中華民國第55屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組　數學科

040416

三角形和圓內接四邊形的一個性質

學校名稱：國立金門高級中學

作者：	指導老師：
高二 李孟龍 高二 莊耀鈞	楊玉星

關鍵詞：九點圓圓心、外心、垂心

摘要

從原始的題目「**圓內接四邊形的外心會是其內、外平分圓的連心線之中點**」出發，我們發現若為雙心四邊形，則其外心也是其內心和外平分圓圓心的中點，且此三點會和雙心四邊形的兩對角線交點共線，而外平分四邊形的兩對角線交點正好是雙心四邊形的內心。無獨有偶，三角形的外心也是其內心和外平分三角形外心的中點，且此三點會和外平分三角形的重心共線。

若考慮內切圓的切點多邊形，我們發現：三角形的外平分三角形和內切圓切點三角形會相似，且其面積是其外平分三角形面積與內切圓切點三角形面積的等比中項。無獨有偶，雙心四邊形外平分四邊形和內切圓切點四邊形亦會相似，且其面積也是其外平分四邊形面積與內切圓切點四邊形面積的等比中項。

壹、研究動機

有一天在學校圖書館找書的時候，意外發現一本「數學傳播季刊」，其中有一篇由<u>吳波</u>所寫的「圓內接四邊形的一個有趣性質」特別引起我們的注意，設想如果是三角形，是否也有類似的定理？ 而其它圓內接 n 邊形($n \geq 5$)又如何？於是我們便開始著手研究這個問題。

貳、研究目的

探討「圓內接四邊形的一個有趣性質」的延伸問題。

參、研究設備及器材

紙、筆、電腦、GSP

肆、研究過程或方法

一、名詞定義

定義(一)：一個 n 邊形的 n 條內角平分線所圍成的四邊形叫做它的**內平分 n 邊形**。

如果 n 條內角平分線正好交於一點，此交點即為內心，此時它的內平分 n 邊形退化成一點。

定義(二)：一個 n 邊形的所有外角平分線所圍成的 n 邊形叫做它的**外平分 n 邊形**。

定義(三)：一個 n 邊形的內平分四邊形的外接圓，叫做它的**內平分圓**。

定義(四)：一個 n 邊形的外平分四邊形的外接圓，叫做它的**外平分圓**。

二、原始命題

如果四邊形本身也有外接圓，則它的外心是其內、外平分圓的連心線之中點。

如圖 1，設四邊形 ABCD 的內平分四邊形 EFGH，外平分四邊形 IJKL，四邊形 ABCD、EFGH 和 IJKL 的外心分別為 O、O_1和O_2，則圓心 O 為連心線$\overline{O_1O_2}$ 的中點。

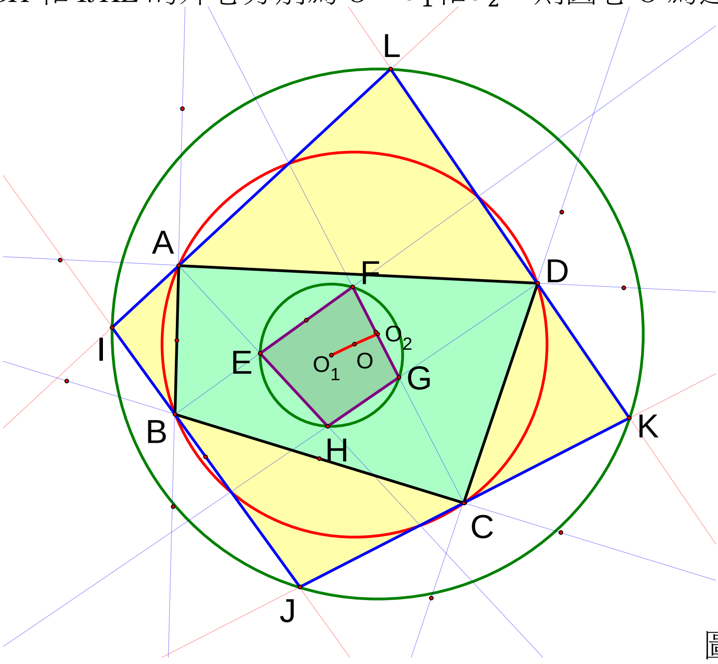

圖 1

為了證明這個性質，我們先證明以下的引理：

引理 0：一個四邊形的內平分四邊形和外平分四邊形都有外接圓。

如圖 2，設四邊形 ABCD 的內平分四邊形為 EFGH，外平分四邊形為 IJKL，則四邊形 EFGH 和四邊形 IJKL 都有外接圓，分別為圓O_1和圓O_2。

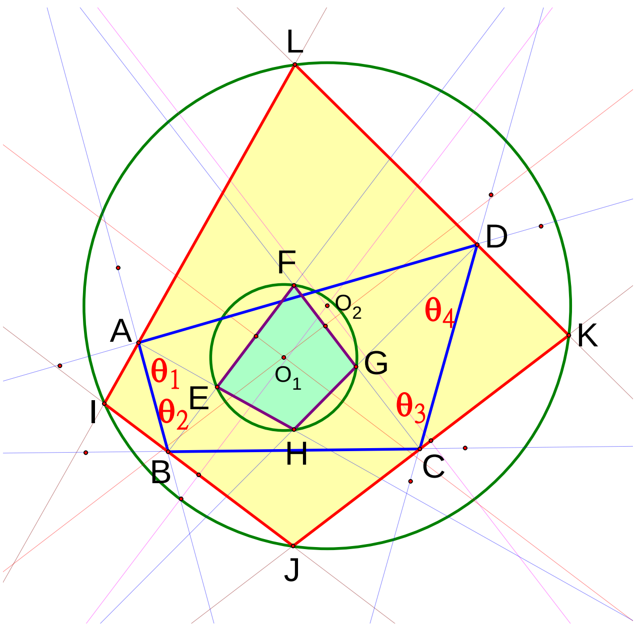

圖 2

【證明】

(1) 如圖 1，設$\angle DAB = 2\theta_1$，$\angle ABC = 2\theta_2$，$\angle BCD = 2\theta_3$，$\angle CDA = 2\theta_4$。

$\because \angle AEB=180°-(\theta_1+\theta_2) = 180° - \frac{1}{2}(\angle BAD + \angle ABC)$，

且 $\angle CGD=180°-(\theta_3+\theta_4) = 180° - \frac{1}{2}(\angle BCD + \angle CDA)$，

$\therefore\ \angle FEH + \angle FGH = \angle AEB + \angle CGD = 360° - \frac{1}{2}(\angle BAD + \angle ABC + \angle BCD + \angle CDA)$

$= 360° - \frac{1}{2} \times 360° = 180°$， 故四邊形 EFGH 有外接圓。

(2)如圖 1，∵同一頂點處內、外角平分線互相垂直，

$\therefore\ \angle IAE = \angle IBE = 90°$，$\angle AIB = 180° - \angle AEB = 180° - \angle FEH$，

$\angle KCG = \angle KDG = 90°$，$\angle CKD = 180° - \angle CGD = 180° - \angle FGH$，

$\therefore\ \angle LIJ + \angle JKL = \angle AIB + \angle CKD = 360° - (\angle FEH + \angle FGH) = 180°$ ，

故四邊形 IJKL 也有外接圓。

引理 1：I、E、G、K 四點共線，J、H、F、L 四點共線，且這兩條直線互相垂直。

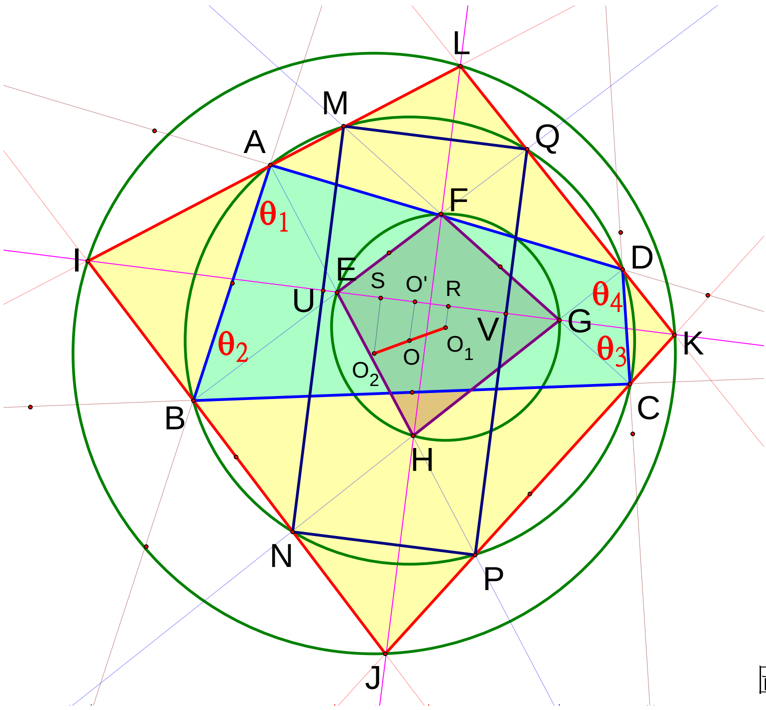

圖 3

【證明】

(1)如圖 3，設$\angle DAB = 2\theta_1$，$\angle ABC = 2\theta_2$，$\angle BCD = 2\theta_3$，$\angle CDA = 2\theta_4$。

則$\theta_1+\theta_3=\frac{1}{2}(\angle DAB+\angle BCD)=\frac{1}{2} \times 180° = 90°$，

$\theta_2+\theta_4=\frac{1}{2}(\angle\mathrm{ABC}+\angle\mathrm{CDA})=\frac{1}{2}\times 180°=90°$。

(2)∵同一頂點處內、外角平分線互相垂直，

∴A、E、B、I 和 B、F、C、J 和 C、G、D、K 和 D、H、A、L 都四點共圓。

(3)如圖 4 和圖 5，若$\overleftrightarrow{AD}//\overleftrightarrow{BC}$，則此圓內接四邊形 ABCD 為等腰梯形或矩形，若 ABCD 為等腰梯形時，則內平分四邊形 EFGH 和外平分四邊形 IJKL 都是直角鳶形，J、H、F、L 四點均在$\overline{AD}$和$\overline{BC}$的中垂線上，故 J、H、F、L 四點共線。如圖 4，設$\angle\mathrm{BAM}=\varphi_1$，$\angle\mathrm{DAM}=\varphi_2$，$\angle\mathrm{AMB}=\varphi_3$，則$\varphi_1=\varphi_2$且$\varphi_2=\varphi_3$，$\therefore\varphi_1=\varphi_3$，推得$\overline{BA}=\overline{BM}$，又$\overleftrightarrow{AH}\perp\overleftrightarrow{BF}$，$\therefore\overline{AE}=\overline{EM}$。而四邊形 AEBI 為矩形，$\overline{AN}=\overline{NB}$，故$\overleftrightarrow{NE}//\overleftrightarrow{BM}$，即$\overleftrightarrow{IE}//\overleftrightarrow{BC}$。同理可證：$\overleftrightarrow{GK}//\overleftrightarrow{BC}$，又$\overline{FE}=\overline{FG}$且$\overline{EB}=\overline{GC}$，$\therefore\overleftrightarrow{EG}//\overleftrightarrow{BC}$，故 I、E、G、K 四點共線，且由外平分四邊形 IJKL 是直角鳶形，可知這兩條直線互相垂直；若 ABCD 為矩形時，其內平分四邊形 EFGH 和外平分四邊形 IJKL 都是正方形，均左右對稱於$\overline{AD}$和$\overline{BC}$的中垂線，也上下對稱於$\overline{AB}$和$\overline{CD}$的中垂線，故 I、E、G、K 四點共線，且 J、H、F、L 四點也共線，且由外平分四邊形 IJKL 是正方形，可知這兩條直線互相垂直，此時，四邊形 ABCD、EFGH 和 IJKL 的外心 O、O_1和O_2會重合。

