中華民國第 55 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組　數學科

040417

正方形內接蝴蝶形的相關性質與研究

學校名稱：國立花蓮高級中學

作者：	指導老師：
高一　張華恩 高一　吳尚澂 高一　葉承恩	黃俊豪

關鍵詞：蝴蝶定理、蝶翼定理

摘要

蝴蝶定理（Butterfly theorem）是在一個圓形中，設 M 為圓內弦 PQ 的中點，過 M 作弦$\overline{AB}$和$\overline{CD}$。設$\overline{AD}$和$\overline{BC}$各相交$\overline{PQ}$於點 X 和 Y，則 M 是$\overline{XY}$的中點。

在此份研究中，我們探討正方形邊上兩個動點、正方形內一個定點以及邊上動點與內點的連線，延伸交四邊的另外兩點，所構成的「蝴蝶形狀」的「蝴蝶線」。主要利用兩個動點在邊上的位置，以及內點在正方形內的位置，尋找上述條件與蝴蝶線的關係。由於邊上四個點的分布對於蝴蝶線有很大的影響，所以又依照四點分布位置進行分段討論。另外，我們也尋找正方形內接蝴蝶形的特殊性質。

壹、研究動機

一次專題課時，在數學研究室翻閱書籍，從第四屆丘成桐數學獎的得獎作品中，發現圓內接鋸齒形的研究靈感是來自於這個網站：http://mathafou.free.fr/index_en.html，好奇之下也去此網站尋寶。在幾何問題中，找到了圓外蝴蝶定理的問題，查詢資料後，發現蝴蝶定理原本是圓形內的幾何定理，在圓形外卻也有相似的性質，便聯想出正方形內接蝴蝶形的題目。

貳、研究目的

1. 利用兩個動點在邊上的位置，以及內點在正方形內的位置，尋找上述條件與蝴蝶線的關係。

2. 尋找正方形內接蝴蝶形的特殊性質

參、研究設備與器材

筆、紙、電腦、繪圖程式 Geogebra

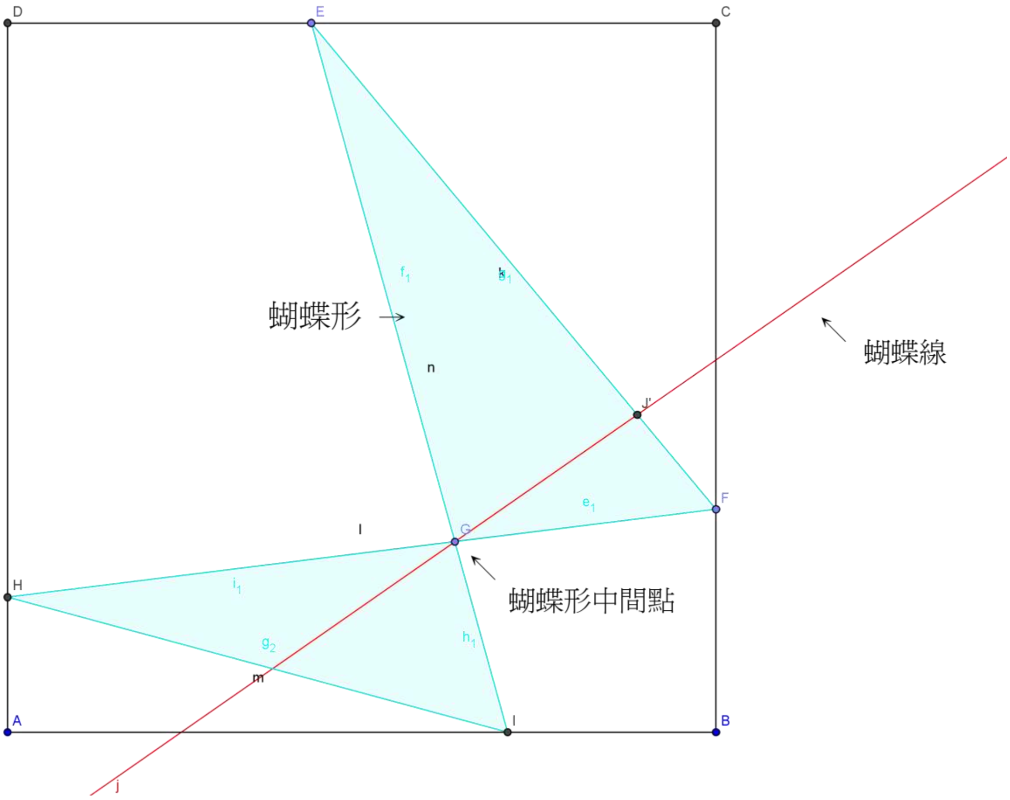
肆、研究過程與方法

一、名詞定義：

（一）蝴蝶形：任意四邊形的對角線相連，所產生四個三角形，兩個不相鄰的三角形所構成。

（二）蝴蝶形中間點：蝴蝶形中，兩個三角形的共用頂點。

（三）蝴蝶線：通過蝴蝶形的中間點，交蝴蝶形的兩側，一側交點到中間點的距離等於另一側交點到中間點的距離，這條線就是蝴蝶線。

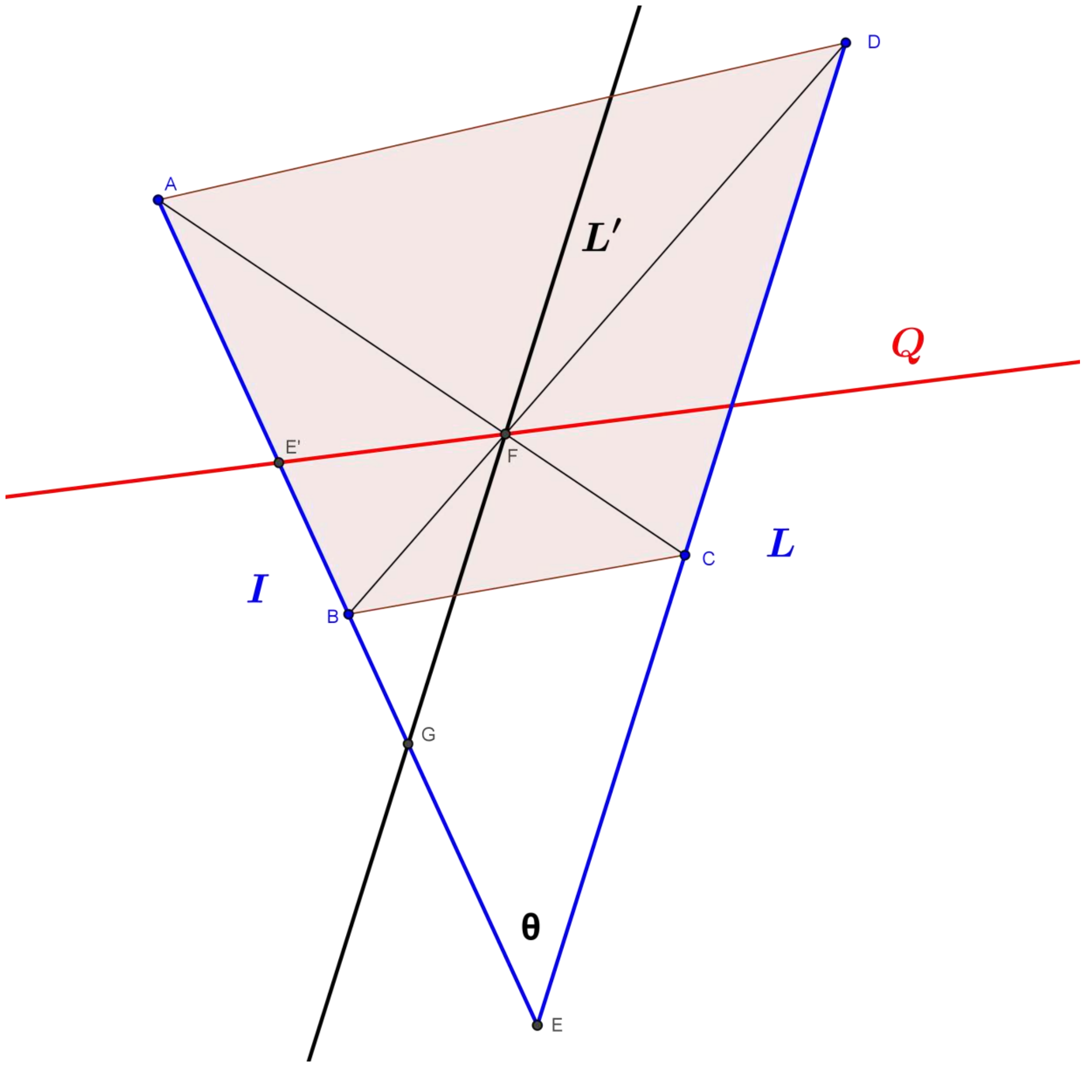


二、先備知識

（一）夾角內一點求蝴蝶線：

由於畫出蝴蝶線的其中一個方法是，延長蝴蝶形的兩側，兩側的延伸線交於一個點，構成夾角θ。於是問題就變成了在一個夾角內有一點，作通過此點的直線，交夾角兩邊於兩點，兩點到夾角內點的距離相等。

