中華民國第55屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組　數學科

040415

滾出愛意-旋輪線性質的探討

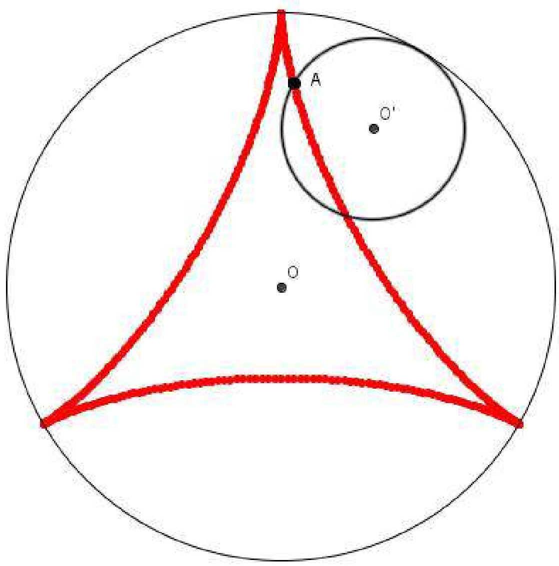
學校名稱：國立嘉義高級中學

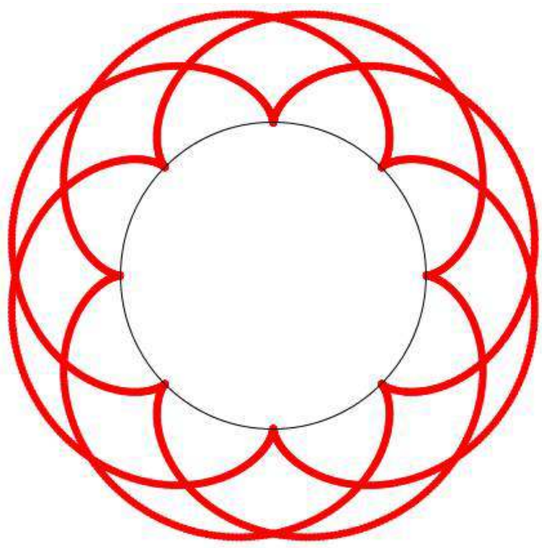
作者：	指導老師：
高二 李耿昇	吳博仁
高二 鄭景鴻	
高二 賴冠錡	

關鍵詞：旋輪線、滾動、軌跡

摘要

網路上提及旋輪線的性質許多都與物理相關，較少有數學方面的深入探討。我們先利用繪圖軟體試著繪製出旋輪線，然後以旋輪線的基本性質為出發點，進一步拓展到外旋輪線及內旋輪線，探討它們之間的相互關係，並試著找出各種不同變形間的規律與性質。





壹、研究動機

升高二時，在物理實驗室看見了旋輪線的模型(照片一)，因為科學班的關係，數學老師在課堂上也介紹了旋輪線的基本數學性質，於是我們就燃起了研究的熱忱，決定上網找尋資料，我們發現網路上的資料皆是探討其週期、重力加速度、和正向力的關係，較少純數學方面的結論。因此我們決定要針對這樣的圖形，找出不同於物理的數學性質，進而延伸出更多種圓繞不同圖形所成的軌跡，利用座標化的方式，證明其圖內面積和軌跡長的關係。。

照片一、旋輪線模型

貳、研究目的

一、當圓繞直線一周時，針對其固定一點的軌跡，探討其所走過的距離和圍成的面積。

二、當軌跡一點距圓心特定距離時，針對其固定一點的軌跡，探討其長度、面積。

三、利用高中方法求得旋輪線及相關圖形面積，

四、在旋輪線中，針對不同直線所切割的圖形，探討部分圖形間面積的關係。

五、當圓繞另一圓外一周時，針對其固定一點的軌跡，探討其走過的面積和長度和特定圖形間面積關係。

六、當圓繞另一圓內一周時，針對其固定一點的軌跡，探討其走過的面積和長度和特定圖形間面積關係。

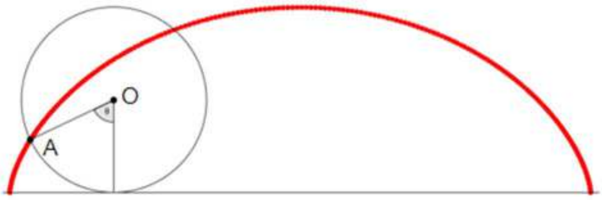
七、探討當兩圓旋轉等角時，其中的長度關係。

參、研究設備與器材

鉛筆、紙、動態繪圖軟體(Geogebra)、電腦、小畫家

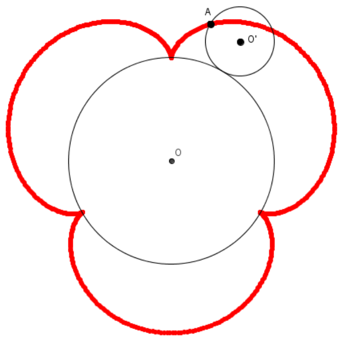
肆、研究過程與方法

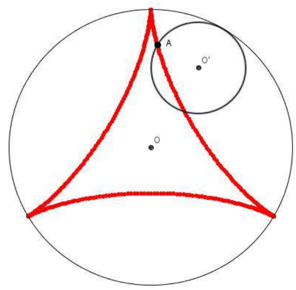
一、旋輪線、外旋輪線、內旋輪線的介紹



圖一、旋輪線

(一)旋輪線（擺線）：一半徑為 r 之圓沿直線滾動時，圓上固定一點 A 的軌跡





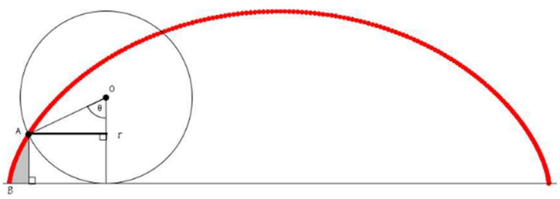
圖二、外旋輪線　　圖三、內旋輪線

(二)外旋輪線（外擺線）：一半徑為 r 之圓在圓外沿一圓滾動時，圓上固定一點 A 的軌跡

(三)內旋輪線（內擺線）：一半徑為 r 之圓在圓內沿一圓滾動時，圓上固定一點 A 的軌跡

二、旋輪線及其變形的面積和軌跡長

(一)旋輪線



圖四、旋輪線

以 B 為原點

$$A(x) = r\theta - r\sin\theta \text{，} A(y) = r - r\cos\theta$$

$\dfrac{dx}{d\theta} = r - r\cos\theta$，$\dfrac{dy}{d\theta} = r\sin\theta$

將 θ 轉到 α 度時

1.面積：

陰影部分面積 $= \int y\,dx = \int_0^{\alpha} (r - r\cos\theta)(r - r\cos\theta)\,d\theta$

$= \int_0^{\alpha} r^2(1-\cos\theta)^2\,d\theta = r^2\left(\frac{3}{2}\theta - 2\sin\theta + \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta\right)\Big|_0^{\alpha}$

$= r^2\left(\frac{3}{2}\alpha - 2\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha\right)$

當 $\alpha = 2\pi$，整個旋輪線面積 $= 3\pi r^2$

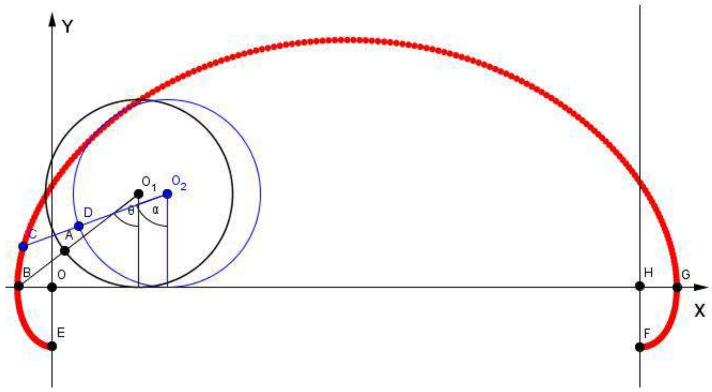
2.軌跡長：

曲線Ａ Ｂ＝旋輪線軌跡長 $= \int_0^{\alpha} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta = \int_0^{\alpha} r\sqrt{2 - 2\cos\theta}\,d\theta$

$= \int_0^{\alpha} 2r\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta = -4r\cos\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\alpha} = -4r\cos\frac{\alpha}{2} + 4r$

當 $\alpha = 2\pi$，整段旋輪線長 $= 8r$

(二)外伸旋輪線



圖五、外伸旋輪線

以 O 為原點

定義：$\overline{O_1B} = \overline{O_2C}$為外伸軸

C 為在外伸軸上距圓心$(L + r)$之一點

紅線為圓滾動 2π 時，C 之軌跡

B 是 C 在軸上時之位置

以 O 為原點

為了算出 EBGFHO 面積，分兩部分計算

Step1: 令 BGB 面積(BG 為曲線) $= A_1$

$\alpha = \theta + \emptyset$, 其中$\emptyset$為圓從$O_1$旋轉至$O_2$之角度

此時$\emptyset$為外伸軸上 B 至 C 時，圓旋轉之角度

$O_2: (r\theta + r\emptyset, r)$

$D: (r(\theta+\emptyset) - r\sin(\theta+\emptyset), r - r\cos(\theta+\emptyset))$

$\because D = \frac{r}{L+r}C + \frac{L}{L+r}O_2 \therefore C = \frac{(L+r)A - LO_2}{r}$

$C(x) = r(\theta+\emptyset) - (r+L)\sin(\theta+\emptyset)$， $C(y) = r - (r+L)\cos(\theta+\emptyset)$

$dx = \{r - (L+r)\cos(\theta+\emptyset)\}d\emptyset$

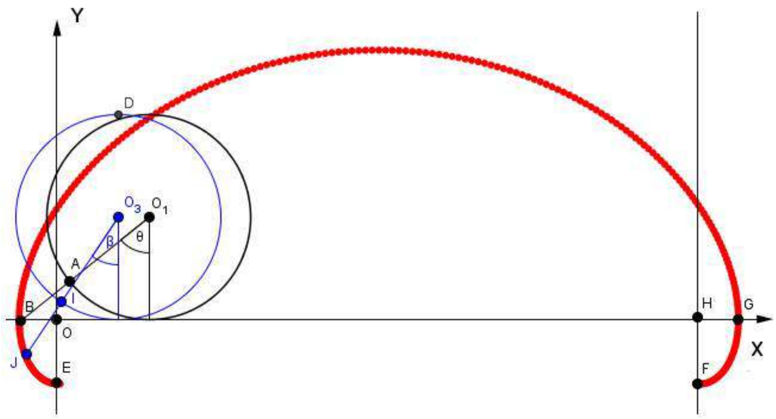
$A_1 =$ BGB 面積 $= \int y\,dx$ (對 C 點)

$= \int_0^{2\pi-2\theta} \{r - (L+r)\cos(\theta+\emptyset)\}\{r - (L+r)\cos(\theta+\emptyset)\}d\emptyset$

