中華民國第 55 屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

040414

畫圖「點」驚-多項式定理點出動面成體

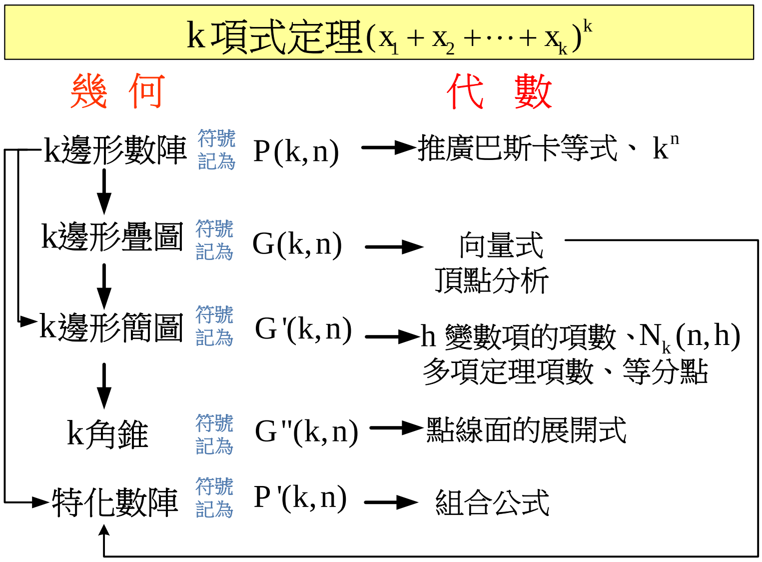
學校名稱：臺北市立成淵高級中學

作者：	指導老師：
高一　范谷瑜	林鳳美

關鍵詞：多項式定理、動面成體、k 角錐

摘要

本篇的目標在於探究多項定理的展開式，若將展開式全部列出來是繁雜的，我們透過幾何來呈現展開項，配合動點成線，動線成面，動面成體的概念，我們共發展了四種幾何表現，並且呈現出不同的性質，帶出更多的代數與幾何的規律，同時還推廣了多項展開式的係數表示法、k^n、巴斯卡等式、並且找出多項展開中不同項與變數項的數量間的通式等等性質，處處可見數形合一的微妙關係，也帶動了幾何與代數之美。



壹、研究動機

多項定理展開式很複雜，思考二項定理由巴斯卡等式衍生而得，而巴斯卡等式是否推廣至多項定理呢？然而是否存在幾何表現涵蓋多項定理所有展開項呢？這些問題都讓我感到興趣，於是我們展開一連串的研究。

貳、研究目的與問題

一、將二項定理的性質推廣至多項定理的性質。

二、在平面幾何上，探討多項定理的幾何表現與分析頂點對應的展開項或係數的性質。

三、在平面幾何上，探討多項定理的幾何表現與分析頂點對應的展開項或係數的性質。

四、在三維空間上，探討多項定理的幾何表現與各頂點對應多項定理的性質。

參、研究設備及器材

紙、筆、人腦、電腦、軟體：ＶＢ、ＧＧＢ

肆、研究過程或方法

一、重訪二項定理 (Binomial Theorem)

我們要由熟知的二項定理出發：

【定理 1】(二項定理)

假設$n \in \mathbb{N}$，則有

$$(x_1+x_2)^n=\sum_{n_1=0}^{n} C^{n}_{n_1}\cdot x_1^{n_1}\cdot x_2^{n-n_1}=\sum_{n_1=0}^{n}\binom{n}{n_1}\cdot x_1^{n_1}\cdot x_2^{n_2} \tag{1}$$

又可將上式改寫為方便於推廣的形式

$$(x_1+x_2)^n=\sum_{n_1,n_2}\binom{n}{n_1,n_2}\cdot x_1^{n_1}\cdot x_2^{n_2}$$

其中的$\sum$ 是對$0\le n_1,n_2\le n$且$n_1+n_2=n$來求和。

把各冪次方展開式的係數抽取出來就得到巴斯卡三角形：

$$\begin{array}{lllcccc}
(x_1+x_2)^0 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & & C_0^0 & & \\
(x_1+x_2)^1 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & C_0^1 & & C_1^1 & \\
(x_1+x_2)^2 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & C_0^2 & & C_1^2 & & C_2^2 \\
(x_1+x_2)^3 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & C_0^3 & C_1^3 & & C_2^3 & C_3^3
\end{array}
\quad\rightarrow\quad
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 2 & & 1 & \\
1 & & 3 & & 3 & & 1
\end{array}$$

圖 1. 巴斯卡三角形

從$(x_1+x_2)^0$到$(x_1+x_2)^n$的展開係數所形成的巴斯卡三角形叫做**第n階巴斯卡三角形**。我們注意到，在二項定理$(x_1+x_2)^i$的展開式中，有$H_i^2\equiv C_i^{i+1}$個的不同類項，這表示：從兩類東西中可重複取出 i 個來的重覆組合數。令 $P_i=\sum_{j=0}^{i} C_j^i$ 表示巴斯卡三角形第i列(row)之和。

那麼我們就有下面四個周知的結果：

1. 巴斯卡等式：$C_j^{i+1}=C_j^i+C_{j-1}^i$

2. 巴斯卡三角形第i列之和： $P_i=\sum_{j=0}^{i} C_j^i=2^i$ ，$i\in N\cup\{0\}$

3. 第n階巴斯卡三角形的所有組合係數之和為

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}C_j^i=\sum_{i=0}^{n}P_i=2^0+2^1+\cdots+2^{n-1}+2^n=2^{n+1}-1=\frac{2^{n+1}-1}{2-1}$$

4. 第n階巴斯卡三角形的不同類項之個數為

$$\sum_{i=0}^{n} H_i^2 = 1+2+3+\cdots+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2!}$$

二、多項定理 (Multinomial Theorem)

將(1)式的二項定理作推廣就得到：

【定理 2】(多項定理，k項定理)

假設$n \in \mathbb{N}$，則有

$$(x_1+x_2+\cdots+x_{k-1}+x_k)^n = \sum_{n_1,\ldots,n_k} \binom{n}{n_1,\ldots,n_k} \cdot x_1^{n_1}\cdot x_2^{n_2}\cdot\cdots\cdot x_{k-1}^{n_{k-1}}\cdot x_k^{n_k} \qquad (2)$$

其中的 $\sum$ 是對$0 \le n_1,n_2,\ldots,n_k \le n$且$n_1+n_2+\cdots+n_k = n$來求和，而組合係數定義為 $\binom{n}{n_1,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1!\cdot\cdots\cdot n_k!}$，叫做多項展開式的係數。

在$(x_1+x_2+\cdots+x_{k-1}+x_k)^n$的展式中，有$H_n^k \equiv C_n^{k+n-1}$個不同類項，因為這相當於方程式$n_1+n_2+\cdots+n_k = n$的非負整數解的個數。

將二項定理四個周知的結果推廣，我們有以下結果：

1. 推廣巴斯卡等式：詳見後述**定理 7** (P19)
2. 第i面組合係數和的公式：詳見後述**定理 8** (P20)
3. 全部組合係數和的公式：

$$\sum_{i=0}^{n} k^i = k^0+k^1+\cdots+k^{n-1}+k^n = \frac{k^{n+1}-1}{k-1}$$

4. 不同類項個數的公式：

$$\sum_{i=0}^{n} H_i^k = \underbrace{\underbrace{\underbrace{C_0^{k-1}+C_1^{k}}_{\text{用巴斯卡等式}} + \cdots}_{\cdots} + C_n^{n+k-1}}_{\text{用巴斯卡等式}} = C_n^{n+k} = C_k^{n+k} = \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}{k!}$$

接著定義 k 項定理的變數項：**k 項式定理展開式中每個** h **變數項的項數**，以符號 $\boldsymbol{N_k(n,h)}$ 來表示，其中 $\boldsymbol{1 \le h \le k}$，例如：單變數項 $\boldsymbol{x_1^{n_1}, x_2^{n_2}}$，及二變數項 $\boldsymbol{x_1^{n_1}x_2^{n_2}, x_2^{n_2}x_3^{n_3}}$等等。

這些 $\boldsymbol{N_k(n,h)}$值有下列結果如下：

(1) $\boldsymbol{N_k(n,1)+N_k(n,2)+\cdots+N_k(n,h)+\cdots+N_k(n,k)=H_n^k}$

(2) $\boldsymbol{N_k(n,h)=\frac{1}{h}\left[C_1^{k-(h-1)}\cdot N_k(n-1,h-1)+C_1^h\cdot N_k(n-1,h)\right]}$