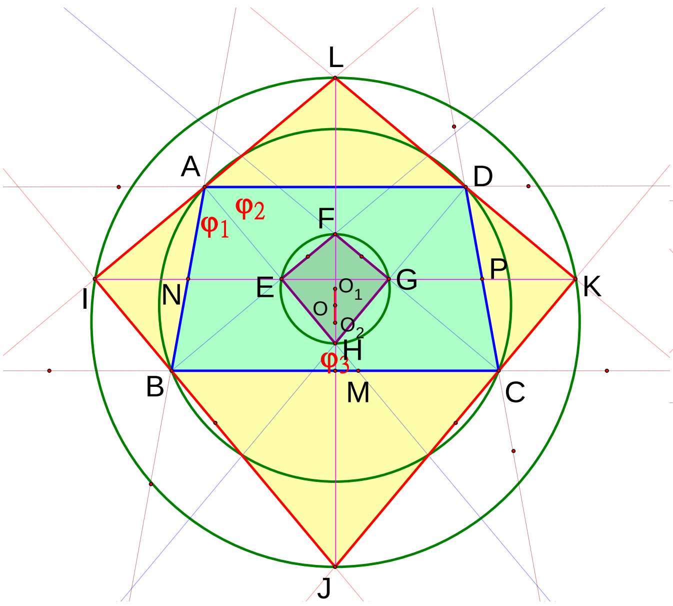

圖 4

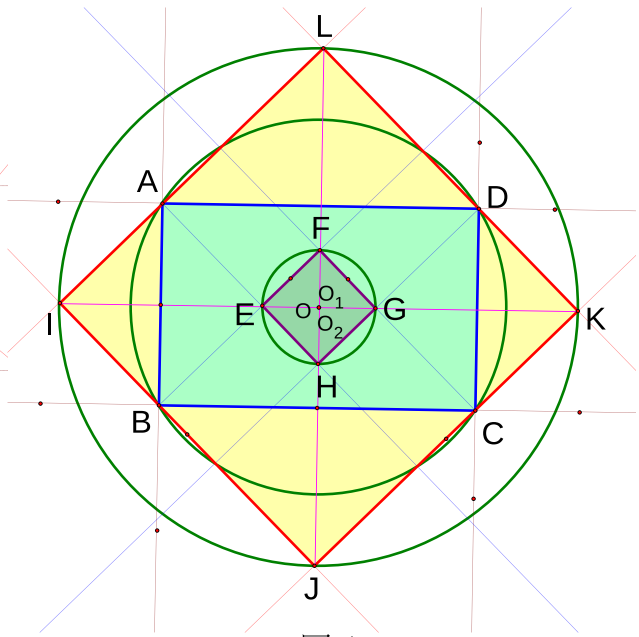

圖 5

(4)如圖 3，若$\overleftrightarrow{AD}$和$\overleftrightarrow{BC}$不平行，此時 E、I 分別是$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BC}$和$\overleftrightarrow{AB}$所圍成三角形的內心和旁心。因此 E、I 必在原三角形的$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BC}$ 所夾內角的角平分線上，而 K、G 分別是$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BC}$和$\overleftrightarrow{CD}$所圍成三角形的內心和旁心。因此 K、G 必在此三角形的 $\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BC}$ 所夾內角的角平分線上，故 I、E、G、K 四點共線，同理可證：J、H、F、L 四點也共線。

又由(2)可知：$\angle\mathrm{AIE}=\angle\mathrm{ABE}=\theta_2$，$\angle\mathrm{ALH}=\angle\mathrm{ADH}=\theta_4$。

則由(1)可知：$\angle\mathrm{AIE}+\angle\mathrm{ALH}=90°$，因此$\overleftrightarrow{IK}\perp\overleftrightarrow{JL}$。

引理 2：圓內接四邊形一個頂點處的內角平分線與相對頂點處的外角平分線的交點，必在這個四邊形的外接圓上。

【證明】

如圖 3，$\overleftrightarrow{CM}$是∠BCD的內角平分線，與對應頂點 A 處的外角平分線$\overleftrightarrow{AM}$的交點為 M，$\angle\mathrm{MAD} = 90° - \angle\mathrm{DAE} = 90° - \theta_1 = \theta_3 = \angle MCD$。因此 M、A、C、D 四點共圓，即 M 在圓 O 上，同理可證：另外三個交點 N、P、Q 也在圓 O 上。

引理 3：I、G 對稱於$\overleftrightarrow{MN}$；J、H 對稱於$\overleftrightarrow{NP}$；K、E 對稱於$\overleftrightarrow{PQ}$；L、F 對稱於$\overleftrightarrow{MQ}$。

【證明】

由引理 2 知：$\angle\mathrm{AMN} = \angle\mathrm{ADN} = \theta_4$，$\angle\mathrm{CMN} = \angle\mathrm{CDN} = \theta_4$，$\therefore \angle\mathrm{AMN} = \angle\mathrm{CMN}$。同理可證：$\angle\mathrm{BNM} = \angle\mathrm{DNM}$，又$\overline{MN}$共用，$\therefore \Delta\mathrm{MIN} \cong \Delta\mathrm{MGN}$，四邊形 MING 為鳶形，因此，I、G 對稱於$\overleftrightarrow{MN}$。如圖 3，同理可證：J、H 對稱於$\overleftrightarrow{NP}$；K、E 對稱於$\overleftrightarrow{PQ}$；L、F 對稱於$\overleftrightarrow{MQ}$。

引理 4：四邊形 MNPQ 為圓 O 的內接矩形。

【證明】

由引理 2 知：四邊形 MNPQ 內接於圓 O。如圖 3，由引理 3 知：$\overline{MN} \perp \overline{IG}$，而由引理 1 知：$\overline{IK} \perp \overline{JL}$，則$\overline{MN} // \overline{JL}$。同理$\overline{MQ} // \overline{IK}$，因此$\overline{MN} \perp \overline{MQ}$，$\angle\mathrm{QMN} = 90°$。同理可證其它三個角也是$90°$，故四邊形 MNPQ 為圓 O 的內接矩形。

【原命題證明】

設 O_1、O、O_2 在$\overline{IK}$上的投影分別為 R、O'、S，$\overrightarrow{IG} = 2\vec{a}$，$\overrightarrow{GE} = 2\vec{b}$，$\overrightarrow{EK} = 2\vec{c}$。

(1)∵O_1是內平分圓圓心，$\therefore \overrightarrow{GR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GE} = \vec{b}$，故$\overrightarrow{IR} = \overrightarrow{IG} + \overrightarrow{GR} = 2\vec{a} + \vec{b}$。

(2)∵O_2是外平分圓圓心，$\therefore \overrightarrow{IS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IK} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{IG} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{EK}\right) = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$。

(3)如圖 3，設$\overline{MN}$與$\overline{IG}$相交於點 U，設$\overline{PQ}$與$\overline{EK}$相交於點 V，已知 I、G 對稱於$\overleftrightarrow{MN}$；

K、E 對稱於$\overleftrightarrow{PQ}$，則$\overrightarrow{IU} = \overrightarrow{UG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IG} = \vec{a}$，$\overrightarrow{EV} = \overrightarrow{VK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EK} = \vec{c}$，

$\therefore \overrightarrow{UV} = \overrightarrow{UG} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{EV} = \vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}$。

又四邊形 MNPQ 為圓 O 的內接矩形且$\overline{IK} \perp \overline{JL}$，$\overline{MQ} // \overline{IK}$，

$\therefore \overline{MQ} = \overline{UV}$，$\overrightarrow{UO'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{UV} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$。

故$\overrightarrow{IO'}=\overrightarrow{IU}+\overrightarrow{UO'}=\frac{3}{2}\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{IS}+\overrightarrow{IR})$，由此可知：O′是$\overline{RS}$的中點。

又設 O_1、O、O_2 在$\overline{JL}$上的投影分別為R′、O"、S′。同理可證：O"是$\overline{R'S'}$的中點。也就是說，$\overline{O_1O_2}$在兩條相交直線上的投影均被點 O 的的投影所平分，故圓心 O 為連心線$\overline{O_1O_2}$ 的中點，即圓內接四邊形的外心是其內、外平分圓的連心線的中點。

推論：如圖 6，既有內切圓也有外接圓的四邊形稱為雙心四邊形。其內平分四邊形會退化成一點，即內心。故雙心四邊形的外心是其內心和外平分圓圓心的中點。

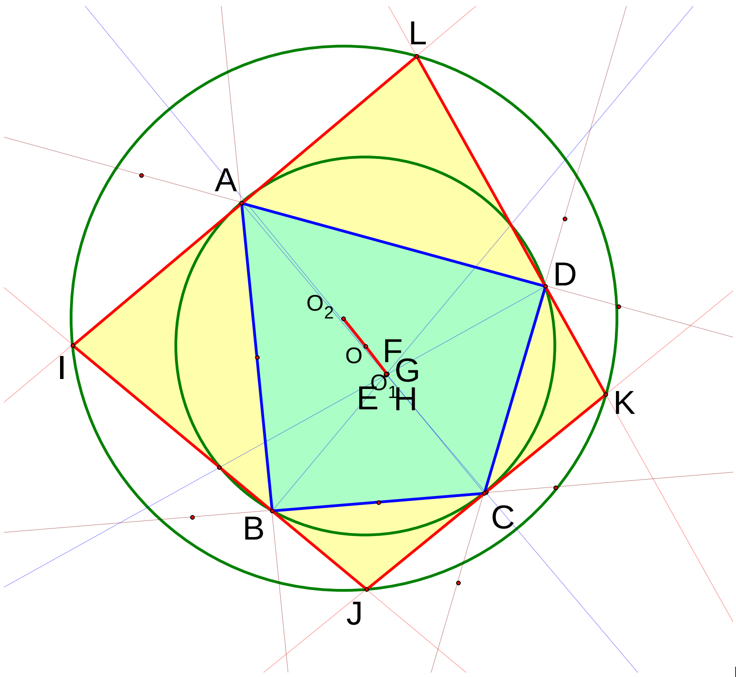

圖 6

三、原命題延伸

而任意三角形，其內平分三角形會退化成一點，即內心。其外平分三角形就是旁心三角形，那麼三角形的外心是否也是其內心和旁心三角形外心的中點？至於其它圓內接 n 邊形($n \geq 5$)是否也有類似的性質呢？

定理一：任意三角形的外心是其內心和旁心三角形外心的中點。

如圖 7，設ΔABC的外心、內心、旁心三角形的外心分別為 O、O_1和O_2，則圓心 O 為連心線$\overline{O_1O_2}$ 的中點。

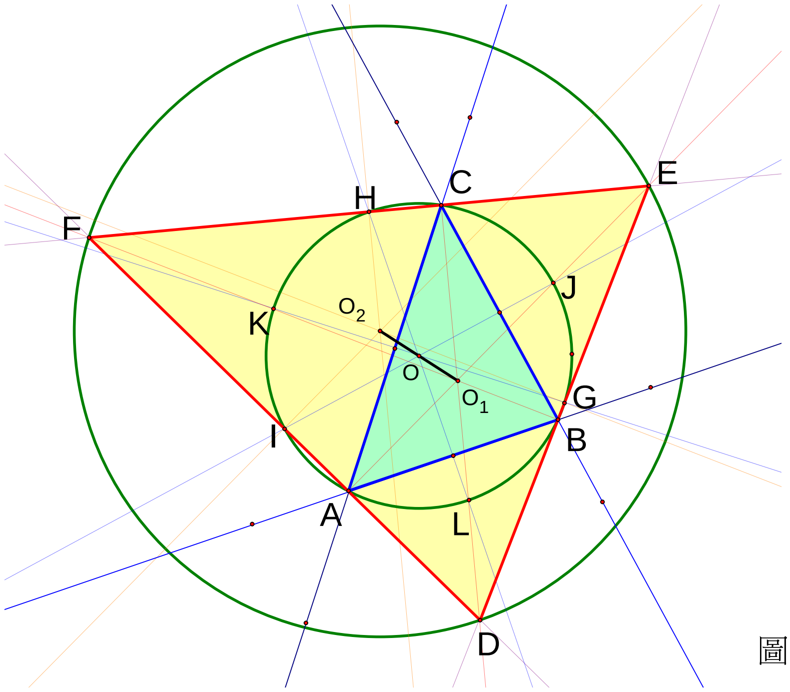

圖 7

為了證明這個定理，我們先證明以下的引理：

引理 5：在ΔABC中，如下的九點共圓：三邊的中點 P、Q、R，從三個頂點向對邊所作垂線的垂足A′、B′、C′，垂心到三個頂點所連線段的中點A"、B"、C" 等九個點，且九點圓的圓心 f 是其外心 F 與垂心 E 所連線段的中點，另外，九點圓的半徑是ΔABC外接圓半徑的一半。

