中華民國第 55 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組　數學科

第三名

040418

拿破崙定理對多邊形之推廣

學校名稱：臺北市私立復興實驗高級中學

作者：	指導老師：
高一 黃家冠	劉惠平

關鍵詞：拿破崙定理

摘要

本研究藉由 GeoGebra 軟體，觀察拿破崙定理是否可推廣到邊數更多的多邊形，發現到一個多邊形以拿破崙定理的作法可得到正多邊形時，該多邊形所具備的條件及作法。以作圖與觀察作為出發點，逐步提出猜想、推測並試驗，提出了「初始多邊形」的作圖法。最後證明了定理推廣至五邊形及六邊形的情況，推測此證明方法也可以分別用來證明其他奇數邊及偶數邊的 n 邊形。

壹、 研究動機

在幾何明珠一書的第十八章中描述拿破崙定理之證明，並提及:以平行四邊形各邊為一邊向外側作正方形，則四個正方形的中心構成一正方形。這讓我們想到此定理是否可推廣至其他邊數為 n 的多邊形，因此決定以此當作研究題材。

貳、 研究目的

本研究的目的在討論並尋找數個 n 邊形,使其符合條件:在各邊為一邊向外作正 n 邊形，而這 n 個正 n 邊形的中心點相連可構成一個正 n 邊形。並試著找出原 n 邊形之條件，並找出其作法。

參、 研究設備及器材

電腦、GeoGebra 軟體、尺規

肆、 研究過程或方法

一、拿破崙定理之證明

拿破崙定理的內容是:以三角形各邊分別向外作正三角形，則三個正三角形的中心構成一個等邊三角形。其證明如下:

< pf > 如圖 1，△ABC'、△ACB'、△BCA'

分別為△ABC 向外所作的正三角形

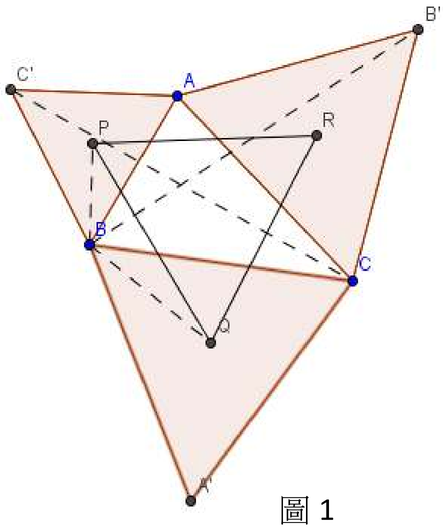

圖 1

在△ABB'與△AC'C 中:

$\because \overline{AB}=\overline{AC'}$

$\overline{AB'}=\overline{AC}$

$\angle BAB'=\angle C'AC$

$\therefore \triangle ABB' \cong \triangle AC'C$ (SAS)

$\overline{BB'}=\overline{CC'}$

同理可得 $\overline{AA'}=\overline{BB'}=\overline{CC'}$

在△PBQ 與△C'BC 中:

$$\because \frac{\overline{BP}}{\overline{BQ}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}\overline{BC'}}{\frac{\sqrt{3}}{3}\overline{BC}}=\frac{\overline{BC'}}{\overline{BC}}$$

$\angle PBC=\angle PBC$

$\Rightarrow \angle PBC+\angle CBQ=\angle PBC+\angle PBC'$

$\Rightarrow \angle PBQ=\angle C'BC$

$\therefore \triangle PBQ \approx \triangle C'BC$ (SAS)

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{CC'}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

同理可得 $\dfrac{\overline{QR}}{\overline{AA'}}=\dfrac{\overline{RP}}{\overline{BB'}}=\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{CC'}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

又 $\because \overline{AA'}=\overline{BB'}=\overline{CC'}$

$\therefore \overline{QR}=\overline{RP}=\overline{PQ}$

△PQR 是正三角形，得證

其實拿破崙定理的證明方式不僅一個，但此處僅說明此者。

以此方法得到的正三角形可被稱為「*拿破崙三角形*」。為了方便說明，以下將此作圖方法稱作「*拿破崙法*」，以此法得到的正ｎ邊形就稱為「*拿破崙ｎ邊形*」，而原本的ｎ邊形則稱為「*初始ｎ邊形*」。

二、定理推廣至平行四邊形時之證明

< pf > 如圖２，平行四邊形 ABCD 分別向外作四個正方形，其中心分別為 P、Q、R、S。

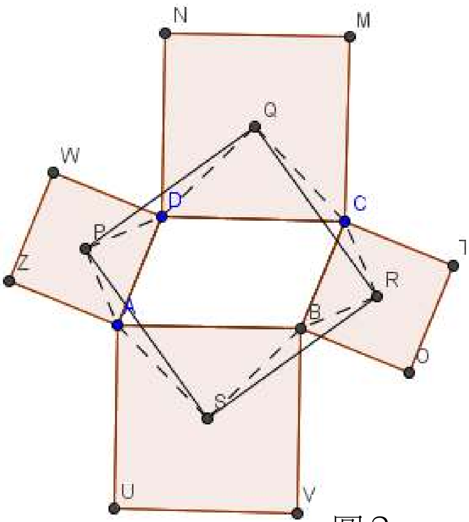

圖２

在△APS、△DPQ、△CRQ、△BRS 中

$\because \overline{AS}=\overline{DQ}=\overline{CQ}=\overline{BS}=\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{AB}$

$\overline{AP}=\overline{DP}=\overline{CR}=\overline{BR}=\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{AD}$

$\angle SAP=\angle QCR=45^\circ+\angle DAB+45^\circ$

$=45^\circ+(180^\circ-\angle ADC)+45^\circ$

$=\angle QDP=\angle SBR$

$\therefore \triangle APS\cong\triangle DPQ\cong\triangle CRQ\cong\triangle BRS$ (SAS)