(3) $\boldsymbol{N_k(n,h)=C_h^k\cdot H_{n-h}^h}$

【證明】

(1)詳見後述定理 6

(2)設(2)式展開 h 變數項的形態為$x_1^{n_1}\cdot x_2^{n_2}\cdot\cdots\cdot x_k^{n_k}$ (不含係數)，則 $N_k(n,h)$可由 $N_k(n-1,h-1)$與$N_k(n-1,h)$而得，說明如下：

(I)若$n-1$次$h-1$變數項的形態為$x_1^{n_1}\cdot x_2^{n_2}\cdot\cdots\cdot x_{h-1}^{n_{h-1}}$，則存在$x_t\in\{x_h,x_{h+1},x_{h+2},\cdots,x_k\}$，使得$n-1$次$h-1$變數項乘以$x_t$等於$n$次$h$變數項，又因為$x_t$有$C_1^{k-(h-1)}$個，因此其項數為 $C_1^{k-h+1}\cdot N_k(n-1,h-1)$。

(II)若$n-1$次h變數項的形態為$x_1^{n_1}\cdot x_2^{n_2}\cdot\cdots\cdot x_i^{n_i-1}\cdot\cdots\cdot x_h^{n_h}$，其中$x_i\in\{x_1,x_2,x_3,\cdots,x_h\}$，則 $n-1$次h變數項乘以x_i等於n次h變數項,因為x_i有C_1^h個,因此其項數為$C_1^h\cdot N_k(n-1,h)$。

因此 $N_k(n,h)$ 可由(I)與(II)產生而得，但h變數$x_1^{n_1}\cdot x_2^{n_2}\cdot\cdots\cdot x_h^{n_h}$可能由$h-1$變數加上$\{x_1,x_2,x_3,\cdots,x_h\}$中任意一項而得，因為有$C_1^h$個來源所以要再除以$h$，因此 $N_k(n,h)=\frac{1}{h}\left[C_1^{k-(h-1)}\cdot N_k(n-1,h-1)+C_1^h\cdot N_k(n-1,h)\right]$。

(3)$N_k(n,h)$相當於從k選定h變數$x_1,x_2,x_3,\cdots,x_h$後，而產生方程式$n_1+n_2+n_3+\cdots+n_h=n$的正整數解，就是$N_k(n,h)=C_h^k\cdot H_{n-h}^h$。 ■

其次，多項定理的展開更複雜且豐富，理應有更多的代數的與幾何的規律可尋。這些正是本文所要探討的，底下就先建構三項定理的幾何表現。

三、建構三項定理的幾何表現

我們先看三項定理(Trinomial Theorem)：

$$(x_1+x_2+x_3)^n=\sum_{n_1,n_2,n_3}\binom{n}{n_1,n_2,n_3}\cdot x_1^{n_1}\cdot x_2^{n_2}\cdot x_3^{n_3} \tag{3}$$

其中的 $\sum$ 是對$0\le n_1,n_2,n_3\le n$且$n_1+n_2+n_3=n$來求和。

（一）三項定理展開式→三邊形數陣

為了作本文的推廣，我們將二項定理的展開，重新敘述成我們要的形式：

把每一項用點來表示，並且將展開看作成 2 個方向，夾角為 180°，每一點都賦予二項定理之係數，並將排成的數陣稱為二邊形數陣，記為$P(2,n)$，說明如圖 2。

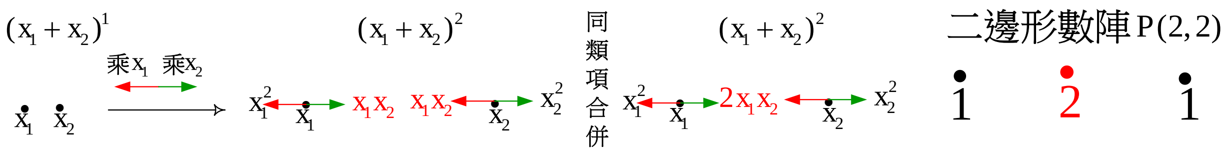


圖 2. 建構二項定理 $(x_1+x_2)^2$ 的二邊形數陣 $P(2,2)$

對 $(x_1+x_2+x_3)^n$ 的展開，**也是將每一項用點來表示，並將展開看作成三個方向，相鄰方向的夾角為$\frac{360^\circ}{3}=120^\circ$，為了符合左右對稱性，形狀是正三角形的呈現，並且每一點都賦予三項展開式的係數，並將排成的數陣稱為三邊形數陣，記為 $P(3,n)$，以 $P(3,2)$為例如圖 3。**

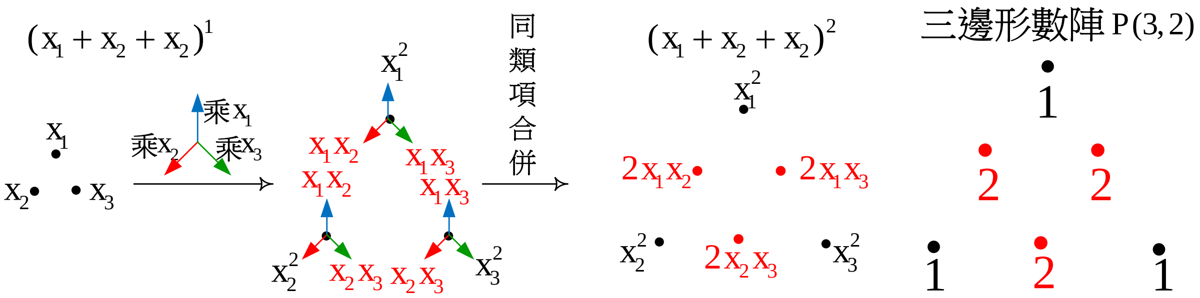


圖 3. 建構三項定理 $(x_1+x_2+x_3)^2$ 的三邊形數陣 $P(3,2)$

（二）三邊形數陣→三邊形疊圖

將三邊形數陣 $P(3,n)$ 改變另一種幾何表現，重新敘述成我們要的形式：

三邊形數陣中相鄰兩兩方向的夾角 120° 的三個方向，改為正三角形如圖 4 與圖 5，就形成一個大正三角形內有數個小正三角形，此圖形除了呈現三角形外，還有頂點，以 $V_{(n_1,n_2,n_3)}$ 表示，每個頂點對應三項定理展開項 $x_1^{n_1}x_2^{n_2}x_3^{n_3}$ **（如：頂點 $V_{(1,2,5)}$ 表示對應三項定理展開項 $x_1^1x_2^2x_3^5$ ），此幾何圖形稱為三邊形疊圖，記為 $G(3,n)$。**

【例】三邊形數陣→三邊形疊圖說明如圖 **4** 與圖 **5**

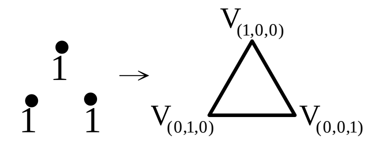
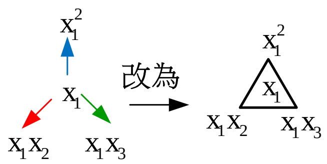
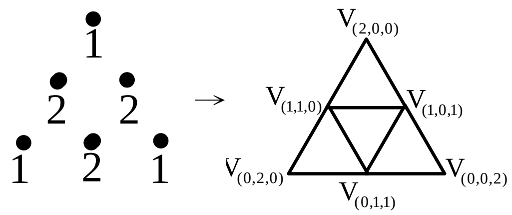


圖 **4.** 三邊形數陣 $P(3,1)$→三邊形疊圖 $G(3,1)$

例如：





k 個方向改為正***k*** 邊形　　　圖 **5.** 三邊形數陣 $P(3,2)$ → 三邊形疊圖 $G(3,2)$

【性質 1】三邊形疊圖 $G(3,n)$形狀是正大三角形且其內有H_{n-1}^{3}個正小三角形組成，同時正小三角形個數等於 $G(3,n-1)$的頂點數(含邊上及內點)。

【說明】觀察三邊形疊圖$G(3,1)$ → $G(3,2)$ → $G(3,3)$的建構方式如圖 **6**，可知三邊形疊圖 $G(3,n-1)$中所有頂點(含邊上及內點)沿著三個方向展開產生三邊形疊圖 $G(3,n)$，因此其內部有H_{n-1}^{3}個小正三角形等於$G(3,n-1)$的頂點數(含邊上及內點)。

