中華民國第55屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組　數學科

040419

時來運[轉]-以3x3盤面結構分析化簡轉珠遊戲並尋求最短步數

學校名稱：國立馬祖高級中學

作者：	指導老師：
高二 林禹碩	鄭景文
高二 曹立儒	卜文強
高二 曹博凱	

關鍵詞：最短步數、轉珠遊戲、動態規劃

摘要

近年來流行的轉珠遊戲大同小異[1]，其玩法是可以從任一顆珠子來移動，所以能自由移動的方式相當多，找出最短移動路徑也相對的複雜。起初先從數字拼圖開始[2]研究起，若起手之珠子看成是空格的話，移動珠子等同於數字拼圖的數字移動至空格處，別於數字拼圖的固定位置擺放，轉珠遊戲以這個架構延伸變化。本篇試著在 3X3 的盤面中，放上三種不同顏色的珠子，找出其最佳移動路徑與其規律性。

壹、　研究動機

近幾年智慧型手機當道，也幾乎人手一台，各種 APP 遊戲爭奇鬥豔，其中一家遊戲公司曾經締造月營業額兩億元的紀錄[1]，也拿下最受歡迎的遊戲 APP 蟬聯幾周冠軍，開始變成所有遊戲爭相模仿之對象，我們統稱這類遊戲為轉珠遊戲，顧名思義，遊戲戰鬥畫面是在有限的時間內，一個 5X6 的盤面中，有 5 種顏色的珠子，玩家任意挑一個珠子起手，藉由移動與相鄰珠子做位置交換，來達到使相同顏色之珠子三粒或三粒以上的排成一直線或橫線，排成一線後就可以消除，消除越多數目可以對敵人造成更多的傷害。這看似簡單的遊戲，卻隱含著極大的學問:有限的時間內，為了達成最高連續消除數的最短步數為何?是否存在唯一之最佳解呢?引發了我們的興趣。

貳、　研究目的

找出 3X3 盤面上三種顏色珠子，以最短步數達到三色皆可以排成一直線之路徑，以及最短步數

參、　研究設備及器材

電腦
智慧型手機
平板電腦

肆、　研究過程或方法

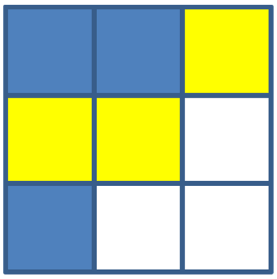
▲圖 1 遊戲畫面擷取圖

遊戲中，以轉珠遊戲為主要戰鬥主軸，次要是卡片蒐集，卡片分成五大屬性陣營：光、暗、火、水、木，存在的屬性相剋，水剋火、火剋木、木剋水、光剋暗、暗剋光，不同卡片有不同能力，藉由自身卡片組合搭配其他玩家的隊長，來達到攻擊最大化的效果。戰鬥中，消除紅色珠，即是火屬性卡片發動攻擊，藍色珠則是水，綠色珠則是木，紫色珠則是暗，黃色珠是光，粉紅色是心，用來補血用，敵人有自己的發動攻擊的回合數，敵人發動攻擊前先擊倒對手當然是最好的，萬一沒辦法短時間擊倒，則需要考慮卡片能力，或是卡片等級，或是轉珠能力(想辦法消除心屬性補血)，所以再進入關卡前，應想好剋敵之策略在選擇最適合的隊員再上陣。

遊戲中由於三個同顏色珠子連成一線(直或橫)或三個以上連續不斷就可以消除，通常新手在玩的時候，在有限的時間內，最少有能力至少做到三同色珠排成一直線，但從何處當起手點下手，該怎麼走才能達到最多消除數，這其實是一門大學問，最直觀的就是我們把盤面所有可能之排列組合列出來，然後分析哪一條路徑最短，消除數又最多者，就是我們的最佳解。

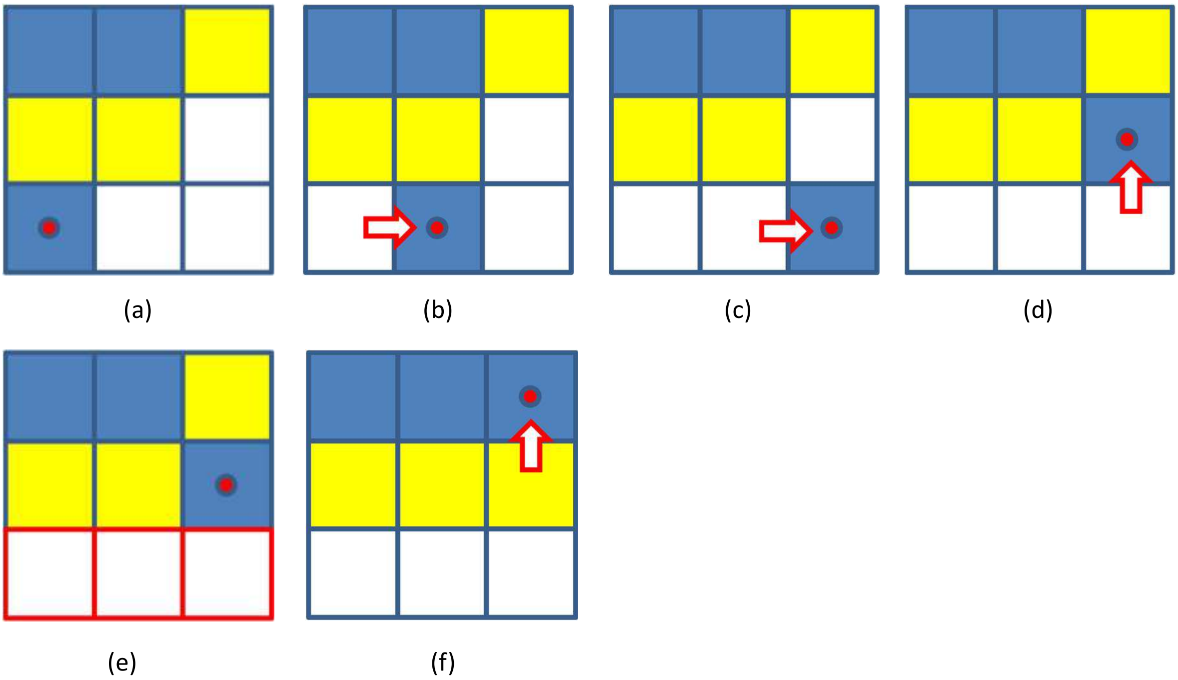
於是我們先從三顆珠子之相對情況研究起(因為最少 3 個連直線才能消除)，我們先於 3X3 之盤面來做探討，假設 3X3 的盤面內有只有三種同色的三顆珠，其排列組合的圖形結果 $\frac{C_3^9\times C_3^6\times C_3^3}{3!}=280$，旋轉視為相同情況則化簡為 $280\times\frac{1}{4}=70$ 種。

