形板塊轉變成 I 形板塊時，I 形板塊旋轉後的圖形位置不同，就會造成第二種不同圖形排列。

（二） 當改變圖形（熊或魚）數目或比例時，首要應避免圖形位置設計的重複性，此與解答有唯一解和非唯一解有關。

捌、 研究結論

一、 主要定理一：本研究利用 2×4 板塊模組來組合「4×4 折半切割完整矩形」與「4×4 不完整矩形切割」的作法，計算出**「折半切割完整矩形」6 塊空白板塊的排列數＝〔（總模組數）^{2}－點對稱模組〕÷2＋點對稱模組**。

二、 主要定理二：依據選取、排列概念與單塊固定法，**當有 A、B 兩不同形狀板塊，各有 m、n 個，計算兩板塊的圖形排列數＝（m！ × 2 ^{可旋轉個數}）× （n！ × 2 ^{可旋轉個數}）。**

三、 主要定理三：可從三大限制條件**-點對稱模組限制條件、2I 並列限制條件、bf 之 5P 限制條件**，觀察（m！ × 2 ^{可旋轉個數}）× （n！ × 2 ^{可旋轉個數}）在計算板塊圖形排列數是否會出現重複計數的可能。

（一） 點對稱模組限制條件分<u>同時具有線對稱與點對稱</u>、<u>點對稱</u>特徵兩大類。

1. <u>同時具有線對稱與點對稱限制條件</u>其板塊圖形總排列數＝〔（m！× 2 ^{可旋轉個數}）× （n！ × 2 ^{可旋轉個數}）〕÷4。

2. <u>點對稱限制條件</u>其板塊圖形總排列數＝〔（m！ × 2 ^{可旋轉個數}）× （n！ × 2 ^{可旋轉個數}）〕÷2。

（二） 2I 並列圖形限制條件其板塊圖形總排列數＝〔（m！× 2 ^{可旋轉個數}）× （n！ × 2 ^{可旋轉個數}）〕÷2。

（三） bf 之 5P 圖形限制條件其板塊圖形總排列數＝〔（m！× 2 ^{可旋轉個數}）× （n！ × 2 ^{可旋轉個數}）〕－〔（m－1）！×（n－1）！×重複組數÷2〕。

四、「北極歷險拼圖遊戲組」48 關的遊戲圖卡若出現 11 水的題目條件，其中兩塊板塊的熊圖形位置重複，可使此兩板塊 3L 互換成另一種解法，所以 11 水遊戲圖卡都有兩組以上解答。

五、 遊戲圖卡的 6 水條件，因板塊圖形無重疊性，**可利用限制 2I 的 f f 板塊**，找出 6 水遊戲圖卡是唯一解的出題方法。

六、<u>改變板塊條件</u>：從 3L×4+2I×2 調整為 3L×2+3I×2+2I×2 的板塊形狀，其**可增加板塊模組數，從原先 27 組提升到 39 組，也能在 11 水的條件下產生一組解答**，但其六塊圖形總排列數卻只有 1136 種或 1152 種，比原遊戲設計的圖形總排列數低。

七、<u>改變板塊條件</u>：從原先的 5 熊、6 魚、5 空白格重新分配位置並調整成 6 熊、5 魚、5 空白格，**此舉改變讓我們發現熊圖、魚圖的位置無重複，可使 11 水條件下有一組解答的產生，另六塊圖形總排列數也提高到 4608 種，比原遊戲設計的圖形總排列數 2130 高出許多**。

玖、 展望

中華民國第五十一屆中小學科學展覽會作品-骨牌夾心餅之同心圓探討，當中有針對 8 張骨牌排列成 4×4 方格的方法進行探討，進而提出 9 種不同排列類型。本研究中板塊裡熊、魚圖形問題與骨牌點數相類似，如果以我們研究中所提出的三大定理試討論骨牌 9 種類型的總點數排列數，相信會有驚人的產出與發現，請拭目以待！

壹拾、 參考文獻

一、林信安：第三十三單元排列組合。**建中科學班課程講義**。

二、國小數學教學篇第 10 冊-備課指引，第三單元線對稱圖形，南一書局，p49-60。

三、梁予芊、方紀惟、林盈臻、吉思翰、楊明峰、魏楨誠（2012）：大地主分土地-將正方形切割為四個全等的圖形之方法。**中華民國第 52 屆中小學科學展覽會作品專輯**。2014 年 12 月 10 日，取自 http://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/52/pdf/080416.pdf。