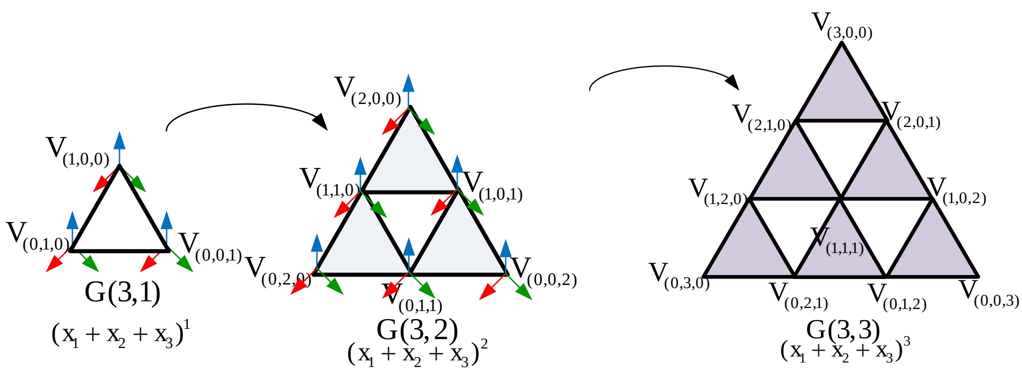


圖 **6.** 三邊形疊圖$G(3,1)$→ $G(3,2)$ → $G(3,3)$的建構

（三）三邊形疊圖→三邊形簡圖

在$(x_1+x_2+x_3)^n$展開式所對應的**三邊形疊圖** $G(3,n)$中，我們發現**只要考慮三邊作 n 等分點(分別作出 1 等分點、2 等分點、⋯、$n-1$等分點)，如圖 7.作連線後再作$n-1$等分點，可得到所有頂點對應三項定理展開項，因此疊圖簡化了，稱此圖形為三邊形簡圖，記為$G'(3,n)$。**

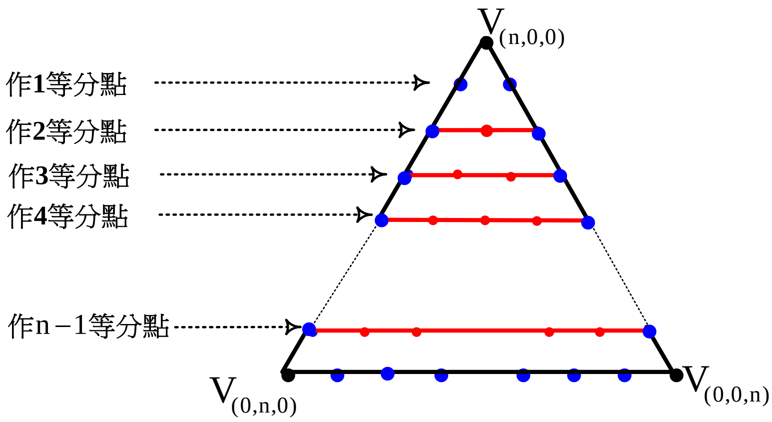


圖 7. 三邊形疊圖 $G'(3,n)$

【性質 2】在三邊形簡圖 $G'(3,n)$如圖 7，則(1)單變數項落在黑色頂點上如圖 7。

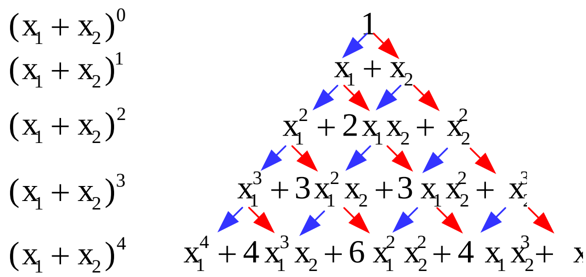
(2)二變數項落在三邊的 n 等分點上，就是如圖 6 的藍色點。

(3)三變數項落在所有內點上，就是如圖 7 的紅色點。

（四）三邊形簡圖→三角錐

三項定理 $(x_1+x_2+x_3)^n$ 的幾何圖形是否有在三維空間的圖形呢？

先考察二項式定理的情形，從$(x_1+x_2)^0$到$(x_1+x_2)^4$的展開係數如圖 8，方便推廣我們看成為一平面，並且把每一項用頂點表示，記為$V_{(n_1,n_2)}$，代表其頂點對應二項定理展開項 $x_1^{n_1}x_2^{n_2}$，此圖由線段組成，同冪次項用橫線段表示如圖 9，視其為在三維空間的角錐側面。



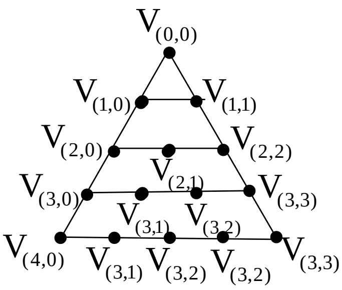


圖 8. 二項定理中$(x_1+x_2)^0$到$(x_1+x_2)^4$的展開係數　圖 9. 在三維空間的角錐側面

底下就來建構三項定理在三維空間的幾何表現。

因為三項定理 $(x_1+x_2+x_3)^n$ 展開項比二項定理多了一個變數 x_3，所以會有三個角錐側面分別為x_1x_2, x_2x_3, x_3x_1，並且底面為三邊形簡圖 $G'(3,n)$就構成了三角錐如圖 10，為了方便起見把每一項用頂點表示，記為 $V_{(n_1,n_2,n_3)}$，代表其頂點對應三項定理的展開項 $x_1^{n_1}x_2^{n_2}x_3^{n_3}$，合起來成為三項定理在三維空間的表現，簡稱三角錐，記為 $G''(3,n)$。

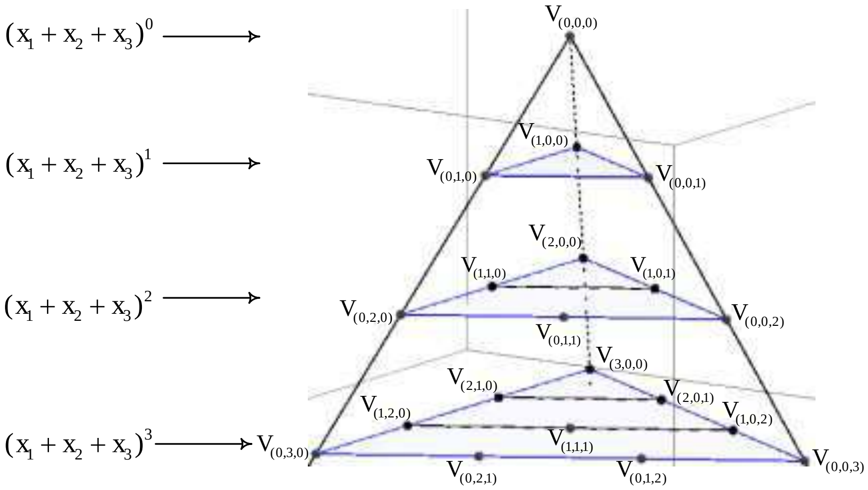


圖 10. 三角錐 $G''(3,3)$

（五）三項定理的性質

我們可從建構幾何表現推出一些性質，底下是我們的結果。

我們發現 $P(3,n)$ 中係數可由 $P(3,n-1)$係數所構成，舉例說明如圖 11。

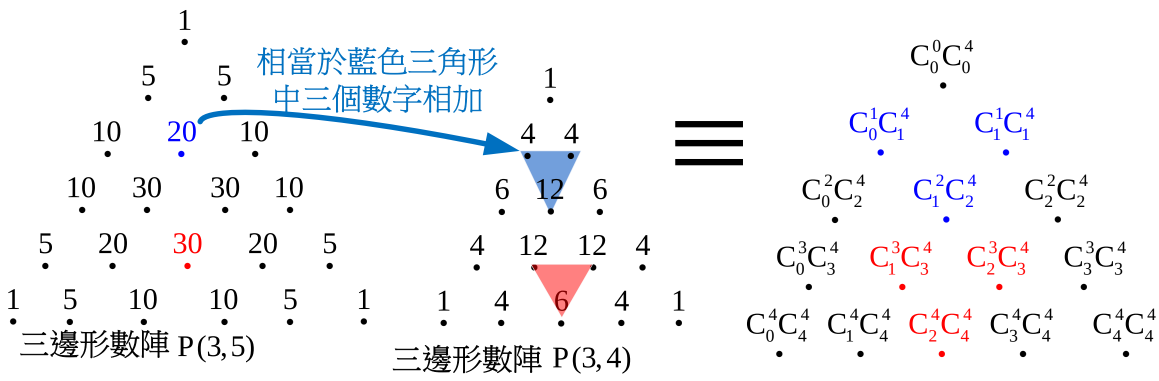


圖 11. 三邊數 $P(3,5)$ 由 $P(3,4)$建構而成

【說明】在$P(3,5)$中如圖 11

藍色係數$\binom{5}{3,1,1}$等於在$P(3,4)$中藍色三角形三個數字和

$$\binom{5}{3,1,1}=4+4+12=\binom{1}{0}\binom{4}{1}+\binom{1}{1}\binom{4}{1}+\binom{2}{1}\binom{4}{2}$$