作圖如下：



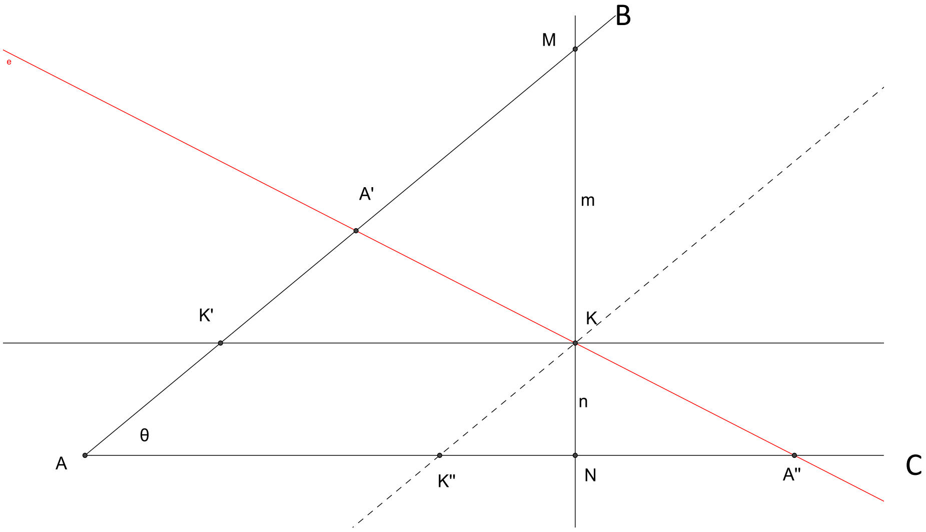
1.延伸四邊形 ABCD 其中的一組對邊，直線 I 與直線 L 交於 E 點。

2.作直線 L 的平行線 L'過 F 點，交直線 I 於 G 點，作 E 點的對稱點 E'對稱於 G 點。

3.連E'點與蝴蝶形中間點 F，直線 Q 即為蝴蝶線。

（二）蝴蝶線與夾角的關係

由上述的作圖方法，我們可以算出夾角與夾角內的點，對於蝴蝶線的關係。



在一個夾角∠BAC 有一個 K 點，K 點向$\overline{AC}$做垂線，交$\overline{BA}$、$\overline{CA}$於 M、N兩點

$$\overline{MK}=m，\overline{NK}=n$$

1. 過 K 點向$\overline{BA}$作平行$\overline{CA}$的線，交$\overline{BA}$於 K′ 點

2. A 點向 K 點作點對稱，得A'點

3. 連A'點與 K 點得到蝴蝶線$\overline{A'A''}$

4. 過 K 點向$\overline{CA}$作平行$\overline{BA}$的線，交$\overline{CA}$於K''點，四邊形$AK'KK''$為平行四邊形

5. $\because \overline{AK''} \parallel \overline{K'K}$， $\therefore \angle MK'K=\angle MAN=\theta$，$\overline{K'K}=\dfrac{m}{\tan\theta}$

6. $\because \overline{AK'} \parallel \overline{K''K}$， $\therefore \angle MAN=\angle KK''N=\theta$，$\overline{K''N}=\dfrac{n}{\tan\theta}$

7. 由於 K、K′、K″為$\triangle AA'A''$三邊中點，所以$\overline{K'K}=\overline{AK''}=\overline{K''A''}$

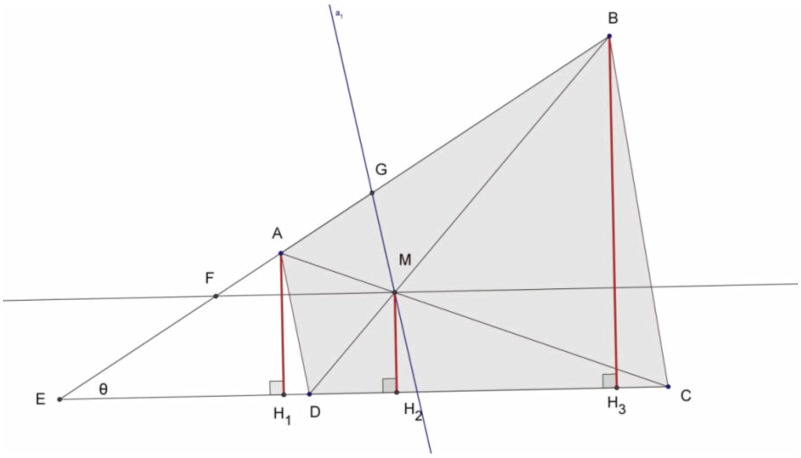
8. $\overline{A''N}=\dfrac{m-n}{\tan\theta}$ ， $\tan\angle A'A''A=\dfrac{n\tan\theta}{m-n}$

結論:在一個夾角內一點，以此方法作蝴蝶線，蝴蝶線與作圖中「一開始被平行夾角一邊」的夾角為$\tan^{-1}(\dfrac{n\tan\theta}{m-n})$，其中 m、n 為內點 K 的垂線與夾角的邊的交點到 K 點的長度。

（三）判別蝴蝶線位置

一個四邊都不互相平行的四邊形中，該如何判別蝴蝶線是出現在哪一個蝴蝶形?

我們的方法是利用（一）中的蝴蝶線作法。



圖中，$\overline{EF}$長度為$\dfrac{\overline{MH_2}}{\sin\theta}$，$\overline{EG}$長度為$2\times\dfrac{\overline{MH_2}}{\sin\theta}$

($\overline{AH_1}$、$\overline{MH_2}$、$\overline{BH_3}$為 A、M、B 三點對$\overline{DC}$的垂線)

$\overline{EA}$長度為$\dfrac{\overline{AH_1}}{\sin\theta}$，$\overline{EB}$長度為$\dfrac{\overline{BH_3}}{\sin\theta}$

蝴蝶線要出現在$\triangle ABM$與$\triangle CDM$構成的蝴蝶形中，

G 點必須要在$\overline{AB}$線段上，也就是說$\overline{EA}<\overline{EG}<\overline{EB}$

當$\overline{EA}<\overline{EG}<\overline{EB}$，表示$\dfrac{\overline{AH_1}}{\sin\theta}<2\times\dfrac{\overline{MH_2}}{\sin\theta}<\dfrac{\overline{BH_3}}{\sin\theta}$

得出$\overline{AH_1}<2\times\overline{MH_2}<\overline{BH_3}$

將上列不等式同乘以$\dfrac{\overline{DC}}{2}$

得到

$$\triangle ADC<2\triangle CDM<\triangle BCD$$

$$\triangle ADM+\triangle CDM<2\triangle CDM<\triangle BCM+\triangle CDM$$

同減$\triangle CDM$

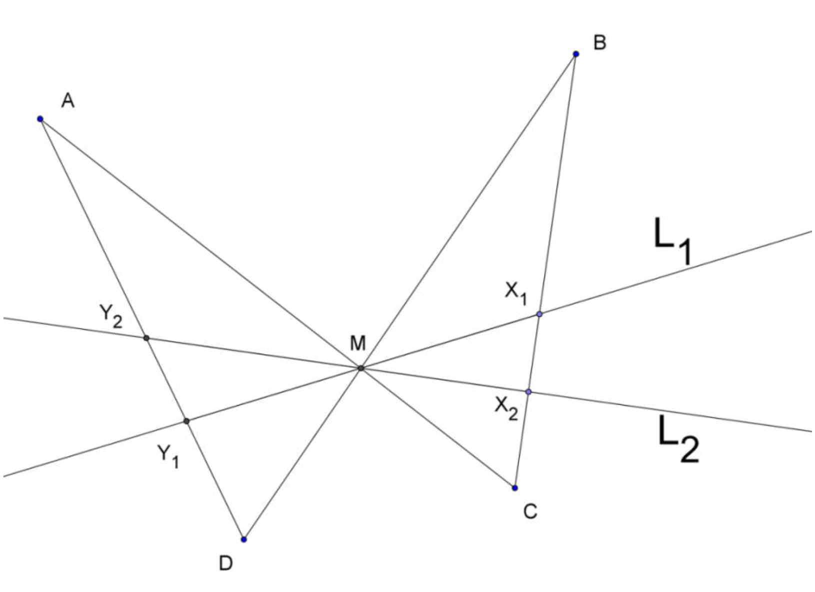
得到$\triangle ADM<\triangle CDM<\triangle BCM$

也就是說，任意四邊形裡面的兩個蝴蝶形（四個三角形），蝴蝶線會出現在面積大小介於兩個相鄰的三角形的三角形中。

（四）證明蝴蝶線唯一存在

1. 任意兩側不平行的蝴蝶形中，證明蝴蝶線只存在一條。

證明：，



$\triangle$ ADM與$\triangle$ BCM 中，過 M 點作L_1、L_2

L_1交$\overline{BC}$、$\overline{AD}$於X_1、Y_1，L_2交$\overline{BC}$、$\overline{AD}$於X_2、Y_2