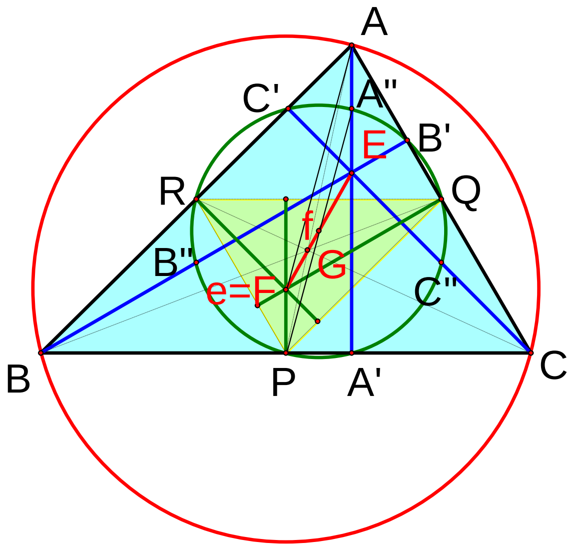

圖 8

【證明】

(1)如圖 8，P、Q、R 三點是$\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$的中點，顯然的，ΔPQR的垂心剛好是ΔABC的外心，並令 G 為ΔABC和ΔPQR的共同重心，由相關位置可以看出ΔPQR正是ΔABC繞重心 G 旋轉180°之後再縮小一半的結果。

(2)現在假設ΔABC的垂心 E，外心 F 和重心 G，以及ΔPQR的垂心 e，外心 f 和重心 G，由於在旋轉和縮放時角度的關係不變，ΔABC 的垂心 E 自然變換到ΔPQR的垂心 e，又 e 同時也是ΔABC的外心 F，所以 E、G、F 三點共線(稱為尤拉線)且$\overline{EG}=2\overline{GF}$；又因$\overline{EA}$透過旋轉180°和縮小一半之後，變換到$\overline{FP}$，因此$\overline{EA}=2\overline{FP}$。接著再將ΔABC的外心 F 繞 G 旋轉180°之後再縮小一半，得到ΔPQR的外心 f，因此$\overline{GF}=2\overline{Gf}$。

(3)由於$\overline{EG}=2\overline{GF}=4\overline{Gf}$，所以$\overline{Ef}=\overline{EG}-\overline{Gf}=3\overline{Gf}$，$\overline{Ff}=\overline{FG}+\overline{Gf}=3\overline{Gf}$，故$\overline{Ef}=\overline{Ff}$，即 f 是$\overline{EF}$的中點。

(4)又$\overline{EA}=2\overline{FP}$，因此若將$\overline{Pf}$延長之後，會交到$\overline{AE}$的中點A"，並且有$\overline{Pf}=\overline{fA"}$，在直角三角形ΔPA′A"中，f 是斜邊$\overline{PA"}$的中點，所以有$\overline{fA'}=\overline{fA"}=\overline{fP}$。
同理可證：$\overline{fB'}=\overline{fB"}=\overline{fQ}$，$\overline{fC'}=\overline{fC"}=\overline{fR}$，故以 f 為圓心，$\overline{fP}$為半徑的圓會通過 P、Q、R、A′、B′、C′、A"、B"、C"等九個點。

(5)連接$\overline{AF}$，則在ΔAEF中，∵A"和 f 分別為$\overline{AE}$和$\overline{EF}$的中點，∴$\overline{A"f}=\frac{1}{2}\overline{AF}$。

即九點圓的半徑是ΔABC外接圓半徑的一半。

【定理一證明】

(1)如圖 7，由題意知：$\overrightarrow{AO_1}$、$\overrightarrow{BO_1}$、$\overrightarrow{CO_1}$分為∠CAB、∠ABC、∠BCA的分角線，且三角形同一頂點處內、外角平分線互相垂直，∴$\overrightarrow{AO_1}\perp\overline{DF}$，$\overrightarrow{BO_1}\perp\overline{DE}$，$\overrightarrow{CO_1}\perp\overline{EF}$，又三角形一頂點的內角平分線會和另外兩頂點的外角平分線共一交點，∴$\overline{AE}$、$\overline{BF}$、$\overline{CD}$為ΔDEF的三高，因此，O_1也是ΔDEF的垂心。

(2)∵圓 O 過其垂足 A、B、C，∴O 是ΔDEF的九點圓的圓心，而O_2是ΔDEF的外心，因此，圓心 O 為連心線$\overline{O_1O_2}$ 的中點。

推論：如圖 9，若ΔABC為正三角形，則其外心 O、內心O_1、旁心三角形的外心O_2會重合。

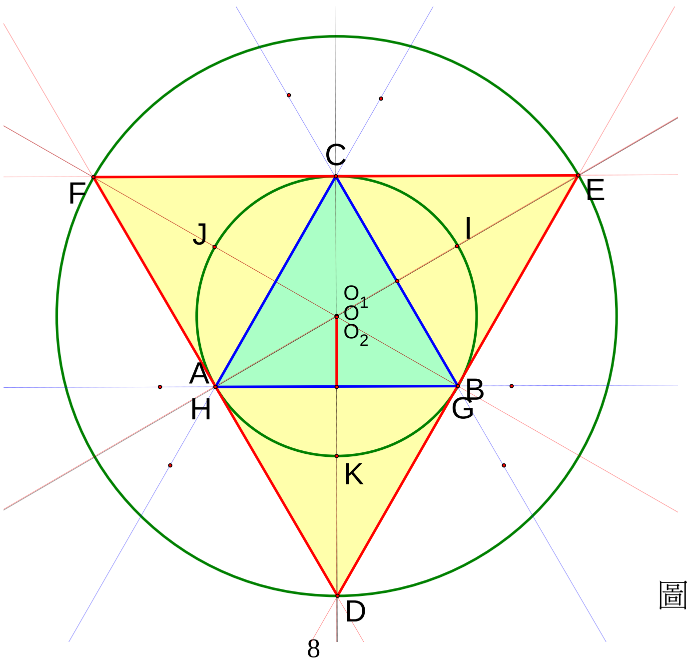

圖 9

　但其它圓內接 n 邊形($n \geq 5$)就沒有類似的性質，以圓內接五邊形說明如下：如圖 10，由於圓內接 n 邊形($n \geq 5$)的內角平分線所圍成的多邊形，不一定是凸多邊形，當然也不一定有外接圓；而外角平分線所圍成的多邊形，雖然是凸多邊形，但也不一定有外接圓。因此，並沒有像圓內接四邊形類似的性質。

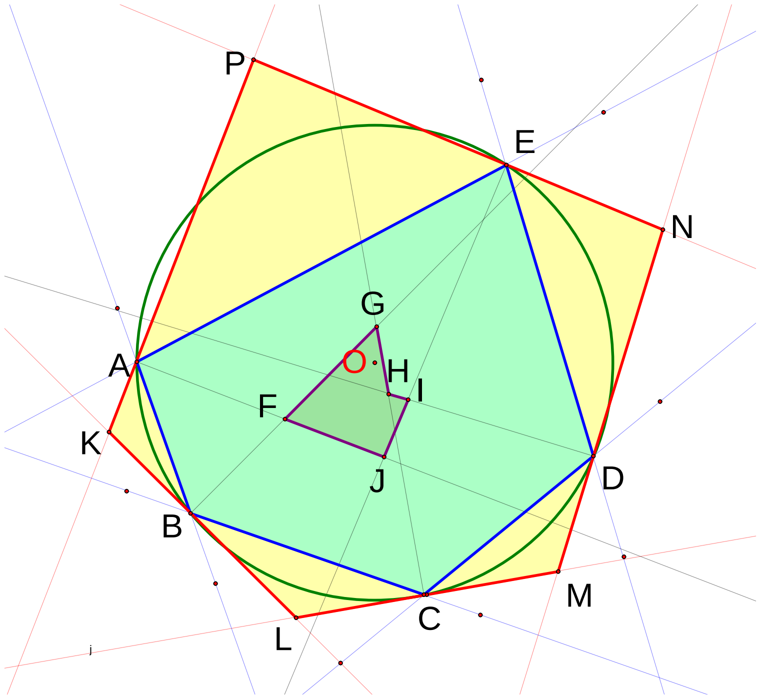

圖 10

　除非是特殊情形，如圖 11，圓內接正 n 邊形($n \geq 5$)的內角平分線會交於一點，即其內心。而外角平分線所圍成的多邊形，顯然也是正 n 邊形，這兩個正 n 邊形的外心正好是原正 n 邊形的內心。換句話說，內平分圓退化成一點，會和圓內接正 n 邊形的外心、外平分圓的圓心重合。

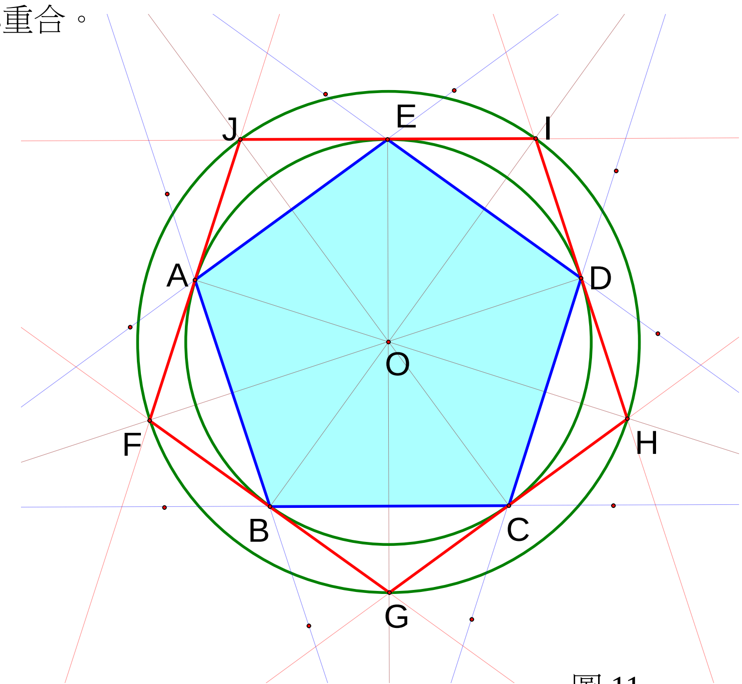

圖 11

伍、討論

一、如圖 12，由九點圓的性質知：ΔABC的外接圓半徑為其旁心三角形ΔDEF的外接圓半徑之半。我們將其類推到雙心四邊形，看看是否有同樣的性質？如圖 13，經由 Gsp 繪圖軟體驗證，發現並沒有。

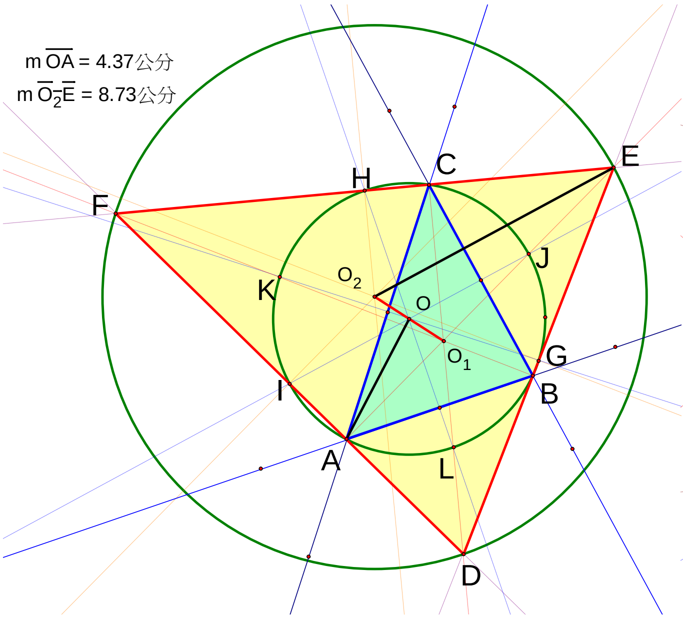

圖 12

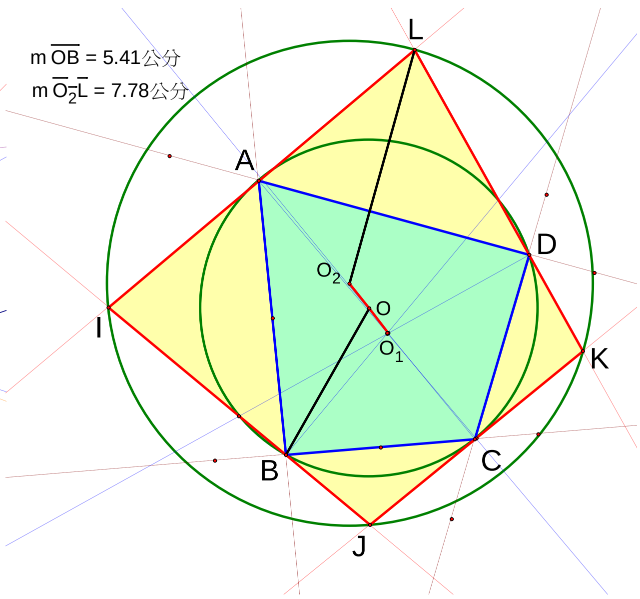

圖 13

二、如圖 14，由九點圓的性質知：ΔABC的內心(三角形ΔDEF的垂心)、外心與其旁心三角形ΔDEF的外心、重心會共線(稱為尤拉線)。我們將其類推到雙心四邊形，看看是否有同樣的性質？如圖 15，經由 Gsp 繪圖軟體驗證，發現並沒有。