$\overline{PQ}=\overline{QR}=\overline{RS}=\overline{SP}$

$\angle APS=\angle DPQ=\angle CRQ=\angle BRS$

$\angle SPQ=\angle APD-\angle APS+\angle DPQ=90^\circ$

同理可得$\angle SPQ=\angle QRS=\angle RSP=\angle SPQ=90^\circ$

四邊形 PQRS 是正方形，即拿破崙四邊形，得證

那麼如果不是平行四邊形作圖，是否可以得到正方形呢?我們可以用非平行四邊形的等腰梯形或鳶形來作圖，發現無法得到正方形(由於此研究著重於邊數大於 4 的多邊形之推廣，故詳細過程省略)。由此可知，並非所有四邊形皆為初始多邊形。

三、對 n 邊形之推測方法及過程

(一) 首先嘗試將任意五邊形的各邊向外作正五邊形，結果如圖 3，發現將中心連接無法構成正五邊形。

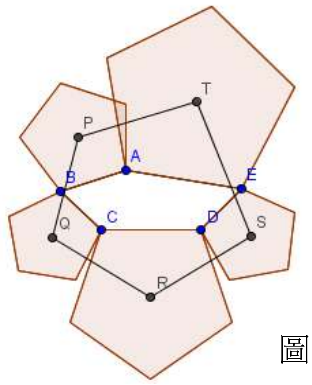

圖 3

以下舉一個特殊的五邊形為例，說明並非所有五邊形皆為初始多邊形。

如圖 4，五邊形 ABCDE 中，$\overline{DE}=\overline{AE}=\overline{AB}$，

$\angle DEA=\angle EAB=90^{\circ}$。

欲證:五邊形 PQRST 不是正五邊形。

$\because \overline{PM}=\overline{QM}$，$\angle PMQ=90^{\circ}$

$\therefore \angle PQM=45^{\circ}$

同理，$\angle RQM=45^{\circ}$

$\because \angle PQR=\angle PQM+\angle RQM=90^{\circ}\neq 108^{\circ}$

$\therefore$五邊形 PQRST 不是正五邊形

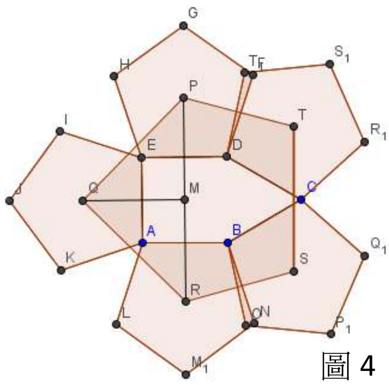

圖 4

由此可知,並非所有五邊形皆為初始多邊形。

亦可以用類似的方法，說明並非所有邊數大於 5 的多邊形皆為初始多邊形。

明顯的，並非所有多邊形皆符合初始多邊形的條件。

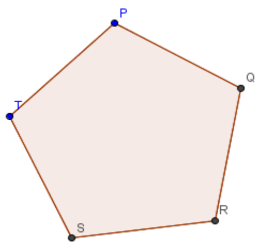

圖 5-1

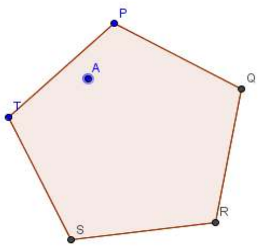

圖 5-2

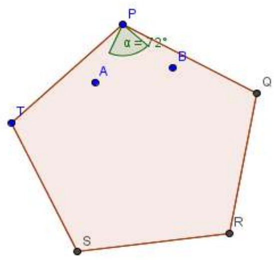

圖 5-3

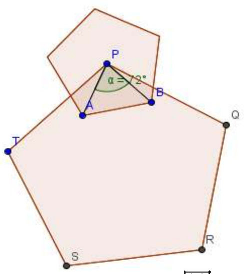

圖 5-3’

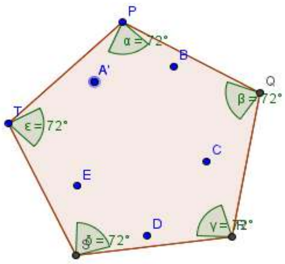

圖 5-5

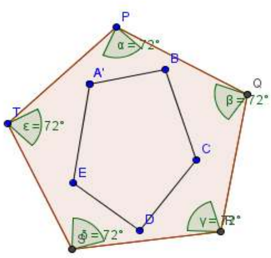

圖 5-6

(二) 我們改變作圖方法，以逆向的形式來找出初始 n 邊形，稱此法為「*逆拿破崙法*」。

步驟如下(以五邊形為範例，其餘 n 邊形以此類推):

1. 先作出一個正五邊形 PQRST(作為應形成之拿破崙五邊形)，如圖 5-1。
2. 在平面上任取一點 A(作為原五邊形其中之一的頂點) ，如圖 5-2。
3. 作點 B，使其滿足∠APB=360°/5=72°，且 $\overline{PA}=\overline{PB}$，如圖 5-3。

   特別說明此步驟之意義: △APB 其實是初始五邊形的 $\overline{AB}$ 向外所作的正五邊形的簡化，如圖 5-3′， 點 P 是此正五邊形之中心，△APB 是正五邊形分割成的五個全等三角形之一，因此∠APB=360°/5=72°。
4. 作點 C，使其滿足∠BQC=360°/5=72°，且 $\overline{QB}=\overline{QC}$;點 D、E 亦以此法找出。
5. 以此法找出點 A′，使其滿足∠ETA′=360°/5=72°，且 $\overline{TE}=\overline{TA'}$，檢驗點 A′與點 A 是否重合，如圖 5-5。
6. 將五點連線成 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$ 、 $\overline{DE}$ 、 $\overline{EA}$，如圖 5-6。
7. 若此五線段可構成一個五邊形，則五邊形 ABCDE 即為一初始 n 邊形。

結果發現，這種方法可以找出初始五邊形。此法亦適用於其他邊數的多邊形:

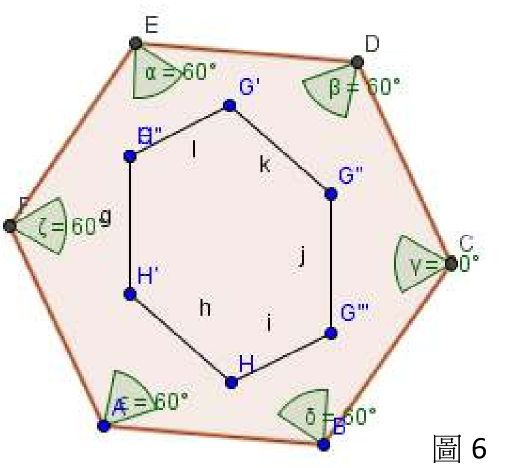

圖 6

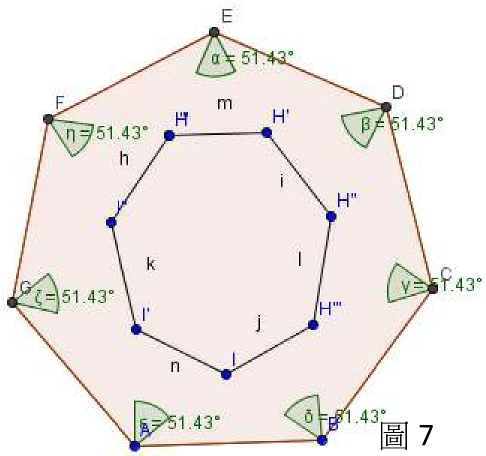

圖 7

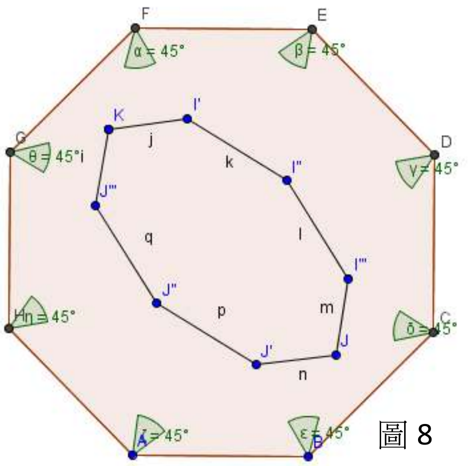

圖 8

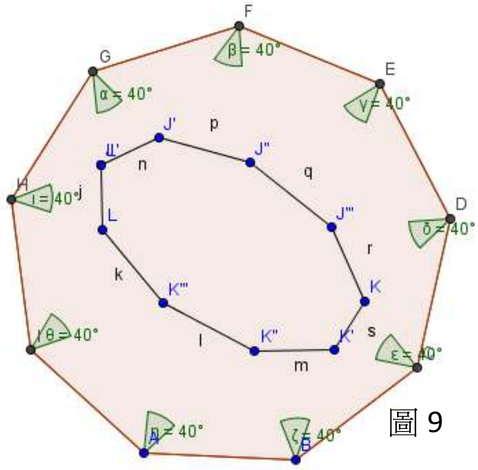

圖 9

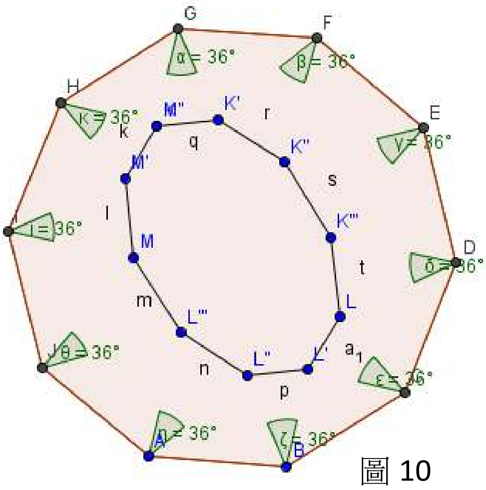

圖 10

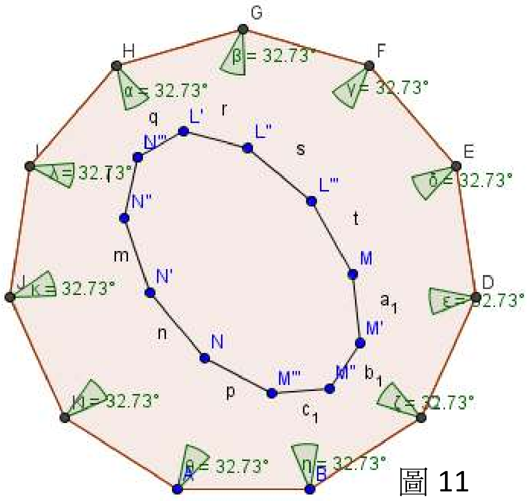

圖 11

圖 6 到圖 11 分別是以此法分別作出初始六邊形到十一邊形的結果。

此作圖法所作出的結果有三種情況，而結果取決於上述的逆拿破崙法中的步驟二中取點的位置:

1. 多邊形:如圖 12，這時所作出的圖形為初始多邊形。
2. 不成多邊形(頂點共線):如圖 13，此圖形理論上的各頂點皆在一直線上，面積為零，無法成為多邊形。
3. 反多邊形(作圖反向):如圖 14 藍色著色的部分，雖然看似作出了多邊形，但以拿破崙法的步驟檢驗，發現此多邊形並非「向外」作正多邊形，而是「向內」作正多邊形。如果我們堅持拿破崙法是向外作正多邊形，則此多邊形應當是不存在的。但是此多邊形也有另一個意義:以此 n 邊形的各邊為邊長向內作正 n 邊形，將這些正 n 邊形的中心連接可得到一個正 n 邊形