紅色係數$\binom{5}{1,2,2}$等於在$P(3,4)$中紅色三角形三個數字和

$$\binom{5}{1,2,2}=12+12+6=\binom{3}{1}\binom{4}{3}+\binom{3}{2}\binom{4}{3}+\binom{4}{2}\binom{4}{4}$$

因此猜測出【**定理 3**】(**推廣的巴斯卡等式**)

$$\binom{n_2+n_3-1}{n_2-1}\binom{n-1}{n_2+n_3-1}+\binom{n_2+n_3-1}{n_2}\binom{n-1}{n_2+n_3-1}+\binom{n_2+n_3}{n_2}\binom{n-1}{n_2+n_3}=\binom{n}{n_1,n_2,n_3}$$

【**證明**】用巴斯卡等式

$$\begin{aligned}
&\binom{n_2+n_3-1}{n_2-1}\binom{n-1}{n_2+n_3-1}+\binom{n_2+n_3-1}{n_2}\binom{n-1}{n_2+n_3-1}+\binom{n_2+n_3}{n_2}\binom{n-1}{n_2+n_3}\\
&=\left[\binom{n_2+n_3-1}{n_2-1}+\binom{n_2+n_3-1}{n_2}\right]\binom{n-1}{n_2+n_3-1}+\binom{n_2+n_3}{n_2}\binom{n-1}{n_2+n_3}\\
&=\binom{n_2+n_3}{n_2}\binom{n-1}{n_2+n_3-1}+\binom{n_2+n_3}{n_2}\binom{n-1}{n_2+n_3}\\
&=\binom{n_2+n_3}{n_2}\left[\binom{n-1}{n_2+n_3-1}+\binom{n-1}{n_2+n_3}\right]\\
&=\binom{n_2+n_3}{n_2}\binom{n}{n_2+n_3}\\
&=\frac{(n_2+n_3)!}{n_2!\,(n_2+n_3-n_2)!}\cdot\frac{n!}{(n_2+n_3)!\,(n-n_2-n_3)!}\\
&=\frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!}
\end{aligned}$$

■

【**定理 4**】

$$\boldsymbol{3^n=\sum_{n\geq i_1\geq i_2\geq 0,\,i_1+i_2=n}^{n} C_{i_1}^{n}C_{i_2}^{i_1}}$$

【**證明**】

方法 1:令 $x_1=x_2=x_3=1$ 代入三項展開式,得$3^n=\sum\binom{n}{n_1,n_2,n_3}$。

即是3^n**值為三項展開式的所有係數和,也等於三邊形數陣$\boldsymbol{P(3,n)}$中所有點的數字和**如圖 13。

由**定理 3** 得到三項展開式係數表示法,如 $n=2$ 時如圖 12,因此

$$3^2=C_0^2C_0^0+C_1^2C_0^1+C_1^2C_1^1+C_2^2C_0^2+C_2^2C_1^2+C_2^2C_2^2$$

推廣至 n ,得3^n**值為三邊形數陣$\boldsymbol{P(3,n)}$中所有點的數字和**如圖 12,配合**定理 3** 有

$$3^n=C_0^nC_0^0+C_1^n(C_0^1+C_1^1)+C_2^n(C_0^2+C_1^2+C_2^2)+\cdots+C_n^n(C_0^n+C_1^n+\cdots+C_{n-1}^n+C_n^n)$$

可改寫成

$$\boldsymbol{3^n=\sum_{n\geq i_1\geq i_2\geq 0,\,i_1+i_2=n}^{n} C_{i_1}^{n}C_{i_2}^{i_1}}$$

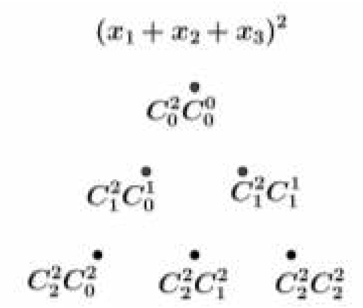


圖 12. 三邊形數陣$\boldsymbol{P}(\mathbf{3},\mathbf{2})$

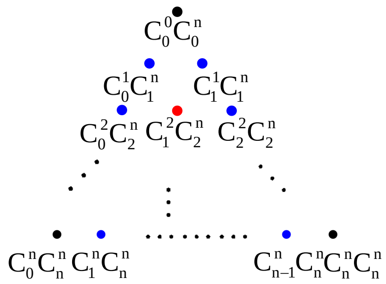


圖 13. 三邊形數陣$\boldsymbol{P}(\mathbf{3},\boldsymbol{n})$

方法 2：改考慮

$$\boldsymbol{C}_{i_1}^{n}\boldsymbol{C}_{i_2}^{i_1}=\frac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{i}_1)!\,\boldsymbol{i}_1!}\cdot\frac{\boldsymbol{i}_1!}{(\boldsymbol{i}_1-\boldsymbol{i}_2)!\,\boldsymbol{i}_2!}=\frac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{i}_1)!\,(\boldsymbol{i}_1-\boldsymbol{i}_2)!\,\boldsymbol{i}_2!}$$

取$n_1=\boldsymbol{n}-\boldsymbol{i}_1$，$n_2=\boldsymbol{i}_1-\boldsymbol{i}_2$，$n_3=\boldsymbol{i}_2$，則

$$\sum_{n\geq i_1\geq i_2\geq 0,\,i_1+i_2=n}^{n}\boldsymbol{C}_{i_1}^{n}\boldsymbol{C}_{i_2}^{i_1}=\sum\binom{n}{n_1,n_2,n_3}=3^n \qquad ■$$

【定理 5】 在正三角錐$\boldsymbol{G}''(\mathbf{3},\boldsymbol{n})$中，我們有下面三個結果：

(1)三個側面頂點對應展開項係數排列如圖 **14** 中紅色截面，且排列數和為$2^{n+1}-1$。

(2) $\boldsymbol{G}'(\mathbf{3},\boldsymbol{n})\subset\ \boldsymbol{G}''(\mathbf{3},\boldsymbol{n})$。

(3)平行任何一面且通過等分點的三角形截面$\boldsymbol{E}$，如圖 **14** 中三個綠色截面，其截面右到左依序用$\boldsymbol{E}_{x_1^s x_2^{s-t} x_3^1},\boldsymbol{E}_{x_1^s x_2^{s-t} x_3^2},\boldsymbol{E}_{x_1^s x_2^{s-t} x_3^3}$表示，其中 $\boldsymbol{s}\in\boldsymbol{N},\boldsymbol{t}\in\{\mathbf{1},\mathbf{2},\cdots,\boldsymbol{s}\}$，其中截面$\boldsymbol{E}_{x_1^s x_2^{s-t} x_3^1}$中，截面上所有係數之和為 $\sum_{i=0}^{n}(i+1)P_i=n\cdot 2^{n+1}+1$。

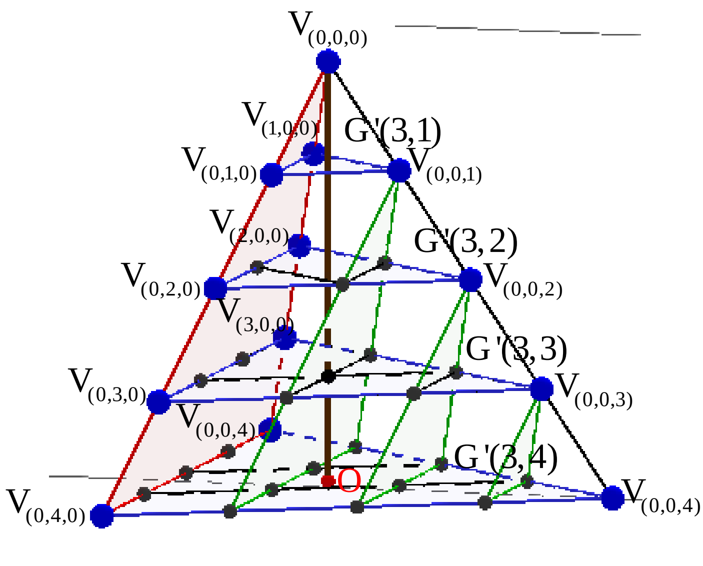


圖 14. 定理 5 的圖形

【證明】

(1)觀察三角錐三側面頂點如圖 14 中紅色截面由定義很易得證。

(2)如圖 14 中四個藍色截面由定義得是**三邊形簡圖** $\boldsymbol{G'(3,n)}$，即$G'(3,n) \subset G''(3,n)$。