$= \int_0^{2\pi-2\theta} r^2 - 2r(L+r)\cos(\theta+\emptyset) + (L+r)^2\cos^2(\theta+\emptyset)\,d\emptyset$

$= r^2\emptyset - 2r(L+r)\sin(\theta+\emptyset) + (L+r)^2\left\{\frac{1}{2}(\theta+\emptyset) + \frac{1}{2}\sin(\theta+\emptyset)\cos(\theta+\emptyset)\right\}\Big|_0^{2\pi-2\theta}$

$= r(2\pi - 2\theta) + 4r(L+r)\sin\theta + (L+r)^2\{\pi - \theta - \sin\theta\cos\theta\}$



圖六、外伸旋輪線

Step2: 令 OBE 面積 = HGF 面積(其中 BE、GF 為曲線) $= A_2$

$\beta = \theta - \emptyset$, 其中$\emptyset$為圓從$O_1$旋轉至$O_3$之角度

此時$\emptyset$為外伸軸上 B 至 J 時，圓旋轉之角度

$O_3: (r\theta + r\emptyset, r)$

$I: (r(\theta - \emptyset) - r\sin(\theta - \emptyset), r - r\cos(\theta - \emptyset))$

$\because I = \dfrac{r}{L+r}J + \dfrac{L}{L+r}O_3 \therefore J = \dfrac{(L+r)I - LO_3}{r}$

$J(x) = r(\theta - \emptyset) - (r+L)\sin(\theta - \emptyset)$ ，$J(y) = r - (r+L)\cos(\theta - \emptyset)$

$dx = \{-r + (L+r)\cos(\theta - \emptyset)\}d\phi$

$A_2 = \int ydx$ (對 J 點)

$$= \int_{\theta}^{0} \{r - (L+r)\cos(\theta - \emptyset)\}\{-r + (L+r)\cos(\theta - \emptyset)\}d\emptyset$$

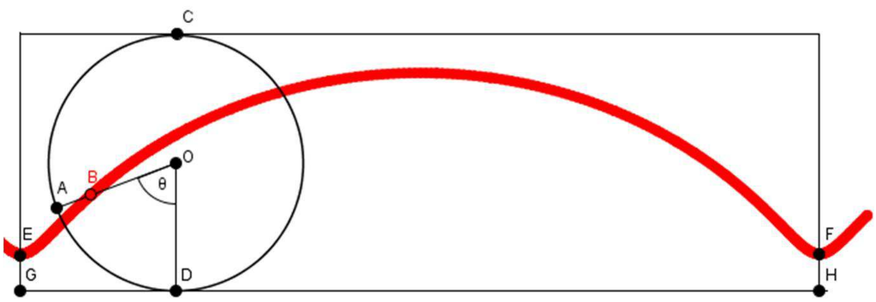
$$= -\int_{\theta}^{0} r^2 - 2r(L+r)\cos(\theta - \emptyset) + (L+r)^2\cos^2(\theta - \emptyset)\,d\emptyset$$

$$= -r^2\emptyset - 2r(L+r)\sin(\theta - \emptyset) + (L+r)^2\left\{\frac{1}{2}(\theta - \emptyset) + \frac{1}{2}\sin(\theta - \emptyset)\cos(\theta - \emptyset)\right\}\Big|_{\theta}^{0}$$

$$= -2r(L+r)\sin\theta + \frac{1}{2}(L+r)^2(\theta + \sin\theta\cos\theta) + r^2\theta$$

Step3: 故 EBGFHO 面積 $= A_1 + 2A_2 = 2\pi r^2 + (L+r)^2\pi$

(三)內縮旋輪線



圖七、內縮旋輪線

以 G 為原點

定義：$\overline{OB}$為內縮軸

B 為在內縮軸上距圓心$(r-L)$之一點

紅線為圓滾動 2π 時，B 之軌跡

$B: (r\theta - (r-L)\sin\theta, r - (r-L)\cos\theta)$

$$\frac{dx}{d\theta} = r - (r - L)\cos\theta \text{，} \frac{dy}{d\theta} = (r - L)\sin\theta$$

$$\text{GEFH 面積(EF 為曲線)} = \int y\,dx\ (\text{對 B 點})$$

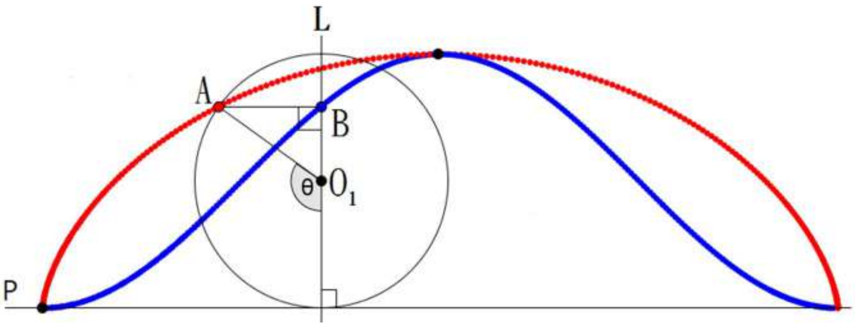
$$= \int_0^{2\pi} [r - (r - L)\cos\theta][r - (r - L)\cos\theta]d\theta$$

$$= r^2\theta - 2r(r - L)\sin\theta + (r - L)^2\left(\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$= 2\pi r^2 + (r - L)^2\pi$$

三、旋輪線及其變形的面積較簡易之算法

(一)定義旋輪線的投影曲線



圖八、旋輪線及其投影曲線

紅色曲線是旋輪線

做直線 L ⊥ 直線 P，且使直線 L 過O_1

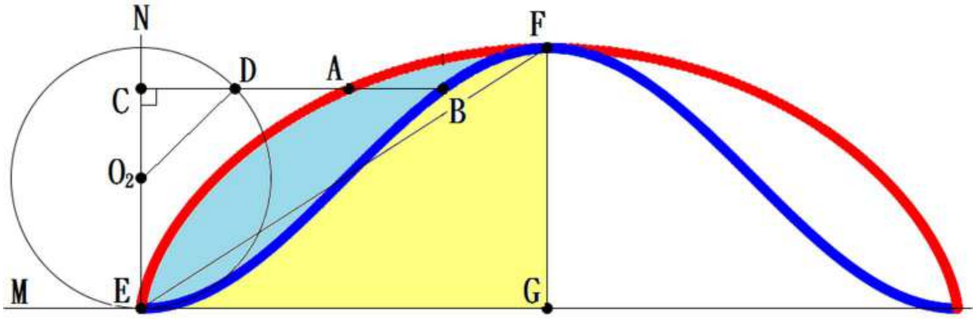
A 是圓O_1轉 θ 時在旋輪線上的點，B 是 A 對直線 L 做投影點

B 的軌跡即為藍色曲線，我們稱之為投影曲線

$B(x) = r\theta$，$B(y) = r - r\cos\theta$

藍色區線的方程式：$y = r - r\cos\frac{x}{r}$，為一餘弦函數圖形

(二)計算旋輪線的面積



圖九、旋輪線及其投影曲線

作圓半徑 $= r$ 的 O_2 過 E，且使 $\overline{O_2E} \perp$ 直線 M($\overline{O_2E}$在直線 N 上)

過 A 作線段$\overline{BC}$平行直線 M，交圓O_2於 D，交直線 N 於 C

$\overline{AB} = r\theta - (r\theta - r\sin\theta) = r\sin\theta$

$\because D(y) = A(y) \quad \therefore \angle CO_2D = \pi - \theta$

$\Rightarrow \overline{CD} = r\sin(\pi - \theta) = \overline{AB}$

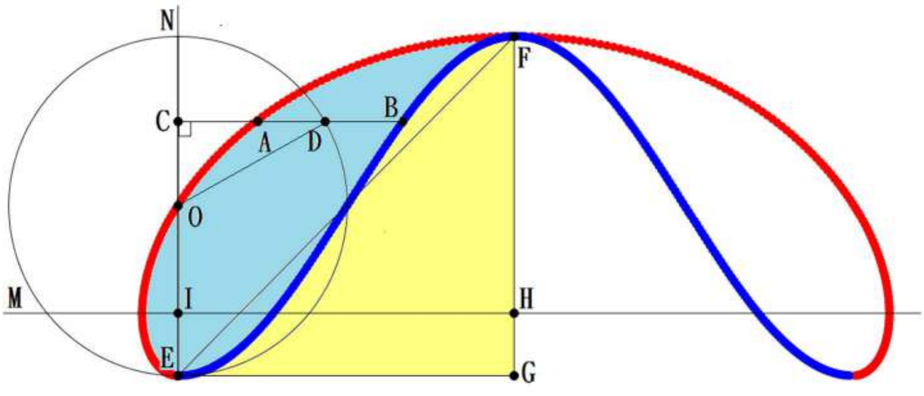
藍色面積為$\overline{AB}$在 0 至 π 間的積分和，半圓 NDE 面積為$\overline{CD}$在 0 至 π 的積分和。

$\because \overline{AB} = \overline{CD} \therefore$ 藍色面積 = 半圓 NDE 面積 $= \dfrac{r^2\pi}{2}$

$\because$ 藍色區線為餘弦函數 $\therefore$ 黃色面積 =△ EFG 面積 $= \dfrac{r\pi \times 2r}{2} = r^2\pi$

故整個旋輪線面積 $= 2($藍色面積 + 黃色面積$) = 2\left(\dfrac{r^2\pi}{2} + r^2\pi\right) = 3\pi r^2$

(三)計算外伸旋輪線的面積



圖十、外伸旋輪線及其投影曲線

紅色曲線為圖六中的外伸旋輪線

藍色曲線為外伸旋輪線的投影曲線

$B(x) = r\theta$，$B(y) = r - (r + L)\cos\theta$ (θ 為外伸軸上 E 至 A 時，圓所旋轉的角度)

藍色曲線方程式：$y = r - (r + L)\cos\dfrac{x}{r}$，為一餘弦函數圖形

作半徑 $= (r + L)$的圓 O 過 E，且使$\overline{O_2E} \perp$ 直線 M($\overline{OE}$在直線 N 上)

過 A 作線段$\overline{BC}$平行直線 M，交圓 O 於 D，交直線 N 於 C

$\overline{AB} = r\theta - (r\theta - (r+L)\sin\theta) = (r+L)\sin\theta$

$\because D(y) = A(y) \quad \therefore \angle COD = \pi - \theta$

$\Rightarrow \overline{CD} = (r+L)\sin(\pi - \theta) = \overline{AB}$

可將藍色面積視為$\overline{AB}$在 0 至 π 的積分和，半圓 NDE 面積視為$\overline{CD}$在 0 至 π 的積分和

$\because \overline{AB} = \overline{CD}$ ∴ 藍色面積 = 半圓 NDE 面積 $= \dfrac{(r+L)^2\pi}{2}$