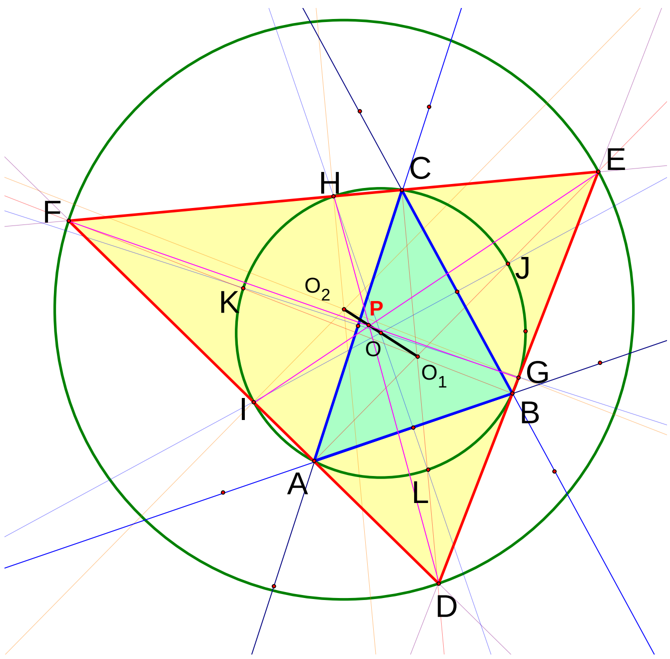

圖 14

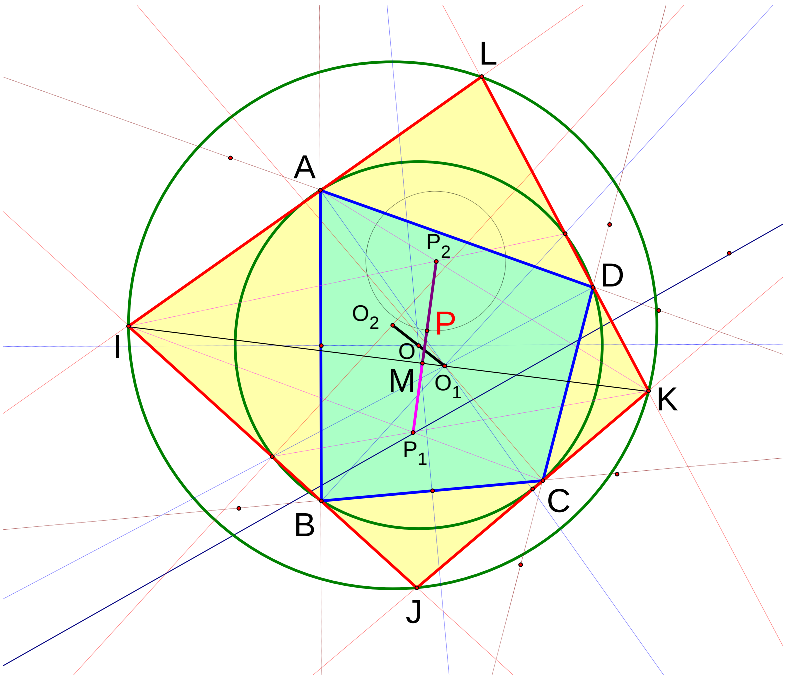

圖 15

【作法】 1. 作 ΔIJK、ΔIKL之重心 P_1、P_2。

2. 連接 P_1、P_2，交對角線 $\overline{IK}$ 於 M 點。

3. 以 P_2為圓心，$\overline{P_1M}$為半徑畫圓，交 $\overline{P_1P_2}$ 於P點，則P點為所求四邊形IJKL的重心。

但如果連接外平分四邊形兩對角線，我們發現其交點正好是雙心四邊形的內心。再連接雙心四邊形兩對角線，發現其交點會和雙心四邊形的內心、外心及外平分圓圓心共線。可得如下定理：

定理二：雙心四邊形的內心、外心、兩對角線交點和外平分圓圓心四點共線。

如圖 16，設雙心四邊形的內心、外心和兩對角線交點分別為O_1、O 和 P，外平分圓的圓心為O_2，則O_1、O、P、O_2四點共線。

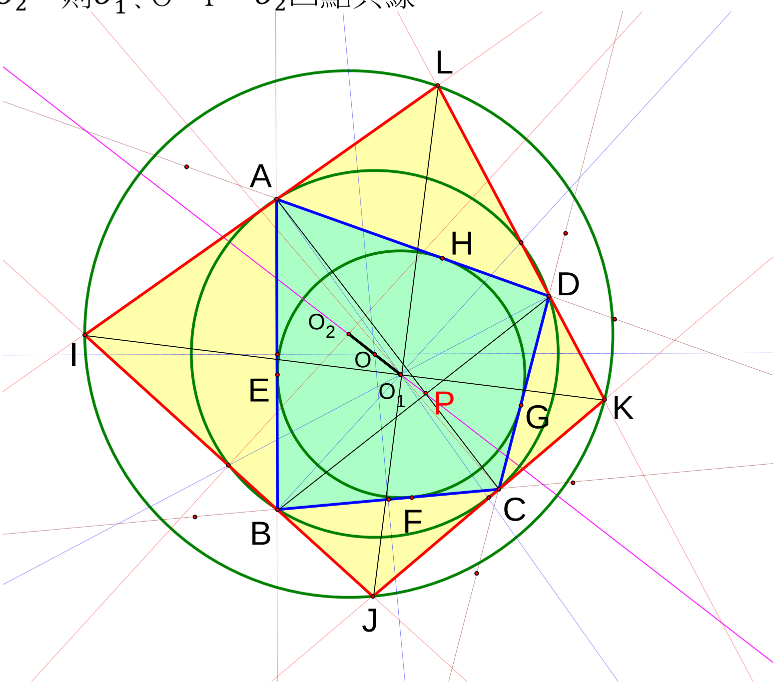

圖 16

引理 6：圓外切四邊形的內心為其外平分四邊形兩對角線的交點。

如圖 17，設圓外切四邊形為 ABCD，其外平分四邊形為 IJKL，則兩對角線 $\overline{IK}$、$\overline{JL}$的交點 Q 即為圓外切四邊形 ABCD 的內心。

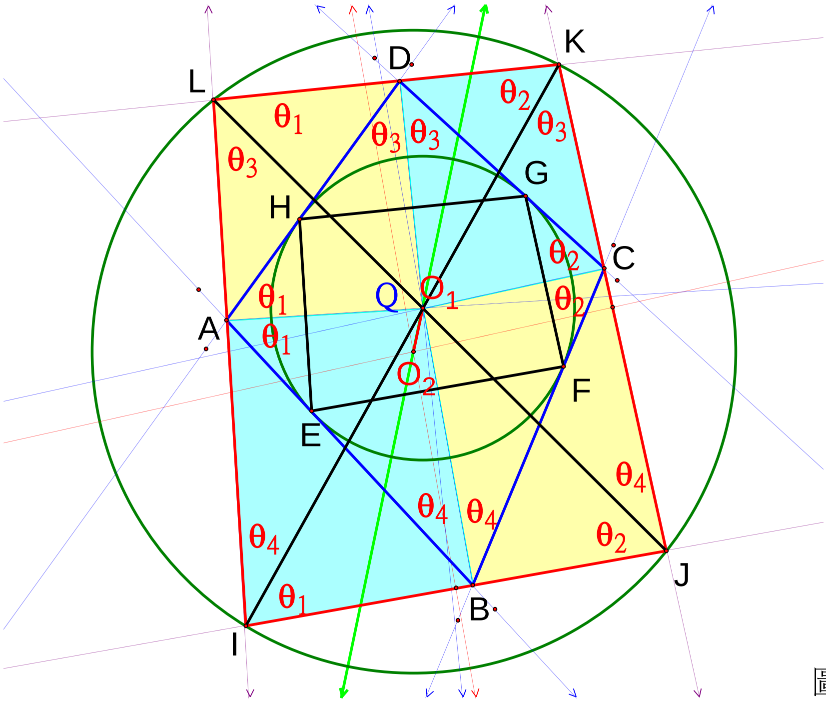

圖 17

【證明】

(1)如圖 17，設圓外切四邊形為 ABCD 的內心為O_1，其外平分四邊形 IJKL 的兩對角線交點為 Q，$\because$A、I、B、O_1共圓(對角互補)，$\therefore \angle BIO_1 = \angle BAO_1 = \theta_1$，又$\overline{AO_1}$平分$\angle BAD$，$\therefore \angle BAO_1 = \angle DAO_1 = \theta_1$；同理有$\angle BJO_1 = \angle BCO_1 = \angle DCO_1 = \theta_2$，$\angle CKO_1 = \angle CDO_1 = \angle ADO_1 = \theta_3$，$\angle AIO_1 = \angle ABO_1 = \angle CBO_1 = \theta_4$。

(2)連接$\overline{O_1I}$,$\overline{O_1J}$,$\overline{O_1K}$,$\overline{O_1L}$,則$\angle IO_1L = 180° - (\theta_3 + \theta_4)$,$\angle LO_1K = 180° - (\theta_1 + \theta_2)$。推得$\angle IO_1L + \angle LO_1K = 360° - (\theta_1 + \theta_2 + +\theta_3 + \theta_4) = 360° - 180° = 180°$，$\therefore$I、$O_1$、K 三點共線，即內心$O_1$在$\overline{IK}$上。同理可證：內心$O_1$在$\overline{JL}$上。故內心$O_1$必為兩對角線 $\overline{IK}$、$\overline{JL}$的交點 Q。

引理 7：若雙心四邊形 ABCD 四邊與內切圓依次切於 E，F，G，H 四點，則$\overline{AC}$，$\overline{BD}$，$\overline{EG}$，$\overline{FH}$四線共點。

【證明】

(1) 如圖 18，連接圓外切六邊形 ABCDEF 的相對頂點的三條對角線$\overline{AD}$，$\overline{BE}$，$\overline{CF}$，則由布里昂雄定理知：三者會共交點。

(2) 如圖 19，將圓外切四邊形 ABCD 看成圓外切六邊形 AEBCGD 的退化情形，得$\overline{AC}$，$\overline{BD}$，$\overline{EG}$共點於 P，又將圓外切四邊形 ABCD 看成圓外切六邊形 ABFCDH 的退化情形，得$\overline{AC}$，$\overline{BD}$，$\overline{FH}$共點於 P，從而$\overline{AC}$，$\overline{BD}$，$\overline{EG}$，$\overline{FH}$四線共點。