(本研究暫不對此探討)。

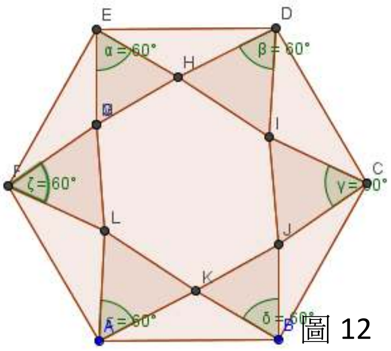

圖 12

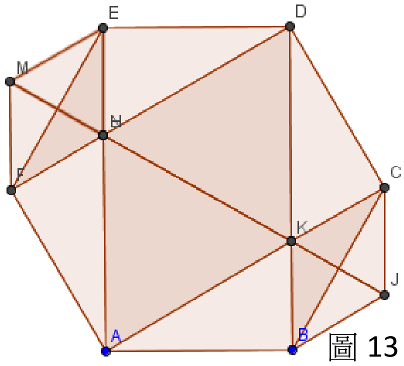

圖 13

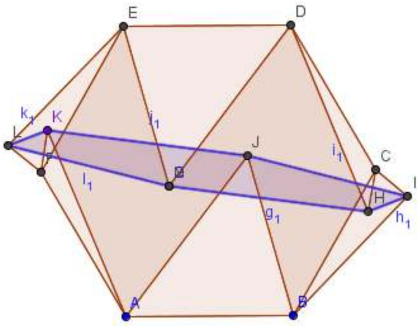

圖 14

隨著 n 值的增加，我們發現初始 n 邊形的頂點似乎有某種關聯，以初始十一邊形為範例，我們發現了一這 11 個頂點會通過同一個橢圓!(如圖 15)

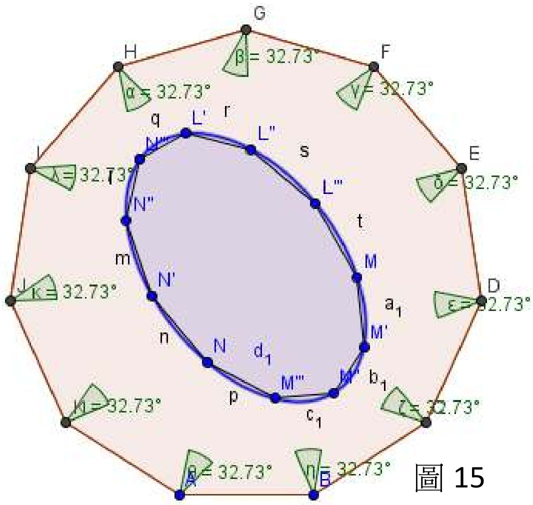

圖 15

發現了這個結果後，我們又再檢驗剛才作圖出的初始 n 邊形是否都有此性質。結果不僅發現這些頂點確實在一個橢圓上，而且還發現了其他性質:

1. 若 n 為奇數(n≥5)，則將此初始 n 邊形各邊的中點與對應的頂點連接，將通過同一點，而此點是通過這些頂點的橢圓的中心。圖 16 以五邊形為例。
2. 若 n 為偶數(n≥6)，則將此初始 n 邊形的對角線連接，將通過同一點，而此點是通過這些頂點的橢圓的中心。圖 17 以六邊形為例。

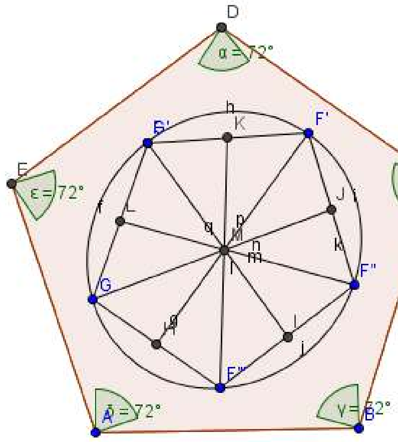

圖 16

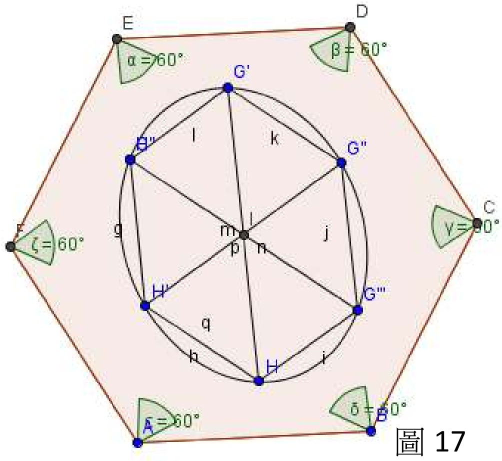

圖 17

同時，該橢圓的中心，也會是拿破崙 n 邊形的中心。

(三) 我們直觀的發覺這些初始 n 邊形有一個有趣的共通點:將一個正 n 邊形以某個方向「壓縮」，就可以得到初始多邊形;另外，其外接的橢圓似乎也可以由圓形(即正 n 邊形的外接圓)「壓縮」而得。

因此我們作出推測:作一個正 n 邊形及一條直線，在 n 邊形上各頂點到直線垂足的線段上取內分點，則這 n 個內分點相連成的多邊形，即為初始 n 邊形。其中直線的作用是作為一個「縮放軸」。

如圖 20，正五邊形 ABCDE 依上述作圖步驟，得到五邊形 A′B′C′D′E′。將此五邊形各邊向外作正五邊形，再將五個中心連接，發現可構成拿破崙五邊形 PQRST，如圖 21。