(3)所指三角形截面就是$\boldsymbol{E}_{x_1^s x_2^{s-t} x_3^1}, \boldsymbol{E}_{x_1^s x_2^{s-t} x_3^2}, \boldsymbol{E}_{x_1^s x_2^{s-t} x_3^3}$在圖 14 中，分別通過頂點 $V_{(0,0,1)}, V_{(0,0,2)}, V_{(0,0,3)}$綠色截面，特別地三角截面$\boldsymbol{E}_{x_1^s x_2^{s-t} x_3^1}$上數字排列如下：

$$
\begin{array}{lccl}
i=0 & & 1 & \rightarrow 1\cdot 2^0 \\
i=1 & & 2 \quad 2 & \rightarrow 2\cdot 2^1 \\
i=2 & & 3 \quad 6 \quad 3 & \rightarrow 3\cdot 2^2 \\
i=3 & & 4 \quad 12 \quad 12 \quad 4 & \rightarrow 4\cdot 2^3 \\
\vdots & & \vdots & \\
i=n & (n+1)C_0^n & (n+1)C_1^n \cdots (n+1)C_n^n & \rightarrow (n+1)\cdot 2^n
\end{array}
$$

令n列所有係數之和 $S=\sum_{i=0}^{n}(i+1)P_i$ ，則

$$2S-S=(n+1)2^{n+1}-(2^0+2^1+\cdots+2^n)=(n+1)2^{n+1}-(2^{n+1}-1)$$

因此 $\sum_{i=0}^{n}(i+1)P_i = n\cdot 2^{n+1}+1$ 。 ■

【性質 3】在三角錐中，三角形截面內頂點的係數均可由巴斯卡三角形遵循規律而得。

【說明】我們舉圖 15 的紫色與綠色二個三角形截面來說明。

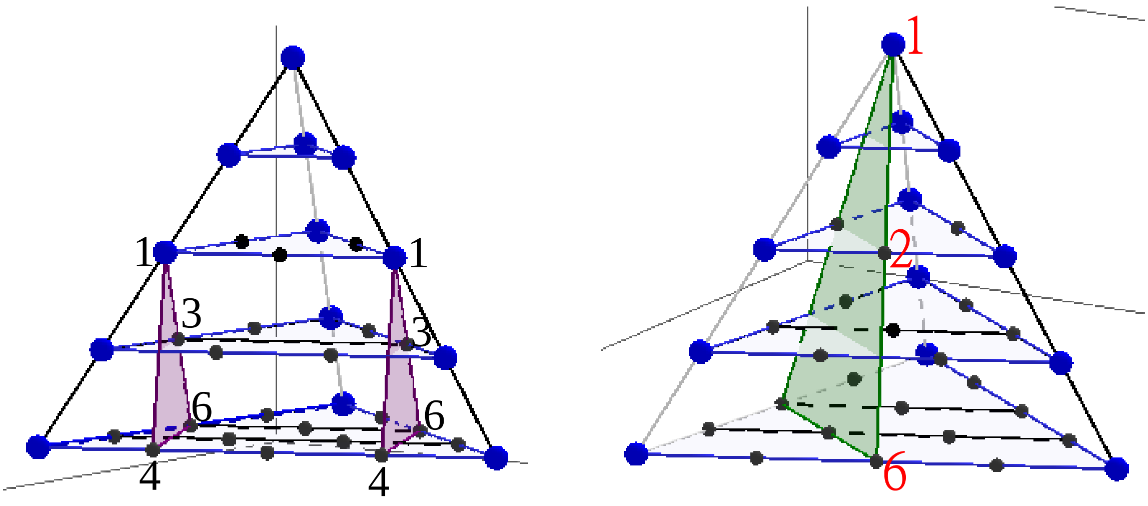


圖 15. 取紫色截面與綠色截面說明

【紫色截面上頂點係數的配置說明】

取巴斯卡三角形中紫色數字 如下

n = 0	1
n = 1	1 1
n = 2	1 2 1
n = 3	1 3 3 1
n = 4	1 4 6 4 1
n = 5	1 5 10 10 5 1
n = 6	1 6 15 20 15 6 1
⋮	⋮

					紫色截面內的頂點係數
n = 0	1		1		1
n = 1	4 3		1 1		4 3
n = 2	15 10 6	逐項乘上	1 2 1	等於	15 20 6
n = 3	35 35 20 10		1 3 3 1		35 105 60 10
⋮	⋮		⋮		⋮

【藍色截面上頂點係數的配置說明】

取巴斯卡三角形

					藍色截面內的頂點係數
n = 0	1		1		1
n = 1	1 1	逐項	2		2 2
n = 2	1 2 1	乘上	6	等於	6 12 6
n = 3	1 3 3 1		20		20 60 60 20
⋮	⋮		⋮		⋮

上述方法雖不包含全部，但所有截痕系數皆可由巴斯卡三角依循特定規律而得。

【性質 4】在三角錐中，若 L 為過二頂點 $V_{(n_1,n_2,n_3)}$ 與 $V_{(m_1,m_2,m_3)}$ 的直線，則當 n_1-m_1， n_2-m_2, n_3-m_3 同號時，L為射線。

【證明】在三角錐中，若 L 為過二頂點 $V_{(n_1,n_2,n_3)}$ 與 $V_{(m_1,m_2,m_3)}$ 的直線，則存在s>0 使得 $(n_1-m_1,n_2-m_2,n_3-m_3)=s$，利用等分點概念可得到直線 L 上頂點形如

$$V_{\left(n_1+\frac{n_1-m_1}{s}t,\ n_2+\frac{n_2-m_2}{s}t,\ n_3+\frac{n_3-m_3}{s}t\right)}\text{，其中 } t\in Z$$

因為每一個頂點都對應三項式定理的展開項，所以

$$n_1+\frac{n_1-m_1}{s}t\geq 0,\ n_2+\frac{n_2-m_2}{s}t\ \geq 0,\ n_3+\frac{n_3-m_3}{s}t\geq 0$$

因此當 n_1-m_1， n_2-m_2,n_3-m_3 同號時，L為射線。

四、建構多項定理的幾何表現

（一）多項定理展開式→k邊形數陣

k邊形數陣建構方式如三邊形數陣，只是將相鄰兩兩方向的夾角改為$\frac{360^\circ}{k}$，為了符合左右對稱性，形狀是正 k 邊形的呈現，並且每一點都賦予多項式係數，如此排成的數陣稱為k邊形數陣，記為$P(k,n)$，如圖 16 中$P(4,2)$與$P(5,2)$。

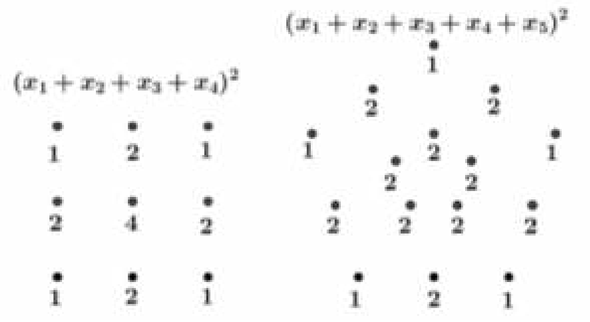


圖 16. 四邊形數陣$P(4,2)$　五邊形數陣$P(5,2)$

【性質 5】

(1)設k為質數，則$P(k,n)$是左右對稱的，且每個點對應唯一展開項。

例如：$6x_1x_2x_3 \rightarrow \bullet$ 再附上 6 ；$120x_1x_2x_4^2x_5^3 \rightarrow \bullet$ 再附上 120。

(2)設k為合數，則$P(k,n)$是左右對稱的，且部分點會對應數個展開項(這種點稱為重疊點)。

【說明】 對$(x_1+x_2+x_3+x_4)^2$展開，並且將展開看作成四個方向，相鄰兩兩方向的夾角為90°，觀察此**四邊形數陣**如圖 17，中心點會對應 2 個展開項為 $2x_1x_3$ 與 $2x_2x_4$ ，因此**四邊形數陣**$P(4,2)$中，中心點的係數值要兩展開項相加為 4，稱此點為重疊點。