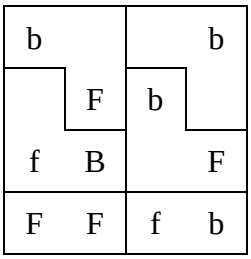
四、陳怡儒、彭敏瑄、賴昭吟（2011）：骨牌夾心餅之同心圓探討。**中華民國第 51 屆中小學科學展覽會作品專輯**。2015 年 3 月 12 日，取自 http://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/51/pdf/080412.pdf。

五、百變拼圖-拼圖遊戲背景圖種類之推算。**屏東縣第 49 屆國中小學科學展覽會作品說明書**，2014 年 11 月 29 日，取自 https://isp.moe.edu.tw/upload/docs/edshare/.../0fd.../。

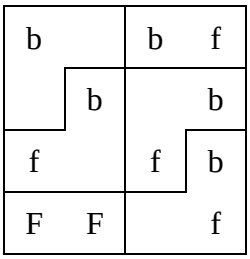
壹拾壹、 附件資料

一、 遊戲圖卡 48 關的解答（配合 p7），27 組不同模組排列因板塊圖形位置不同而產生許多解答，例如第 1 題和第 11 題、第 3 題和第 20 題、第 5 題和第 18 題、第 31 題和第 35 題、第 41 題和第 46 題等的模組相同，但熊圖、魚圖位置不同。