若$\overline{BC} \nparallel \overline{AD}$

假設$\overline{X_1M} = \overline{Y_1M}$

$\overline{X_2M} = \overline{Y_2M}$

$\because \overline{X_1M} = \overline{Y_1M}$，$\overline{X_2M} = \overline{Y_2M}$，$\angle X_1MX_2 = \angle Y_1MY_2$(對頂角相等)

$\therefore \triangle X_1X_2M \cong \triangle Y_1Y_2M$ (SAS)

故$\angle MX_1X_2 = \angle MY_1Y_2$

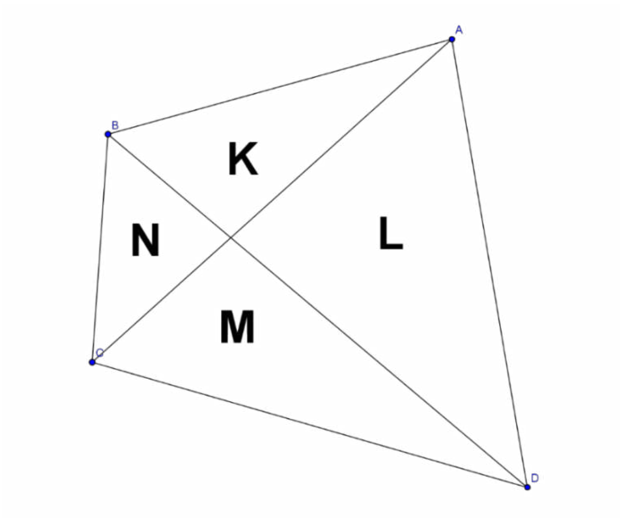
得$\overline{X_1X_2} \parallel \overline{Y_1Y_2}$

與假設不符，故一個兩側不平行的蝴蝶形中不存在兩條蝴蝶線。

得證

2. 任意四邊不互相平行的四邊形中，兩條對角線構成的兩組蝴蝶形，只會有其中一個有蝴蝶線。

證明：利用（二）的判別方式



若蝴蝶線要出現在由三角形 K、M 構成的蝴蝶形中，則必須符合下列條件:

則 N＜M＜L 且 N＜K＜L——①

（或 L＜M＜N 且 L＜K＜N）—②

若蝴蝶線要出現在由三角形 N、L 構成的蝴蝶形中，則必須符合下列條件:

K＜N＜M 且 K＜L＜M——③

（或 M＜N＜K 且 M＜L＜K）—④

①與②不同時成立，且①與③④矛盾

②與③④矛盾，且③與④不同時成立

推論出在$K \neq L \neq M \neq N$的情況下，①②③④只會有一個成立。也就是不可能有兩條蝴蝶線同時存在的情況，得到任意四邊不互相平行的四邊形中，只有一個蝴蝶形有蝴蝶線。

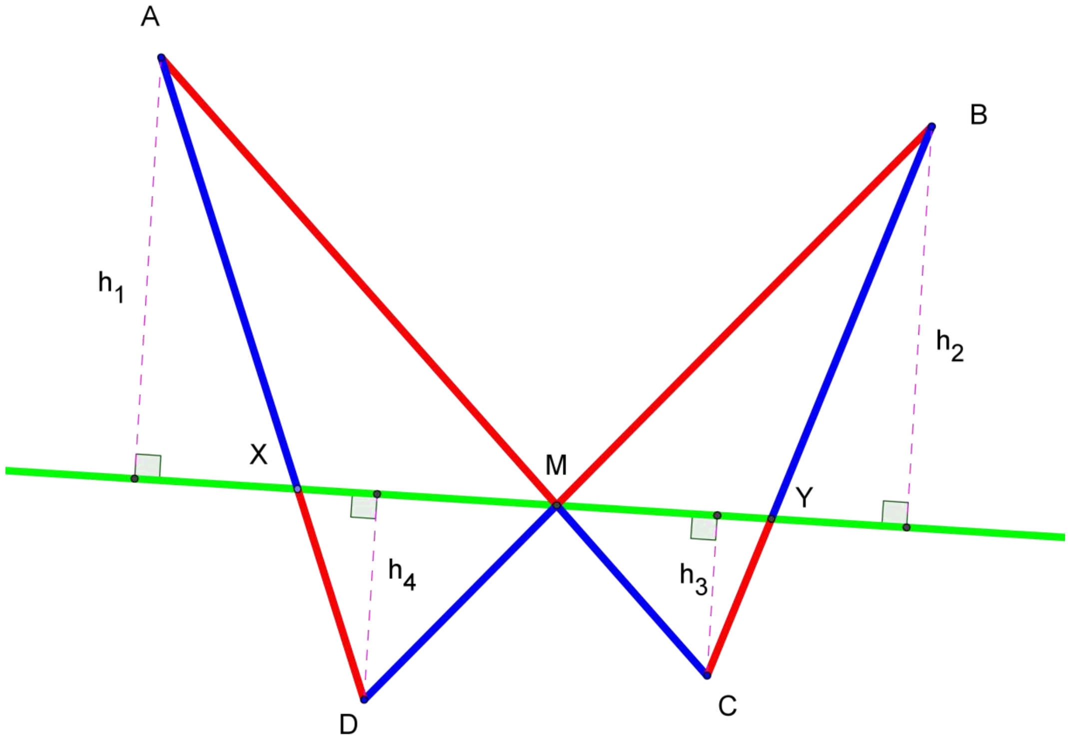
得證

（五）蝶翼定理：

我們發現，在一個任意的蝴蝶形 ABCDM 中，做一條通過中間點的任意蝴蝶線（不需要交兩側使兩側交點到中間點的距離相等），交兩側於 X、Y 兩點，則 $\frac{\overline{AX}\times\overline{BY}\times\overline{CM}\times\overline{DM}}{\overline{CY}\times\overline{DX}\times\overline{AM}\times\overline{BM}}=1$（圖中紅色線段長度的積＝藍色線段長度的積）

證明:由 A、B、C、D 四個點向$\overleftrightarrow{XY}$做垂線h_1、h_2、h_3、h_4。

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{CM}}=\frac{h_1}{h_3}，\frac{\overline{BM}}{\overline{DM}}=\frac{h_2}{h_4}，\frac{\overline{CY}}{\overline{BY}}=\frac{h_3}{h_2}，\frac{\overline{DX}}{\overline{AX}}=\frac{h_4}{h_1}$$



$$\frac{\overline{AM}}{\overline{CM}}\times\frac{\overline{BM}}{\overline{DM}}\times\frac{\overline{CY}}{\overline{BY}}\times\frac{\overline{DX}}{\overline{AX}}=\frac{h_1}{h_3}\times\frac{h_2}{h_4}\times\frac{h_3}{h_2}\times\frac{h_4}{h_1}=1$$