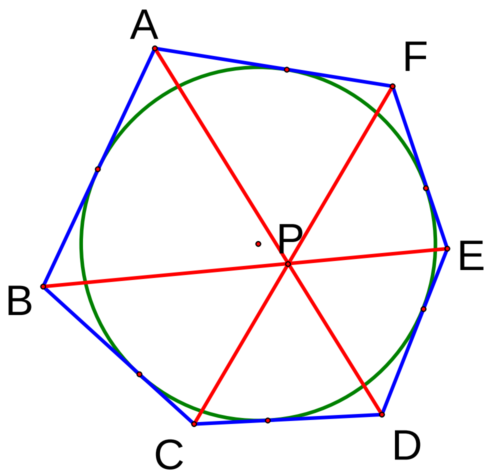

圖 18

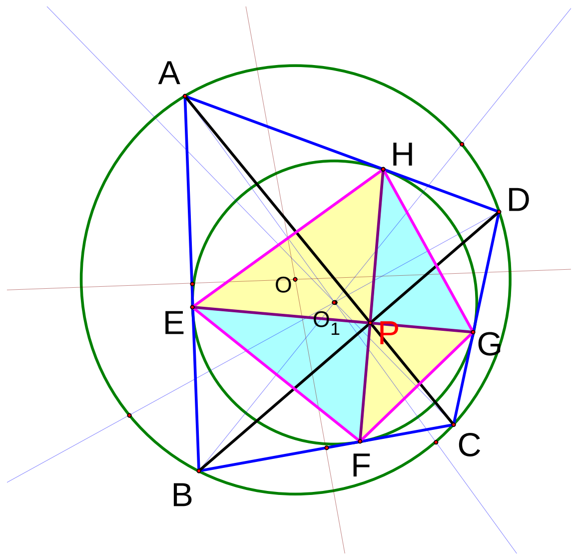

圖 19

引理 8：若雙心四邊形 ABCD 四邊與內切圓依次切於 E，F，G，H 四點，則其切點四邊形 EFGH 和其外平分四邊形 IJKL 相似。

【證明】

如圖 20，∵$\overline{AE}=\overline{AH}$(切線等長)，且$\overline{AO_1}$平分∠EAH，∴$\overline{EH}\perp\overline{AO_1}$。

又$\overline{IL}\perp\overline{AO_1}$(同一頂點處內、外角平分線互相垂直)，∴$\overline{EH}//\overline{IL}$。

同理$\overline{EF}//\overline{IJ}$，$\overline{FG}//\overline{JK}$，$\overline{GH}//\overline{KL}$，從而四邊形 EFGH 和四邊形 IJKL 相似。

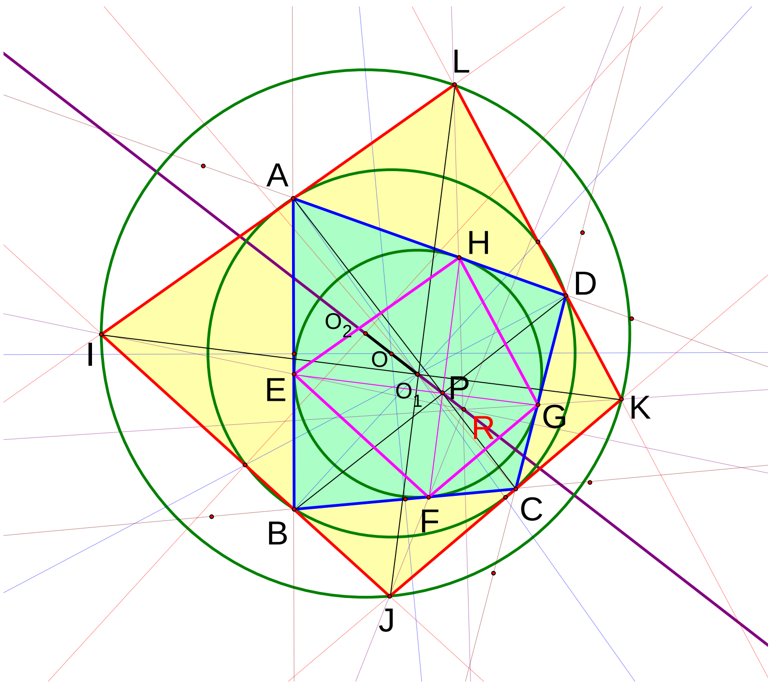

圖 20

引理 9：若雙心四邊形 ABCD 四邊與內切圓依次切於 E，F，G，H 四點，則$\overline{EG} \perp \overline{FH}$。

【證明】

如圖 20，∵ABCD 為雙心四邊形，∴$\angle BAD + \angle BCD = 180°$。

$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(\widehat{EFGH} - \widehat{EH}\right) + \frac{1}{2}\left(\widehat{FEHG} - \widehat{FG}\right) = 180°$，

$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(360° - 2\widehat{EH}\right) + \frac{1}{2}\left(360° - 2\widehat{FG}\right) = 180°$，可得$\widehat{EH} + \widehat{FG} = 180°$。

∴$\angle EPH = \frac{1}{2}\left(\widehat{EH} + \widehat{FG}\right) = 90°$，即$\overline{EG} \perp \overline{FH}$。

【定理二證明】

如圖 20，∵雙心四邊形 ABCD 的切點四邊形 EFGH 和外平分四邊形 IJKL 相似，且$\overline{IK} \perp \overline{JL}$，$\overline{EG} \perp \overline{FH}$，連接兩交點為$\overleftrightarrow{O_1P}$，再連接其中兩對應點 I、E 為$\overleftrightarrow{IE}$，設其交點為 R，則 R 點必為位似中心，又點$O_1$為切點四邊形 EFGH 的外心，點$O_2$為外平分四邊形 IJKL 的外心，∴$O_2$，$O_1$，$P$三點共線，又$O_2$，$O$，$O_1$三點共線，從而$O_2$，$O$，$O_1$，$P$四點共線，即雙心四邊形的內心、外心、兩對角線交點和外平分圓圓心四點共線。

三、若四邊形本身也有外接圓，則它的重心會是其內、外平分四邊形的重心之中點嗎？

如圖 21，經由 Gsp 繪圖軟體驗證，發現並沒有。

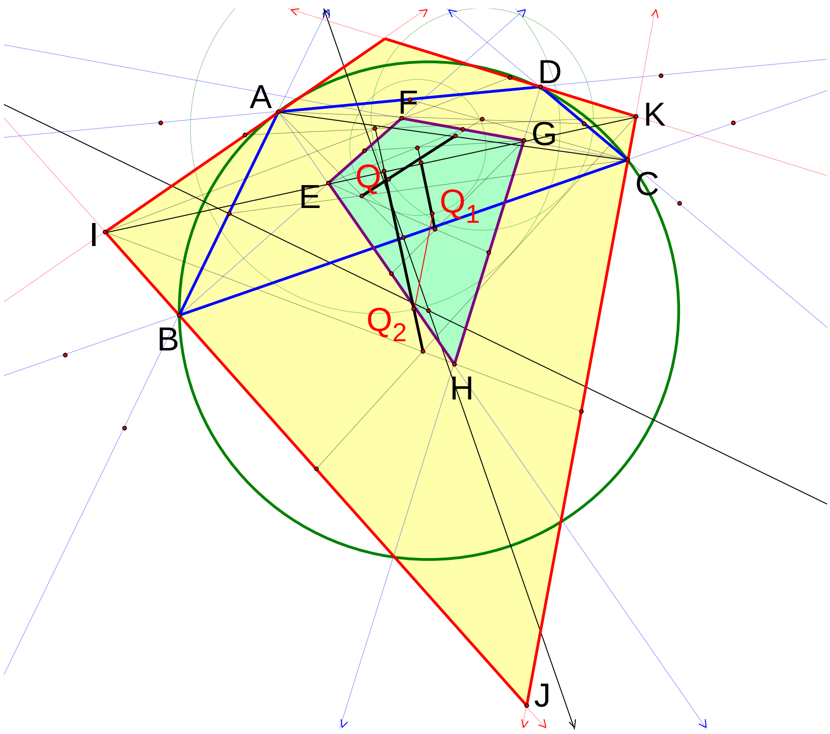

圖 21

四、若四邊形 ABCD 沒有外接圓，則其內平分圓和外平分圓的兩圓心會重合嗎？

如圖 22，經由 Gsp 繪圖軟體驗證，發現只有平行四邊形有這個性質。

此時兩圓心重合處正好是平行四邊形的兩對角線之交點，也就是重心所在。

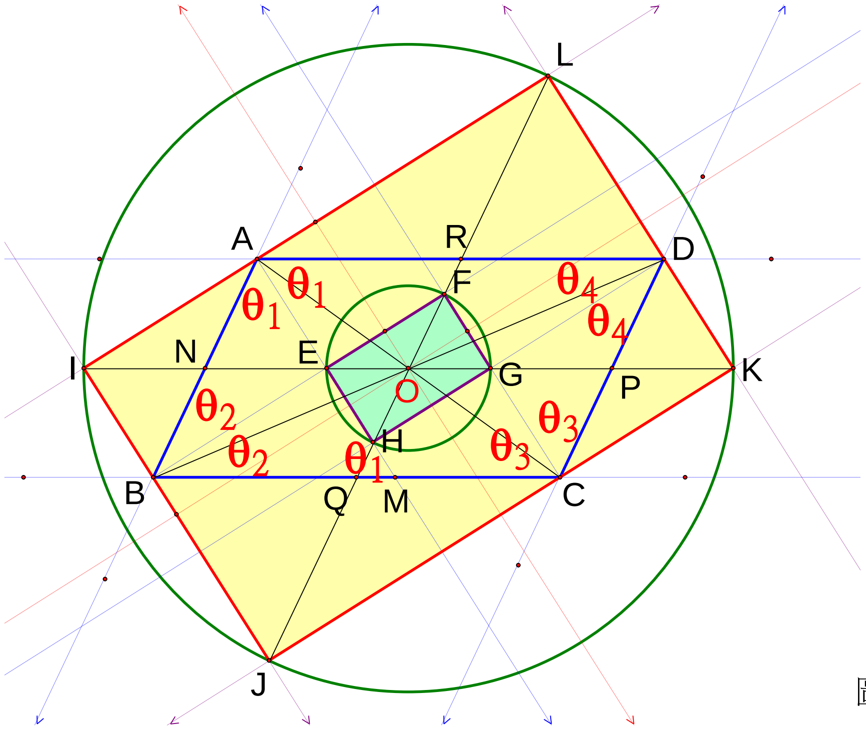

圖 22

【證明】

(1)如圖 22，$\because \theta_1+\theta_2=\frac{1}{2}(\angle BAD+\angle ABC)=\frac{1}{2}\times 180°=90°$，$\therefore \angle FEH=\angle AEB=90°$，

同理可得$\angle EHG=\angle HGF=\angle GFE=90°$，故四邊形 EFGH 為矩形。又同一頂點處內、外角平分線互相垂直，$\therefore$四邊形 IJKL 也是矩形。

(2)$\because \angle BMA=\angle BAM$且推得$\overline{BA}=\overline{BM}$，又$\overleftrightarrow{AH}\perp\overleftrightarrow{BF}$，$\therefore \overline{AE}=\overline{EM}$。

而四邊形 AEBI 為矩形，$\overline{AN}=\overline{NB}$，故$\overleftrightarrow{NE}//\overleftrightarrow{BM}$，即$\overleftrightarrow{IE}//\overleftrightarrow{BC}$。

同理可證：$\overleftrightarrow{GK}//\overleftrightarrow{BC}$，又$\theta_1=\theta_3$且$\angle AEB=\angle BFC=90°$，$\therefore \Delta AEB\sim\Delta CFB$，

又$\theta_2=\theta_4$且$\overline{AB}=\overline{CD}$，$\therefore \Delta AEB\cong\Delta CGD$。

推得$\overline{CG}:\overline{CF}=\overline{AE}:\overline{CF}=\overline{BE}:\overline{BF}$，$\therefore \overleftrightarrow{EG}//\overleftrightarrow{BC}$，故 I、E、G、K 四點共線。

同理可證 J、H、F、L 四點共線。又矩形的外心為兩對角線的交點，故四邊形 ABCD 的內平分圓和外平分圓的兩圓心會重合。而兩矩形的對角線正好通過平行四邊形 ABCD 兩組對邊的中點，因此必過平行四邊形 ABCD 的兩對角線之交點，也就是重心所在。

五、如圖 23，三角形的面積是其外平分三角形面積與內切圓切點三角形面積的等比中項。
我們類推到雙心四邊形，看看是否有同樣的性質？如圖 24，經由 Gsp 繪圖軟體驗證，發現雙心四邊形的面積也是其外平分四邊形面積與內切圓切點四邊形面積的等比中項。