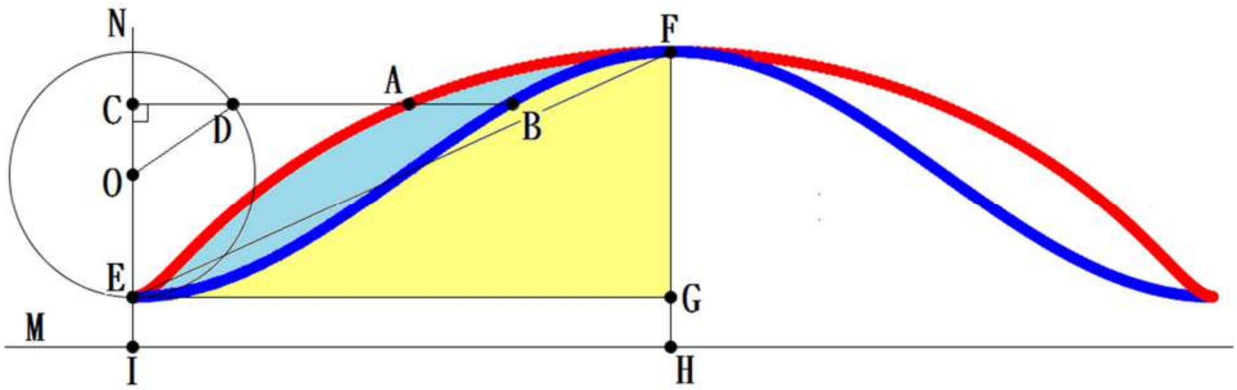
∵ 藍色曲線為餘弦函數 ∴ 黃色面積 =△ EFG 面積 $= \dfrac{r\pi \times 2(r+L)}{2} = r^2\pi + rL\pi$

故整個外伸旋輪線面積 = 2(藍色面積 + 黃色面積 − 長方形 IHGE 面積)

$$= 2\left(\frac{(r+L)^2\pi}{2} + r^2\pi + rL\pi - r\pi \times L\right)$$

$= 2\pi r^2 + (r+L)^2\pi$

(四)計算內縮旋輪線的面積



圖十一、內縮旋輪線及其投影曲線

紅色曲線為圖八中的內縮旋輪線

藍色曲線為內縮旋輪線的投影曲線

$B(x) = r\theta$，$B(y) = r - (r-L)\cos\theta$ (θ 為內縮軸上 E 至 A 時，圓所旋轉的角度)

藍色曲線方程式：$y = r - (r-L)\cos\dfrac{x}{r}$，為一餘弦函數圖形

作半徑 = (r − L)的圓 O 過 E，且使$\overline{OE} \perp$ 直線 M($\overline{OE}$在直線 N 上)

過 A 作線段$\overline{BC}$平行直線 M，交圓 O 於 D，交直線 N 於 C

$\overline{AB} = r\theta - (r\theta - (r-L)\sin\theta) = (r-L)\sin\theta$

$\because D(y)=A(y)\quad \therefore \angle COD=\pi-\theta$

$\Rightarrow \overline{CD}=(r-L)\sin(\pi-\theta)=\overline{AB}$

藍色面積為$\overline{AB}$在 θ 為 0 至 π 的總和，半圓 NDE 面積為$\overline{CD}$在 θ 為 0 至 π 的總和

$\because \overline{AB}=\overline{CD}\ \therefore$ 藍色面積 $=$ 半圓 NDE 面積 $=\dfrac{(r-L)^2\pi}{2}$

$\because$ 藍色曲線為餘弦函數 $\therefore$ 黃色面積 $=\Delta$ EFG 面積 $=\dfrac{r\pi\times 2(r-L)}{2}=r^2\pi-rL\pi$

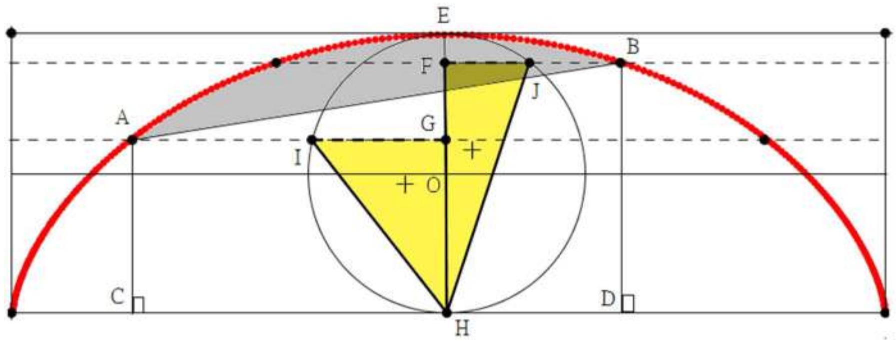
故整個內縮旋輪線面積 $=2($藍色面積 $+$ 黃色面積 $+$ 長方形 IHGE 面積$)$

$$=2\left(\frac{(r-L)^2\pi}{2}+r^2\pi-rL\pi+r\pi\times L\right)$$

$=2\pi r^2+(r-L)^2\pi$

四、旋輪線中簡易圖形的關係

(一)圖形一



圖十二、圖形一

設$\angle IOG=\alpha\quad \angle JOF=\beta$

$\because \overline{EF}=\overline{GO}\ \therefore \cos\alpha+\cos\beta=1$

$A(x)=r(\pi-\alpha)+r\sin(\pi-\alpha)=r\pi-r\alpha-r\sin\alpha$

$B(x)=r(\pi+\beta)-r\sin(\pi+\beta)=r\pi+r\beta+r\sin\beta$

Step1: ABCD 面積(AB 為曲線) $=\displaystyle\int y\,dx$

$$=\int_{\pi-\alpha}^{\pi+\beta}(r-r\cos\theta)^2 d\theta$$

$$=r^2\theta-2r^2\sin\theta+\frac{r^2\theta}{2}+\frac{r^2}{2}\sin\theta\cos\theta\,\Big|_{\pi-\alpha}^{\pi+\beta}$$

$$=\frac{3r^2}{2}(\pi+\beta)+2r^2\sin\beta+\frac{r^2}{2}(-\sin\beta)(-\cos\beta)-\frac{3r^2}{2}(\pi+\alpha)+2r^2(\sin\alpha)-\frac{r^2}{2}\sin\alpha(-\cos\alpha)$$

$$=\frac{3r^2\beta}{2}+\frac{3r^2\alpha}{2}+2r^2(\sin\alpha+\sin\beta)+\frac{r^2}{2}(\sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\cos\beta)$$

Step2:梯形 ABCD 面積

$$=\frac{(r+r\cos\alpha+r+r\cos\beta)[(r\alpha+r\beta+r(\sin\alpha+\sin\beta)]}{2}$$

$$=\frac{3r[(r\alpha+r\beta+r(\sin\alpha+\sin\beta)]}{2}$$

Step3: 陰影面積 $=$ ABCD 面積 $-$ 梯形 ABCD 面積

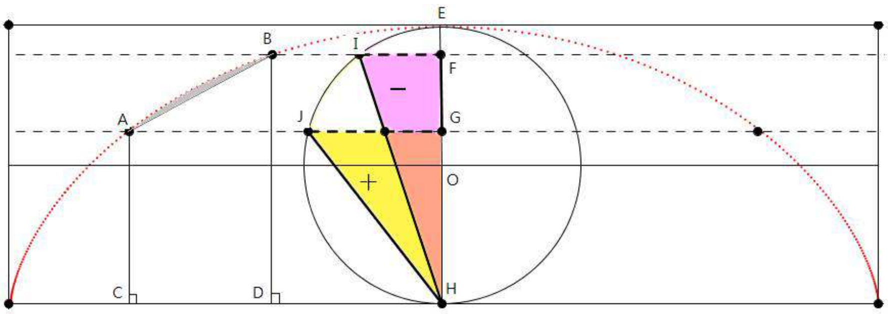
$$=\frac{1}{2}r^2(\sin\alpha+\sin\beta)+\frac{r^2}{2}(\sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\cos\beta)$$

Step4:$\triangle$ IGH 面積 $+\triangle$ JFH 面積

$$=\frac{r^2}{2}(\sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\cos\beta)+\frac{r^2}{2}(\sin\alpha+\sin\beta)$$

故陰影面積 $=\triangle$ IGH 面積 $+\triangle$ JFH 面積

(二)圖形二



圖十三、圖形二

$\angle JOG=\alpha\quad \angle IOF=\beta$

$\because \overline{EF}=\overline{GO}\ \therefore \cos\alpha+\cos\beta=1$

$A(x)=r(\pi-\alpha)+r\sin(\pi-\alpha)=r\pi-r\alpha+r\sin\alpha$

$B(x)=r(\pi-\beta)-r\sin(\pi-\beta)=r\pi+r\beta-r\sin\beta$

Step1: ABCD 面積(AB 為曲線) $=\int y dx$(從 A 到 B)

$$=\int_{\pi-\alpha}^{\pi-\beta}(r-r\cos\theta)^2d\theta$$

$$=r^2\theta-2r^2\sin\theta+\frac{r^2\theta}{2}+\frac{r^2}{2}\sin\theta\cos\theta\Big|_{\pi-\alpha}^{\pi+\beta}$$

$$=\frac{3r^2}{2}(\pi-\beta)-2r^2\sin\beta+\frac{r^2}{2}(\sin\beta)(-\cos\beta)-\frac{3r^2}{2}(\pi-\alpha)+2r^2(\sin\alpha)-\frac{r^2}{2}\sin\alpha(-\cos\alpha)$$

$$=-\frac{3r^2\beta}{2}+\frac{3r^2\alpha}{2}+2r^2(\sin\alpha-\sin\beta)+\frac{r^2}{2}(\sin\alpha\cos\alpha-\sin\beta\cos\beta)\_$$

Step2:梯形 ABCD 面積

$$=\frac{(r+r\cos\alpha+r+r\cos\beta)[(r\alpha-r\beta+r(\sin\alpha-\sin\beta)]}{2}$$

$$=\frac{3r[(r\alpha-r\beta+r(\sin\alpha-\sin\beta)]}{2}$$

Step3: 陰影面積＝ABCD 面積 − 梯形 ABCD 面積

$$=-\frac{3r^2\beta}{2}+\frac{3r^2\alpha}{2}+2r^2(\sin\alpha-\sin\beta)+\frac{r^2}{2}(\sin\alpha\cos\alpha-\sin\beta\cos\beta)$$

$$-\frac{(r+r\cos\alpha+r+r\cos\beta)[(r\alpha-r\beta+r(\sin\alpha-\sin\beta)]}{2}$$

$$=-\frac{3r^2\beta}{2}+\frac{3r^2\alpha}{2}+2r^2(\sin\alpha-\sin\beta)+\frac{r^2}{2}(\sin\alpha\cos\alpha-\sin\beta\cos\beta)-\frac{3r^2(\alpha-\beta+\sin\alpha-\sin\beta)}{2}$$