得證

三、分段討論

正方形上兩動點以及動點與內點的連線，交正方形的邊於兩點（以下稱為被動點），而根據動點與被動點的位置，我們分段討論不同的情況。

（一)、分段方式說明

1. 動點與被動點分別位於平行的邊上。（如附圖一）

2. 動點與被動點分別位於垂直的邊上。（如附圖二）

3. 兩個動點分別在平行的邊上，而兩個被動點則都在垂直動點所在邊的邊。（如附圖三）

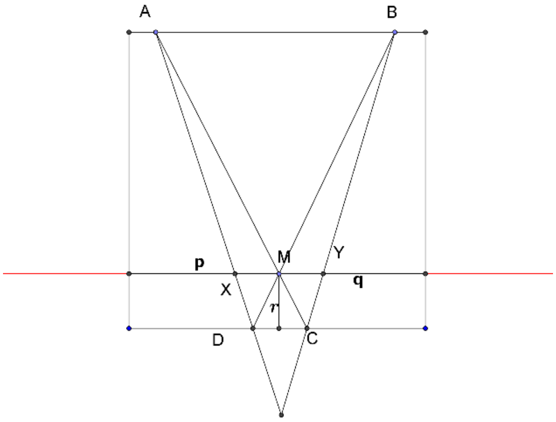
4. 兩個動點的位置在垂直的兩邊，而兩個被動點則一起在另外一邊。

（如附圖四）

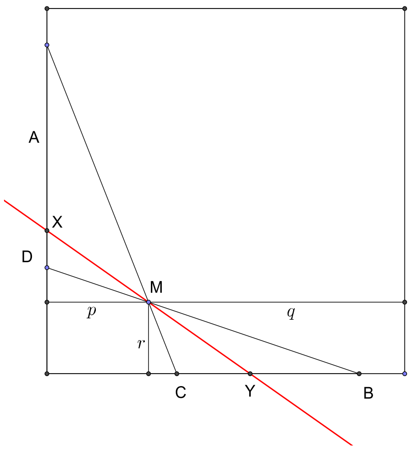
5. 兩個動點與被兩個動點分別在不同的邊上。（如附圖五）

以上情況，相同的圖形，動點與被動點位置對調視為相同圖形，而可以經過翻轉得到的圖形，也視為相同圖形。

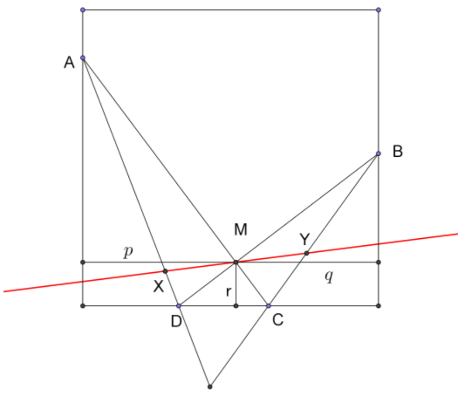
附圖一



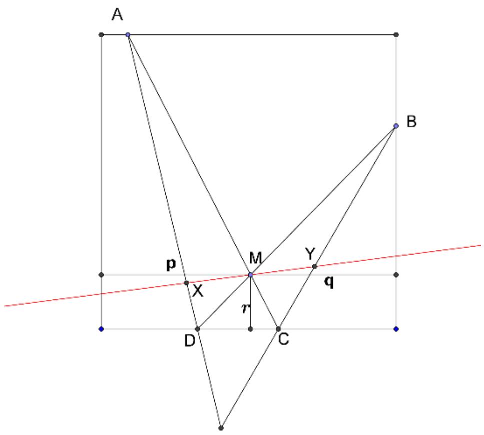
附圖二



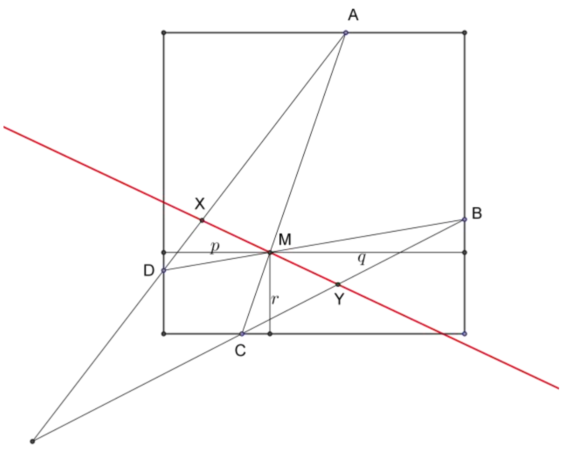
附圖三



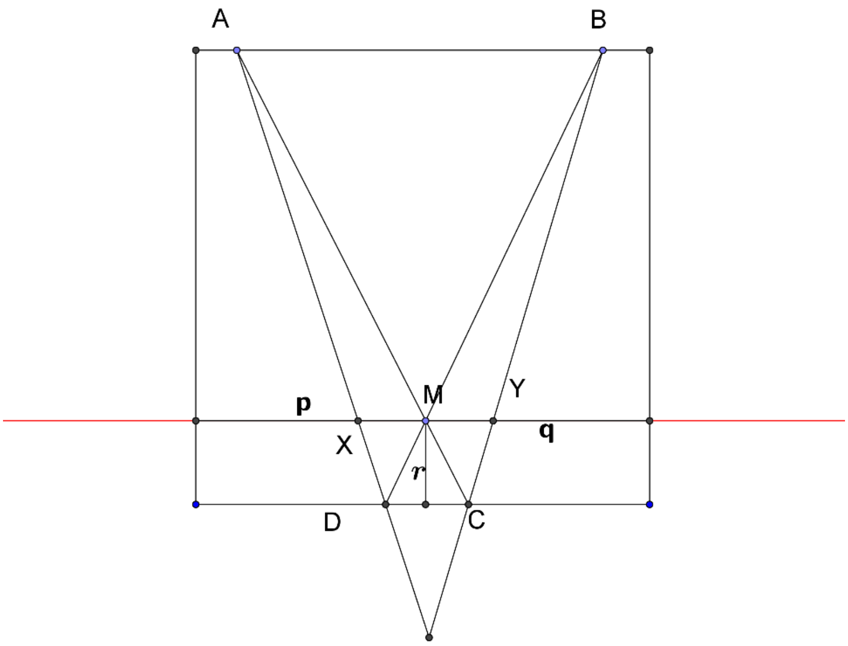
附圖四



附圖五



（二）、動點與被動點分別在平行的邊上



性質：正方形中，蝴蝶形ABCDM的蝴蝶線會平行於邊。

證明：假設蝴蝶線$\overleftrightarrow{XY}$平行於$\overline{AB}$、$\overline{CD}$

$\because \overline{AB} \parallel \overline{CD}$

$$\therefore \overline{AM}:\overline{MC} = \overline{BM}:\overline{MD}$$

$$\overline{AM}:\left(\overline{AM}+\overline{MC}\right) = \overline{BM}:(\overline{BM}+\overline{MD})$$

$$\overline{AM}:\overline{AC} = \overline{BM}:\overline{BD}$$

又$\because \overleftrightarrow{XY}$平行於$\overline{AB}$、$\overline{CD}$

$\therefore \overline{AM}:\overline{AC} = \overline{MX}:\overline{CD}$

$$\overline{BM}:\overline{BD} = \overline{MY}:\overline{CD}$$

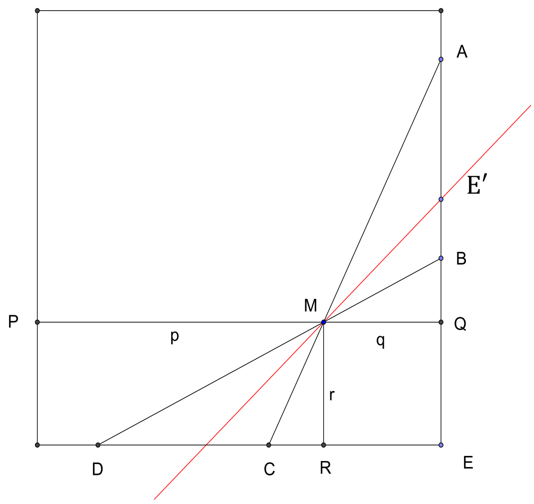
因為$\overline{AM}:\overline{AC} = \overline{BM}:\overline{BD}$

所以$\overline{MX}:\overline{CD} = \overline{MY}:\overline{CD}$

得出$\overline{MY} = \overline{MX}$

得證

（三）、動點與被動點分別在垂直的邊上



正方形中，M 點的位置用 p、q、r 表示，$\overline{AE}$長度為 k，$\overline{BE}$長度為 l

1. 由於此蝴蝶形的延伸線交角為直角($\angle AED$)，由先備知識(一)的作圖方法，由 M 點向$\overline{AE}$作平行$\overline{DE}$的線，交$\overline{AE}$線段於 Q，由E對Q作點對稱E′，連$\overleftrightarrow{E'M}$，即為蝴蝶線。

在這個部分中，若M 點到蝴蝶兩側延伸線(就是正方形垂直的兩邊)距離為 q、r，則蝴蝶線就是在兩側上，距離兩側延伸交點 2r、2q 的兩點的連線。

至於判斷蝴蝶線位置的方法，則是利用蝴蝶形頂點垂線的長度判斷方式較為方便。

$(\mathrm{k}-\mathrm{r}):\mathrm{q}=\mathrm{k}:\overline{\mathrm{CE}}$，$\overline{\mathrm{CE}}=\frac{\mathrm{kq}}{(\mathrm{k}-\mathrm{r})}$

$(\mathrm{l}-\mathrm{r}):\mathrm{q}=\mathrm{l}:\overline{\mathrm{DE}}$，$\overline{\mathrm{DE}}=\frac{\mathrm{lq}}{(\mathrm{l}-\mathrm{r})}$

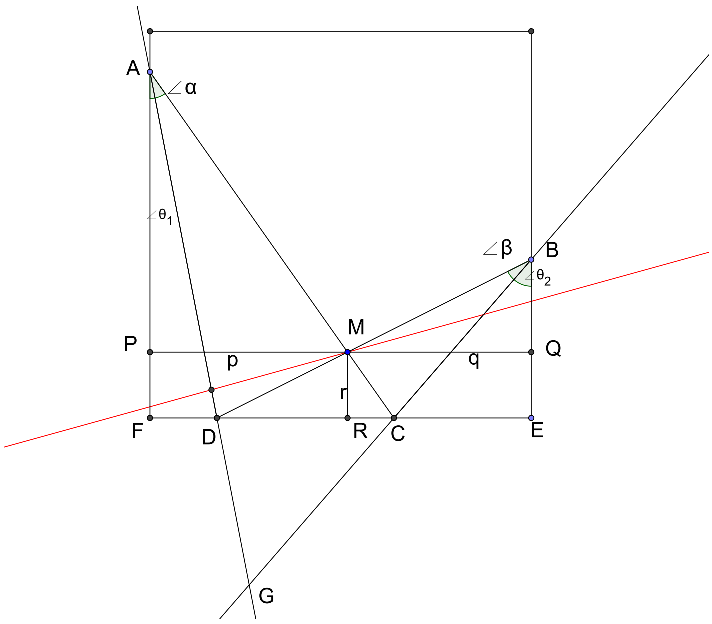
以圖為例，當$\mathrm{l}<2r<k$ (以另一側來看就是$\frac{\mathrm{kq}}{(\mathrm{k}-\mathrm{r})}<2\mathrm{q}<\frac{\mathrm{lq}}{(\mathrm{l}-\mathrm{r})}$)