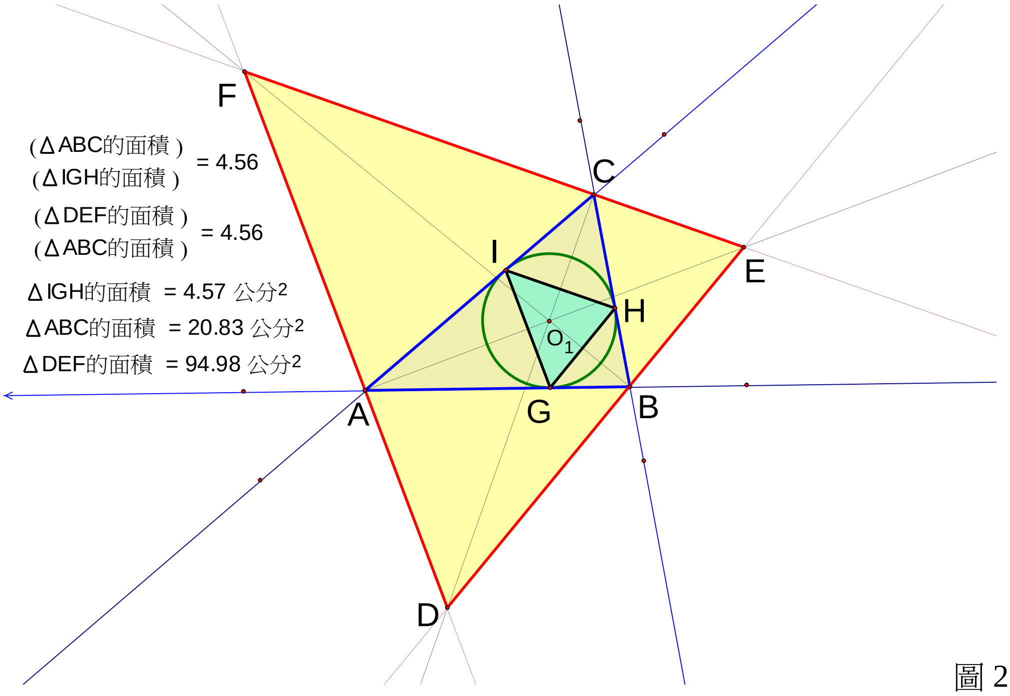

圖 23

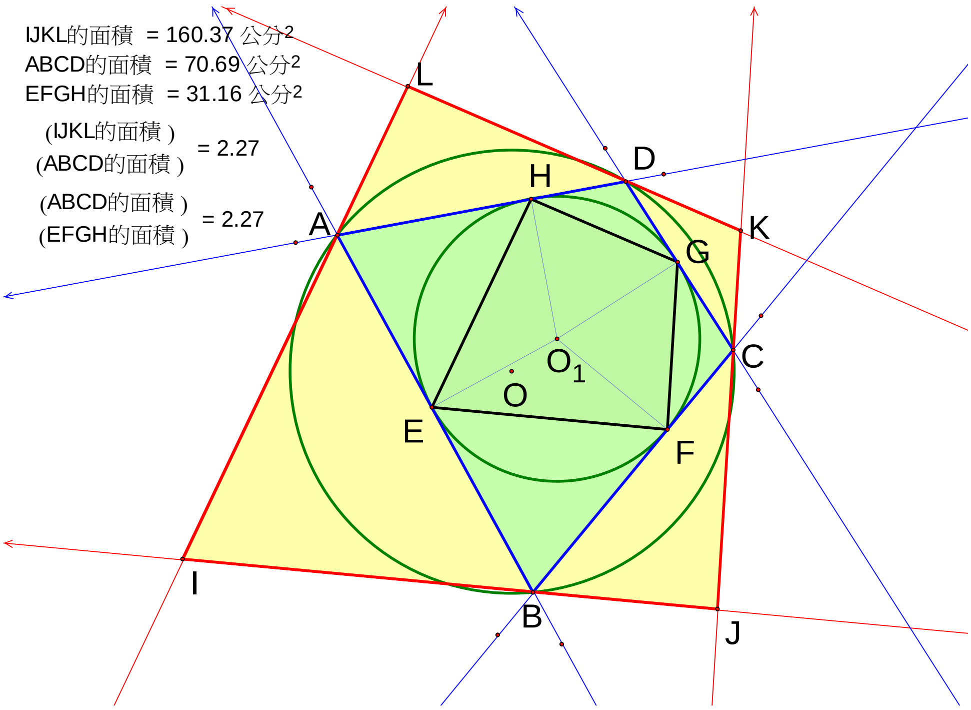

圖 24

定理三：三角形的面積是其外平分三角形面積與內切圓切點三角形面積的等比中項。

設ΔABC的外平分三角形為ΔDEF，內切圓切點三角形為ΔGHI，

則ΔABC 面積 $=\sqrt{\Delta DEF面積\cdot\Delta GHI面積}$。

【證明】

(1)如圖 25，設ΔABC 的面積為Δ，$\overline{BC}=a$，$\overline{AC}=b$，$\overline{AB}=c$，$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$，

其內切圓半徑為 r，$\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$ 的旁切圓半徑分別為r_1、r_2、r_3，

則：$\Delta=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr=\frac{1}{2}(a+b+c)r=sr$，

且 $\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$， $\therefore$ $r=\frac{\Delta}{s}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$。

又 $\Delta=\frac{1}{2}br_1+\frac{1}{2}cr_1-\frac{1}{2}ar_1=\frac{1}{2}(b+c-a)r_1=(s-a)r_1$，

$\therefore r_1=\frac{\Delta}{s-a}=\sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}$。

同理可得 $r_2=\frac{\Delta}{s-b}=\sqrt{\frac{s(s-a)(s-c)}{s-b}}$，$r_3=\frac{\Delta}{s-c}=\sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)}{s-c}}$。

(2)如圖 25，設ΔGHI 的面積為Δ_1，$\angle GO_1I=\theta_1$， $\angle GO_1H=\theta_2$，$\angle HO_1I=\theta_3$，

則 $\Delta_1=\frac{1}{2}r^2sin\theta_1+\frac{1}{2}r^2sin\theta_2+\frac{1}{2}r^2sin\theta_2$

$$=\frac{1}{2}r^2sinA+\frac{1}{2}r^2sinB+\frac{1}{2}r^2sinC$$

$$=\frac{1}{2}r^2\frac{2\Delta}{bc}+\frac{1}{2}r^2\frac{2\Delta}{ac}+\frac{1}{2}r^2\frac{2\Delta}{ab}=r^2(\frac{\Delta}{bc}+\frac{\Delta}{ac}+\frac{\Delta}{ab})$$

$$\therefore\ \frac{\Delta_1}{\Delta}=r^2\left(\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{ab}\right)=r^2\left(\frac{a+b+c}{abc}\right)=r^2\left(\frac{2s}{abc}\right)$$

$$=\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}\left(\frac{2s}{abc}\right)=\frac{2(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}$$

$$\Longrightarrow\frac{\Delta}{\Delta_1}=\frac{abc}{2(s-a)(s-b)(s-c)}。$$

(3)設ΔDEF 的面積為Δ_2，

則$\Delta_2=\Delta+\frac{1}{2}ar_1+\frac{1}{2}br_2+\frac{1}{2}cr_3=\Delta+\frac{a}{2}\left(\frac{\Delta}{s-a}\right)+\frac{b}{2}\left(\frac{\Delta}{s-b}\right)+\frac{c}{2}(\frac{\Delta}{s-c})$

$$\therefore\frac{\Delta_2}{\Delta}=1+\frac{1}{2}(\frac{a}{s-a}+\frac{b}{s-b}+\frac{c}{s-c})$$

$$=1+\frac{1}{2}[\frac{a(s-b)(s-c)+b(s-a)(s-c)+c(s-a)(s-b)}{(s-a)(s-b)(s-c)}]$$

$$=\frac{2(s-a)(s-b)(s-c)+a(s-b)(s-c)+b(s-a)(s-c)+c(s-a)(s-b)}{2(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$=\frac{2s^3-(a+b+c)s^2+abc}{2(s-a)(s-b)(s-c)}=\frac{abc}{2(s-a)(s-b)(s-c)}。$$

故 $\frac{\Delta}{\Delta_1}=\frac{\Delta_2}{\Delta}\Rightarrow \Delta=\sqrt{\Delta_1\Delta_2}$，即ΔABC 面積 $=\sqrt{\Delta DEF\text{面積}\cdot\Delta GHI\text{面積}}$ 。

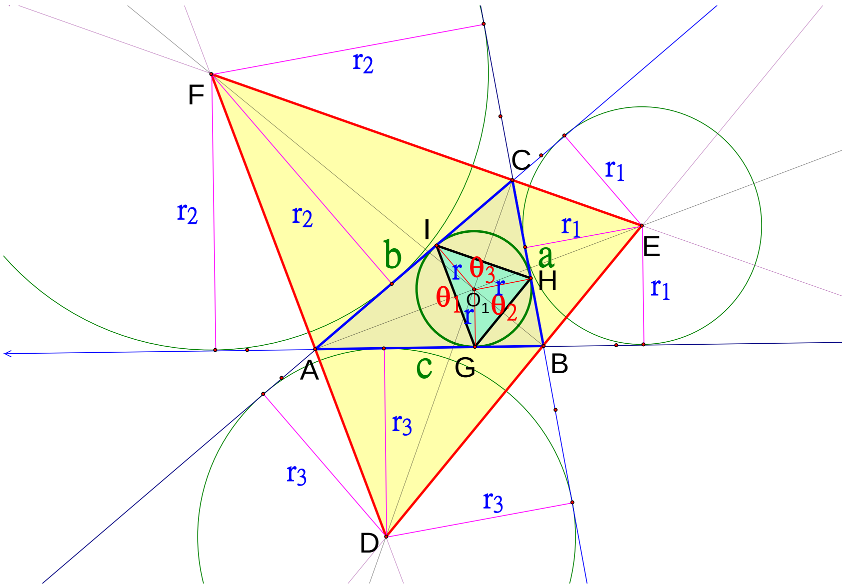

圖 25

【另證】

(1)如圖 26，$\because \overline{AI}=\overline{AG}$(切線等長)，且$\overline{AO_1}$平分∠BAC，$\therefore \overline{IG}\perp\overline{AO_1}$。
又$\overline{DF}\perp\overline{AO_1}$(同一頂點處內、外角平分線互相垂直)，$\therefore \overline{DF}//\overline{IG}$。
同理$\overline{DE}//\overline{GH}$，$\overline{EF}//\overline{HI}$，從而ΔDEF和ΔGHI相似。

(2)設ΔABC、ΔHGI和ΔDEF的外接圓半徑分別為R、r和R′，

則 $\Delta_1=\frac{1}{2}r^2 sin2\alpha+\frac{1}{2}r^2 sin2\beta+\frac{1}{2}r^2 sin2\gamma$

$$=\frac{1}{2}r^2 sinA+\frac{1}{2}r^2 sinB+\frac{1}{2}r^2 sinC$$

$$=\frac{r^2}{2}(sinA+sinB+sinC)=\frac{r^2}{2}\left(\frac{a}{2R}+\frac{b}{2R}+\frac{c}{2R}\right)=\frac{Sr^2}{2R}=\frac{r\Delta}{2R}。$$

推得$\frac{\Delta}{\Delta_1}=\frac{2R}{r}$。

(3)$\because \sin(\angle EDF)=\frac{\overline{EF}}{2R\prime}=\sin(\angle HGI)=\frac{\overline{HI}}{2r}$，$\therefore \frac{\overline{EF}}{\overline{HI}}=\frac{R\prime}{r}$。

推得$\frac{\Delta_2}{\Delta_1}=\frac{\overline{EF}^2}{\overline{HI}^2}=\frac{R\prime^2}{r^2}$，故$\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{\Delta_2}{\Delta_1}\times\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{R\prime^2}{r^2}\times\frac{r}{2R}=\frac{R\prime^2}{2rR}$，又$R'=2R$。

因此$\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{4R^2}{2rR}=\frac{2R}{r}$。推得 $\frac{\Delta}{\Delta_1}=\frac{\Delta_2}{\Delta}\Rightarrow \Delta=\sqrt{\Delta_1\Delta_2}$，