接著我們假設在 3X3 的盤面上，放置上三種不同顏色的珠子，如圖 2。同時研究三種顏色珠子(藍色、黃色、白色)的排列。



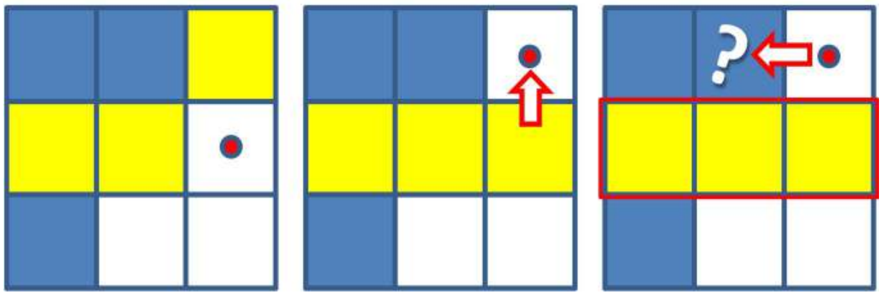
▲圖 2

遊戲內，每次起手都有固定時間 5 秒，5 秒內如果可以移動夠快，移動到上千步都有可能，上下左右滑動，加上路徑也可以回頭，所以路徑總數無法估計。經過多次的實際操作，我們找出最佳路徑為移動 4 步，如圖 3 所示



▲圖 3 以紅點在上的方塊為起手點，沿箭頭方向作移動

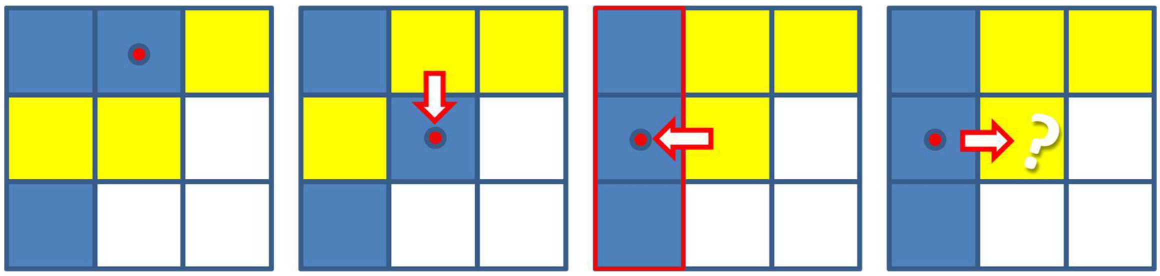
經多次實驗，我們可以觀察到如圖 3 所示，在最短步數移動的過程中，途中<u>必定</u>會完成一種顏色連線後，如圖 3(e)，然後在剩下 2X3 或 3X2 的盤面，再想辦法完成兩種顏色的排珠，所以初步得到一個想法：**<u>先想辦法完成一個顏色連線</u>**，稱為：**<u>起手連線</u>**，而且選定先完成的顏色連線希望越短步數越好。



(a) (b) (c)

▲圖 4 起手連線選定黃色，只需移動一步即可完成

圖 4(a)分析三種顏色，黃色完成起手連線最少需要：一步；藍色完成起手連珠最少需要：二步；白色完成起手連珠最少需要：三步，故以貪婪演算法[5]的想法，取最少步數 1 步，所以選擇黃色當做起手連線，如圖 4(b)所示，當我中間完成連珠後，發現剩下兩個顏色也無法完成連線，除非再重新破壞中間連珠。故我們又得到一個想法：**起手連線必定要在邊界完成，不能在中間完成**



(a) (b) (c) (d)

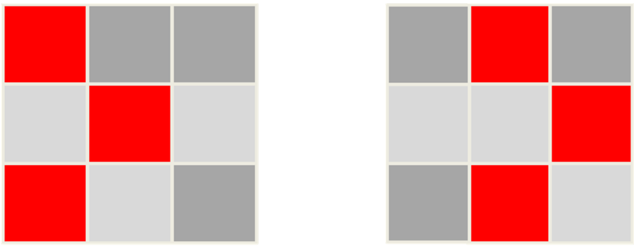
▲圖 5 起手連線選定藍色，直接拿藍色珠移動兩步完成

鑒於上述的想法：起手連線不能在中間完成，只好選定藍色或白色來當作第一步達成的連線目標色，因為此兩色都剛好有兩個珠落在邊界，只需想辦法移動剩下落單的珠子即可完成連線，我們就直接取落單珠移動過去完成連線，如圖 5(a)藍色完成連珠最少需要：兩步；白色完成連珠最少需要：三步；黃色要在邊界完成連線步數定超過藍色、白色，所以不在考慮範圍內，以貪婪演算法[5]的想法，取最少的步數達成起手連線，選定藍色落單珠起手，如圖 5(a)所示，移動兩步，如圖 5(b)、圖 5(c)所示，完成起手連線後發現，剩餘兩個顏色尚未完成連線，但再移動藍色珠，又會破壞掉起手連線，故我們又得到一個想法：**起手色珠必不能與起手連線同色**

總結上述三個想法後，如何決定以誰當做起手珠才有最短步數以及決定起手連線色，變成問題研究的最大關鍵，實際上，輪流選定起手連線色後，把剩餘 6 個顏色珠子都當作起手珠去做移動，做 6 次後從中挑選最少步數者再決定起手連線色，至少要完成 3x6=18 次(3 種顏色，6 個剩餘顏色珠)的移動紀錄，完成起手連線後，剩下 2X3 或 3X2 盤面剩餘兩色珠此時再