蝴蝶線會在$\triangle$ ABM 與$\triangle$ CDM 構成的蝴蝶形中。

反之，若$2\mathrm{r}>k$或 $2\mathrm{r}<l$ $\left(2\mathrm{q}<\frac{\mathrm{kq}}{(\mathrm{k}-\mathrm{r})}\right.$或 $\left.2\mathrm{q}>\frac{\mathrm{lq}}{(\mathrm{l}-\mathrm{r})}\right)$

則蝴蝶線會在$\triangle$ BCM 與$\triangle$ ADM構成的蝴蝶形中。(上述不等式皆不成立，則此蝴蝶形不具有蝴蝶線)

（四）、兩個動點的位置在平行的兩邊，而兩個被動點同在一邊



1.正方形中，p、q、r 三線段是對三邊的垂線，表示 M 點在正方形中的位置。

在本部分中，利用平行線內的角度性質，即為$\angle\theta_1 + \angle\theta_2 = \angle AGB$

$$\overline{MP} = p，\overline{MQ} = q，\overline{MR} = r，\overline{AF} = k，\overline{BE} = l$$

$$\angle CAF = \alpha，\angle DBE = \beta，\angle DAF = \theta_1，\angle CBE = \theta_2$$

$$\because \overline{MR} \parallel \overline{AF} \parallel \overline{BE}$$

$$\therefore \angle CMR = \angle CAF = \alpha，\angle DMR = \angle DBE = \beta$$

得出

$$\overline{RD} = r\tan\beta\ ，\overline{DF} = p - r\tan\beta\ ，\ \tan\theta_1 = \frac{p - r\tan\beta}{k}$$

$$\overline{RC} = r\tan\alpha\ ，\overline{CE} = q - r\tan\alpha\ ，\ \tan\theta_2 = \frac{q - r\tan\alpha}{l}$$

由於 $\theta_1 + \theta_2 = \angle AGB$

所以由正切和角公式可知

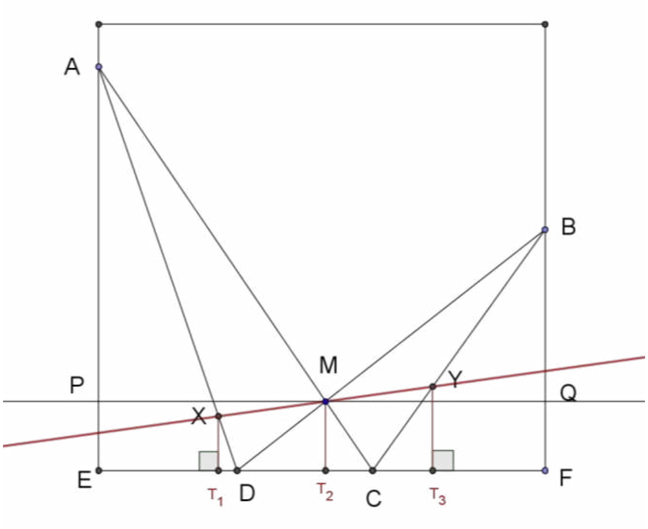
$$\tan\angle AGB = \frac{\tan\theta_1 + \tan\theta_2}{1 - \tan\theta_1\tan\theta_2} = \frac{l(p - r\tan\beta) + k(q - r\tan\alpha)}{kl - (p - r\tan\beta)(q - r\tan\alpha)}$$

知道∠AGB 的正切值後，即可透過先備知識（二）中提到的方法，利用過內點作垂直線的方式，找出蝴蝶線與蝴蝶其中一邊的夾角。

2. 在這個部分裡，由於要在夾角，過中間點做輔助線，又必須以 m、n 等不是一開始題目給的條件，所以我們認為利用平行線內的角度性質來解析這個問題不太漂亮，因此發想出另外一個方式。

由於蝴蝶線是指平分蝴蝶形，也就是說蝴蝶線與蝴蝶形的兩側交點，以及蝴蝶形中間點，向正方形的一邊作垂線，交一邊於三點，此三點的最左與最右點到中間點的距離相等。將此性質結合先前提到的蝶翼定理，搭配任意四邊形中蝴蝶線的位置判別，即可較為俐落的解決問題。

以這個問題來說明:



正方形中，$\overline{PM} = p$，$\overline{QM} = q$，$\overline{AE} = k$，$\overline{BF} = l$

$\angle CAE = \alpha$，$\angle DBF = \beta$，$\angle DAE = \theta_1$，$\angle CBF = \theta_2$

判別蝴蝶線：令$\overline{CD}$線段長度為 x

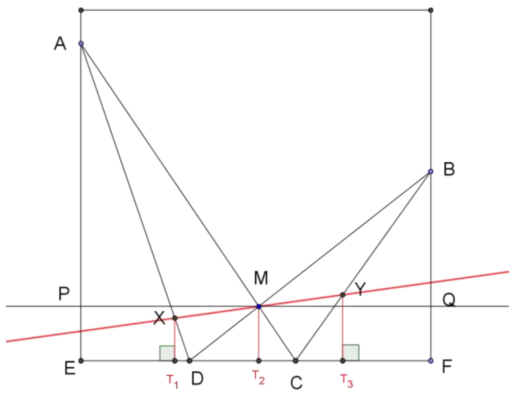
$$\text{三角形面積} \triangle CDM = \frac{rx}{2}$$

$$\triangle BCM = \frac{(l-r)x}{2}$$

$$\triangle ADM = \frac{(k-r)x}{2}$$

$$\triangle ABM = \frac{(l-r)(k-r)x}{2r}$$

以下為 $r < (l-r) < \dfrac{(l-r)(k-r)}{r}$ 之情形



（1）. 設蝴蝶線交 $\overline{AD}$、$\overline{BC}$ 於 X、Y 兩點，X、M、Y 三點向正方形邊 $\overline{EF}$ 作垂線交 $\overline{EF}$ 於 T_1、T_2、T_3 三點，由於蝴蝶線使 $\overline{XM} = \overline{YM}$，所以 $\overline{T_1T_2} = \overline{T_2T_3} = t$

（2）. 由蝶翼定理可知 $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{CM}} \times \dfrac{\overline{BM}}{\overline{DM}} \times \dfrac{\overline{CY}}{\overline{BY}} \times \dfrac{\overline{DX}}{\overline{AX}} = 1$

$\overline{AM} \times \overline{BM} \times \overline{CY} \times \overline{DX} = \overline{CM} \times \overline{DM} \times \overline{BY} \times \overline{AX}$

（3）. $\overline{AM} = \dfrac{p}{\sin\alpha}$，$\overline{BM} = \dfrac{q}{\sin\beta}$，$\overline{CY} = \dfrac{t - r\tan\alpha}{\sin\theta_2}$，$DX = \dfrac{t - r\tan\beta}{\sin\theta_1}$

$AX = \dfrac{p-t}{\sin\theta_1}$，$\overline{BY} = \dfrac{q-t}{\sin\theta_2}$，$\overline{CM} = \dfrac{r}{\cos\alpha}$，$\overline{DM} = \dfrac{r}{\cos\beta}$

（4）. $\overline{AM} \times \overline{BM} \times \overline{CY} \times \overline{DX} = \overline{CM} \times \overline{DM} \times \overline{BY} \times \overline{AX}$

（5）. $\dfrac{p}{\sin\alpha} \times \dfrac{q}{\sin\beta} \times \dfrac{t - r\tan\alpha}{\sin\theta_2} \times \dfrac{t - r\tan\beta}{\sin\theta_1} = \dfrac{p-t}{\sin\theta_1} \times \dfrac{q-t}{\sin\theta_2} \times \dfrac{r}{\cos\alpha} \times \dfrac{r}{\cos\beta}$

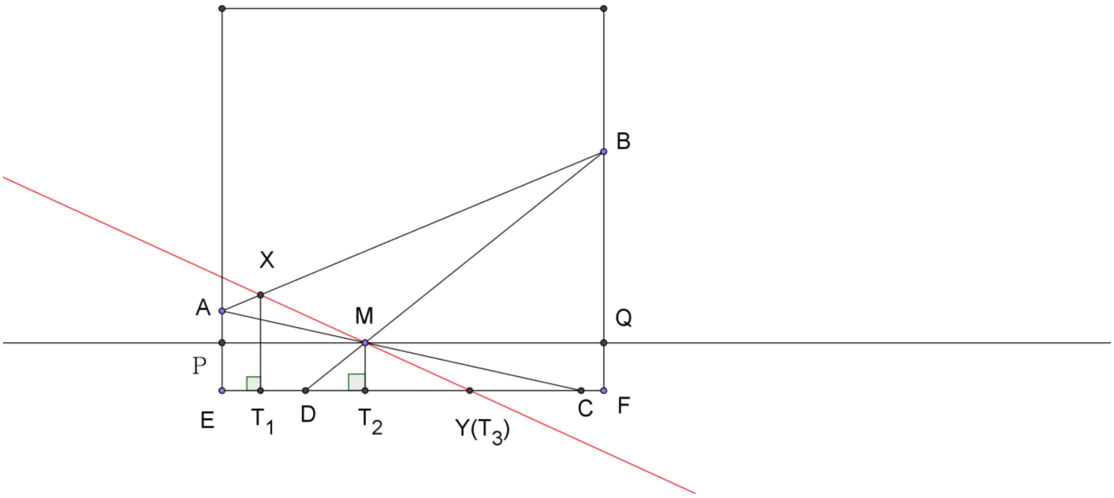
（6）.