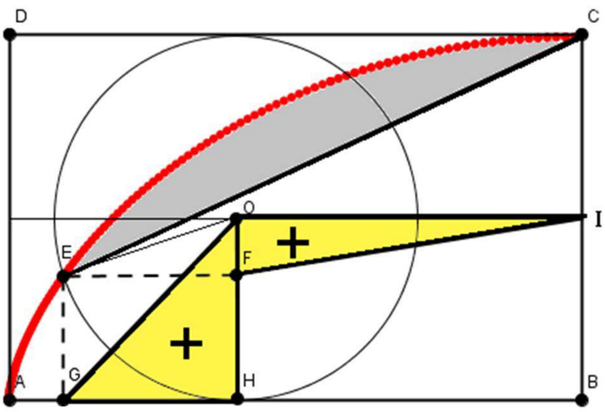
$$=\frac{1}{2}r^2(\sin\alpha-\sin\beta)+\frac{r^2}{2}(\sin\alpha\cos\alpha-\sin\beta\cos\beta)$$

Step4:△ JGH 面積 −△ IFH 面積

$$=\frac{r^2}{2}(\sin\alpha\cos\alpha-\sin\beta\cos\beta)+\frac{r^2}{2}(\sin\alpha-\sin\beta)$$

故陰影面積 =△ JGH 面積 −△ IFH 面積

(三)圖形三



圖十四、圖形三

以 A 為原點

設$\angle EOF=\theta$

$E:(r\theta-r\sin\theta, r-r\cos\theta)$

此時將 θ 轉至 α

$E:(r\alpha-r\sin\alpha, r-r\cos\alpha)$

Step1: CEGB 面積(其中 CE 為曲線)

$$=\int_{\alpha}^{\pi}(r-r\cos\theta)^2\,d\theta$$

$$=r^2\left(\frac{3}{2}\theta-2\sin\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta\right)\Big|_{\alpha}^{\pi}$$

$$=r^2\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{3}{2}\alpha+2\sin\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha\right)$$

Step2: 梯形 CEGB 面積 $=\frac{(\overline{EG}+\overline{CB})\times\overline{GB}}{2}$

$$=\frac{(r-r\cos\alpha+2r)(r\pi-r\alpha+r\sin\alpha)}{2}$$

Step3: 陰影面積

$$=r^2\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{3}{2}\alpha+2\sin\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha\right)-\frac{(r-r\cos\alpha+2r)(r\pi-r\alpha+r\sin\alpha)}{2}$$

$$=\frac{1}{2}r^2\sin\alpha+\frac{\pi}{2}r^2\cos\alpha-\frac{1}{2}r^2\alpha\cos\alpha$$

Step4:$\triangle$ OGH 面積 +$\triangle$ OIF 面積

$$=\frac{r\times r\sin\alpha}{2}+\frac{(r\pi-r\alpha)\times r\cos\alpha}{2}$$

$$=\frac{1}{2}r^2\sin\alpha+\frac{\pi}{2}r^2\cos\alpha-\frac{1}{2}r^2\alpha\cos\alpha$$

故陰影面積 =$\triangle$ OGH 面積 +$\triangle$ OIF 面積

(四)圖形四

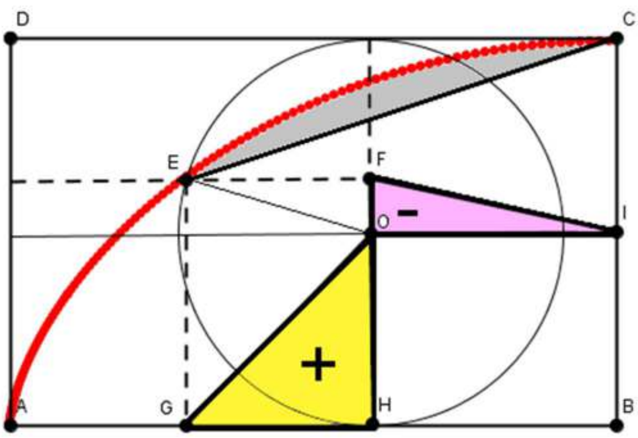
以 A 為原點

$\angle EOF=\theta$

$E:(r(\pi-\theta)-r\sin\theta, r+r\cos\theta)$

此時將 θ 轉至 α

$E:(r(\pi-\alpha)-r\sin\alpha, r+r\cos\alpha)$



圖十五、圖形四

Step1: CEGB 面積(CE 為曲線)

$$=\int_{\alpha}^{0}-(r+r\cos\theta)^2\,d\theta$$

$$=-r^2\left(\frac{3}{2}\theta+2\sin\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta\right)\Big|_{\alpha}^{0}$$

$$=r^2\left(\frac{3}{2}\alpha+2\sin\alpha+\frac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha\right)$$

Step2: 梯形 CEGB 面積 $=\dfrac{(\overline{EG}+\overline{CB})\times\overline{GB}}{2}=\dfrac{(r+r\cos\alpha+2r)(r\alpha+r\sin\alpha)}{2}$

Step3:陰影面積

$$=r^2\left(\frac{3}{2}\alpha+2\sin\alpha+\frac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha\right)-\frac{(r+r\cos\alpha+2r)(r\alpha+r\sin\alpha)}{2}$$

$$=\frac{1}{2}r^2\sin\alpha-\frac{1}{2}r^2\alpha\cos\alpha$$

Step4:△ OGH 面積 −△ OIF 面積

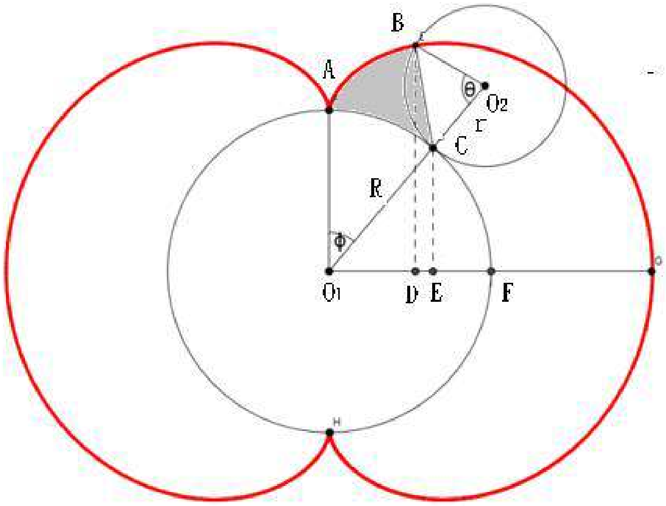
$$= \frac{r \times r\sin\alpha}{2} - \frac{r\alpha \times r\cos\alpha}{2}$$

$$= \frac{1}{2}r^2\sin\alpha - \frac{1}{2}r^2\alpha\cos\alpha$$

故陰影面積 =△ OGH 面積 −△ OIF 面積

五、外旋輪線及內旋輪線的面積及軌跡長

(一)外旋輪線



圖十六、外旋輪線

以O_1為原點

$\because$ 圓弧 BC = 圓弧 AC $\therefore \theta = \frac{R}{r}\phi$

$O_2: (R\sin\emptyset + r\sin\emptyset, R\cos\phi + r\cos\phi)$

$$B(x) = (R+r)\sin\phi - r\cos(\phi + \theta - 90°) = (R+r)\sin\phi - r\sin\left(\frac{R+r}{r}\phi\right)$$

$$B(y) = (R+r)\cos\phi + r\sin(\theta + \phi - 90°) = (R+r)\cos\phi - r\cos\left(\frac{R+r}{r}\phi\right)$$

$$dx = \left[(R+r)\cos\phi - (R+r)\cos(\frac{R+r}{r}\phi)\right]d\phi$$

$$dy = \left[-(R+r)\sin\emptyset + (R+r)\sin(\frac{R+r}{r}\emptyset)\right]d\emptyset$$

我們將ϕ轉到角度α，則θ便為$\frac{r}{R}\alpha$

1.面積

為了算陰影部分的面積，分成四部分計算

Step1: AO_1DB 面積(AB 為曲線) $= \int ydx$

$$= \int_0^{\alpha} [(R+r)\cos\phi - r\cos\left(\frac{R+r}{r}\phi\right)][(R+r)\cos\phi - (R+r)\cos(\frac{R+r}{r}\phi)]\, d\emptyset$$

$$= (R+r)\int_0^{\alpha} [(R+r)\cos^2\phi - (R+r)\cos\phi\cos(\frac{R+r}{r}\phi) - r\cos\phi\cos\left(\frac{R+r}{r}\phi\right)$$

$$+r\cos^2\left(\frac{R+r}{r}\phi\right)]d\phi$$

此方程依序分四部分計算：

(a) $\int_0^{\alpha}[(R+r)\cos^2\emptyset\,]d\emptyset = (R+r)\int_0^{\alpha}\cos^2\emptyset\, d\emptyset = (R+r)(\frac{\alpha}{2} + \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{2})$

(b) $(R+r)\int_0^{\alpha}\left[\cos\emptyset\cos\left(\frac{R+r}{r}\emptyset\right)\right]d\emptyset$

$$= (R+r)\int_0^{\alpha}\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{R+2r}{r}\emptyset\right) + \cos(\frac{R}{r}\emptyset)\right]d\emptyset$$

$$= \frac{R+r}{2}\left[\frac{r}{R+2r}\sin\left(\frac{R+2r}{r}\alpha\right) + \frac{r}{R}\sin(\frac{R}{r}\alpha)\right]$$

(c) $r\int_0^{\alpha}\left[\cos\emptyset\cos\left(\frac{R+r}{r}\emptyset\right)\right]d\emptyset$ 如 (b) $= \frac{r}{2}\left[\frac{r}{R+2r}\sin\left(\frac{R+2r}{r}\alpha\right) + \frac{r}{R}\sin(\frac{R}{r}\alpha)\right]$

(d) $r\int_0^{\alpha}\left[\cos^2\left(\frac{R+r}{r}\emptyset\right)\right]d\emptyset = \frac{r^2}{R+r}\left[\frac{R+r}{2r}\alpha + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{R+r}{r}\alpha\right)\cos\left(\frac{R+r}{r}\alpha\right)\right]$

AO_1DB 面積 $= (a) - (b) - (c) + (d) = \left(3 + \frac{2r}{R}\right)\frac{r^2}{2}[\frac{R\alpha}{r} - \sin(\frac{R\alpha}{r})]$

Step2: 梯形 BDEC 面積

$$= \frac{1}{2}\left[(R+r)\cos\alpha - r\cos\left(\frac{R+r}{r}\alpha\right) + R\cos\alpha\right]\left[R\sin\alpha - (R+r)\sin\alpha + r\sin\left(\frac{R+r}{r}\alpha\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(2R+r)\cos\alpha - r\cos\left(\frac{R+r}{r}\alpha\right)\right]\left[r\sin\left(\frac{R+r}{r}\alpha\right) - r\sin\alpha\right]$$