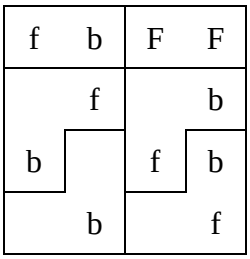
第 1 題



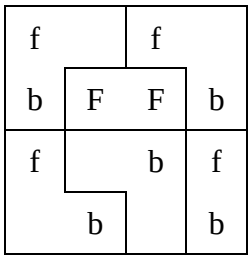
第 2 題



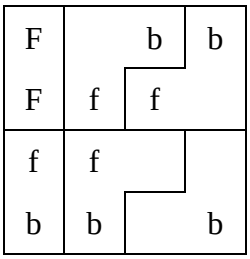
第 3 題



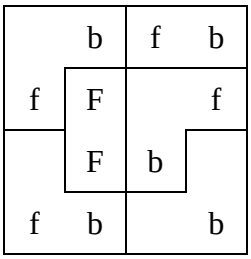
第 4 題



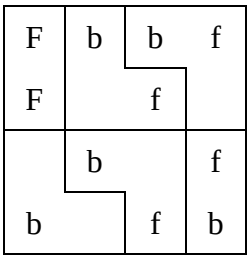
第 5 題



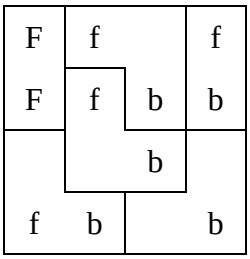
第 6 題



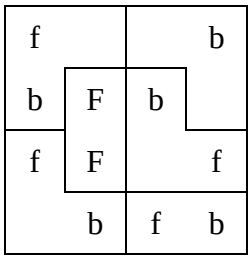
第 7 題



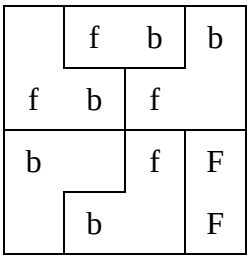
第 8 題



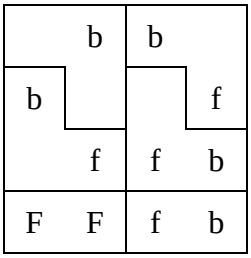
第 9 題



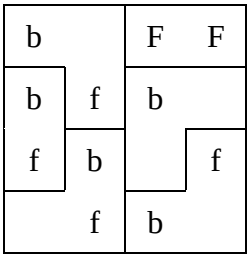
第 10 題



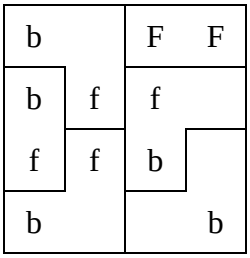
第 11 題