想辦法完成剩餘顏色連線，所以如何可以快速決定起手珠以最短步數達成目的，變成目前最重要的課題。

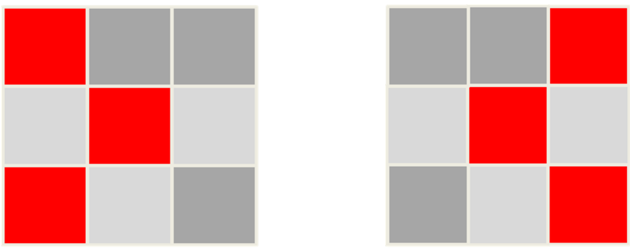
先從研究三色珠的在盤面的相對位置開始，在**邊界固定**的九宮格內，如圖 6(a)、圖 6(b)所示，雖然三顆紅色珠的相對位置相同，但剩餘的格子內會有其他顏色珠不同的座落，所以我們仍視平移為兩個不同的圖形。



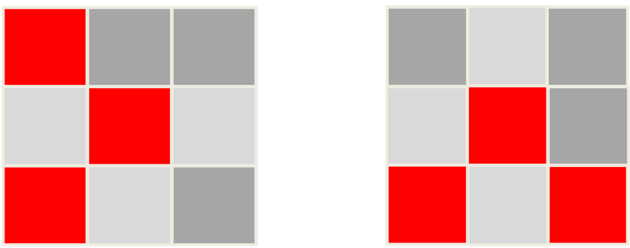
(a) (b)

▲圖 6(a)所有紅珠向右平移一格變為(b)，但有不同顏色的珠子座落，故視為不同圖形

研究鏡射如圖 7(a)、圖 7(b)所示， 完成邊界的紅色珠連線都只需要一步即可，再研究旋轉如圖 7(c)、圖 7(d)所示，完成邊界的紅色連線也只需要一步即可，故我我們視旋轉、鏡射為同一種型。



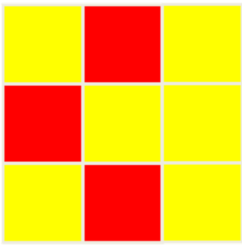
(a) (b)

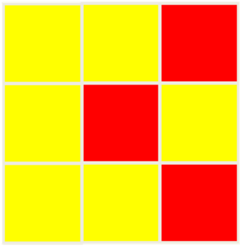


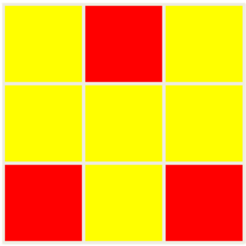
(c) (d)

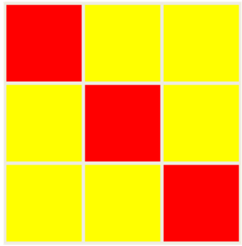
▲圖 7(a) (b)互為鏡射，(c)(d)互為旋轉

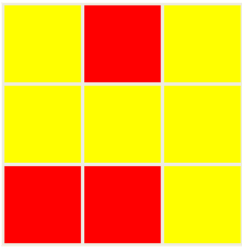
進一步討論 3X3 盤面中，鏡射、旋轉視為相同圖型外，把所有的型排出來，並將其命名，共有 17 種，如下圖 7 所示：