$$p \times q \times (t - r\tan\alpha) \times (t - r\tan\beta) = r^2(pq - pt - qt + t^2) \times \tan\alpha \times \tan\beta$$

$$t^2(r^2\tan\alpha\tan\beta - pq) + t(pqr\tan\alpha + pqr\tan\beta - pr^2\tan\alpha\tan\beta - qr^2\tan\alpha\tan\beta) = 0$$

$$t = -\frac{pqr\tan\alpha + pqr\tan\beta - pr^2\tan\alpha\tan\beta - qr^2\tan\alpha\tan\beta}{r^2\tan\alpha\tan\beta - pq}$$

以下為$(l-r) < r < (k-r)$或$(k-r) < r < (l-r)$之情形



正方形中，$\overline{PM}=p$，$\overline{QM}=q$，$\overline{AE}=k$，$\overline{BF}=l$

$\angle CAE=\alpha$，$\angle DBF=\beta$，$\angle DAE=\theta_1$，$\angle CBF=\theta_2$

（1）. 設蝴蝶線交$\overline{AB}$、$\overline{CD}$於 X、Y 兩點，X、M、Y 三點向正方形邊$\overline{EF}$作垂線交$\overline{EF}$於T_1、T_2、T_3三點，由於蝴蝶線使$\overline{XM}=\overline{YM}$，所以$\overline{T_1T_2}=\overline{T_2T_3}=t$

（2）. 由蝶翼定理可知$\dfrac{\overline{BM}\times\overline{CM}\times\overline{AX}\times\overline{DY}}{\overline{AM}\times\overline{DM}\times\overline{BX}\times\overline{CY}}=1$，

$\overline{BM}\times\overline{CM}\times\overline{AX}\times\overline{DY}=\overline{AM}\times\overline{DM}\times\overline{BX}\times\overline{CY}$

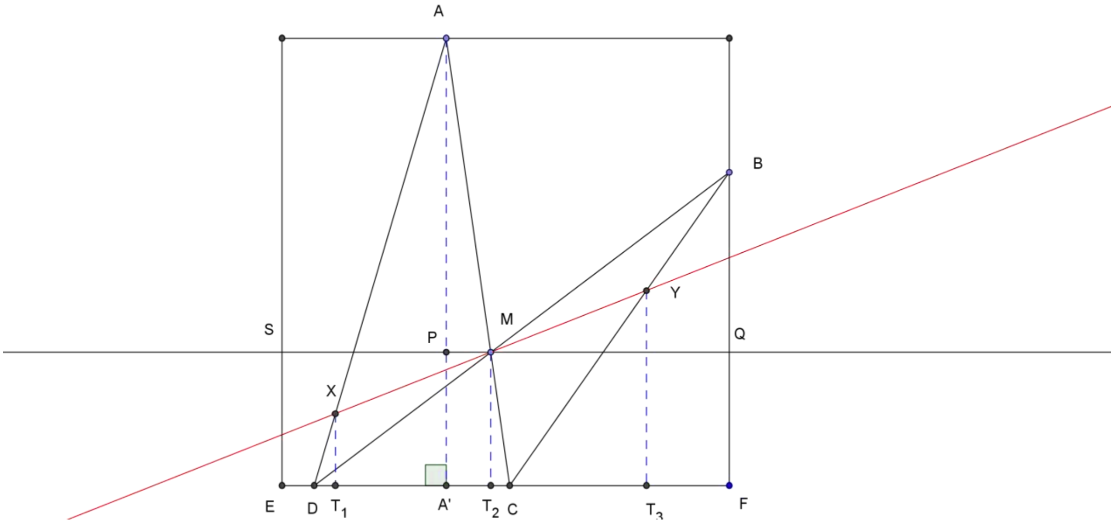
（3）. $\overline{BM}=\dfrac{q}{\sin\beta}$，$\overline{CM}=\dfrac{r}{\cos\alpha}$，$\overline{AX}=\dfrac{p-t}{\sin\gamma}$，$\overline{DY}=r\tan\beta+t$

$\overline{AM}=\dfrac{p}{\sin\alpha}$，$\overline{DM}=\dfrac{r}{\cos\beta}$，$\overline{BX}=\dfrac{q+t}{\sin\gamma}$，$\overline{CY}=r\tan\beta-t$

$$\frac{q}{\sin\beta}\times\frac{r}{\cos\alpha}\times\frac{p-t}{\sin\gamma}\times(r\tan\beta+t)=\frac{p}{\sin\alpha}\times\frac{r}{\cos\beta}\times\frac{q+t}{\sin\gamma}\times(r\tan\beta-t)$$

(4). 化簡得到 $t=-\dfrac{pq\tan\alpha+pq\tan\beta-qr\tan\alpha\tan\beta-pr\tan\alpha\tan\beta}{p\tan\beta-q\tan\alpha}$

（五）、兩個動點分別在垂直的邊上，而兩個被動點同在一邊



正方形中，我們稍微對描述 M 點的位置的方式作了一點修改

$\overline{SP} = s$，$\overline{PM} = p$，$\overline{QM} = q$，$\overline{AA'} = k$，$\overline{BF} = l$

$\angle CAA' = \alpha$，$\angle DBF = \beta$，$\angle DAA' = \theta_1$，$\angle CBF = \theta_2$

1. $\overline{DM} = \dfrac{r}{\cos\beta}$，$\overline{CM} = \dfrac{r}{\cos\alpha}$，$\overline{AX} = \dfrac{t-p}{\sin\theta_1}$，$\overline{BY} = \dfrac{q-t}{\sin\theta_2}$

$\overline{AM} = \dfrac{p}{\sin\alpha}$，$\overline{BM} = \dfrac{q}{\sin\beta}$，$\overline{DX} = \dfrac{r\tan\beta - t}{\sin\theta_1}$，$\overline{CY} = \dfrac{t - r\tan\beta}{\sin\theta_2}$

2. $\dfrac{\overline{DM}\times\overline{CM}\times\overline{AX}\times\overline{BY}}{\overline{AM}\times\overline{BM}\times\overline{DX}\times\overline{CY}} = 1$，$\overline{DM}\times\overline{CM}\times\overline{AX}\times\overline{BY} = \overline{AM}\times\overline{BM}\times\overline{DX}\times\overline{CY}$

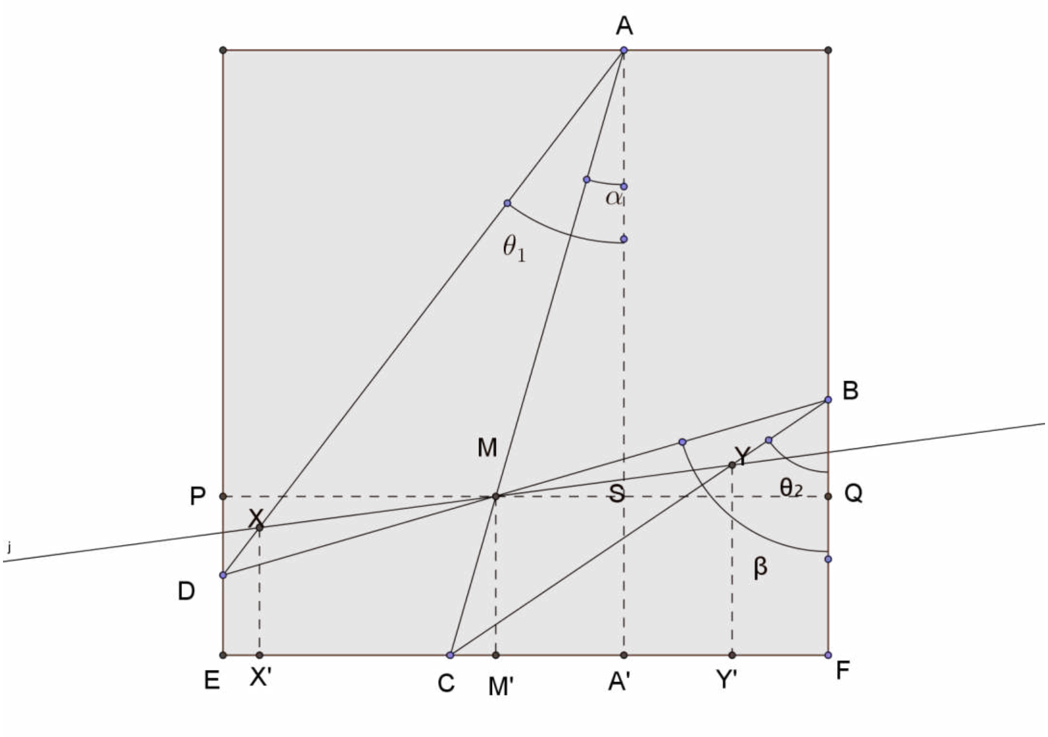
$$\frac{r}{\cos\beta}\times\frac{r}{\cos\alpha}\times\frac{t-p}{\sin\theta_1}\times\frac{q-t}{\sin\theta_2} = \frac{p}{\sin\alpha}\times\frac{q}{\sin\beta}\times\frac{r\tan\beta - t}{\sin\theta_1}\times\frac{t - r\tan\beta}{\sin\theta_2}$$