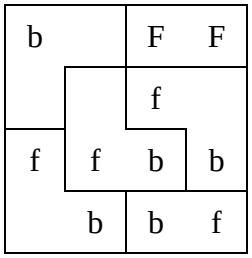
第 12 題



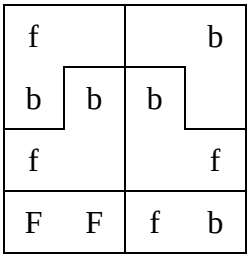
第 13 題



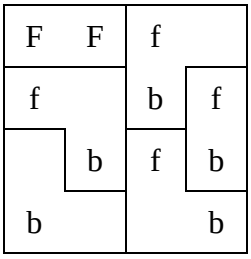
第 14 題



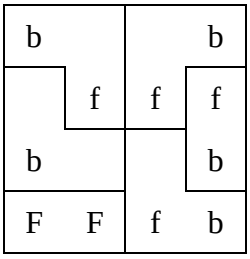
第 15 題



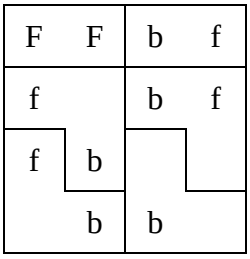
第 16 題



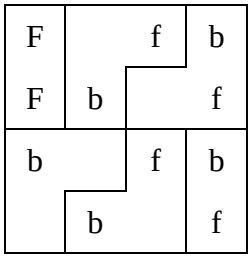
第 17 題



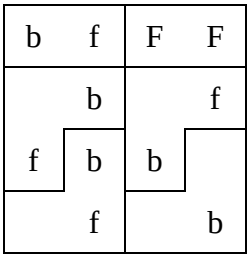
第 18 題



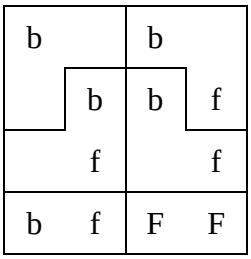
第 19 題



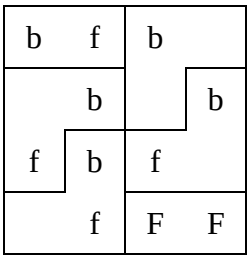
第 20 題



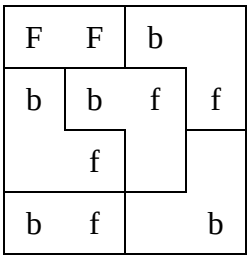
第 21 題



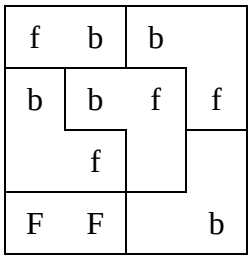
第 22 題



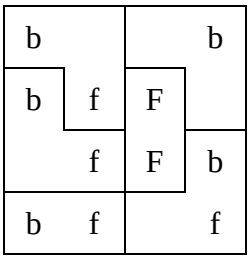