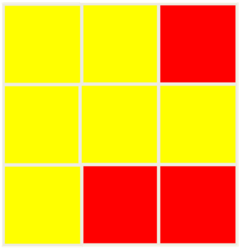

(a)　邊く型

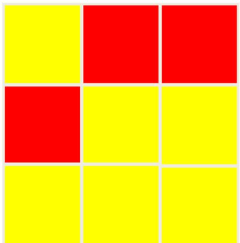

(b)　中く型

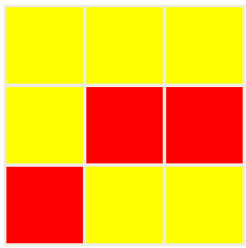

(c)　三角型

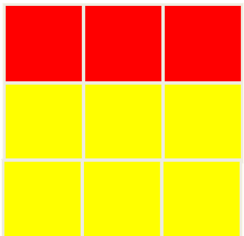

(d)　斜型

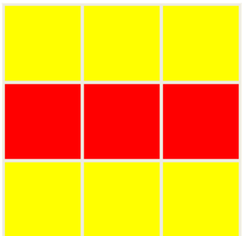

(e)　中二型

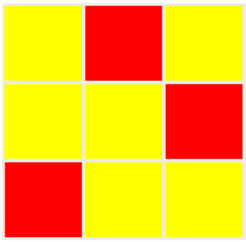

(f)　邊二型

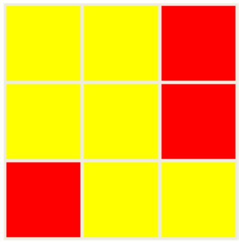

(g)　中ㄏ型

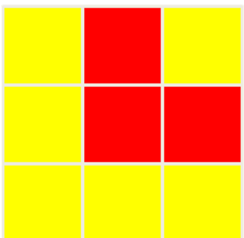

(h)　邊ㄏ型

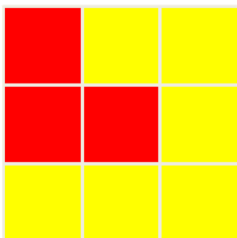

(i)　邊一型

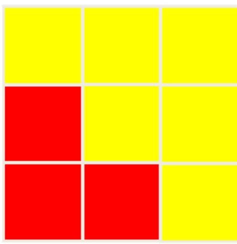

(j)　中一型

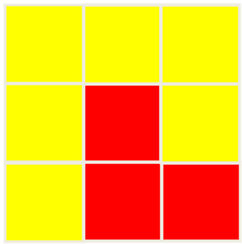

(k)　Y 型

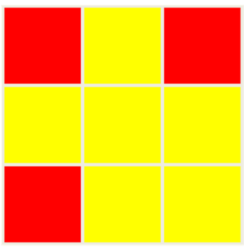

(l)　J 型


(m)　L22 型


(n)　L12 型

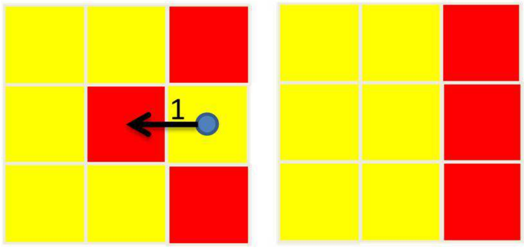

(o)　L31 型


(p)　L32 型


(q)　直角型

▲圖 8　3X3 格子內之所有可能的 17 種型

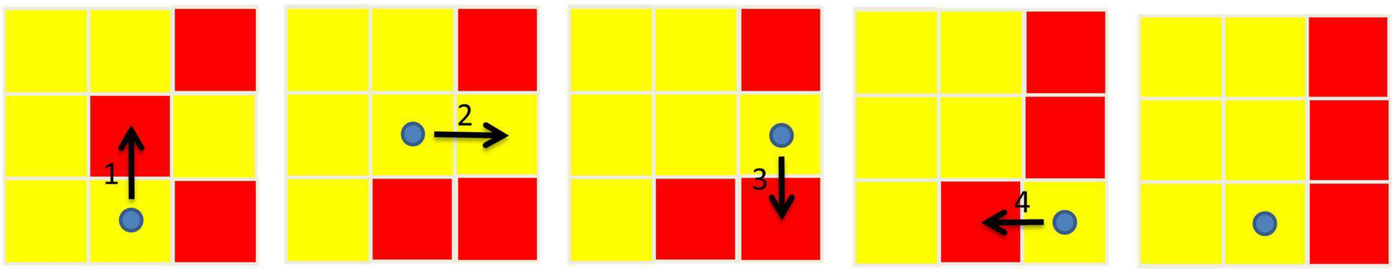
我們研究每一種型其最小完成步數，並標示如圖，以中ㄑ型為例:



(a) (b)

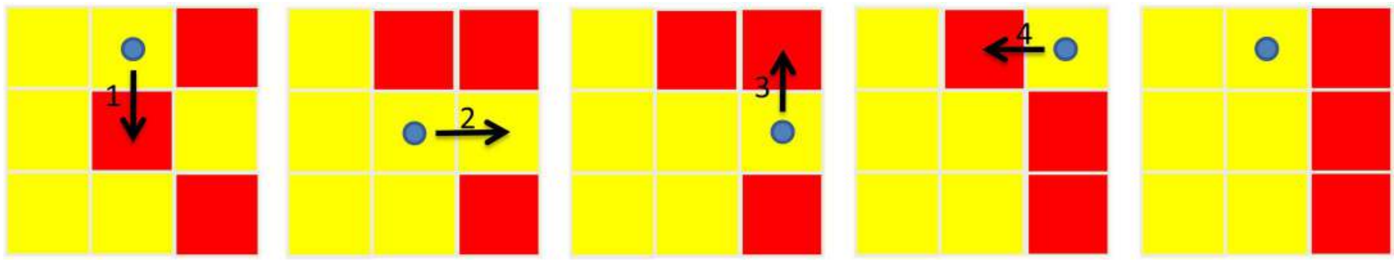
▲圖 9(a)中圓圈為起手點，向左移動 1 步，(b)為完成之圖型

中ㄑ型不只一種解法，如圖 10、圖 11 所示：



(a) (b) (c) (d) (e)

▲圖 10 不同起手點之流程圖

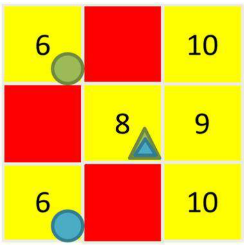


(a) (b) (c) (d) (e)

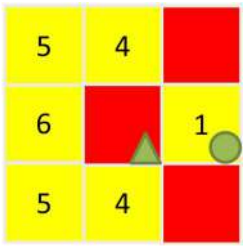
▲圖 11 不同起手點之流程圖

由於此中ㄑ型在九宮格最右邊界已經坐落兩紅色珠，所以會選擇將起手連線完成於九宮格的右側，以達到最少的移動步數，若硬是要將起手連線完成於上側、下側或左側，會產生步數絕對大於右側。

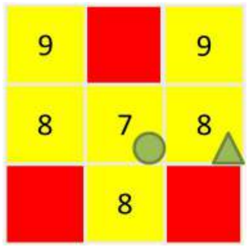
觀察圖 10、圖 11，不同的起手珠雖然完成起手連線的最短步數相同，但是完成起手連線後，剩餘兩色珠子的位置也有所不同，不同位置會影響剩下兩個顏色完成花費之步數。我們定義花費最少步數完成一型連線之起手珠，稱為該型的「入口」，稱完成起手連線後，珠所在的位置為「出口」。每種型的入口，不只一個，所對應的出口位置也不盡相同，如圖 10、圖 11 所示，一樣都是最短 4 步可以完成，就有兩個入口，可供選擇，我們將 17 種型歸納出最短步數如圖 12 所示，並標記入口以及出口。