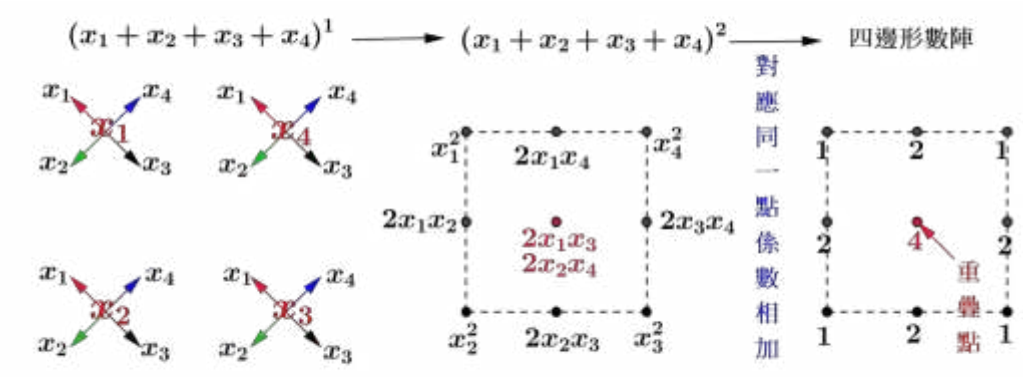


圖 17. $(x_1+x_2+x_3+x_4)^2$展開的四邊形數陣中重疊點圖示 ■

（二）k邊形數陣→k邊形疊圖

k邊形疊圖建構方式如三邊形疊圖，但相鄰兩兩方向的夾角改為$\frac{360°}{k}$的k個方向，有一個大正k邊形內有數個小正k邊形，此圖形除了呈現正k邊形外，還有頂點，記為 $V_{(n_1,n_2,\cdots,n_k)}$ ，每個頂點對應 k 項定理展開項為 $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdot\cdots\cdot x_k^{n_k}$（如：頂點$V_{(1,0,2,3,5)}$表示對應$(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)^{1+0+2+3+5}$ 中展開項為 $x_1^1x_2^0x_3^2x_4^3x_5^5$ **），此表現稱為k邊形疊圖，記為$G(k,n)$，以五項定理$(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)^2$數陣、疊圖為例如圖 18。**

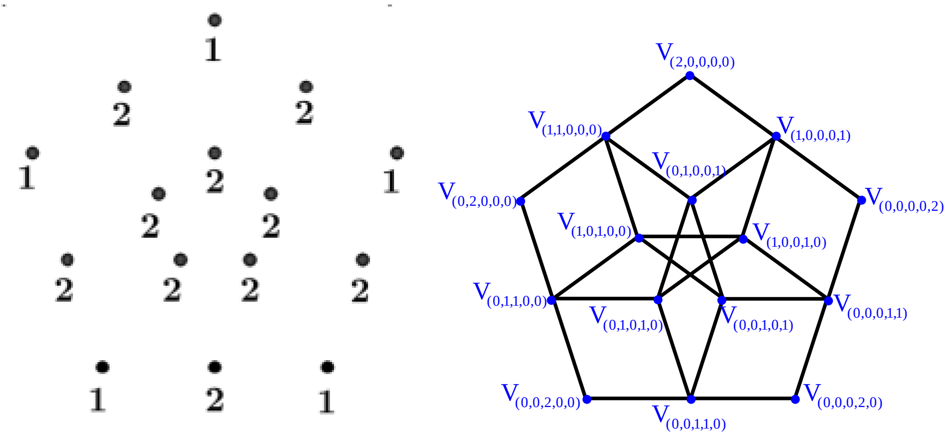
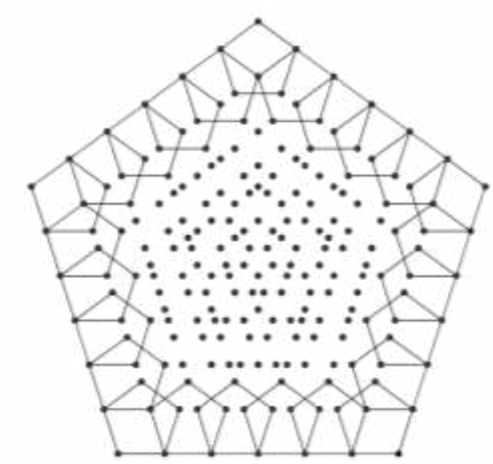


圖 **18.** 五邊形數陣 $P(5,2)$ → 五邊形疊圖 $G(5,2)$.

【建構五邊形疊圖】現在就來從建構**五邊形疊圖**$G(5,n)$就是先給定大五邊形，由外至內分為五層，在最外層將每邊分割 n 個等分點黑色小正五邊形，而依序內縮一個等分長，放入等分長為邊長的小正五邊形，由外至內是橘色、綠色、藍色與紅色的小正五邊形，並將小正五邊形頂點(含邊上及內點) $V_{(n_1,n_2,n_3,n_4,n_5)}$ 找到，以建構**五邊形疊圖**$G(5,6)$為例如圖 19-1~19-5，同理就可建構出**十一邊形疊圖**$G(11,3)$ 如圖 20，如此類推即可建構出所有的**五邊形疊圖**$G(k,n)$。



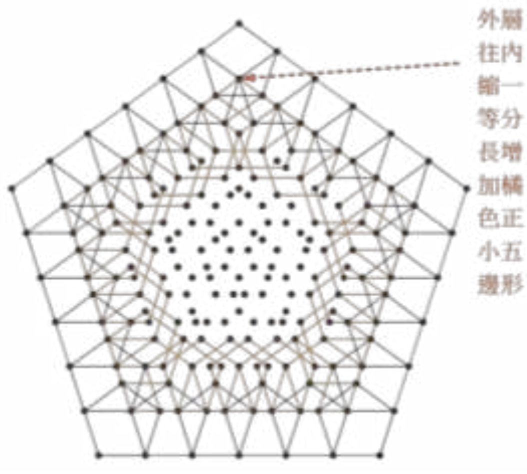
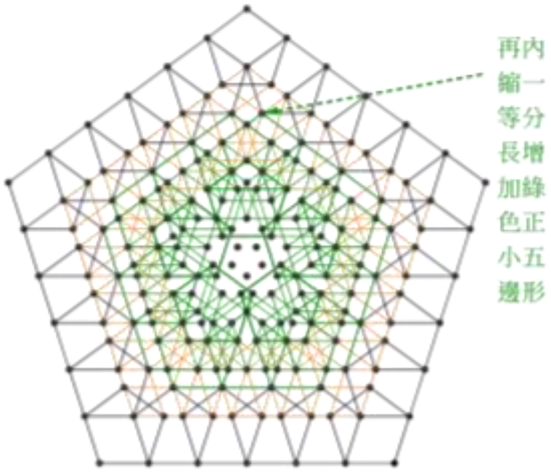


圖 **19-1.**建構五邊形疊圖$G(5,6)$由外而內第一層 圖 **19-2.**建構五邊形疊圖$G(5,6)$再增加第二層



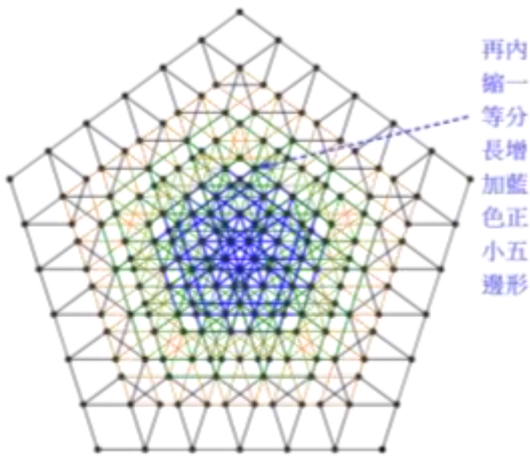
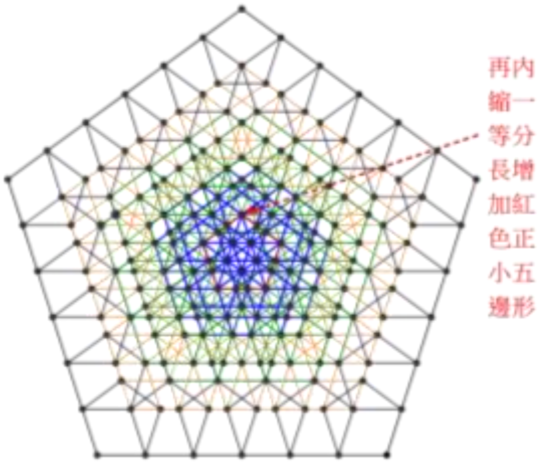