第 23 題



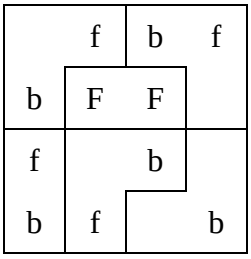
第 24 題



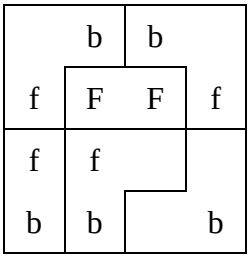
第 25 題



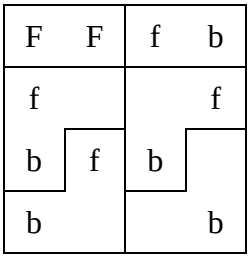
第 26 題



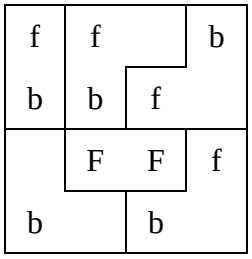
第 27 題



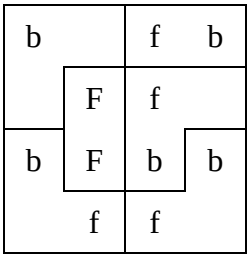
第 28 題



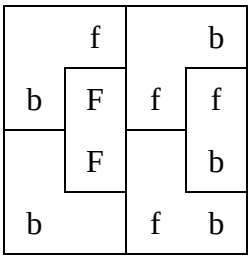
第 29 題



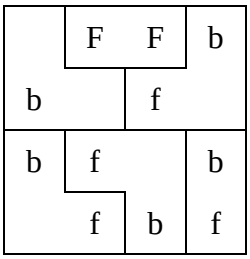
第 30 題



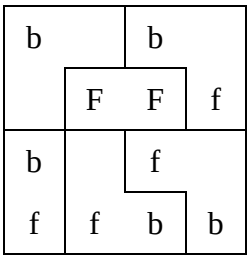
第 31 題



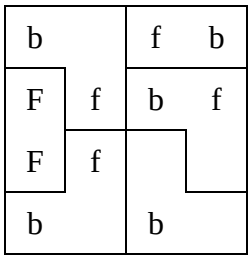
第 32 題



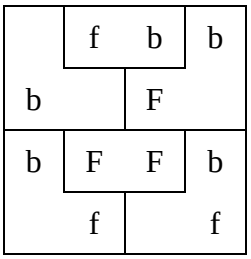
第 33 題



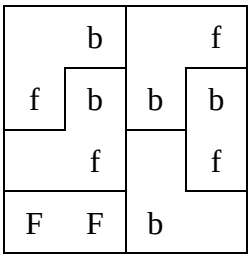