Step3: 扇形 AO_1C 面積 $= \frac{1}{2}R^2\alpha$

Step4: $\triangle\, O_1CE$ 面積 $= \frac{1}{2}R^2\sin\alpha\cos\alpha$

陰影面積 $= \text{Step1} + \text{Step2} - \text{Step3} - \text{Step4} = \left(3 + \frac{2r}{R}\right)\frac{r^2}{2}\left[\frac{R\alpha}{r} - \sin\left(\frac{R\alpha}{r}\right)\right]$

當 $\frac{R}{r}\alpha = 2\pi$，一個外旋輪線所圍面積 $= \left(3 + \frac{2r}{R}\right)\frac{r^2}{2} \times 2\pi = (3 + \frac{2r}{R})r^2\pi$

2.軌跡長

曲線 AB $= \int_0^{\alpha} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$

$$= (R + r)\int_0^{\alpha} \sqrt{\left[\cos\emptyset - \cos(\frac{R + r}{r}\emptyset)\right]^2 + \left[-\sin\emptyset + \sin(\frac{R + r}{r}\emptyset)\right]^2}\, d\emptyset$$

$$= (R + r)\int_0^{\alpha} \sqrt{2 - 2\left[\cos\emptyset\cos\left(\frac{R + r}{r}\emptyset\right) + \sin\emptyset\sin(\frac{R + r}{r}\emptyset)\right]}\, d\emptyset$$

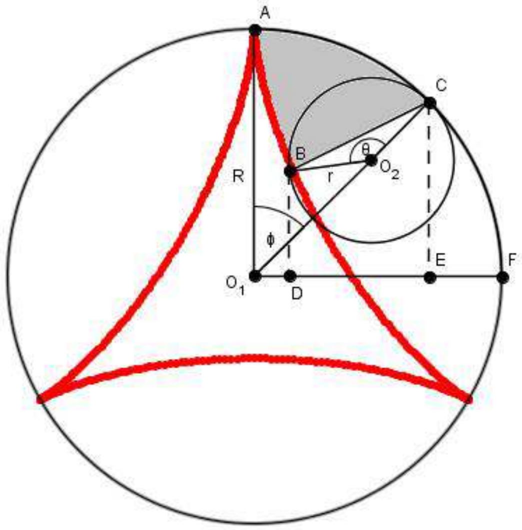
$$= (R + r)\int_0^{\alpha} \sqrt{2 - 2\cos(\frac{R}{r}\emptyset)}d\emptyset = (R + r)\int_0^{\alpha} \sqrt{4\sin^2(\frac{R}{2r}\emptyset)}d\emptyset$$

$$= 2(R + r)\int_0^{\alpha} \sin(\frac{R}{2r}\emptyset)d\emptyset = 2(R + r)\left[-\frac{2r}{R}\cos\left(\frac{R}{2r}\phi\right)\right]\Big|_0^{\alpha}$$

$$= 4(R + r)\frac{r}{R}\left[-\cos\frac{R\alpha}{2r} + 1\right]$$

當 $\frac{R}{r}\alpha = 2\pi$ ，一個旋輪線軌跡長 $= 8(R + r)\frac{r}{R}$

(二)內旋輪線



圖十七、內旋輪線

以O_1為原點

$\because$ 弧 BC = 弧 AC $\therefore \theta = \frac{R}{r}\phi$

O_2: $(R\sin\emptyset - r\sin\emptyset, R\cos\phi - r\cos\phi)$

$$B(x) = (R - r)\sin\phi - r\cos(\phi - \theta + 90°) = (R - r)\sin\phi + r\sin\left(\frac{r - R}{r}\phi\right)$$

$$B(y)=(R-r)\cos\phi+r\sin(\phi-\theta+90°)=(R-r)\cos\phi+r\cos\left(\frac{r-R}{r}\phi\right)$$

$$dx=\left[(R-r)\cos\phi+(r-R)\cos(\frac{r-R}{r}\phi)\right]d\phi$$

$$dy=\left[-(R-r)\sin\phi-(r-R)\sin(\frac{r-R}{r}\phi)\right]d\phi$$

我們將ϕ轉到角度α，則θ便為$\frac{r}{R}\alpha$

1.面積

為了算出陰影部分的面積，分成四部分計算

Step1: AO_1DB 面積(其中 AB 為曲線) $=\int_0^\alpha y dx$

$$=\int_0^\alpha\left[(R-r)\cos\phi+r\cos\left(\frac{r-R}{r}\phi\right)\right]\left[(R-r)\cos\phi-(R-r)\cos(\frac{r-R}{r}\phi)\right]d\emptyset$$

$$=(R-r)\int_0^\alpha\left[(R-r)\cos^2\phi-(R-r)\cos\phi\cos(\frac{r-R}{r}\phi)+r\cos\phi\cos\left(\frac{r-R}{r}\phi\right)\right.$$

$$\left.-r\cos^2\left(\frac{r-R}{r}\phi\right)\right]d\phi$$

此方程依序分四部分計算：

(a) $\int_0^\alpha[(R-r)\cos^2\emptyset]\,d\emptyset=(R-r)\int_0^\alpha\cos^2\emptyset\,d\emptyset=(R-r)(\frac{\alpha}{2}+\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{2})$

(b) $(R-r)\int_0^\alpha\left[\cos\emptyset\cos\left(\frac{r-R}{r}\emptyset\right)\right]d\emptyset$

$$=(R-r)\int_0^\alpha\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{2r-R}{r}\emptyset\right)+\cos(\frac{R}{r}\emptyset)\right]d\emptyset$$

$$=\frac{R-r}{2}\left[\frac{r}{2r-R}\sin\left(\frac{2r-R}{r}\alpha\right)+\frac{r}{R}\sin(\frac{R}{r}\alpha)\right]$$

(c) $r\int_0^\alpha\left[\cos\emptyset\cos\left(\frac{r-R}{r}\emptyset\right)\right]d\emptyset$ 如 (b) $=\frac{r}{2}\left[\frac{r}{2r-R}\sin\left(\frac{2r-R}{r}\alpha\right)+\frac{r}{R}\sin(\frac{R}{r}\alpha)\right]$

(d) $r\int_0^\alpha\left[\cos^2\left(\frac{r-R}{r}\emptyset\right)\right]d\theta=\frac{r^2}{r-R}\left[\frac{r-R}{2r}\alpha+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{r-R}{r}\alpha\right)\cos\left(\frac{r-R}{r}\alpha\right)\right]$

AO_1DB 面積 $=(a)-(b)+(c)-(d)$

Step2: 梯形 BDEC 面積

$$=\frac{1}{2}\left[(R-r)\cos\alpha+r\cos\left(\frac{r-R}{r}\alpha\right)+R\cos\alpha\right]\left[R\sin\alpha-(R-r)\sin\alpha-r\sin\left(\frac{r-R}{r}\alpha\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[(2R-r)\cos\alpha+r\cos\left(\frac{r-R}{r}\alpha\right)\right]\left[r\sin\alpha-r\sin\left(\frac{r-R}{r}\alpha\right)\right]$$

Step3: 扇形 AO_1C 面積 $=\frac{1}{2}R^2\alpha$

Step4: $\triangle\ O_1CE$ 面積 $=\frac{1}{2}R^2\sin\alpha\cos\alpha$

陰影面積 $=$ Step3 $+$ Step4 $-$ Step1 $-$ Step2 $=\left(3-\frac{2r}{R}\right)\frac{r^2}{2}\left[\frac{R\alpha}{r}-\sin\left(\frac{R\alpha}{r}\right)\right]$

當 $\frac{R}{r}\alpha=2\pi$，一個外旋輪線所圍面積 $=\left(3-\frac{2r}{R}\right)\frac{r^2}{2}\times 2\pi=(3-\frac{2r}{R})r^2\pi$

2.軌跡長

曲線 AB $=\int_0^\alpha\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$

$$=(R-r)\int_0^\alpha\sqrt{\left[\cos\emptyset-\cos(\frac{r-R}{r}\emptyset)\right]^2+\left[-\sin\emptyset+\sin(\frac{r-R}{r}\emptyset)\right]^2}\,d\emptyset$$

$$=(R-r)\int_0^\alpha\sqrt{2-2\left[\cos\emptyset\cos\left(\frac{r-R}{r}\emptyset\right)+\sin\emptyset\sin(\frac{r-R}{r}\emptyset)\right]}\,d\emptyset$$

$$=(R-r)\int_0^\alpha\sqrt{2-2\cos(\frac{R}{r}\emptyset)d\emptyset}$$

$$=(R-r)\int_0^\alpha\sqrt{2-2\left[1-2\sin^2\left(\frac{R}{2r}\emptyset\right)\right]}\,d\emptyset$$

$$=(R-r)\int_0^\alpha\sqrt{4\sin^2(\frac{R}{2r}\emptyset)d\emptyset}=2(R-r)\int_0^\alpha\sin\left(\frac{R}{2r}\emptyset\right)d\emptyset$$

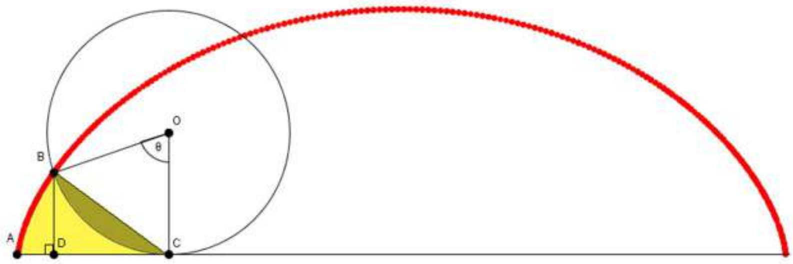
$$=2(R-r)\left[-\frac{2r}{R}\cos\left(\frac{R}{2r}\phi\right)\right]\Big|_0^\alpha=4(R-r)\frac{r}{R}\left[-\cos\left(\frac{R\alpha}{2r}\right)+1\right]$$

當 $\frac{R}{r}\alpha=2\pi$ ，一個內旋輪線軌跡長 $=8(R-r)\frac{r}{R}$

六、旋輪線、外旋輪線、內旋輪線中的面積倍數關係

(一)第一型$\left(3\text{ 倍、}3+\frac{2r}{R}\text{ 倍、}3-\frac{2r}{R}\text{ 倍}\right)$

1.旋輪線



圖十八、旋輪線

以 A 為原點

ABC 面積(AB 為曲線) = ABD 面積(AB 為曲線) +△ BDC 面積

$$= r^2\left(\frac{3}{2}\theta - 2\sin\theta + \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta\right)\Big|_0^\theta + \frac{1}{2}r\sin\theta\,(r - r\cos\theta)$$