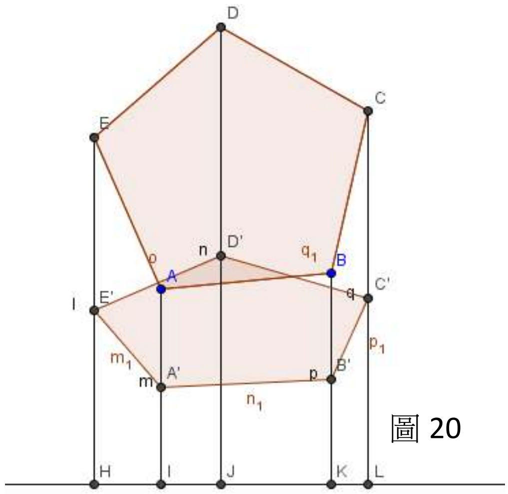

圖 20

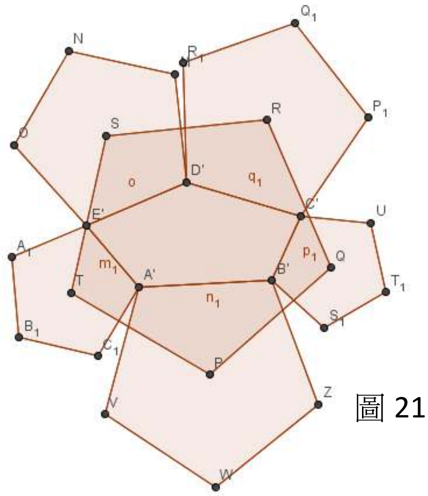

圖 21

由此可知五邊形 A'B'C'D'E'是初始五邊形，推測在此情況下成立。除了五邊形外，經由作圖發現此推測似乎對其他多邊形也成立。

上述的方法是以「縮」的觀點來看，當然也可以用「放」的觀點來看，因此我們將推測修正為:以任一直線作為一個任正多邊形的「*縮放軸*」，將該正多邊形的各頂點縮放 r 倍距離後(r>0)，得到新的多邊形，則此多邊形為初始多邊形。

由於原本的正多邊形內接於一圓中，因此當此正多邊形縮放後，其外接圓亦被縮放，而變成橢圓形，這也就可以解釋為什麼這些初始多邊形的頂點接在一個橢圓上了。

四、推廣至五邊形之證明

在直接證明之前，先進行三個子證明:

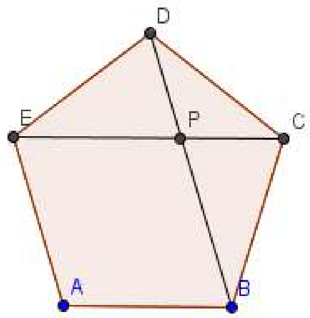

圖 22

(一)正五邊形 ABCDE 中，$\overline{CE}:\overline{AB}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}:1$。

< pf > 點 P 為$\overline{CE}$與$\overline{BD}$的交點，令$\overline{AB}$=a，$\overline{CE}$=x

ABCDE 是正五邊形，$\overline{AB}=\overline{CD}=\overline{DE}$

∵四邊形 ABPE 為平行四邊形

∴ $\overline{AB}=\overline{PE}$=a

∵△DEC≈△PCE(可由 AAA 相似性質證明，詳細過程省略)

∴ $\overline{DE}:\overline{EC}=\overline{PC}:\overline{CD}$

⇒a:x=(x-a):a 解得 x=$\frac{(1\pm\sqrt{5})a}{2}$，負不合

⇒$\overline{CE}:\overline{AB}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}:1$，得證

(二)兩條平行的線段$\overline{AB}$、$\overline{CD}$，則兩線段的兩端點經過縮放軸 L 縮放 r 倍(r>0)後所連成之兩線段$\overline{A'B'}$、$\overline{C'D'}$，仍然平行。

< pf > 如圖 23，點 G、H、I、J 分別是點 A、B、C、D 在 L 上的垂足。

由縮放軸的想法可知，點 G、H、I、J 也是點 A'、B'、C'、D'在 L 上的垂足。

令 $\overline{AG}=\overline{BJ}+a$，

$\overline{CH}=\overline{DI}+b$，

則 $\overline{A'G}=\overline{B'J}+ra$，

$\overline{C'H}=\overline{D'I}+rb$，

$\because \overline{AB}//\overline{CD}$

$\therefore\ a:\overline{GJ}=b:\overline{HI}$

$\Rightarrow ra:\overline{GJ}=rb:\overline{HI}$

$\Rightarrow \overline{A'B'}//\overline{C'D'}$

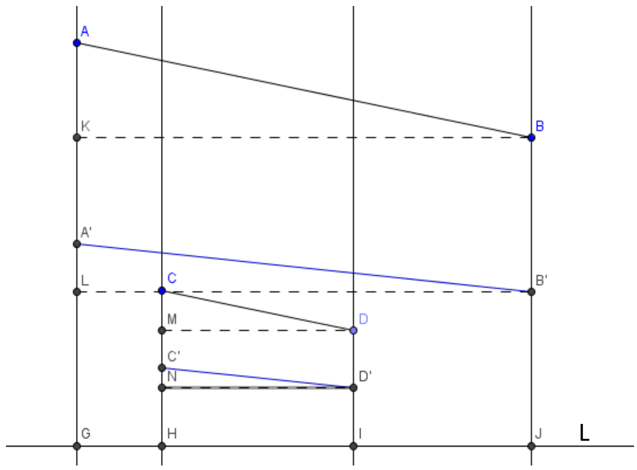

圖 23

(三)兩平行的線段 $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 長度比為 a:b，則兩線段的兩端點經過縮放軸 L 縮放 r 倍(r>0)後所連成之兩線段 $\overline{A'B'}$ 、 $\overline{C'D'}$ ，其長度比仍為 a:b。

見圖 23， $\overline{AB}//\overline{CD}$ ，由子證明(二)知 $\overline{A'B'}//\overline{C'D'}$ ，

< pf > 令∠ABK=∠CDM=θ_1，∠A'B'L=∠C'D'N=θ_2

$\overline{A'B'}:\overline{C'D'}=\overline{B'L}\sec\theta_2:\overline{D'N}\sec\theta_2=\overline{B'L}:\overline{D'N}=\overline{BK}:\overline{DM}=\overline{BK}\sec\theta_1:\overline{DM}\sec\theta_1$

$=\overline{AB}:\overline{CD}=a:b$

見圖 20，在正五邊形 ABCDE 中， $\overline{AB}//\overline{CE}$ ，且 $\overline{AB}:\overline{CE}=1:\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

由子證明(二)可知 $\overline{A'B'}//\overline{C'E'}$ ，由子證明(三)可知 $\overline{A'B'}:\overline{C'E'}=1:\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