第 34 題



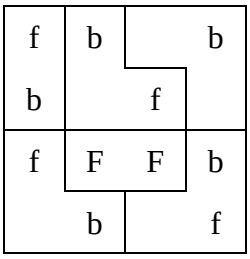
第 35 題



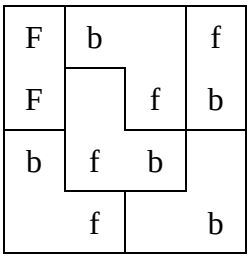
第 36 題



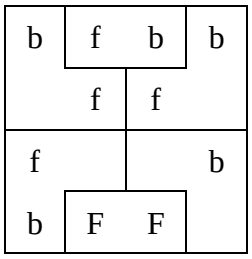
第 37 題



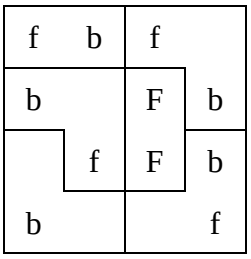
第 38 題



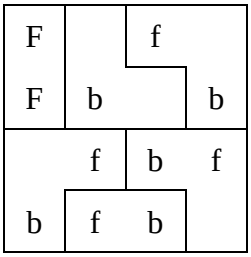
第 39 題



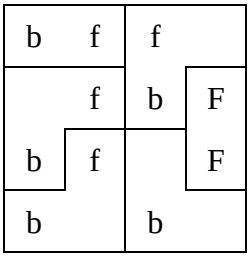
第 40 題



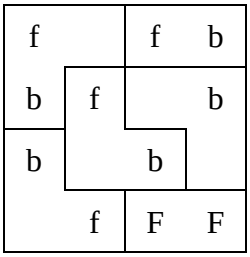
第 41 題



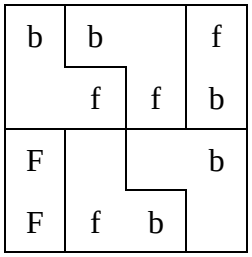
第 42 題



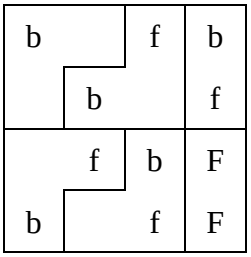
第 43 題



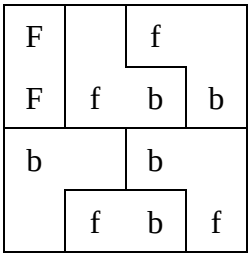
第 44 題



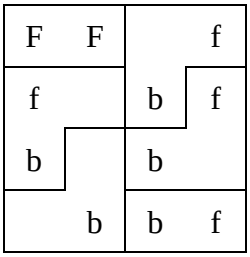