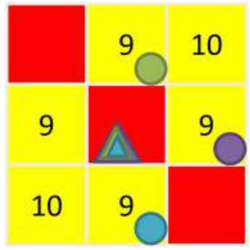
(a) 邊く型



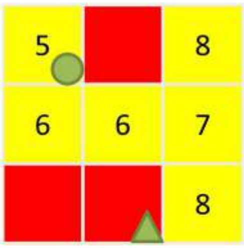
(b) 中く型



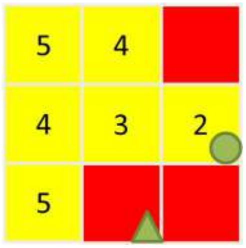
(c) 三角型



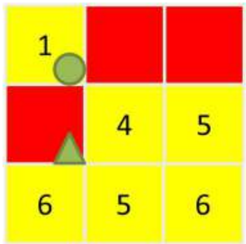
(d) 斜型



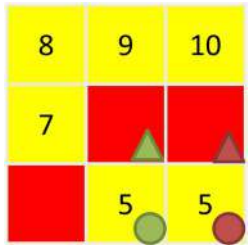
(e) 中二型



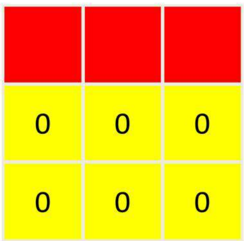
(f) 底二型



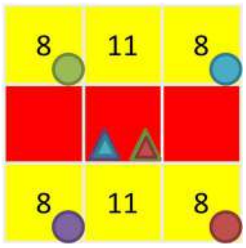
(g) 中厂型



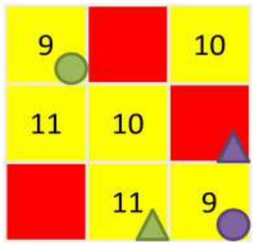
(h) 底厂型



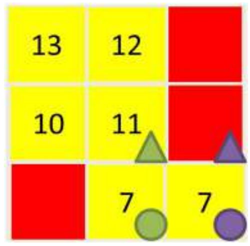
(i) 底一型



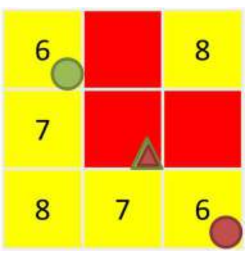
(j) 中一型



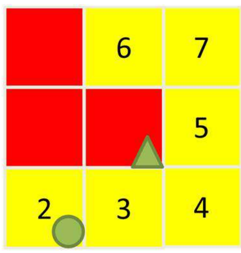
(k) Y 型



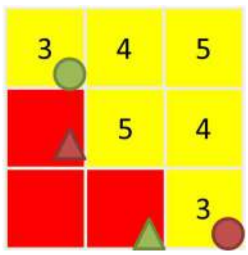
(l) J 型



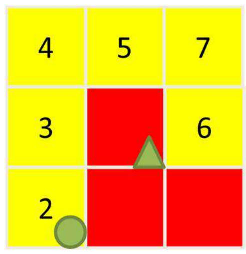
(m) L22 型



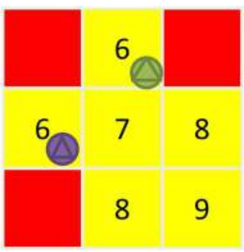
(n) L12 型



(o) L31 型



(p) L32 型



(q) 直角型

▲圖 12　3X3 最短步數以及起點終點圖(○:表示入口　△:表示出口)

$$A=\begin{bmatrix}6&0&10\\0&8&9\\6&0&10\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}5&4&0\\6&0&1\\5&4&0\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}9&0&9\\8&7&8\\0&8&0\end{bmatrix}\quad D=\begin{bmatrix}0&9&10\\9&0&9\\10&9&0\end{bmatrix}$$

$$E=\begin{bmatrix}5&0&8\\6&6&7\\0&0&8\end{bmatrix}\quad F=\begin{bmatrix}5&4&0\\4&3&2\\5&0&0\end{bmatrix}\quad G=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&4&5\\6&5&6\end{bmatrix}\quad H=\begin{bmatrix}8&9&10\\7&0&0\\0&5&5\end{bmatrix}$$

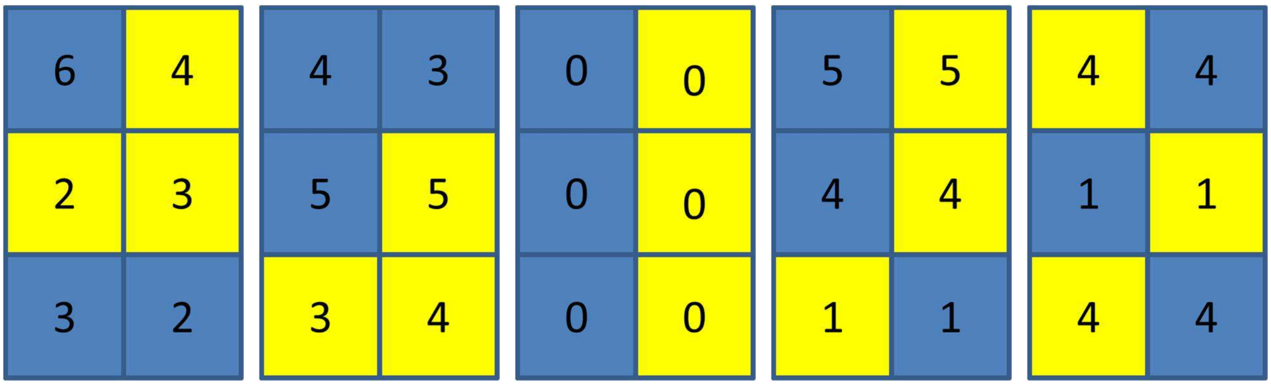
$$I=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\quad J=\begin{bmatrix}8&11&8\\0&0&0\\8&11&8\end{bmatrix}\quad K=\begin{bmatrix}9&0&10\\11&10&0\\0&11&9\end{bmatrix}\quad L=\begin{bmatrix}13&12&0\\10&11&0\\0&7&7\end{bmatrix}$$

$$M=\begin{bmatrix}6&0&8\\7&0&0\\8&7&6\end{bmatrix}\quad N=\begin{bmatrix}0&6&7\\0&0&5\\2&3&4\end{bmatrix}\quad O=\begin{bmatrix}3&4&5\\0&5&4\\0&0&3\end{bmatrix}\quad P=\begin{bmatrix}4&5&7\\3&0&6\\2&0&0\end{bmatrix}$$

$$Q=\begin{bmatrix}0&6&0\\6&7&8\\0&8&9\end{bmatrix}$$

▲表 1　將圖 12 繪製成矩陣

歸納出表格後，利用查表方式，便可快速選定最短步數之起手連線色，完成起手連線後，整個盤面便只剩下 2X3 或 3X2 的盤面，我們把所有的可能分析後列出。鏡射、旋轉視為相同圖型，如圖 13 所示：