3. 化簡得到 $t = -\dfrac{qr^2\tan\alpha\tan\beta + pr^2\tan\alpha\tan\beta - pqr\tan\alpha - pqr\tan\beta}{pq - r^2\tan\alpha\tan\beta}$

根據 A 的位置，上述線段的數值可能會改變，例如 P 點在 M 點右邊的話

$\overline{AX} = \dfrac{t+p}{\sin\theta_1}$

（六）、兩個動點與被兩個動點分別在不同的邊上。



$\overline{SM}=s$，$\overline{PM}=p$，$\overline{QM}=q$，$\overline{AA'}=k$，$\overline{BF}=l$

$\angle CAA'=\alpha$，$\angle DBF=\beta$，$\angle DAA'=\theta_1$，$\angle CBF=\theta_2$

1. $\overline{DM}=\dfrac{p}{\sin\beta}$ ，$\overline{CM}=\dfrac{r}{\cos\alpha}$ ，$\overline{AX}=\dfrac{s+t}{\sin\theta_1}$ ，$\overline{BY}=\dfrac{q-t}{\sin\theta_2}$

$\overline{AM}=\dfrac{s}{\sin\alpha}$ ，$\overline{BM}=\dfrac{q}{\sin\beta}$ ，$\overline{DX}=\dfrac{p-t}{\sin\theta_1}$ ，$\overline{CY}=\dfrac{t+r\tan\alpha}{\sin\theta_2}$

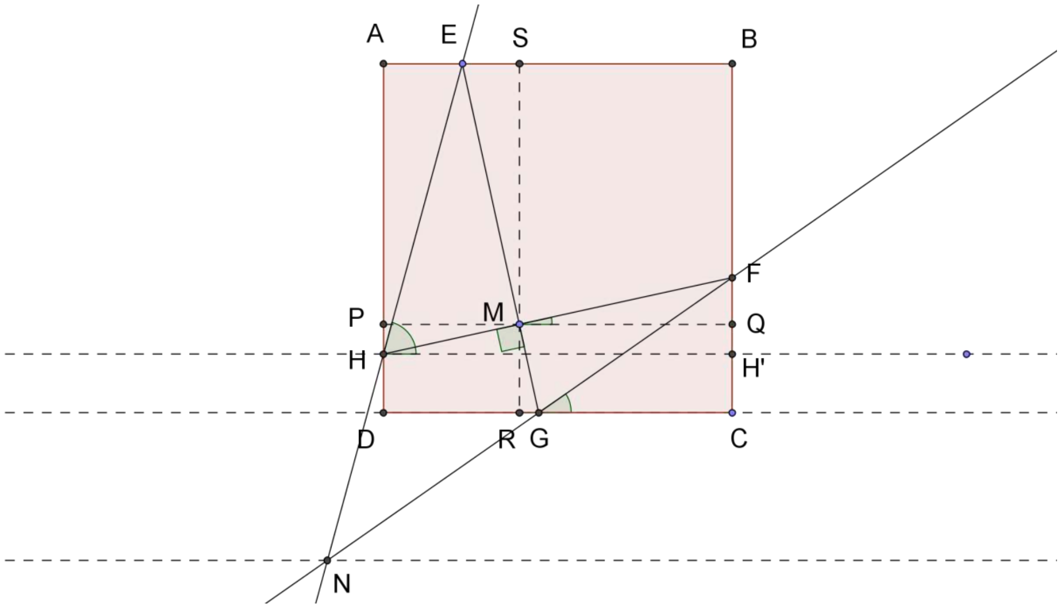
2. $\dfrac{\overline{DM}\times\overline{CM}\times\overline{AX}\times\overline{BY}}{\overline{AM}\times\overline{BM}\times\overline{DX}\times\overline{CY}}=1$，$\overline{DM}\times\overline{CM}\times\overline{AX}\times\overline{BY}=\overline{AM}\times\overline{BM}\times\overline{DX}\times\overline{CY}$

$$\frac{p}{\sin\beta}\times\frac{r}{\cos\alpha}\times\frac{s+t}{\sin\theta_1}\times\frac{q-t}{\sin\theta_2}=\frac{s}{\sin\alpha}\times\frac{q}{\sin\beta}\times\frac{p-t}{\sin\theta_1}\times\frac{t+r\tan\alpha}{\sin\theta_2}$$

3. 化簡得到 $t=-\dfrac{spq-sqr\tan\alpha+spr\tan\alpha-pqr\tan\alpha}{pr\tan\alpha-sq}$

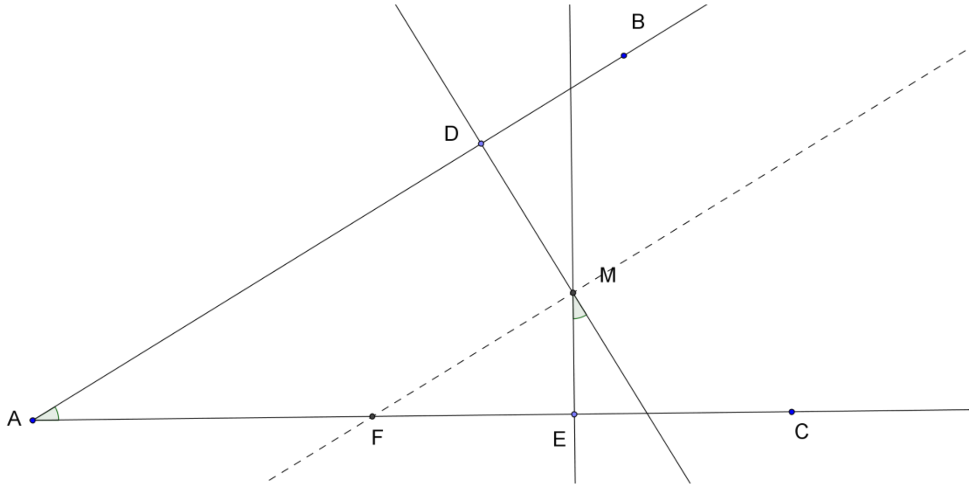
四、正方形內接蝴蝶形的特殊性質

另外，我們還發現了一個正方形內接蝴蝶形的特殊性質。

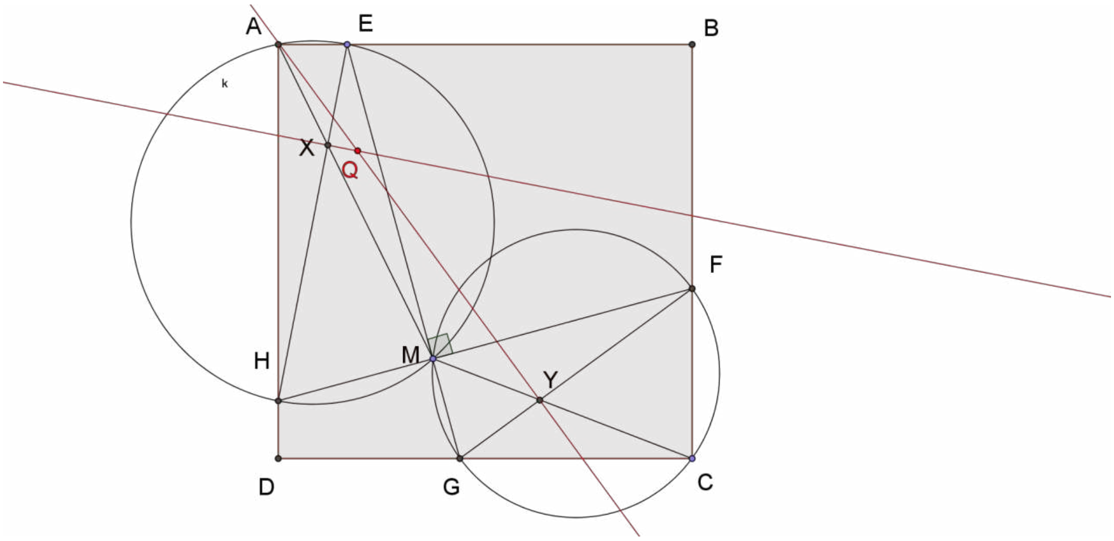


敘述：在正方形 ABCD 中，有一蝴蝶形 EFGH，四頂點在正方形個邊上，M 點固定。若$\overline{EG}$與$\overline{FH}$的夾角為 90 度，則正方形被$\overline{EG}$、$\overline{FH}$分割成四塊四邊形，這四塊四邊形可形成四個蝴蝶形，不論 E 點如何移動，此四個蝴蝶形的蝴蝶線夾角成定值。