以下證明拿破崙定理推廣至五邊形的情況:

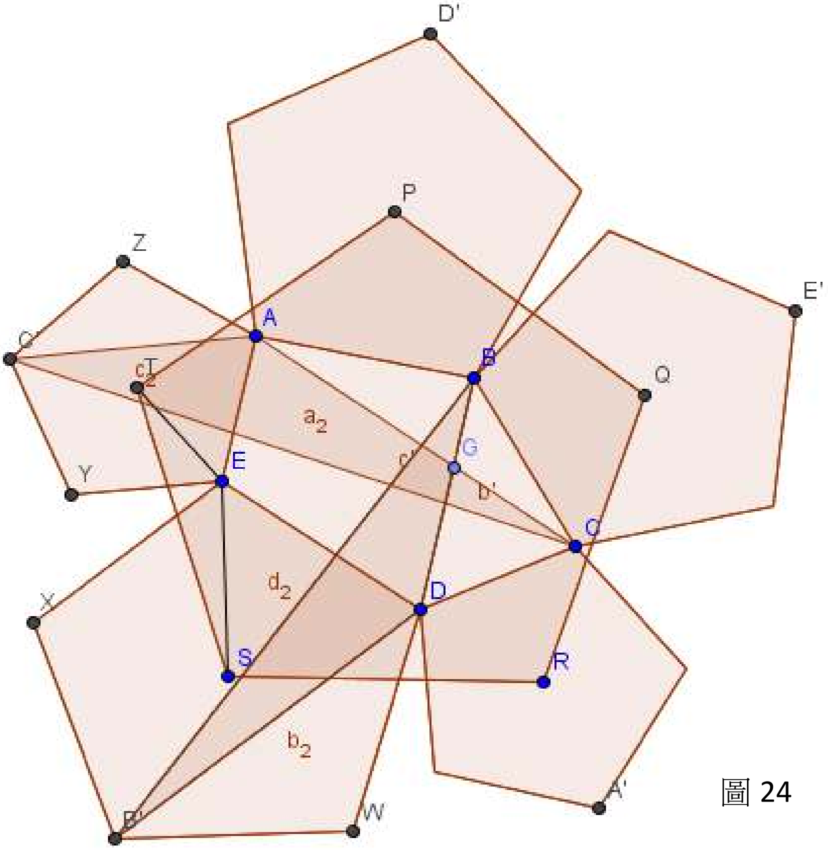

圖 24

< pf > 如圖 24，五邊形 ABCDE 中，以各邊為邊長向外作正五邊形，

其中心分別是 P、Q、R、S、T。

$\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 相交於 G

在△DBB′與△AC′C 中:

$\because \overline{DB'} = \overline{XW} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\overline{ED} = \overline{AC}$

$\overline{BD} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\overline{AE} = \overline{ZY} = \overline{AC'}$

$\because \overline{AC} \,//\, \overline{DE}$

$\overline{AE} \,//\, \overline{BD}$

∴四邊形 AEDG 為平行四邊形

$\angle EDG = \angle GAE$

$\Rightarrow \angle EDG + 72^\circ = \angle GAE + 72^\circ$

$\Rightarrow \angle EDB + \angle EDB' = \angle CAE + \angle EAC'$

$\Rightarrow \angle B'DB = \angle CAC'$

∴△ABB′ ≅△AC′C (SAS)

$\overline{BB'}=\overline{CC'}$

同理可得 $\overline{AA'}=\overline{BB'}=\overline{CC'}=\overline{DD'}=\overline{EE'}$

在△DBB′與△ETS 中:

$\because \dfrac{\overline{DB'}}{\overline{ES}}=\dfrac{\overline{EB'}}{\overline{ES}}=\dfrac{sec72^\circ}{sec54^\circ}=\dfrac{\overline{AC'}}{\overline{TE}}=\dfrac{\overline{BD}}{\overline{TE}}$

令∠BDE= θ

$\because \overline{AE}\,//\,\overline{BD}$

∴∠AED=180°－∠BDE=180°－ θ

∵∠BDB′=72°+ θ

∠TES=54°+(360°－108°－108°－∠AED) + 54°=360°－108°－180°+ θ =72°+ θ

∴∠BDB′=∠TES

∴△DBB′≈△ETS (SAS)

$\dfrac{\overline{BB'}}{\overline{TS}}=\dfrac{sec72^\circ}{sec54^\circ}$

同理可得 $\dfrac{\overline{AA'}}{\overline{RS}}=\dfrac{\overline{BB'}}{\overline{ST}}=\dfrac{\overline{CC'}}{\overline{PT}}=\dfrac{\overline{DD'}}{\overline{PQ}}=\dfrac{\overline{EE'}}{\overline{QR}}=\dfrac{sec72^\circ}{sec54^\circ}$

又∵ $\overline{AA'}=\overline{BB'}=\overline{CC'}=\overline{DD'}=\overline{EE'}$

∴ $\overline{PQ}=\overline{QR}=\overline{RS}=\overline{ST}=\overline{PT}$

見圖 25，上面已證△DBB′≈△ETS

∴∠BB′D=∠TSE

同理可證△EBB′≈△DRS (SAS)

∴∠BB′E=∠DSR

∠RST=72°+∠TSE+∠DSR

=72°+∠BB′D+∠BB′E

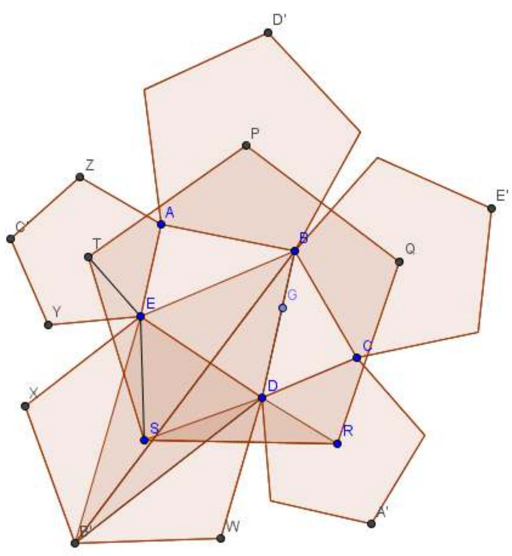

圖 25

$=72^{\circ}+\angle DB'E$

$=72^{\circ}+36^{\circ}$

$=108^{\circ}$

同理可證$\angle PQR=\angle QRS=\angle RST=\angle STP=\angle TPQ=108^{\circ}$

又$\because \overline{PQ}=\overline{QR}=\overline{RS}=\overline{ST}=\overline{PT}$