(a)　L 二型　(b)　雙 L 型　(c)　雙一型　(d)　雙ㄏ型　(e)　雙ㄑ型

▲圖 13　3X2 盤面上所有可能的型

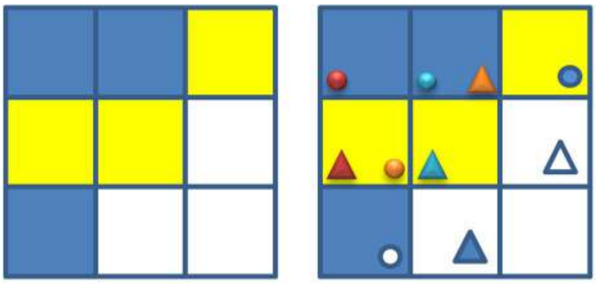
$$R=\begin{bmatrix}6&4\\2&3\\3&2\end{bmatrix}\quad S=\begin{bmatrix}4&3\\5&5\\3&4\end{bmatrix}\quad U=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}\quad V=\begin{bmatrix}5&5\\4&4\\1&1\end{bmatrix}\quad W=\begin{bmatrix}4&4\\1&1\\4&4\end{bmatrix}$$

▲表 2　將圖 13 繪製成矩陣

有了表 1、表 2 這兩個表格當做子問題的基本解答，以下我們提出兩種想法來尋求 3X3 盤面三種顏色珠連線之最短步數。

A.循序漸進法：一步一步抽絲剝繭求解

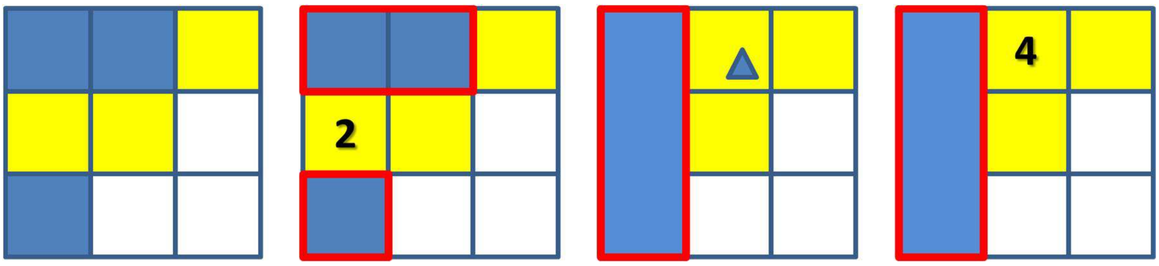
拿圖 2 做範例來實現我們的做法，表示成矩陣如圖 14(c)，想將相同元素連成一線。我們先將所有出入口做分析，如圖 14(b)所示，假設先選擇藍色當起手連線，查表 1，為 F 矩陣，以最短步數 2 之唯一入口進行移動，如圖 15(b)，由於最後一定會形成連線，所以我們可以直接把入口的黃色直接替換到出口的位置，方便我們快速想像最後 2X3 或是 3X2 的盤面分布情況，如圖 15(c)，此時看此 3x2 盤面，查表 2 矩陣 S 之出口位置，對應的步數為 4 步，故以藍色當起手連線色之最短步數為 2+4=6。



$$\begin{bmatrix} a & a & b \\ b & b & c \\ a & c & c \end{bmatrix}$$

(a) (b) (c)

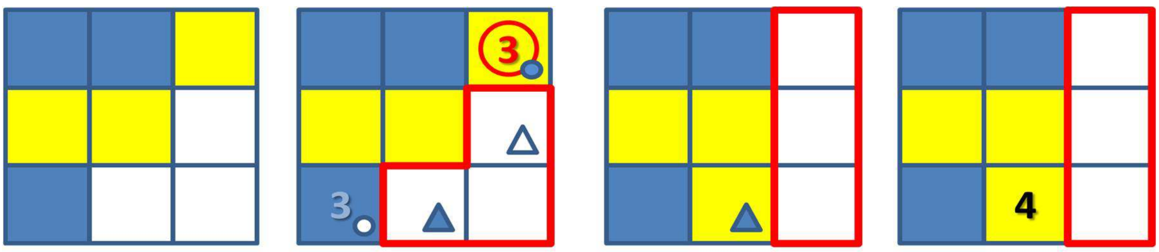
▲圖 14



(a) (b) (c) (d)

▲圖 15 實際分析，以藍色當起手連線

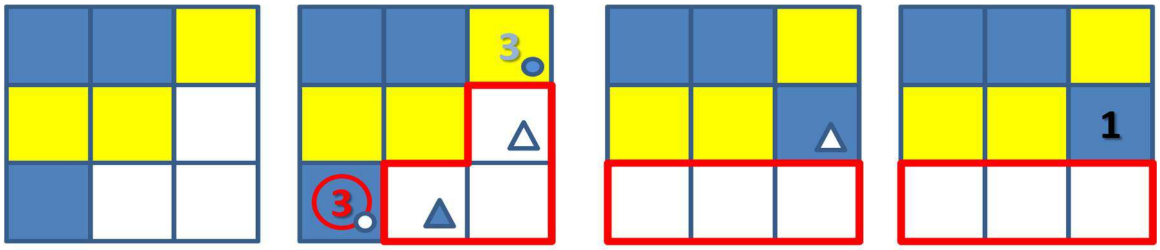
我們再分析以白色當起手連線色，查圖表 1，發現為矩陣 O，發現最短步數之入口有兩個，先選定最右上的入口做起手點，如圖 16(b)，由於我們已經知道出口位置，可以直接拿入口珠跟出口珠直接做替換，如圖 16(c)，再查表 2，為 R 矩陣，對應的步數為 4，如圖 16(d)，故以白色當做起手連線色之最短步數為 3+4=7。



(a) (b) (c) (d)