第 45 題



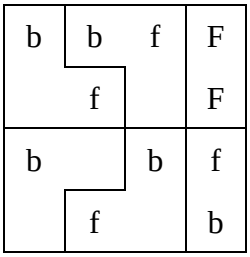
第 46 題



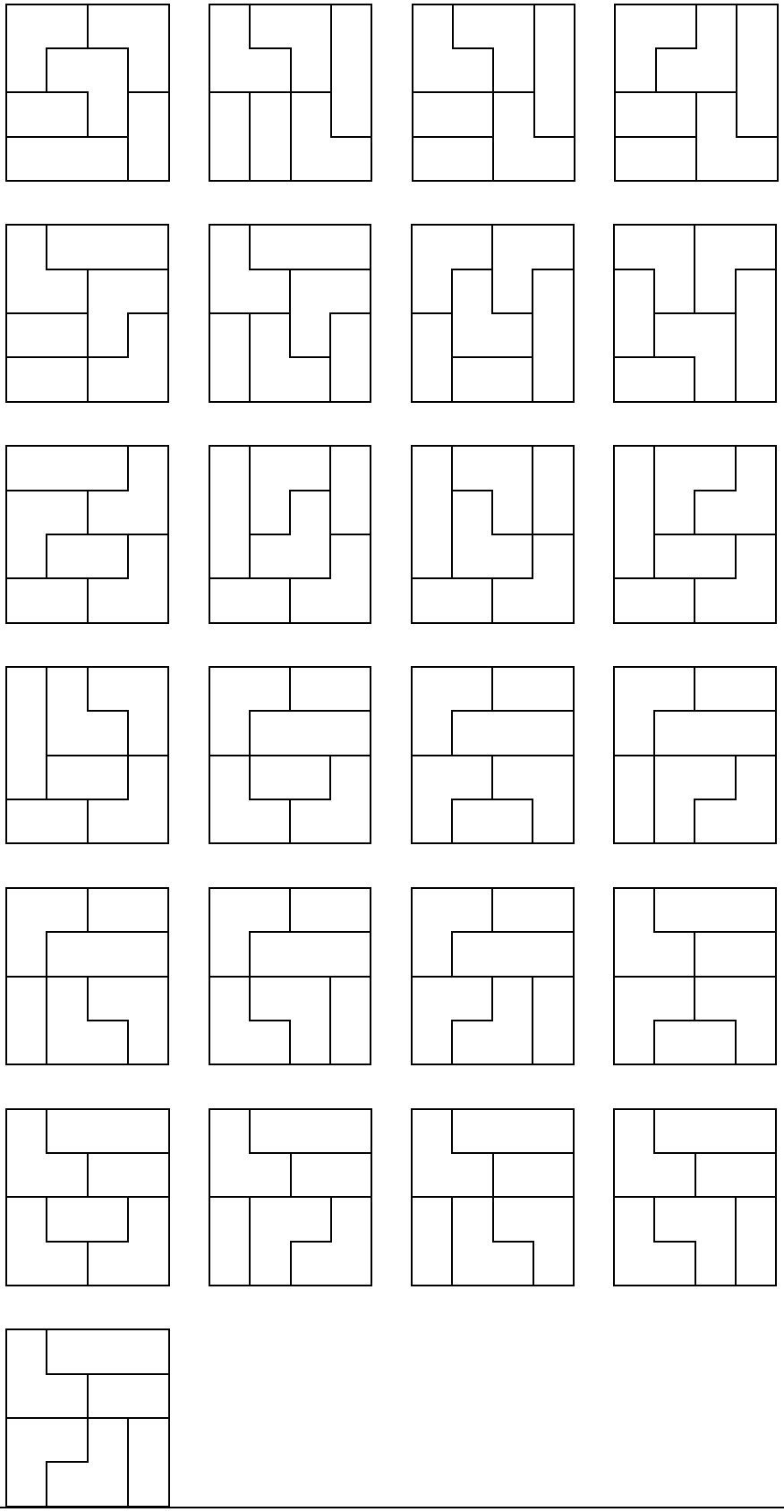
第 47 題

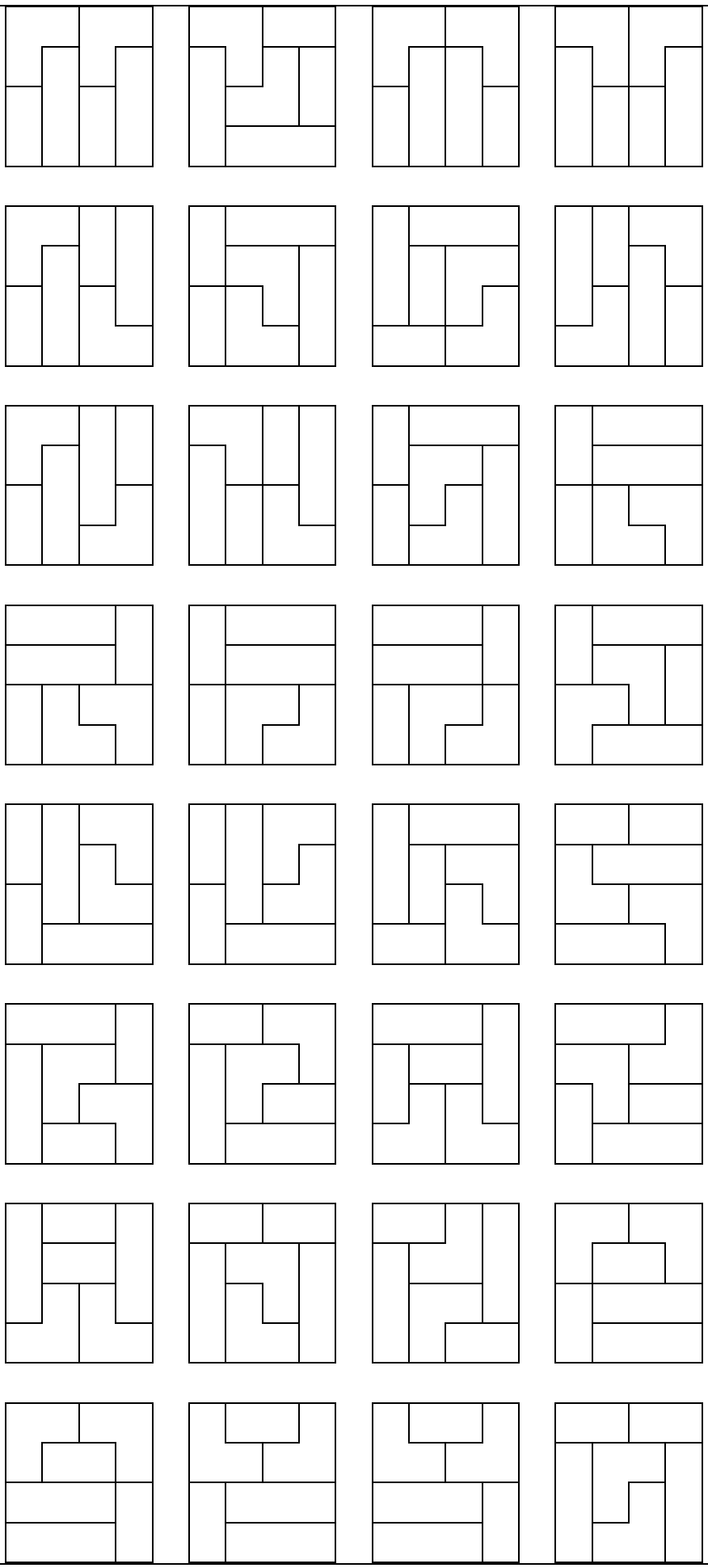


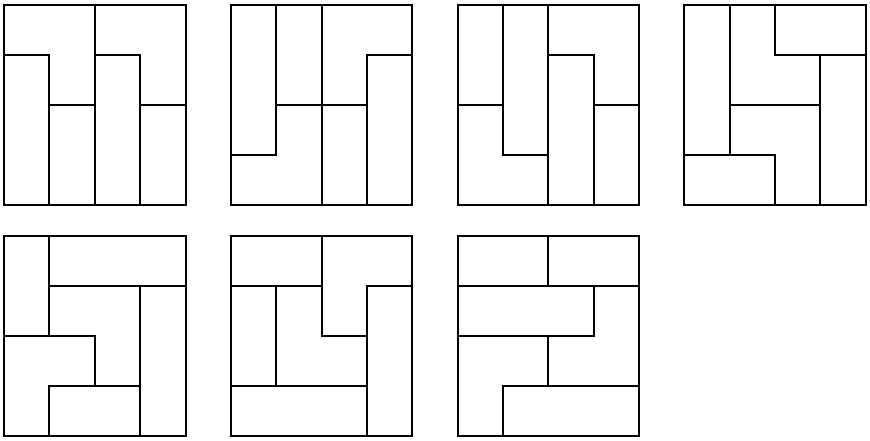
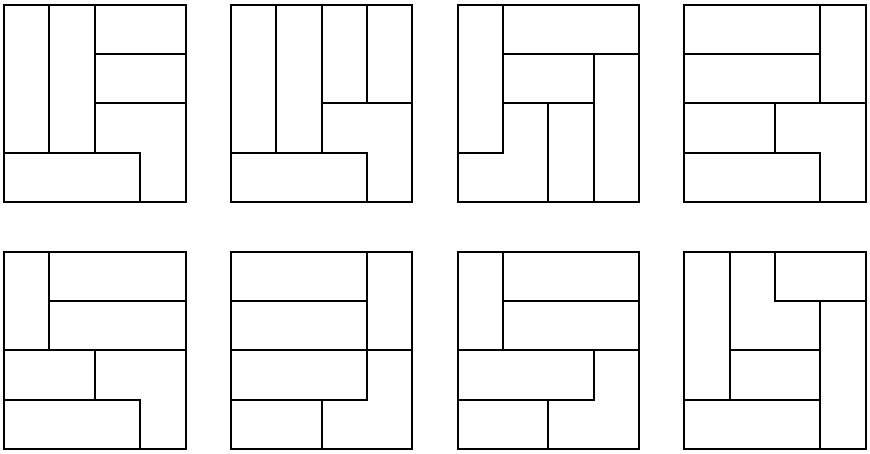
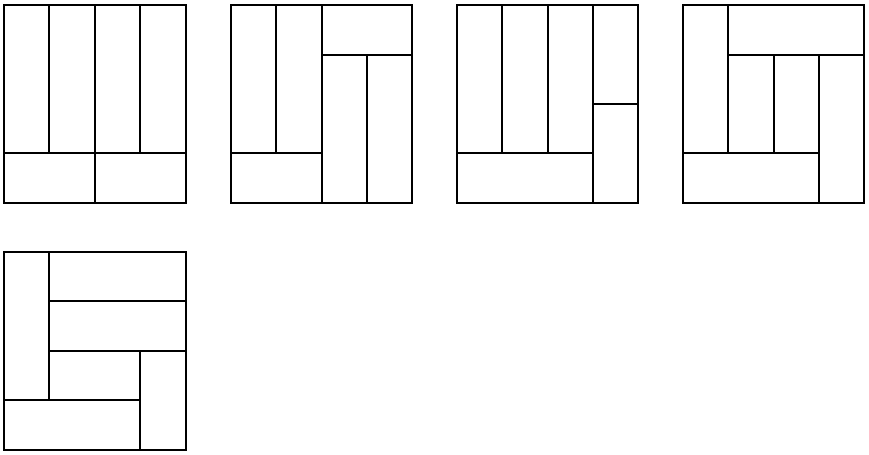
第 48 題



二、　本遊戲的板塊由 3 連塊、2 連塊所組合而成，3 連塊有兩種變化類型：3I 和 3L，所以我們將板塊設計依 3I 和 3L 搭配方式分成四大類（配合 p16）。

改變類型	總模組數	總模組圖例
3L×3+3I×1+2I×2	25	

3L×2+3I×2+2I×2	39	

3L×2+3I×2+2I×2	39	
3L×1+3I×3+2I×2	8	
3I×4+2I×2	5	

【評語】080402

這件作品的研究主題在探討魚與熊在海水及冰的問題。主題非常有趣味。本件作品在研究的質量具有相當的可讀性，學生對作品的了解相當深入，作品的廣度及深度都相當不錯。