五邊形 PQRST 為正五邊形，得證。

分析一下五邊形證明的步驟:

(一) 由三角形的全等性質證明$\overline{AA'}=\overline{BB'}=\overline{CC'}=\overline{DD'}=\overline{EE'}$，需用到子證明(二)、(三)。

(二) 由三角形的相似性質及第一步驟的結果得$\overline{PQ}=\overline{QR}=\overline{RS}=\overline{ST}=\overline{PT}$。

(三) 由兩組相似的三角形得到$\angle PQR=\angle QRS=\angle RST=\angle STP=\angle TPQ=108^{\circ}$。

(四) 由第二及第三步驟的結果得到五邊形 PQRST 為正五邊形的結論。

以上為拿破崙定理推廣至五邊形之證明，該證明步驟應當也可以使用於其他奇數邊的多邊形之證明。

五、推廣至六邊形之證明

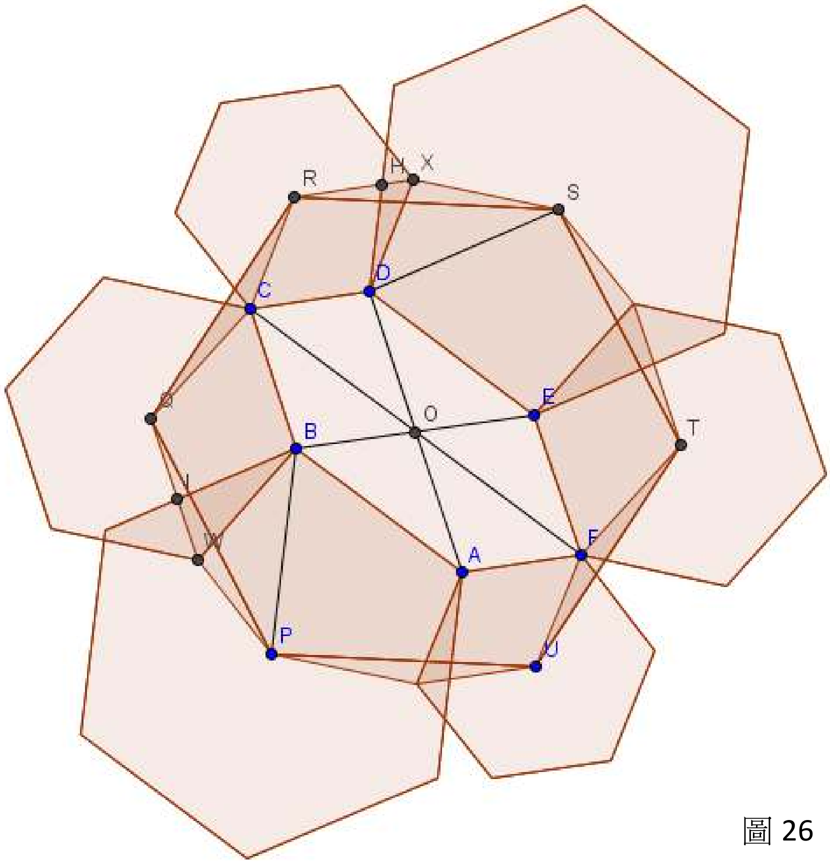

圖 26

< pf > 如圖 26，六邊形 ABCDEF 中，以各邊為邊長向外作正六邊形，

其中心分別是 P、Q、R、S、T、U。

六邊形 ABCDEF 的各對角線相交於 O。

令$\angle RCQ=\theta$，則$\angle DCB=360^\circ-\angle RCD-\angle QCB-\angle RCQ=360^\circ-60^\circ-60^\circ-\theta$

$=240^\circ-\theta$

令$\angle DCO=\alpha$，$\angle BCO=\beta$，即$\alpha+\beta=\angle DCB=240^\circ-\theta$

∵四邊形 CDOB 為平行四邊形

∴$\triangle CDO\cong\triangle OBC$(由平行四邊形的性質可知，詳細證明省略)

$\angle DOC=\angle BCO=\beta$

同時，$\angle CDE=180^\circ-\angle DCO=180^\circ-\alpha$

$\angle HDX=\angle CDE+\angle CDX+\angle HDE-360^\circ=(180^\circ-\alpha)+120^\circ+120^\circ-360^\circ=60^\circ-\alpha$

$\angle XDS=\angle HDE-\angle HDX-\angle SDE=120^\circ-(60^\circ-\alpha)-60^\circ=\alpha$

在△CDO 與△DXS 中:

$\because \overline{CD} = \overline{DX}$

$\overline{CO} = \overline{DE} = \overline{DS}$

$\angle DCO = \angle XDS = \alpha$

$\therefore \triangle CDO \cong \triangle DXS(SAS)$

$\overline{XS} = \overline{DO}$

$\angle DXS = \angle CDO = 180^\circ - \angle DCO - \angle DOC = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - (\alpha + \beta)$

$= 180^\circ - (240^\circ - \theta) = \theta - 60^\circ$

$\angle RXS = \angle RXD + \angle DXS = 60^\circ + (\theta - 60^\circ) = \theta$

在△RCQ 與△RXS 中:

$\because \overline{RC} = \overline{RX}$

$\overline{QC} = \overline{BC} = \overline{OD} = \overline{SX}$

$\angle RCQ = \angle RXS = \theta$

$\therefore \triangle RCQ \cong \triangle RXS(SAS)$

同理可證△RCQ≅△PWQ

利用第前文的子證明(二)、(三)可證明四邊形 ABCF≅四邊形 DEFC

∴△PWQ ≅△SYT，△UZP ≅△RXS

同理，四邊形 BCDA≅四邊形 EFAD

∴△RCQ ≅△XFT

結合上述說明，可得△PWQ≅△RCQ≅△RXS≅△SYT≅△UFT≅△UXP

$\therefore \overline{PQ} = \overline{QR} = \overline{RS} = \overline{ST} = \overline{TU} = \overline{UP}$

$\angle PQR = \angle ZQF - \angle PQZ + \angle RQF = 120^\circ$

同理可得$\angle PQR = \angle QRS = \angle STU = \angle TUP = 120^\circ$

將整個圖形分成「四邊形 ABCF 和其銜接之正六邊形」以及「四邊形 DEFC 和其銜接之正六邊形」，由於兩者全等，因此∠RST=∠UPQ

$\angle PQR+\angle QRS+\angle RST+\angle STU+\angle TUP+\angle UPQ=(6-2)\times 180^\circ$

$\Rightarrow 2\angle RST=240^\circ$

$\Rightarrow \angle RST=120^\circ$

$\angle UPQ=120^\circ$

故$\angle PQR=\angle QRS=\angle RST=\angle STU=\angle TUP=\angle UPQ=120^\circ$

六邊形 PQRSTU 為正六邊形，得證。

分析一下六邊形證明的步驟:

(一) 利用兩次三角形全等的性質，證明$\triangle RCQ\cong\triangle RXS$(過程中主要運用了平行四邊形的性質)，同理可證$\triangle RCQ\cong\triangle PWQ$。

(二) 由上文的子證明(二)、(三)，得到圖形兩側全等(點對稱)的性質，可得$\triangle PWQ\cong\triangle RCQ\cong\triangle RXS\cong\triangle SYT\cong\triangle UFT\cong\triangle UXP$。

(三) 由三角形的全等直接可得$\overline{PQ}=\overline{QR}=\overline{RS}=\overline{ST}=\overline{TU}=\overline{UP}$。

(四) 由三角形的全等間接可得六邊形部分內角為 120°，再由圖形兩側全等(點對稱)的性質，得到$\angle PQR=\angle QRS=\angle RST=\angle STU=\angle TUP=\angle UPQ=120^\circ$。

(五) 由第三及第四步驟的結果得到六邊形 PQRSTU 為正六邊形的結論。

以上為拿破崙定理推廣至六邊形之證明，該證明步驟應當也可以使用於其他偶數邊的多邊形之證明。

利用五邊形及六邊形之證明，我們認為亦可以相同證明方法分別證明出奇數邊及偶數邊的多邊形，也就是拿破崙定理可推廣至任何多邊形。

伍、 結論與討論

作出初始多邊形的方法為: 以任一直線作為一個任正 n 邊形的「縮放軸」，將該正 n 邊形的各頂點縮放 m 倍距離後(m>0)，得到一個 n 邊形，則此 n 邊形為初始 n 邊形，即以此 n 邊形的各邊為邊向外作正 n 邊形後，其各正 n 邊形的中心相連可構成一個正 n 邊形(拿破崙 n 邊形)。此即拿破崙定理之推廣。

陸、　參考資料及其他

一、參考資料

黃家禮（民 89）。**幾何明珠**。臺北縣：九章。

張幼賢 (民 102)。**翰林版國民中學數學課本第五冊**。台南市:翰林。

二、未來研究方向

基本上我們已知拿破崙定理可由三角形、四邊形推廣至其他多邊形，因此未來可再對初始多邊形及拿破崙多邊形的其他性質作討論。

(一) 我們已發現初始多邊形可由「縮放」的方式得到，是否存在其他作圖方式可以得到初始多邊形，有待發現。

(二) 我們已發現同為正 n 邊形縮放 r 倍、但縮放軸不同的兩個初始 n 邊形，經由拿破崙法可得到相同面積的拿破崙 n 邊形;但若 r 值不同，則拿破崙 n 邊形之面積則不同。而 r 值代表的是原正 n 邊形的「縮放」程度，其縮放程度又與初始多邊形的外接橢圓之離心率 e 有關。因此我們推測拿破崙 n 邊形與初始多邊形的面積比可能與 r 或 e 有關，此部分可以繼續探討並試著找出其比值的公式。

(三) 前文對「逆拿破崙法」之研究有提到「逆多邊形」的意義可解釋為: n 邊形的各邊為邊長向內作正 n 邊形，將這些正 n 邊形的中心連接可得到一個正 n 邊形。在這種意義下，這種多邊形應存在，而且我們推測這種多邊形應該與上文探討的初始多邊形是相同的，也就是所有初始 n 邊形亦可以向內作正 n 邊形，將正 n 邊形的中心連線可得一正 n 邊形(但正 n 邊形為例外，因為其向內作之正 n 邊形的中心皆在同點，無法形成多邊形)。此部分應可再研究並證明之。

(四) 如果初始 n 邊形向外作邊數為 m 的正多邊形，且 m≠n，則將其中心連接，發現得到的 n 邊形若再以拿破崙法作圖，可得到正 n 邊形，意即該多邊形為另一個初始 n 邊形，此部分尚未證明，可作為未來研究方向之一。

【評語】040418

1. 奇數與偶數多邊形的拿破崙定理推廣如果與 5、6 邊的情形一樣，要實際證明。

2. 從正多邊形逆拿破崙定理回溯觀察得到初始多邊形頂點在橢圓上，是一有趣的結果，從這一觀點可以連結 Brianchon 定理與 Poncelet Pirism。

3. 將正 5、6 邊向某一值線壓縮會得到起始 5、6 邊形的觀察是有趣的。反過來看是否任何 n 邊的情形中起始多邊形一定是正 n 邊形的等比壓縮。