圖 **19-3.** 建構五邊形疊圖$G(5,6)$再增加第三層 圖 **19-4.**建構五邊形疊圖$G(5,6)$再增加第四層



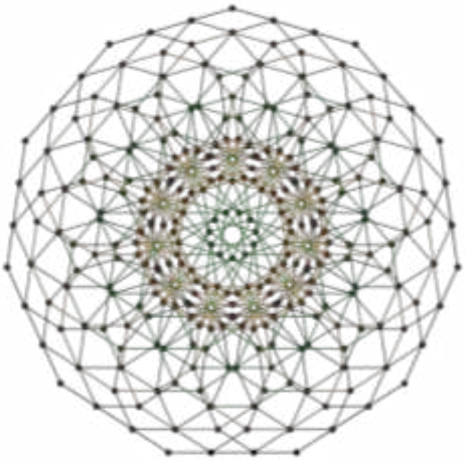


圖 **19-5.** 建構五邊形疊圖$G(5,6)$ 圖 **20.** 作法同圖 **18** 就可建構出五邊形疊圖 $G(11,3)$

【性質 6】k 邊形疊圖$G(k,n)$形狀是正大 k 邊形，並且其內有H_{n-1}^{k}個小正k邊形組成，同時小正k邊形個數等於$G(k,n-1)$的頂點數(含邊上及內點)。

【說明】*k*邊形疊圖建構方式可推至有 H_n^{k} 個頂點 $V_{(n_1,n_2,\ldots,n_k)}$，且內部有 H_{n-1}^{k} 個小正 k 邊形，使得所有頂點(含邊上及內點)一一對應，說明表 1。

表 1. **性質 6** 的說明

n	$G(k,n)$頂點數	$G(k,n)$內小正k邊形個數	說明
1	H_1^k	1	$G(k,n)$內小正k邊形個數相當等於$G(k,n-1)$的頂點數。
2	H_2^k	H_1^k	
3	H_3^k	H_2^k	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$n-1$	H_{n-1}^k	H_{n-2}^k	
n	H_n^k	H_{n-1}^k	

（三）k邊形疊圖→k邊形簡圖

k邊形簡圖建構方式延續等分點概念，考慮$(x_1+x_2+\cdots+x_{k-1}+x_k)^n$之中的兩個頂點$V_{(s_1,s_2,\cdots,s_k)}$與$V_{(t_1,t_2,\cdots,t_k)}$，因為兩點可得一線所以我們利用【等分點法】求得$V_{(s_1,s_2,\cdots,s_k)}$與$V_{(t_1,t_2,\cdots,t_k)}$兩頂點連線段上的等分點，注意到兩頂點必存在$d=(s_1-t_1,s_2-t_2,\cdots,s_k-t_k)$，再將兩頂點的連線段$d$等分，則可得$d-1$個等分點，而$d-1$個等分點即為所求，用【等分點法】可得到所有$k$邊形疊圖中頂點所對應$k$項定理展開項，因為利用【等分點法】使疊圖簡化了，所以我們稱此圖為 k 邊形簡圖，記為$G'(k,n)$。

k邊形簡圖的特性：可快速找到頂點與對應的展開項(含係數)，圖 21→圖 22 為簡化$G(5,3)$。

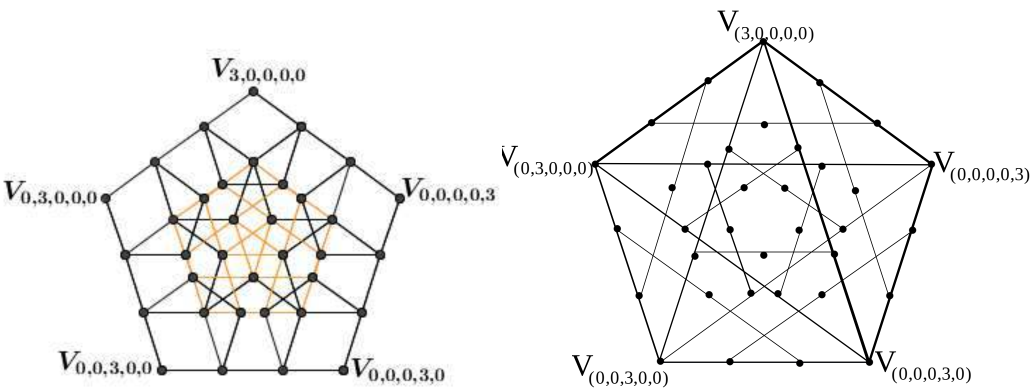


圖 21. 五邊形疊圖 $G(5,3)$到五邊形簡圖 $G'(5,3)$

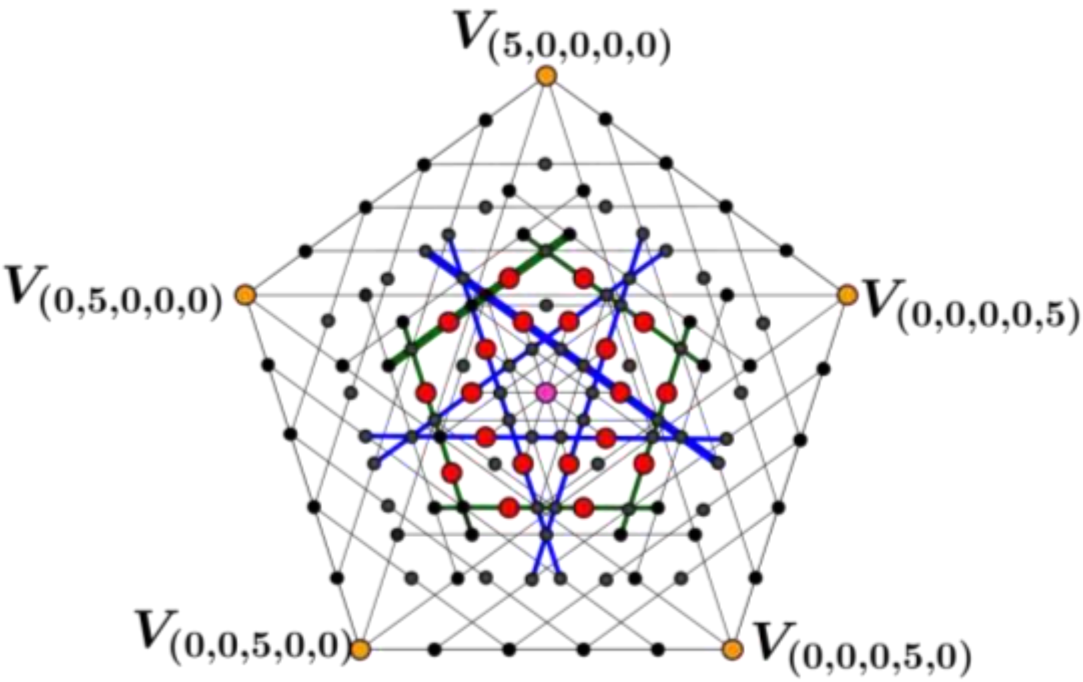


圖 22. 五邊形簡圖 $G'(5,5)$

【性質 7】 $\boldsymbol{k}$**邊形簡圖中頂點** $\boldsymbol{V_{(n_1,n_2,\cdots,n_k)}}$ **對應** $\boldsymbol{k}$**項定理的展開項**$x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdot\cdots\cdot x_k^{n_k}$。

【說明】配合**求頂點法**就可以完成 $\boldsymbol{k}$ **邊形簡圖** $G'(k,n)$，同時可找到 h 變數項的頂點位置 $(1\le h\le k)$，說明如表 2。

表 2. 簡圖$\boldsymbol{G'(k,n)}$中求頂點法說明

變數項	說　明	$\boldsymbol{h}$變數項的項數 $\boldsymbol{N_k(n,h)}$
單變數項	大正k邊形的頂點	$n=C_1^kH_{n-1}^1$
二變數項	大正k邊形的邊與對角線上的n等分點	共有邊與對角線個數×等分點個數等於$C_2^kH_{n-2}^2$項。
三變數項	任三個頂點的$G(3,n)$的內點，也發現三變數項產生於內縮一個等分長正k邊形的內點。	共有$G(3,n)$個數×每個$G(3,n)$的內點數等於$C_3^kH_{n-3}^3$項。
四變數項	四變數項產生於內縮二個等分長圖形的內點。	共有$G(4,n)$個數×每個$G(4,n)$的內點數等於$C_4^kH_{n-4}^4$項。
五變數項	五變數項產生於內縮三個等分長圖形的內點。	共有$G(5,n)$個數×每個$G(5,n)$的內點數等於$C_5^kH_{n-5}^5$項。
⋮	⋮	⋮
$\boldsymbol{k}$**變數項**	k變數項產生於內縮$k-2$個等分長圖形的內點。	共有$G(k,n)$個數×每個$G(k,n)$的內點數等於$C_k^kH_{n-k}^{\mathrm{k}}$項。