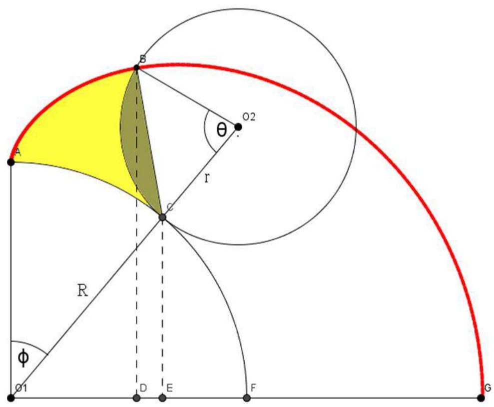
$$= r^2\left(\frac{3}{2}\theta - 2\sin\theta + \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta\right) + r^2\left(\frac{1}{2}\sin\theta - \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta\right)$$

$$= r^2\left(\frac{3}{2}\theta - \frac{3}{2}\sin\theta\right)$$

陰影面積 = 扇形 BOC 面積 −△ BOC 面積 $= \frac{1}{2}r^2\theta - \frac{1}{2}r^2\sin\theta$

故 ABC 面積為陰影面積的 3 倍

2.外旋輪線



圖十九、外旋輪線

以O_1為原點

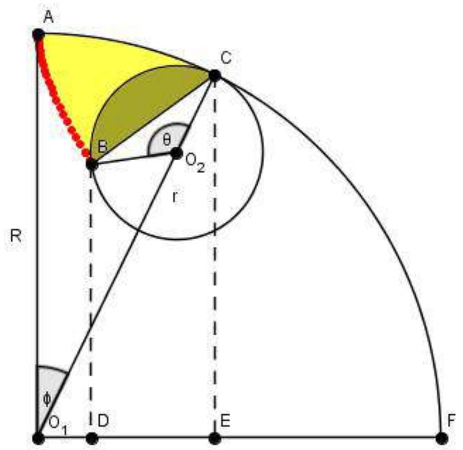
將ϕ轉到角度α時

由圖十五，ABC 面積(AB 為曲線，AC 為弧) $= \left(3 + \frac{2r}{R}\right)\frac{r^2}{2}\left[\frac{R\alpha}{r} - \sin\left(\frac{R\alpha}{r}\right)\right]$

陰影面積 = 扇形 BO_2C 面積 −△ BO_2C 面積 $= \frac{r^2}{2}\left[\frac{R\alpha}{r} - \sin\left(\frac{R\alpha}{r}\right)\right]$

故 ABC 面積為陰影面積的 $3+\frac{2r}{R}$倍

3.內旋輪線



圖二十、內旋輪線

以O_1為原點

將ϕ轉到角度α時

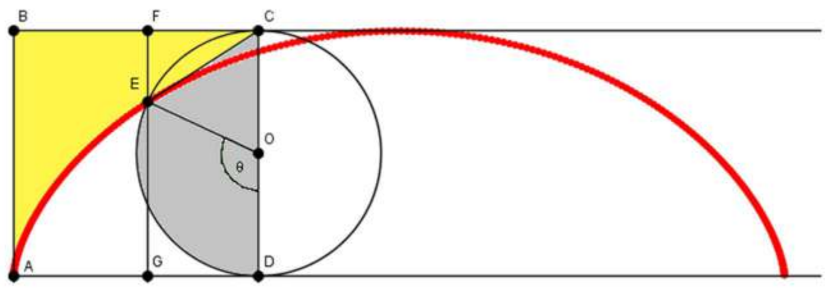
由圖十六，ABC 面積(AB 為曲線，AC 為弧) $=\left(3-\frac{2r}{R}\right)\frac{r^2}{2}\left[\frac{R\alpha}{r}-\sin\left(\frac{R\alpha}{r}\right)\right]$

陰影面積 $=$ 扇形 BO_2C 面積 $-\Delta$ BO_2C 面積 $=\frac{r^2}{2}\left[\frac{R\alpha}{r}-\sin\left(\frac{R\alpha}{r}\right)\right]$

故 ABC 面積為陰影面積的 $3-\frac{2r}{R}$倍

(二)第二型$\left(1\text{ 倍、}1+\frac{2r}{R}\text{倍、}1-\frac{2r}{R}\text{倍}\right)$

1.旋輪線



圖二十一、旋輪線

以 A 為原點

$E:(r\theta-r\sin\theta,r-r\cos\theta)$

AECB 面積(AE 為曲線) $=$ AEFB 面積(AE 為曲線) $+\Delta$ ECF 面積

$=$ 長方形 ABFG 面積 $-$ AEG 面積(其中 AE 為曲線) $+\triangle$ ECF 面積

$$= 2r(r\theta - r\sin\theta) - \int_0^\theta dA + \frac{1}{2} r\sin\theta\,(r\cos\theta + r)$$

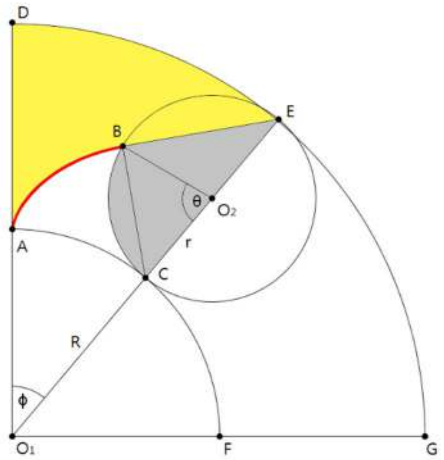
$$= 2r^2\theta - 2r^2\sin\theta - \left(\frac{3}{2}r^2\theta - 2\,r^2\sin\theta + \frac{1}{2}r^2\sin\theta\cos\theta\right) + \frac{1}{2}r^2\sin\theta\cos\theta + \frac{1}{2}r^2\sin\theta$$

$$= \frac{1}{2}r^2\sin\theta + \frac{1}{2}r^2\theta$$

陰影面積 $= \frac{1}{2}r^2\sin(\pi-\theta) + \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}r^2\sin\theta + \frac{1}{2}r^2\theta$

故 AECB 面積為陰影面積 1 倍

2.外旋輪線



圖二十二、外旋輪線

以O_1為原點

ABED 面積(AB 為曲線) $=$ 扇形O_1DE $-$ 扇形O_1AC $-$ ABC 面積(AB 為曲線) $-\triangle$ BCE 面積

$$= \frac{1}{2}(R+2r)^2\alpha - \frac{1}{2}R^2\alpha - \left(3 + \frac{2r}{R}\right)\frac{r^2}{2}\left[\frac{R\alpha}{r} - \sin\left(\frac{R\alpha}{r}\right)\right] - 2\times\frac{1}{2}r^2\sin\left(\frac{R\alpha}{r}\right)$$

$$= \frac{1}{2}Rr\alpha + r^2\alpha + \frac{(R+2r)r^2}{2R}\sin\left(\frac{R\alpha}{r}\right)$$

$$= (1+\frac{2r}{R})\left(\frac{1}{2}Rr\alpha + \frac{1}{2}r^2\sin\left(\frac{R\alpha}{r}\right)\right)$$

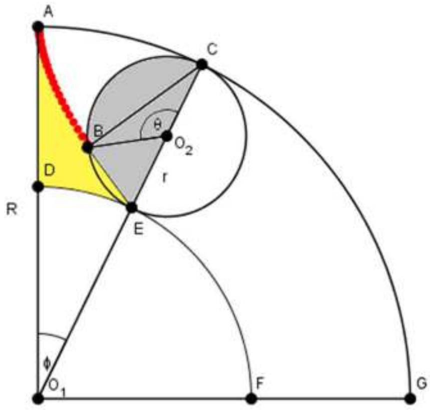
陰影面積 $=$ 扇形 BCO_2面積 $+\triangle$ BEO_2面積

$$= \frac{1}{2}r^2\left(\frac{R\alpha}{r}\right) + \frac{1}{2}r^2\sin\left(\pi - \frac{R\alpha}{r}\right)$$

$$= \frac{1}{2}Rr\alpha + \frac{1}{2}r^2\sin\left(\frac{R\alpha}{r}\right)$$

故 ABED 面積為陰影面積的 $1+\frac{2r}{R}$ 倍

3.內旋輪線



圖二十三、內旋輪線

以O_1為原點

ABED 面積(其中 AB 為曲線) = 扇形O_1AC面積 − 扇形O_1DE面積 − ABC 面積 −△ BCE 面積

$$=\frac{1}{2}R^2\alpha-\frac{1}{2}(R-2r)^2\alpha-\left(3-\frac{2r}{R}\right)\frac{r^2}{2}\left[\frac{R\alpha}{r}-\sin\left(\frac{R\alpha}{r}\right)\right]-2\times\frac{1}{2}r^2\sin\left(\frac{R\alpha}{r}\right)$$

$$=\frac{1}{2}Rr\alpha-r^2\alpha+\frac{(R-2r)r^2}{2R}\sin\left(\frac{R\alpha}{r}\right)$$

$$=(1-\frac{2r}{R})\left(\frac{1}{2}Rr\alpha+\frac{1}{2}r^2\sin\left(\frac{R\alpha}{r}\right)\right)$$

陰影面積 = 扇形 BCO_2面積 +△ BEO_2面積

$$=\frac{1}{2}r^2\left(\frac{R\alpha}{r}\right)+\frac{1}{2}r^2\sin\left(\pi-\frac{R\alpha}{r}\right)$$

$$=\frac{1}{2}Rr\alpha+\frac{1}{2}r^2\sin\left(\frac{R\alpha}{r}\right)$$

故 ABED 面積為陰影面積的 $1-\frac{2r}{R}$ 倍

七、旋輪線、外旋輪線、內旋輪線軌跡相疊時的等長關係

(一)旋輪線

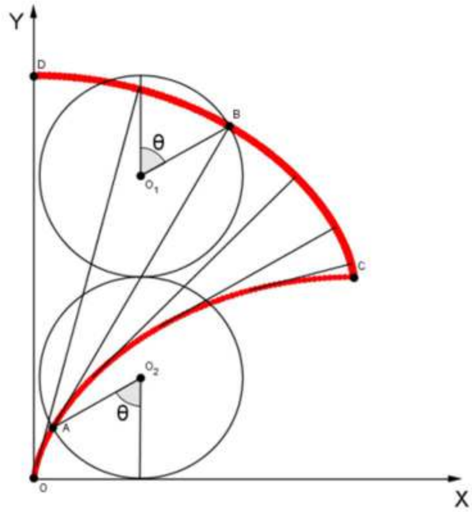
以 O 為原點 圓 O_1、O_2 皆為半徑 r 的圓

OC 及 CD 皆為圓繞了 π 所形成的旋輪線

A、B 分別為兩圓轉了 θ 時，圓在旋輪上的點

A: $(r\theta-r\sin\theta, r-r\cos\theta)$，B: $(r\theta+r\sin\theta, 3r+r\cos\theta)$

當 θ 轉到 α 時



圖二十四、旋輪線的重疊軌跡

$$\overline{AB} = \sqrt{[(r\alpha + r\sin\alpha) - (r\alpha - r\sin\alpha)]^2 + [(3r + r\cos\alpha) - (r - r\cos\alpha)]^2}$$

$$= \sqrt{8r^2(1+\cos\alpha)} = \sqrt{8r^2\left(1 + 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1\right)} = 4r\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\text{AC 曲線} = \int_{\alpha}^{\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = -4r\cos\frac{\theta}{2}\Big|_{\alpha}^{\pi} = 4r\cos\frac{\alpha}{2}$$