▲圖 16 實際分析，以白色當起手連線，選定最右上入口為起手

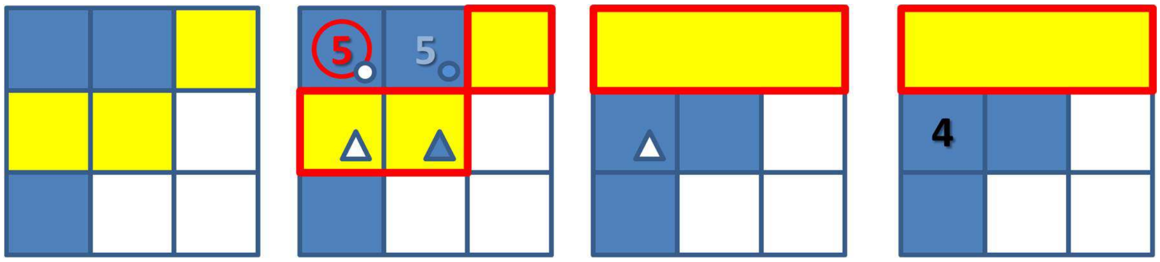
我們再分析以白色當起手連線色，選定最左下的入口做起手點，如圖 17(b)，由於我們已經知道出口位置，可以直接拿入口珠跟出口珠直接做替換，如圖 17(c)，再查表 2 矩陣 V，對應的步數為 1，如圖 17(d)，故以白色當做起手連線色之最短步數為 3+1=4。



(a) (b) (c) (d)

▲圖 17 實際分析，以白色當起手連線，選定最左下入口為起手

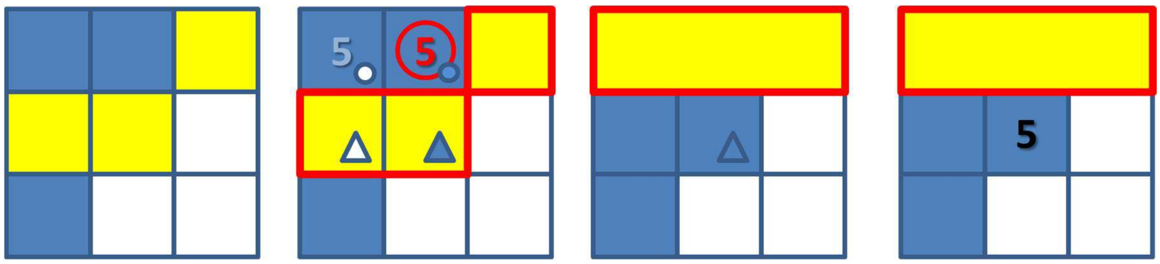
我們再分析以黃色當起手連線色，查表 1，矩陣 H，發現最短步數之入口有兩個，先選定左上的入口做起手點，如圖 18(b)，由於我們已經知道出口位置，而且完成連線一定是在邊界，可以直接想像一定是中間兩黃色跟上面兩藍色做互換，如圖 18(c)，再查表 2，矩陣 S，對應的步數為 4，如圖 18 (d)，故以黃色當做起手連線色之最短步數為 5+4=9。



(a) (b) (c) (d)

▲圖 18 實際分析，以黃色當起手連線，選定最左上入口為起手

我們再分析以黃色當起手連線色，這次選中間上的入口做起手點，如圖 19(b)，由於我們已經知道出口位置，而且完成連線一定是在邊界，可以直接想像一定是中間兩黃色跟上面兩藍色做互換，如圖 19(c)，再查表 2，矩陣 S，對應的步數為 5，如圖 19(d)，故以黃色當做起手連線色之最短步數為 5+4=9。



(a) (b) (c) (d)

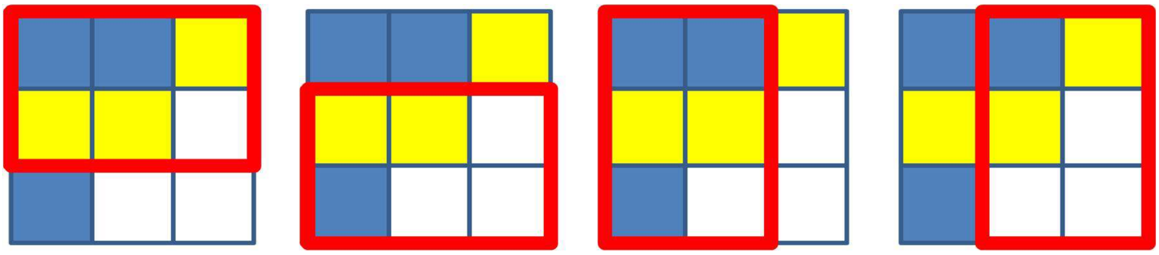
▲圖 19 實際分析，以黃色當起手連線，選定最中上入口為起手

綜觀以上圖 14、圖 15、圖 16、圖 17、圖 18 和圖 19，發現最短步數為選定為圖 17 以白色為起手連線為最短 4 步。但不能用貪婪演算法[5]的想法，不見得會是最短步數之最佳解。

B. 導果為因：由結論反推並刪除可能耗費太多步數之可能性

一個 3X3 的盤面內裡面有三種基本型，17 個基本型的之入口出口最少一組，最多四組，所以 3X3 的盤面內，由於位置分佈的關係，最多要檢查 8 組出入口，如：中一型(4 組出入口)、J 型(2 組出入口)、J 型(2 組出入口)，最少要檢查 2 組，如：底一型(0 組出入口)、邊く型(一組出入口) 、中く型(一組出入口)。希望可以找到更快速的方法，於是我們先從結論看起，因為問題的最後一定會變成 2X3 或 3X2 的盤面，所以我們直接看最終結果的盤面先來分析，固定 2X3 或 3X2 的盤面內不做移動，移動盤面外的三顆珠子可以確保獲得較少且不破壞其他型而造成多餘浪費的步數，且最多只需要判斷四次即可。拿圖 2 當例子做說明，分析如圖 20 所示。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$



(a) (b) (c) (d)

▲圖 20 直接分析 2X3 或 3X2 的盤面

如圖 20(a)，將原本 3X3 盤面位置用矩陣方式說明位置， a_{23} 的白色珠顯然在 2X3 盤面內是多餘的珠子，缺一藍色珠即可完成完整的盤面，所以移動盤面外的 a_{31} 至 a_{23} 需花費 3 步，並且查表 2，矩陣 V，對應的位置步數 1 步，共 4 步完成。

我們再檢查圖 20(b)，固定的 2X3 盤面內， a_{31} 有顆藍色珠是多餘的，但盤面外的 a_{13} 黃色珠要移動過來做替換，會大費周章破壞整個盤面，故直接捨棄，不多做討論。