即ΔABC 面積 $= \sqrt{\Delta DEF面積\cdot \Delta GHI面積}$ 。

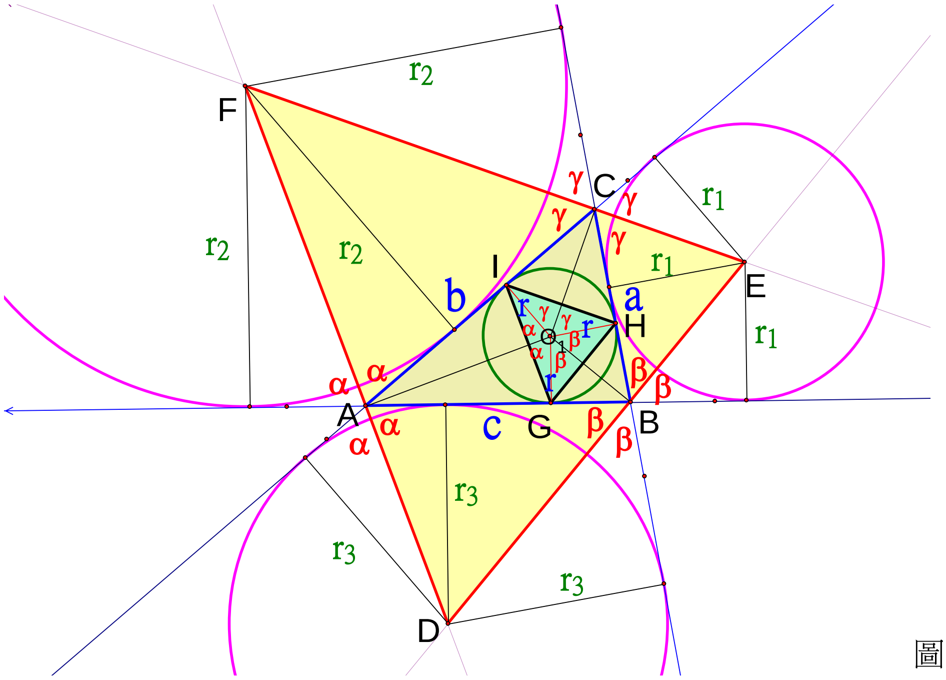

圖 26

引理 10：若雙心四邊形 ABCD 的內切圓半徑和四個旁切圓半徑依序為r，r_1，r_2，r_3，r_4，則

$$r_1 = r\tan\frac{C}{2}\tan\frac{D}{2}, r_2 = r\tan\frac{D}{2}\tan\frac{A}{2}, r_3 = r\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}, r_4 = r\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$$ 。

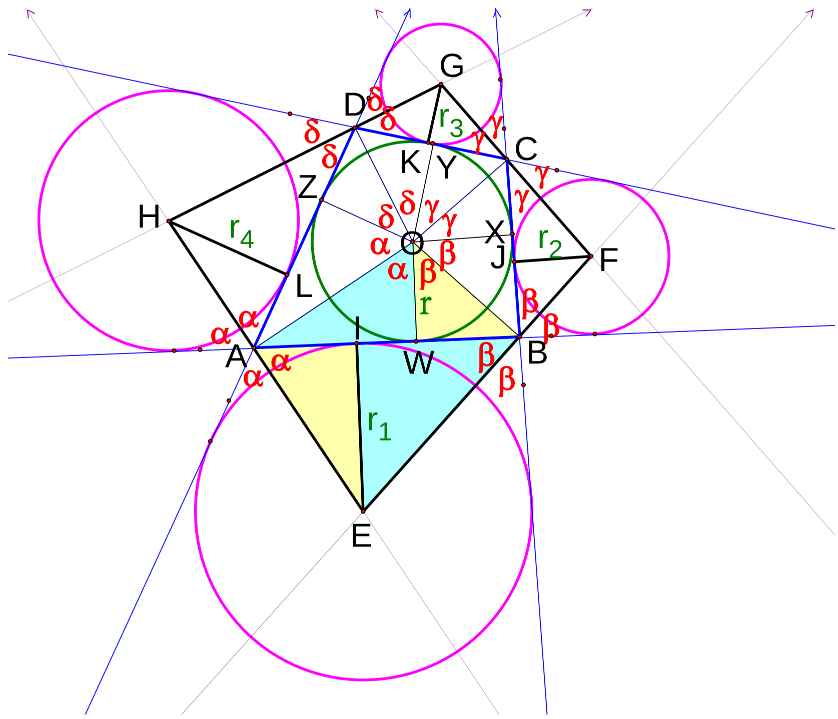

圖 27

【證明】

(1) 如圖 27，設圓O的半徑為r，圓O與四邊形 ABCD 的切點分別為 W、X、Y、Z，旁切圓與四邊形 ABCD 的切點分別為 I、J、K、L。

設$\angle AOZ = \angle AOW = \alpha$，$\angle BOW = \angle BOX = \beta$，$\angle COX = \angle COY = \gamma$，$\angle DOY = \angle DOZ = \delta$，

$\because$同一頂點處內、外角平分線互相垂直，$\therefore \overline{AO} \perp \overline{HE}$，推得$\angle BAE = \angle DAH = \alpha$，同理可得$\angle ABE = \angle CBF = \beta$，$\angle BCF = \angle DCG = \gamma$，$\angle CDG = \angle ADH = \delta$。

(2) 在ΔAOB中，$\overline{AB} = \overline{AW} + \overline{WB} = r\tan\alpha + r\tan\beta = r(\tan\alpha + \tan\beta)$。

在ΔAEB中，$\overline{AB} = \overline{AI} + \overline{IB} = r_1\cot\alpha + r_1\cot\beta = r_1(\frac{1}{\tan\alpha} + \frac{1}{\tan\beta})$。

$$\therefore r_1\left(\frac{1}{\tan\alpha} + \frac{1}{\tan\beta}\right) = r(\tan\alpha + \tan\beta)$$

$$\Rightarrow r_1 = r\left(\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{\frac{1}{\tan\alpha} + \frac{1}{\tan\beta}}\right) = r\left(\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{\tan\alpha\tan\beta}}\right) = r\tan\alpha\tan\beta \text{。}$$

又四邊形 ABCD 也是圓外接四邊形，$\therefore 2\alpha = \angle C$，$2\beta = \angle D$，$2\gamma = \angle A$，$2\delta = \angle B$，

簡記為$\alpha = \frac{C}{2}$，$\beta = \frac{D}{2}$，$\gamma = \frac{A}{2}$，$\delta = \frac{B}{2}$，故$r_1 = r\tan\frac{C}{2}\tan\frac{D}{2}$。

同理可得$r_2 = r\tan\frac{D}{2}\tan\frac{A}{2}$，$r_3 = r\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}$，$r_4 = r\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$。

定理四：雙心四邊形的面積是其外平分四邊形面積與內切圓切點四邊形面積的等比中項。

設雙心四邊形 ABCD 的外平分四邊形為 IJKL，內切圓切點四邊形為 EFGH，

則ABCD 面積 $= \sqrt{IJKL面積 \cdot EFGH面積}$。

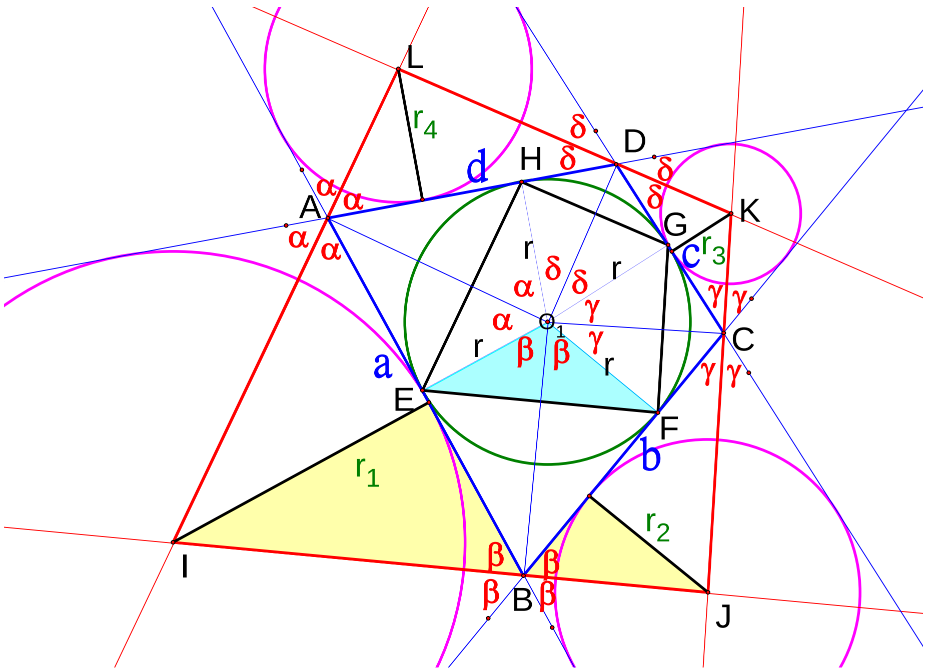

圖 28

【證明】

(1) 設四邊形 ABCD 的面積為S，其切點四邊形 EFGH 面積為S_1，外平分四邊形 IJKL 面積為S_2，$\overline{AB}=a$，$\overline{BC}=b$，$\overline{CD}=c$，$\overline{DA}=d$。

其內切圓半徑和四個旁切圓半徑依序為 r，r_1，r_2，r_3，r_4，

則$\mathrm{S}=\mathrm{S}_{\Delta ABD}+S_{\Delta BCD}=\frac{1}{2}adsinA+\frac{1}{2}bcsinC=\frac{1}{2}(ad+bc)sinA$ $\quad(\angle\mathrm{A}+\angle\mathrm{C}=180°)$

推得$\mathrm{sinA}=\mathrm{sinC}=\frac{2S}{ad+bc}$，同理可得$\mathrm{sinB}=\mathrm{sinD}=\frac{2S}{ab+cd}$。

(2) $S_1=\frac{1}{2}r^2(sin2\alpha+sin2\beta+sin2\gamma+sin2\delta)$

$$=\frac{1}{2}r^2(sinA+sinB+sinC+sinD)=\frac{1}{2}r^2(2sinA+2sinB)$$

$$=r^2(sinA+sinB)=r^2(\frac{2S}{ad+bc}+\frac{2S}{ab+cd})$$

$$=2\mathrm{S}r^2\left[\frac{ab+cd+ad+bc}{(ad+bc)(ab+cd)}\right]=2Sr^2\times\frac{(a+c)(b+d)}{(ad+bc)(ab+cd)}$$

又$\mathrm{S}=\frac{1}{2}(a+b+c+d)r=(a+c)r=(b+d)r$ $\quad(\because \mathrm{a}+\mathrm{c}=\mathrm{b}+\mathrm{d})$

$\therefore a+\mathrm{c}=\mathrm{b}+\mathrm{d}=\frac{S}{r}$，故$\mathrm{S}_1=2Sr^2\times\frac{S^2}{r^2(ad+bc)(ab+cd)}=\frac{2S^3}{(ad+bc)(ab+cd)}$。

推得$\frac{S_1}{S}=\frac{1}{2}\times\frac{2S}{ad+bc}\times\frac{2S}{ab+cd}=\frac{sinAsinB}{2}$，即$\frac{S}{S_1}=\frac{2}{sinAsinB}$。

(3)如圖 28，$\overline{IJ}=\overline{IB}+\overline{BJ}=\frac{r_1}{sin\beta}+\frac{r_2}{sin\beta}=\frac{1}{sin\beta}(r_1+r_2)=\frac{1}{sin\frac{D}{2}}(r_1+r_2)$