故$\overline{AB}$ = AC 曲線

(二)外旋輪線

以 O 為原點

EC 及 CD 皆為圓繞了 π 所形成的旋輪線

A、B 分別為兩圓轉了 θ 時，圓在旋輪上的點

黑色部分大、小圓半徑各為 R、r

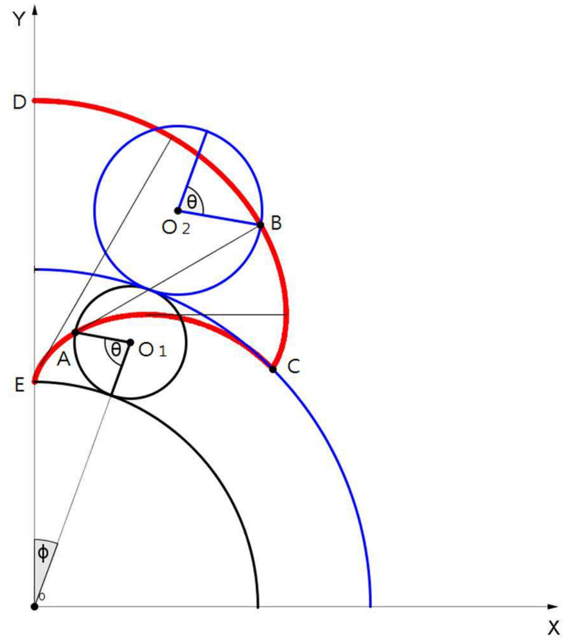
藍色部分大、小圓半徑各為 T、t

$T = R + 2r$

且$\frac{R}{r} = \frac{T}{t}$(此做法能使 C 點重疊)

$$\Rightarrow t = \frac{rT}{R} = \frac{r(R+2r)}{R}$$

$r\theta = R\phi$



圖二十五、外旋輪線的重疊軌跡

$$A: ((R+r)\sin\phi - r\sin(\phi+\theta), (R+r)\cos\phi - r\cos(\phi+\theta))$$

$$= \left((R+r)\sin\phi - r\sin\left(\frac{r+R}{r}\phi\right), (R+r)\cos\phi - r\cos\left(\frac{r+R}{r}\phi\right)\right)$$

$$dx = (R+r)\cos\phi - (r+R)\cos\left(\frac{r+R}{r}\phi\right)d\phi$$

$$dy = -(R+r)\sin\phi + (r+R)\sin\left(\frac{r+R}{r}\phi\right)d\phi$$

將 ϕ 轉到 α, θ 轉到 $\beta = \frac{R\alpha}{r}$

$$A: ((R+r)\sin\alpha - r\sin(\alpha+\beta), (R+r)\cos\alpha - r\cos(\alpha+\beta))$$

$$B(x) = \left(R + 2r + \frac{r(R+2r)}{R}\right)\sin\alpha + \frac{r(R+2r)}{R}\sin(\alpha+\beta),$$

$$B(y) = \left(R + 2r + \frac{r(R+2r)}{R}\right)\cos\alpha + \frac{r(R+2r)}{R}\cos(\alpha+\beta)$$

Step1: $\overline{AB}$

$$=\sqrt{\left[\frac{2rR+2r^2}{R}\sin\alpha+\frac{2rR+2r^2}{R}\sin(\alpha+\beta)\right]^2+\left[\frac{2rR+2r^2}{R}\cos\alpha+\frac{2rR+2r^2}{R}\cos(\alpha+\beta)\right]^2}$$

$$=\frac{2rR+2r^2}{R}\sqrt{(\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta))^2+(\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta))^2}$$

$$=\frac{2rR+2r^2}{R}\sqrt{2+2\cos\beta}$$

$$=\frac{2rR+2r^2}{R}\sqrt{2+2\left(2\cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right)-1\right)}$$

$$=\frac{4rR+4r^2}{R}\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

Step2:AC 曲線

$$=\int_{\alpha}^{\frac{r\pi}{R}}\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$$

$$=\int_{\alpha}^{\frac{r\pi}{R}}\sqrt{\left[(R+r)\cos\phi-(R+r)\cos(\frac{R+r}{r}\phi)\right]^2+\left[(R+r)\sin\phi-(R+r)\sin(\frac{R+r}{r}\phi)\right]^2}\,d\emptyset$$

$$=\int_{\alpha}^{\frac{r\pi}{R}}(R+r)\times$$

$$\sqrt{\cos^2\phi-2\cos\phi\cos\left(\frac{R+r}{r}\phi\right)+\cos^2\left(\frac{R+r}{r}\phi\right)+\sin^2\phi-2\sin\phi\sin\left(\frac{R+r}{r}\phi\right)+\sin^2(\frac{R+r}{r}\phi)d\emptyset}$$

$$=(R+r)\int_{\alpha}^{\frac{r\pi}{R}}\sqrt{2-2\cos\left(\frac{R\phi}{r}\right)}\,d\phi$$

$$=(R+r)\left(-\frac{4r}{R}\cos\left(\frac{R\phi}{2r}\right)\Big|_{\alpha}^{\frac{r\pi}{R}}\right)$$

$$=(R+r)\left[-\frac{4r}{R}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{4r}{R}\cos\left(\frac{R\alpha}{2r}\right)\right]$$

$$=\frac{4r(R+r)}{R}\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

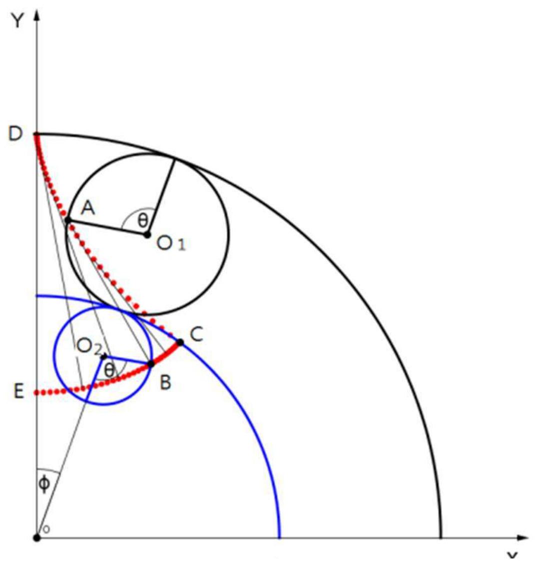
故$\overline{AB}$ = AC 曲線

(三)內旋輪線

以 O 為原點

EC 及 CD 皆為圓繞了 π 所形成的旋輪線

A、B 分別為兩圓轉了 θ 時，圓在旋輪上的點



圖二十六、內旋輪線的重疊軌跡

黑色部分大、小圓半徑各為 R、r

藍色部分大、小圓半徑各為 T、t

$$L = R - 2r$$

且 $\frac{R}{r} = \frac{T}{t}$ (此做法能使 C 點重疊)

$$\Rightarrow t = \frac{rT}{R} = \frac{r(R-2r)}{R}$$

$$r\theta = R\phi$$

$$A: ((R-r)\sin\phi - r\sin(\theta-\phi), (R-r)\cos\phi + r\cos(\theta-\phi))$$

$$= \left((R-r)\sin\phi - r\sin\left(\frac{R-r}{r}\phi\right), (R-r)\cos\phi + r\cos\left(\frac{R-r}{r}\phi\right)\right)$$

$$dx = \left[(R-r)\cos\phi - (R-r)\cos\left(\frac{R-r}{r}\phi\right)\right]d\phi$$

$$dy = \left[-(R-r)\sin\phi - (R-r)\sin\left(\frac{R-r}{r}\phi\right)\right]d\phi$$

將 ϕ 轉到 α, θ 轉到 $\beta = \frac{R\alpha}{r}$

$$A: ((R-r)\sin\alpha - r\sin(\beta-\alpha), (R-r)\cos\alpha + r\cos(\beta-\alpha))$$

$$B(x) = \left(R - 2r - \frac{r(R-2r)}{R}\right)\sin\alpha + \frac{r(R-2r)}{R}\sin(\beta-\alpha),$$

$$B(y) = \left(R - 2r - \frac{r(R-2r)}{R}\right)\cos\alpha - \frac{r(R-2r)}{R}\cos(\beta-\alpha)$$

$\overline{AB}$

$$= \sqrt{\left[\frac{2rR-2r^2}{R}\sin\alpha - \frac{2rR-2r^2}{R}\sin(\beta-\alpha)\right]^2 + \left[\frac{2rR-2r^2}{R}\cos\alpha + \frac{2rR-2r^2}{R}\cos(\beta-\alpha)\right]^2}$$

$$= \frac{2rR-2r^2}{R}\sqrt{(\sin\alpha - \sin(\beta-\alpha))^2 + (\cos\alpha + \cos(\beta-\alpha))^2}$$

$$= \frac{2rR-2r^2}{R}\sqrt{2+2\cos\beta} = \frac{2rR-2r^2}{R}\sqrt{2+2\left(2\cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right)-1\right)}$$

$$= \frac{4rR-4r^2}{R}\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

AC 曲線

$$=\int_{\alpha}^{\frac{r\pi}{R}}\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$$

$$=\int_{\alpha}^{\frac{r\pi}{R}}\sqrt{\left[(R-r)\cos\phi-(R-r)\cos\left(\frac{R-r}{r}\phi\right)\right]^2+\left[-(R-r)\sin\phi-(R-r)\sin\left(\frac{R-r}{r}\phi\right)\right]^2}\,d\emptyset$$

$$=\int_{\alpha}^{\frac{r\pi}{R}}(R-r)\times$$

$$\sqrt{\cos^2\phi-2\cos\phi\cos\left(\frac{R-r}{r}\phi\right)+\cos^2\left(\frac{R-r}{r}\phi\right)+\sin^2\phi+2\sin\phi\sin\left(\frac{R-r}{r}\phi\right)+\sin^2(\frac{R-r}{r}\phi)d\emptyset}$$

$$=(R-r)\int_{\alpha}^{\frac{r\pi}{R}}\sqrt{2-2\cos\left(\frac{R\phi}{r}\right)}\,d\phi$$

$$=(R-r)\left(-\frac{4r}{R}\cos\left(\frac{R\phi}{2r}\right)\Big|_{\alpha}^{\frac{r\pi}{R}}\right)$$

$$=(R-r)\left[-\frac{4r}{R}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{4r}{R}\cos\left(\frac{R\alpha}{2r}\right)\right]$$

$$=\frac{4r(R-r)}{R}\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

故$\overline{AB}$ = AC 曲線

伍、結果討論

一、旋輪線、外伸旋輪線、內縮旋輪線、外旋輪線、內旋輪線性質之相關性

(一)在「旋輪線及其變形的面積和軌跡長」中

1. 在外伸旋輪線中，L 趨近於 0，面積 $=\lim_{L\to 0}2\pi r^2+(r+L)^2\pi=3\pi r^2$

2. 在內縮旋輪線中，L 趨近於 0，面積 $=\lim_{L\to 0}2\pi r^2+(r-L)^2\pi=3\pi r^2$

⇒ 因為當上述二者 L 趨近於 0 時，便成為旋輪線，所以結果與旋輪線面積($3\pi r^2$)相同

(二)在「旋輪線及其變形的面積較簡易之算法」中

我們利用了非微積分的算法，找出了旋輪線、外伸旋輪線及內縮旋輪線的面積，其

結果與利用積分所得結果相同，因此，我們找到了一個較易了解且快速的方法。

(三)在「外旋輪線及內旋輪線的面積及周長」中

1. 在外旋輪線中，R 趨近於∞，$\begin{cases}\text{面積}=\lim_{R\to\infty}\left(3+\frac{2r}{R}\right)r^2\pi=3\pi r^2\\ \text{軌跡長}=\lim_{R\to\infty}8(R+r)\frac{r}{R}=8r\end{cases}$