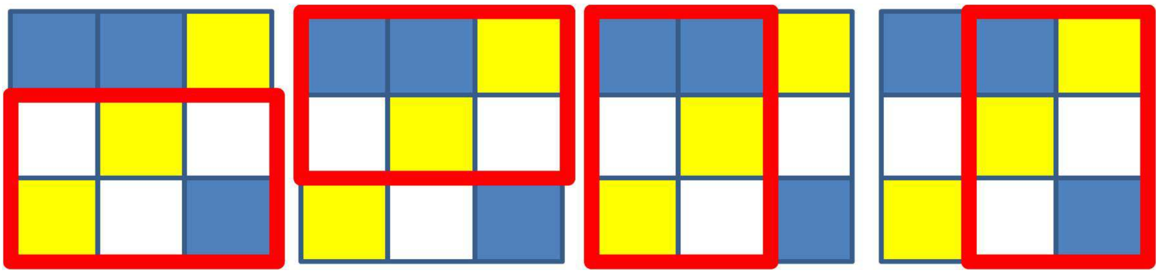
再來檢查圖 20(c)，固定的 3X2 盤面內， a_{32} 的白色珠是多餘的，移動盤面外 a_{13} 的黃色珠至 a_{32} ，花費 3 步，再查表 2，矩陣 R，對應的步數 4，共 7 步完成。

再來檢查圖 20(d)，固定的 3X2 盤面內， a_{12} 的藍色珠是多餘的，移動盤面外 a_{21} 的黃色珠至 a_{12} ，花費 2 步，再查表 2 對應矩陣 S 之步數為 4，共 6 步完成。

在此例子，只需要做 3 次判斷即可，跟方法一要做 7 次相比，大幅減少判斷次數。

伍、 討論

我們探討方法一、二有沒有不適用的情況？或是特例？由於我們提出分析的方法是考慮了所有可能的情況，故方法一是確定可以解決所以 3X3 內盤面的問題，沒有例外。但方法二是由結果去推導該由哪個珠子做起手，主要判斷依據是看 2X3 或 3X2 盤面內缺哪個珠，再去考量。圖 21 發現剛好 2X3 或 3X2 的盤面的顏色珠都是兩顆，無法判以哪顆顏色珠起手較好，故此種型就只能使用方法一解之。


(a) (b) (c) (d)

▲圖 21 利用方法二分析，斜型、J 型、邊く型

若非上述此種情況，方法二我們提出證明較優於方法一，設解答方程式為 A(x)，起手連線的步數為 F(y)，2X3 或 3X2 的盤面解為 S(z)，則 A(x)=F(y)+S(z)

方法一:

觀察圖 12 和表 1，發現以各種型的入口起手，其步數最多為 9 最少為 0，則 F(y)= $\{x \mid 0 \le x \le 9\}$，2X3 或 3X2 的盤面中，觀察圖 13 和表 2，則S(z)=$\{x \mid 0 \le x \le 6\}$，又 A(x)=F(y)+S(z)，則 A(x)=$\{x \mid 0 \le x \le 15\}$。

方法二:

我們利用方法二可大量縮短 F(y)起手連線步數，縮短約 60%，最少 0 步完成，最多 4 步，F(y)=$\{x \mid 0 \le x \le 4\}$，S(z)則與方法一相同，同為 S(z)=$\{x \mid 0 \le x \le 6\}$，又 A(x)=F(y)+S(z)，則 A(x)=$\{x \mid 0 \le x \le 10\}$。

上述兩者方法之前提是:只運算一次的情況下做比較，我們可以看出方法二得到的我們想要之最短步數結果一定優於方法一，要解所有的問題，方法一需要運算的次數≤ 8，方法二需要運算的次數≤ 4，整體下來，方法二效率定優於方法一。

陸、 結論

解一個 3X3 盤面內有三種顏色各三顆珠，目的是要排成三種顏色連線，一般玩家會按照自己喜好隨意抓一顆珠去做，在遊戲規定的 5 秒內甚至都無法完成，比較有經驗的遊戲玩家，可能也無法直接確定哪個珠子起手定能有最短步數，九宮格內每個珠子都當起手珠試過一輪，至少需要 9 次。

我們利用動態規劃[3]的概念，解決問題的流程圖如圖 22，在 3X3 的盤面內歸納出列出 17 種基本型，分別找到此 17 種子問題其最佳解，並製作表格，將原本大問題分解成 3 種基本型分別去解，我們提出兩個方法去解，方法一則需要花比較多時間，因為要檢查每個型之入口的步數以及出口對應的另一個表的位置步數做加總，最差的情況需要檢查 8 次，最好的情況完全不需要檢查(盤面內剛好三色連線，已經達成最後目的)，檢查完後最短步數所對應的路徑也相應而出，也比一開始要檢查 3X3 內九個珠子分別做起手，來的更有效率。

方法二則是以盡量不更動其他珠子為原則下，看 2X3 或 3X2 的盤面內缺哪個顏色珠，以框框外面的該顏色做起手，來預測排除可能會浪費多餘步數的可能情況，又可以再大幅度刪減不可能的情況，而且最多只需要做 4 次即可。

問題解決的流程如下:

▲圖 22 問題解決的流程圖

柒、　參考資料及其他

[1]神魔之塔　http://www.towerofsaviors.com/
[2]數字拼圖　http://oddest.nc.hcc.edu.tw/math161.htm
[3]動態規畫　http://www.csie.ntnu.edu.tw/~u91029/AlgorithmDesign2.html
[4] 中華民國第 54 屆中小學科學展覽會-高中職數學組:扭「轉」乾坤
http://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/54/pdf/040402.pdf
[5] 貪婪演算法 **http://en.wikipedia.org/wiki/Greedy_algorithm**

【評語】040419

本作品的研究動機來自近年來流行的轉珠遊戲，作品中試著在 3x3 的盤面中，放入三個不同色的珠子來模擬，希望能提供珠子移動的選擇位置及路徑之最佳策略。

研究的成果的確提供具體的方法來完成上述的工作；但是，和正式的遊戲比對，似乎不實際；在數學上的著墨不多，是美中不足的地方。