證明：在證明之前，我們必須先了解下面這件事。



$\angle BAC$ 中，在兩個邊上任意點做垂直線，則這兩條垂直線的夾角(比較小的那一個)，會等於$\angle BAC$，理由是過 M 點做平行線平行於$\overline{AB}$，使得$\angle BAC = \angle MFE$，而利用直角三角形子母相似可得知。



再來，我們發現這個圖形中，由於$\overline{EG}$、$\overline{HF}$垂直，四邊形 AEMH 以及

四邊形CGMF 為圓內接四邊形(對頂角互補)。利用圓內接蝴蝶定理的性質

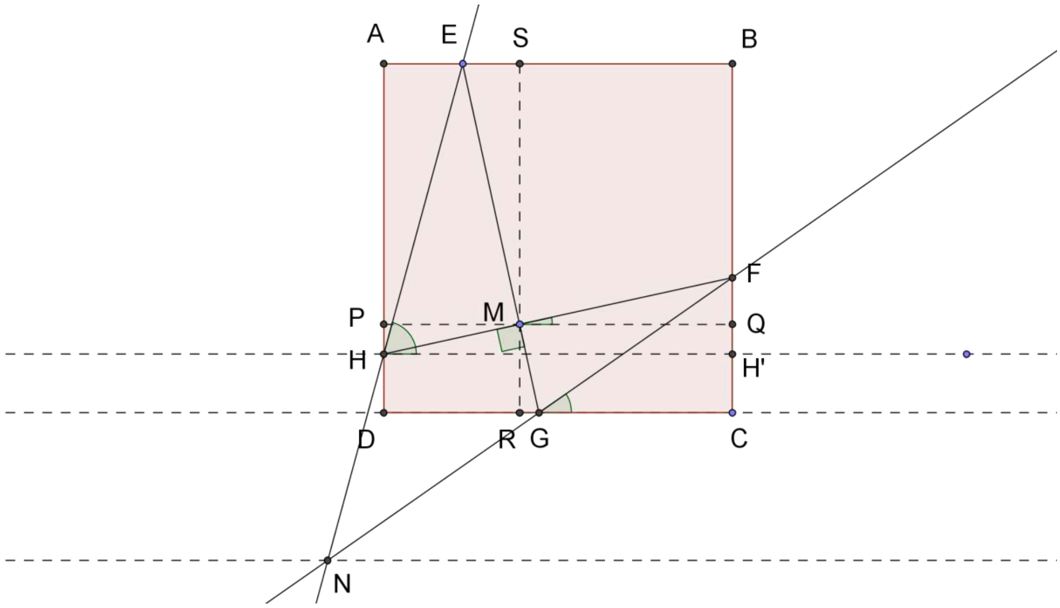
，可以知道蝴蝶線會垂直於「中間點與圓心的連線」,又因為$\overline{EH}$、$\overline{GF}$為直徑，

所以兩圓的圓心分別在$\overline{EH}$、$\overline{GF}$上，可知，四邊形 AEMH 以及四邊形CGMF

形成的蝴蝶形的蝴蝶線，垂直於$\overline{EH}$、$\overline{GF}$。

因此，欲證明動點 E 移動值，兩蝴蝶線的夾角成定值，就變成的證明 EH 線段及 FG 線段的延長線夾角，也不會受到 E 點移動的影響。

證明:



在正方形 ABCD 中，有一蝴蝶形 EFGHM。

令$\overline{MP} = p$，$\overline{MQ} = q$，$\overline{MR} = r$，$\overline{MS} = s$，p、q、r、s 為 M 點到正方形邊的最短距離。$\angle EHH' = \alpha$，$\angle FGC = \beta$。$\angle FMQ = \angle GMR = \angle HMP = \angle EMS = \theta$，蝴蝶形的傾斜角度，表示 E 點移動。

欲求$\angle ENF$，可由$\angle EHH' - \angle FGC$ 得之。

$\tan\alpha = \dfrac{s + p\tan\theta}{p - s\tan\theta}$，$\tan\beta = \dfrac{r + q\tan\theta}{q - r\tan\theta}$，利用正切差角公式，可得:

$\tan\angle ENF = \tan(\alpha - \beta)$

$$= \frac{(q - r\tan\theta)(s + p\tan\theta) - (p - s\tan\theta)(r + q\tan\theta)}{(s + p\tan\theta)(r + q\tan\theta) + (p - s\tan\theta)(q - r\tan\theta)}$$

化簡得出 $\tan\angle ENF = \dfrac{qs - pr}{pq + rs}$

因此可得知:

$\angle ENF$ 角度的值不會受到 θ 的影響，只會被一開始選擇的內點位置決定。

同理可證其他蝴蝶形的蝴蝶線夾角組合，亦為定值。

證畢

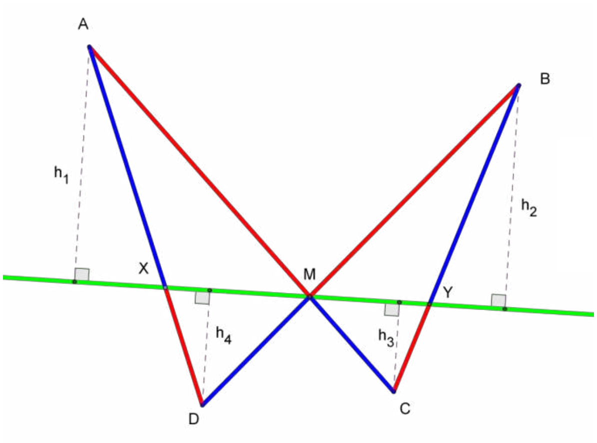
伍、結論

一、我們提出了利用平行線截三角形的性質，作出蝴蝶線的方法。

二、在一個任意四邊形中，利用我們使用的蝴蝶線作圖法，延伸出頂點及對角線交點向其中一邊作垂線，比較垂線的長度可以判斷蝴蝶線位置。然後又由垂線長度發展出，蝴蝶線的位置也可以用面積來判斷，對於每種不同的情況，可以選擇較為方便簡潔的做法。

三、使用反證法證明一個兩側不互相平行的蝴蝶形，只可能有一條蝴蝶線。再利用比較面積判別蝴蝶線的方法，說明了一個四邊不互相平行且對角線不被平分的任意四邊形，若存在兩條蝴蝶線會產生的矛盾，證明了一個這樣的四邊形只有一條蝴蝶線。

四、在一個任意蝴蝶形中，過中間點作一條任意的蝴蝶線（不需要符合原本蝴蝶線的敘述）分別交兩側於兩點，再由蝴蝶形的四頂點向蝴蝶線作垂線，利用相似形比例的關係，導出了一個線段長度作運算呈定值的定理，我們將之命名為蝶翼定理。



$$\frac{\overline{AM}}{\overline{CM}}\times\frac{\overline{BM}}{\overline{DM}}\times\frac{\overline{CY}}{\overline{BY}}\times\frac{\overline{DX}}{\overline{AX}}=\frac{h_1}{h_3}\times\frac{h_2}{h_4}\times\frac{h_3}{h_2}\times\frac{h_4}{h_1}=1$$

六、利用蝴蝶線的性質，也就是蝴蝶線與兩側的交點Ｘ、Ｙ分別到中間點Ｍ的距離相等，想出把Ｘ、Ｙ、Ｍ三點向正方形中同一條邊作垂線，交邊於T_1、T_2、T_3三點，$\overline{T_1T_2}=\overline{T_2T_3}=t$。利用蝶翼定理以及已知的訊息，可以算出ｔ與正方形內點以及動點的關係。

七、在正方形 ABCD 中，有一蝴蝶形 EFGH，四頂點在正方形個邊上，M 點固定。若$\overline{EG}$ 與$\overline{FH}$ 的夾角為 90 度，則被正方形$\overline{EG}$ 、$\overline{FH}$ 分割成四塊四邊形，這四塊四邊形，可形成四個蝴蝶形，不論 E 點如何移動，此四個蝴蝶形的蝴蝶線夾角成定值。

陸、參考資料

http://mathafou.free.fr/index_en.html

幾何學的新探索

第四屆丘成桐中學數學獎得獎作品

【評語】040417

1. 蝶翼四頂點在正方形上變動情形似乎沒有簡潔的規律，也許在正方形不是蝴蝶定理合適的推廣情形。
2. 討論四（四頂點在四個邊）中若 EG 與 HF 夾角並非直角，是否兩蝴蝶線夾角也會是定值?
3. 比較有趣的結果是蝶翼定理。