2. 在內旋輪線中，R 趨近於∞， $\begin{cases} 面積 = \lim\limits_{R\to\infty}\left(3-\frac{2r}{R}\right)r^2\pi = 3\pi r^2 \\ 軌跡長 = \lim\limits_{R\to\infty} 8(R-r)\frac{r}{R} = 8r \end{cases}$

⇒ 因為當上述二者 R 趨近於∞時，便成為旋輪線，所以結果與旋輪線 $\begin{cases} 面積(3\pi r^2) \\ 軌跡長(8r) \end{cases}$ 相同

(四)在「旋輪線、外旋輪線、內旋輪線中的面積倍數關係」中

1. 在外旋輪線中，R 趨近於∞， $\begin{cases} 第一型倍數 = \lim\limits_{R\to\infty} 3+\frac{2r}{R} = 3 \\ 第二型倍數 = \lim\limits_{R\to\infty} 1+\frac{2r}{R} = 1 \end{cases}$

2. 在外旋輪線中，R 趨近於∞， $\begin{cases} 第一型倍數 = \lim\limits_{R\to\infty} 3-\frac{2r}{R} = 3 \\ 第二型倍數 = \lim\limits_{R\to\infty} 1-\frac{2r}{R} = 1 \end{cases}$

⇒ 因為當上述二者 R 趨近於∞時，便成為旋輪線，所以結果與旋輪線 $\begin{cases} 第一型倍數(3) \\ 第二型倍數(1) \end{cases}$ 相同

(五)在「旋輪線、外旋輪線、內旋輪線軌跡相疊時的等長關係」中

1. 在旋輪線中，當 $\theta = 0$， $\begin{cases} \overline{AB} = 4r \\ AC 曲線長 = 半個旋輪線軌跡長 = 4r \end{cases}$

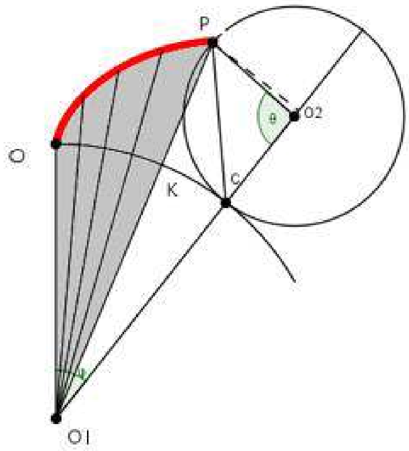
2. 在外旋輪線中，當 $\theta = 0$， $\begin{cases} \overline{AB} = 2r + \frac{2r(R+2r)}{R} \\ AC 曲線長 = 半個外旋輪線軌跡長 = 4(R+r)\frac{r}{R} \end{cases}$

3. 在內旋輪線中，當 $\theta = 0$， $\begin{cases} \overline{AB} = 2r + \frac{2r(R-2r)}{R} \\ AC 曲線長 = 半個外旋輪線軌跡長 = 4(R-r)\frac{r}{R} \end{cases}$

⇒ 上述三者 $\theta = 0$ 時，結果都符合 $\overline{AB}$ = AC 曲線長，且此結果不與因其為旋輪線、外旋輪線亦或內旋輪線而改變。

二、延伸

(一)外旋輪線軌跡有重疊時的面積



圖二十七、外旋輪線

$R\phi = r\theta$

OO_1P面積(OP為曲線) $=$ OPC面積(OP為曲線) $+$ 扇形O_1OC面積 $-$ ΔO_1PC面積

根據上圖

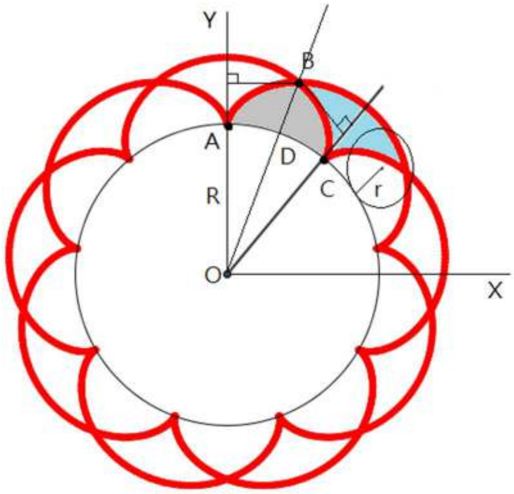
OPC面積(OP為曲線) $= \left(3+\frac{2r}{R}\right)\left(\frac{1}{2}r^2\theta - \frac{1}{2}r^2 sin\theta\right)$

扇形O_1OC面積 $= \frac{1}{2}R^2\phi = \frac{1}{2}Rr\theta$

O_1PC面積 $= \frac{1}{2}Rrsin\theta$

OO_1P面積(OP為曲線) $= \frac{r^2}{2}\left(\frac{2r}{R}+\frac{R}{r}+3\right)(\theta - sin\theta)$

$\angle AOB = \emptyset$



圖二十八、外旋輪線的重疊面積

設 B 為小圓旋轉θ的點

$\Rightarrow R\emptyset = r\theta$

$$B(x) = (R+r)\,sin\,\phi - r\,sin\left(\frac{R+r}{r}\phi\right)$$

$$B(y) = (R+r)\,cos\,\phi - rcos\left(\frac{R+r}{r}\phi\right)$$

$\overline{OC}$方程式為$y = tan(90-2\emptyset)x$

B 點到 Y 軸距離與$\overleftrightarrow{OC}$距離相等

有此解得ϕ，推得θ

再利用圖二十六結果，將θ代入，便可解得 AOB 面積(AB 為曲線)

再扣掉扇形 AOD 面積，解得 ABD 面積(半個陰影面積)，兩倍即為陰影面積

一個旋輪線面積減兩個陰影面積即為藍色面積

(二)外伸旋輪線、內縮旋輪線的軌跡

在計算圖六中外伸旋輪線的軌跡長(EBGF 曲線)、內縮旋輪線的軌跡長(EF 曲線)，積分到後來會出現$\int\sqrt{a+bcos\theta}d\theta$ ，此為橢圓積分的一種，所用到的數學理論過於複雜，非在高中生所可以的理解範圍內，且不影響研究內容，因此不深入討論。以後若有人想研究此領域，可在此多著墨。

陸、結論

一、旋輪線之基本性質:

(一)旋輪線:$\begin{cases}\text{面積}=3\pi r^2\\ \text{旋輪線軌跡長}=8r\end{cases}$

(二)外伸旋輪線:面積 $=2\pi r^2+(r+L)^2\pi$

(三)內縮旋輪線:面積 $=2\pi r^2+(r-L)^2\pi$

(四)外旋輪線(以半徑r之圓繞半徑R之圓):$\begin{cases}\text{單一面積}=(3+\dfrac{2r}{R})r^2\pi\\ \text{單一旋輪線軌跡長}=8(R+r)\dfrac{r}{R}\end{cases}$

(五)內旋輪線(以半徑r之圓繞半徑R之圓):$\begin{cases}\text{單一面積}=(3-\dfrac{2r}{R})r^2\pi\\ \text{單一旋輪線軌跡長}=8(R-r)\dfrac{r}{R}\end{cases}$

二、旋輪線的加減面積變化:

(一)圖十二: 令$\overline{EF}=\overline{GO}\leq$ 圓半徑時 $\Rightarrow$ 陰影面積 $=\Delta\, IGH$面積 $+\Delta\, JFH$面積

(二)圖十三: 令$\overline{EF}=\overline{GO}\leq$ 圓半徑時 $\Rightarrow$ 陰影面積 $=\Delta\, JGH$面積 $-\Delta\, IFH$面積

(三)圖十四 $\Rightarrow$ 陰影面積 $=\Delta\, OGH$面積 $+\Delta\, OIF$面積

(四)圖十五 $\Rightarrow$ 陰影面積 $=\Delta\, OGH$面積 $-\Delta\, OIF$面積

三、旋輪線、外旋輪線、內旋輪線中的面積倍數關係:

(一)第一型$\left(3\text{ 倍、}3+\dfrac{2r}{R}\text{倍、}3-\dfrac{2r}{R}\text{倍}\right)$

1. 旋輪線: 圖十八 $\Rightarrow ABC$面積為陰影面積的 3 倍

2. 外旋輪線: 圖十九 $\Rightarrow ABC$面積為陰影面積的 $3+\frac{2r}{R}$倍

3. 內旋輪線: 圖二十 $\Rightarrow ABC$面積為陰影面積的 $3-\frac{2r}{R}$倍

(二)第二型$\left(1\text{ 倍、}1+\frac{2r}{R}\text{倍、}1-\frac{2r}{R}\text{倍}\right)$

1.旋輪線:圖二十一 $\Rightarrow AECB$面積 $=$ 陰影面積

2. 外旋輪線: 圖二十二 $\Rightarrow ABED$面積為陰影面積的 $1+\frac{2r}{R}$倍

3. 內旋輪線: 圖二十三 $\Rightarrow ABED$面積為陰影面積的 $1-\frac{2r}{R}$倍

四、旋輪線、外旋輪線、內旋輪線軌跡相疊時的等長關係

$$\left.\begin{array}{l}\text{(一)旋輪線: 圖二十四}\\ \text{(二)外旋輪線: 圖二十五}\\ \text{(三)內旋輪線: 圖二十六}\end{array}\right\} \Rightarrow \overline{AB} = AC\text{曲線長}$$

柒、參考資料及其他

一、Tom M. Apostol and Mamikon A. Mnatsakanian (2009).New Insight into Cycloidal Areas. *The American Mathematical Monthly,Vol. 116, No. 7*,598-611.

二、曹亮吉(2002 年 2 月 17 日)・擺線-幾何中的海倫・取自 http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/sm/sm_15_09_1/index.html

三、R.E.Johnson(原著)黃曙平、蔡永泰(譯者)(1978)・詹森微積分(六版)・臺北市：曉園。

四、李德治(2011)・實用微積分・新北市：博碩文化。

【評語】040415

本作品同時利用三角函數、座標及微積分工具，耐心及仔細計算了一系列內、外旋輪線下的面積及弧長，文中若能嘗試再加上幾何觀點來處理進而得到可能的定性結果再結合所獲得的定量性質將使本作品更加完整及深入。