又$r_1+r_2=rtan\frac{C}{2}tan\frac{D}{2}+rtan\frac{D}{2}tan\frac{A}{2}=rtan\frac{D}{2}(tan\frac{A}{2}+tan\frac{C}{2})$

$$=\mathrm{r}\left(\frac{sin\frac{D}{2}}{cos\frac{D}{2}}\right)\left(\frac{sin\frac{A}{2}}{cos\frac{A}{2}}+\frac{sin\frac{C}{2}}{cos\frac{C}{2}}\right)=\mathrm{r}(\frac{sin\frac{D}{2}}{cos\frac{D}{2}})(\frac{sin\frac{A}{2}cos\frac{C}{2}+cos\frac{A}{2}sin\frac{C}{2}}{cos\frac{A}{2}cos\frac{C}{2}})$$

$$=\mathrm{r}\left(\frac{sin\frac{D}{2}}{cos\frac{D}{2}}\right)\left[\frac{\sin\left(\frac{A+C}{2}\right)}{cos\frac{A}{2}cos\frac{C}{2}}\right]=\mathrm{r}\left(\frac{sin\frac{D}{2}}{cos\frac{D}{2}}\right)(\frac{1}{cos\frac{A}{2}cos\frac{C}{2}})\quad(\because\angle\mathrm{A}+\angle\mathrm{C}=180°)$$

$\therefore\overline{IJ}=\frac{r}{cos\frac{D}{2}cos\frac{A}{2}cos\frac{C}{2}}=\frac{r}{cos\frac{D}{2}sin\frac{C}{2}cos\frac{C}{2}}$。

而$\overline{EF}=2rsin\beta=2rsin\frac{D}{2}$，$\therefore\frac{\overline{IJ}}{\overline{EF}}=\frac{1}{2sin\frac{D}{2}cos\frac{D}{2}sin\frac{C}{2}cos\frac{C}{2}}=\frac{2}{sinDsinC}=\frac{2}{sinAsinB}$。

推得$\frac{S_2}{S_1}=\frac{\overline{IJ}^2}{\overline{EF}^2}=\frac{4}{sin^2Asin^2B}$(由引理 8)，故$\frac{S_2}{S}=\frac{S_2}{S_1}\times\frac{S_1}{S}=\frac{4}{sin^2Asin^2B}\times\frac{sinAsinB}{2}=\frac{2}{sinAsinB}$。

因此 $\frac{S}{S_1}=\frac{S_2}{S}\Rightarrow S=\sqrt{S_1S_2}$，即ABCD 面積$=\sqrt{IJKL面積\cdot EFGH面積}$ 。

六、由前面雙心四邊形的作圖可知：其外平分四邊形必為對角線垂直的圓內接四邊形。如圖29，如果我們逆向作圖，先畫一個對角線垂直的圓內接四邊形，過對角線交點對四邊畫垂線，可得一垂足四邊形，正好是原來的雙心四邊形，再作其內切圓之切點四邊形，則此四邊形會和第一個四邊形相似，也是對角線垂直的圓內接四邊形，如果重複這樣的作圖，我們可作出無數個對角線垂直的圓內接四邊形，而這些彼此相似的四邊形，其外接圓的圓心必共線且會收斂到這些相似四邊形的位似中心。

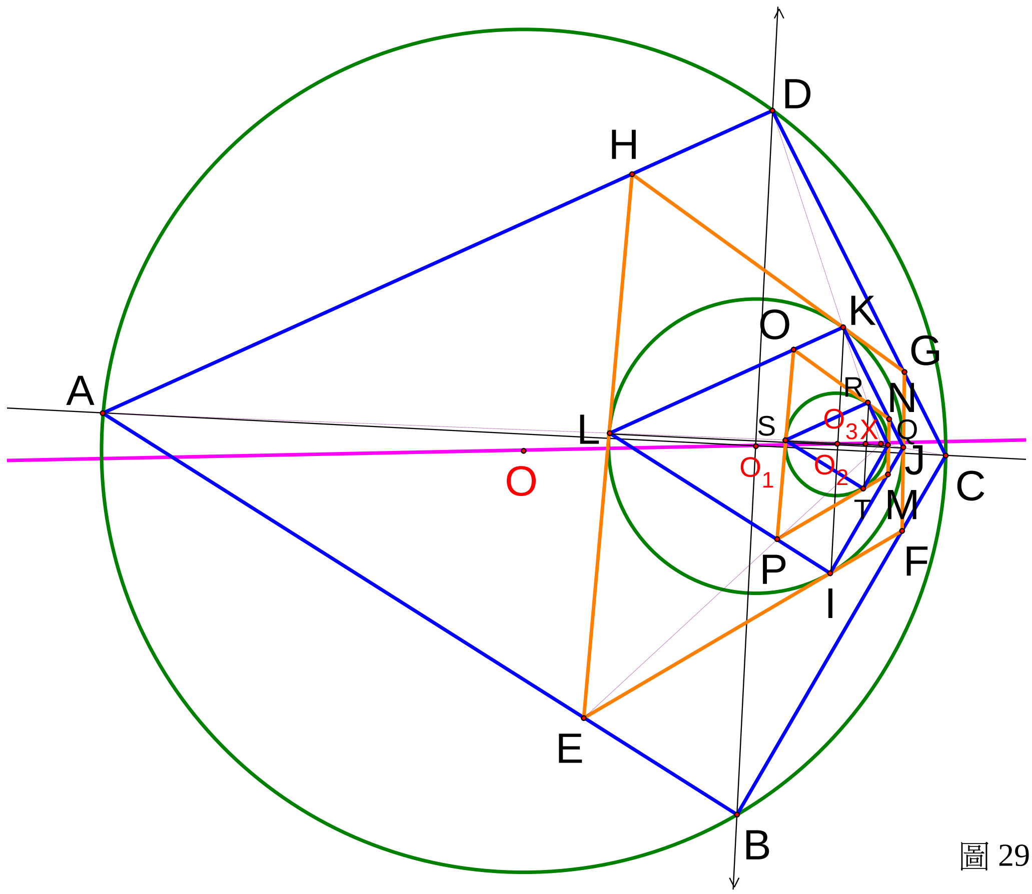

圖 29

七、由前面三角形的作圖可知：原三角形為其外平分三角形的垂足三角形。如圖 30，如果我們逆向作圖，先畫一個圓內接三角形，過其頂點對三邊畫垂線，則此垂足三角形正好是原來的三角形，再作其內切圓之切點三角形，則此三角形會和第一個三角形相似，如果重複這樣的作圖，我們可作出無數個和第一個三角形相似的三角形，而這些彼此相似的三角形，其外接圓的圓心必共線且會收斂到這些相似三角形的位似中心。

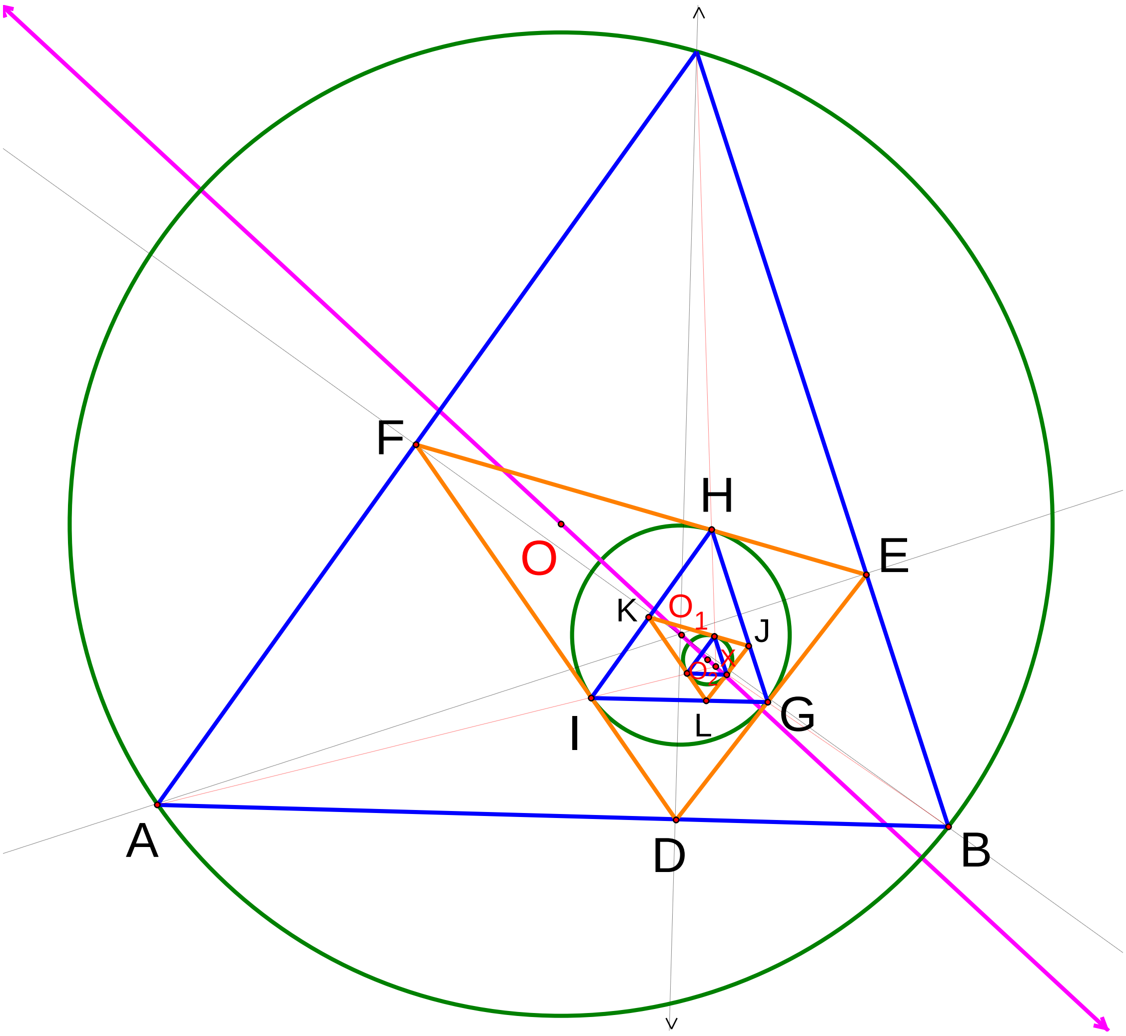

圖 30

陸、結論

一、圓內接四邊形的外心是其內、外平分圓的連心線之中點，而內、外平分四邊形兩對角線會重疊且互相垂直。

二、雙心四邊形的外心是其內心和外平分圓圓心的中點，且外平分四邊形兩對角線的交點正好是其內心。而雙心四邊形兩對角線的交點和其內切圓切點四邊形兩對角線的交點重合，此時，雙心四邊形的外心、內心、兩對角線的交點與外平分圓圓心四點共線。

三、任意三角形的外心是其內心和外平分三角形(旁心三角形)外心的中點，且此三點會和外平分三角形的重心共線。

四、平行四邊形的重心會和其內、外平分圓的圓心重合。

五、正 n 邊形($n \geq 3$)的外心會和內心、外平分圓的圓心重合。

六、三角形的外平分三角形和內切圓切點三角形會相似，且其面積是其外平分三角形面積與內切圓切點三角形面積的等比中項。無獨有偶，雙心四邊形外平分四邊形和內切圓切點四邊形亦會相似，且其面積也是其外平分四邊形面積與內切圓切點四邊形面積的等比中項。

柒、參考資料及其他

1. 許志農主編(102 年)。高中數學課本第三冊(初版)。新北市：龍騰文化事業股份有限公司，P41~42，P46~49，P142~148。
2. 笹一部貞市郎(92 年 2 月)。幾何學辭典，九章出版社，P137，第 675 條；P138，第 679 條和 P139，第 684 條。
3. 黃家禮(89 年 9 月)。幾何明珠，九章出版社，P230~236。
4. 張海潮(98 年 6 月)。從旋轉及縮放看尤拉線及九點圓。數學傳播 33 卷 2 期，中央研究院數學研究所，P48~51。
5. 吳波(102 年 9 月)。圓內接四邊形的一個有趣性質。數學傳播 37 卷 3 期，中央研究院數學研究所，P68~70。
6. 林冠伯　顏嘉誼　原凱文。 多邊形的重心。中華民國第四十四屆中小學科展。
7. 林晏佑　指導教授　莊重 教授。 雙心四邊形共線性探討。

【評語】040416

1. 本文討論了許多四邊形及三角形的性質，但主題不連貫，像是一些性質的集合。

2. 定理 3、4 三個多邊形面積成等比數列關係的結果是有趣。這些結果是否可以有共通的幾何方法證明，是令人期待的。

3. 令人好奇的是否在雙心五邊形是否也是外分五邊形與內切點五邊形的等比中項。對於一般 n 邊形是否有相對應的結果。