現在要證明 $\boldsymbol{k}$**項定理中不同類項**$\boldsymbol{H_n^k=C_n^{k+n-1}}$**等於變數項項數** $\boldsymbol{N_k(n,h)}$**總和**，即

$C_1^kH_{n-1}^2+C_2^kH_{n-2}^2+C_3^kH_{n-3}^2+\cdots+C_k^kH_{n-k}^2=C_1^kC_{n-1}^{n-1}+C_2^kC_{n-2}^{n-1}+\cdots+C_k^kC_{n-k}^{n-1}=C_n^{k+n-1}$ ■

【定理 6】$\boldsymbol{C_1^kH_{n-1}^2}+\cdots+\boldsymbol{C_k^kH_{n-k}^2}=C_1^kC_{n-1}^{n-1}+\cdots+C_k^kC_{n-k}^{n-1}=C_n^{k+n-1}=\boldsymbol{H_n^k}$

【證明】

因為$(x+y)^k(x+y)^{n-1}$的展開中$x^{k-1}y^n$的係數為$\left(C_1^kC_{n-1}^{n-1}+\cdots+C_k^kC_{n-k}^{n-1}\right)$

而$(x+y)^{k+n-1}$的展開中，$x^{k-1}y^n$的係數為C_n^{k+n-1}，於是可發現

$$C_1^kC_{n-1}^{n-1}+\cdots+C_k^kC_{n-k}^{n-1}=C_n^{k+n-1}$$ ■

（四）k邊形簡圖→正 k角錐

底下就來建構k項定理在三維空間的幾何表現。

正k角錐建構方式如三角錐，因為k項定理展開項共有k個變數，所以會有k個側面，並逐一放入簡圖直到底面為k邊形簡圖$G'(k,n)$就構成了k角錐如圖 23，為了方便此圖形把每一項用頂點表示，記為$V_{(n_1,n_2,\cdots,n_k)}$，且對應 k 項定理展開項為 $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdot\cdots\cdot x_k^{n_k}$，再令圖中最左邊之線段為$x_1$之變換，並依序逆時針為$x_2,x_3,x_4,x_5$的變換，即紫為$x_1$之變換，綠、橘、藍、虛依序為$x_2,x_3,x_4,x_5$的變換，合起來成為$k$項定理在三維空間的表現，簡稱$k$角錐，記為 $G''(k,n)$。

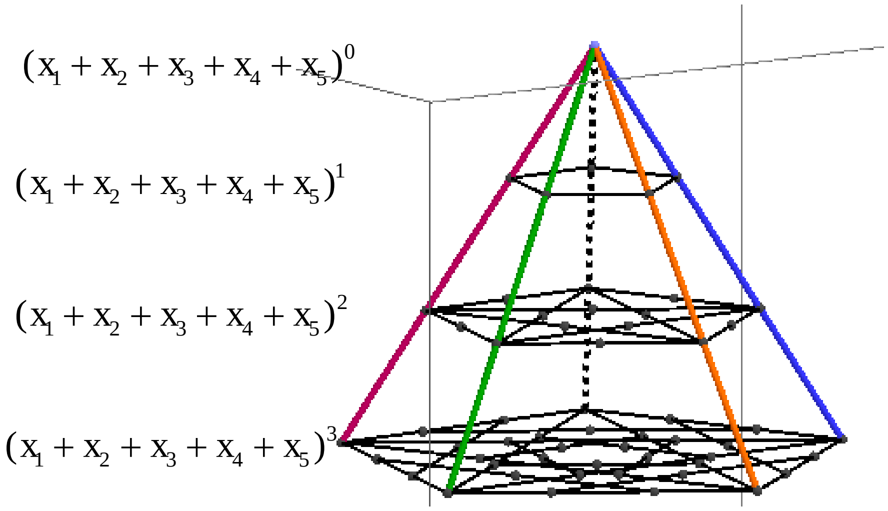


圖 23. 正五角錐 $G''(5,3)$

【性質 8】 k角錐內頂點所成的線段與截面可找到 k項定理展開式。

【說明】如圖 23 中黃色與紅色**線段**分別對應 k項定理展開式為，並且藍色與紫色**截面**分別對應 k項定理展開式為。

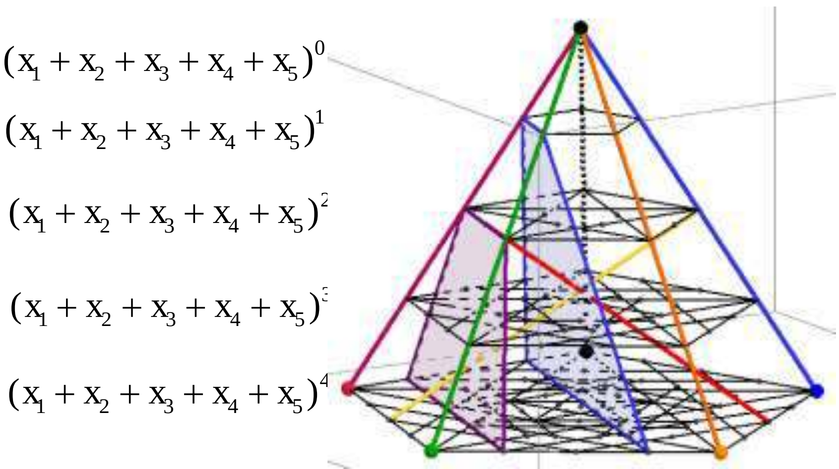


圖 24. 黃色與紅色線段、藍色與紫色截面可找到 k項定理展開式

黃色線段：$x_1^{2-i}x_2^{2-i}x_4^{i}$，其中$i=0,1,2$

紅色線段：$x_1^{1-i}x_2^{1-i}x_3^{2i}x_4^{2i}$，其中$i=0,1$

藍色截面：$(x_1+x_2)(x_3+x_5)^i$，其中$i=0,1,\cdots,n-1$

紫色截面：$(x_1+x_2)^{2+i}(x_3+x_5)^i$，其中$i=0,1,\cdots,\frac{n-2}{2}$

（五）多項定理的性質

我們可從建構幾何表現推出一些性質，底下是我們的結果。

【定理 7】（推廣巴斯卡等式）

$$
\begin{aligned}
&\binom{n}{n_1,n_2,n_3,\cdots,n_k}\\
&=\binom{n_2+n_3-1}{n_2-1}\binom{n_2+n_3+n_4-1}{n_2+n_3-1}\cdots\binom{n_2+n_3+\cdots+n_k-1}{n_2+n_3+\cdots+n_{k-1}-1}\binom{n-1}{n_2+n_3+\cdots+n_k-1}\\
&\quad+\binom{n_2+n_3-1}{n_2}\binom{n_2+n_3+n_4-1}{n_2+n_3-1}\cdots\binom{n_2+n_3+\cdots+n_k-1}{n_2+n_3+\cdots+n_{k-1}-1}\binom{n-1}{n_2+n_3+\cdots+n_k-1}\\
&\quad+\cdots+\binom{n_2+n_3}{n_2}\binom{n_2+n_3+n_4}{n_2+n_3}\cdots\binom{n_2+n_3+\cdots+n_k-1}{n_2+n_3+\cdots+n_{k-1}}\binom{n-1}{n_2+n_3+\cdots+n_k-1}\\
&\quad+\binom{n_2+n_3}{n_2}\binom{n_2+n_3+n_4}{n_2+n_3}\cdots\binom{n_2+n_3+\cdots+n_k}{n_2+n_3+\cdots+n_{k-1}}\binom{n-1}{n_2+n_3+\cdots+n_k}
\end{aligned}
$$

【證明】我們利用數學歸納法證明，當 $k=2$ 時就是巴斯卡等式，顯然成立，並且從**定理 3** 得當 $k=3$ 時亦成立，現在假設 $k-1$ 項式等式成立，則以下證明 k 項式等式也成立。

$$
\begin{aligned}
&\binom{n_2+n_3-1}{n_2-1}\binom{n_2+n_3+n_4-1}{n_2+n_3-1}\cdots\binom{n_2+n_3+\cdots+n_k-1}{n_2+n_3+\cdots+n_{k-1}-1}\binom{n-1}{n_2+n_3+\cdots+n_k-1}\\
&\quad+\binom{n_2+n_3-1}{n_2}\binom{n_2+n_3+n_4-1}{n_2+n_3-1}\cdots\binom{n_2+n_3+\cdots+n_k-1}{n_2+n_3+\cdots+n_{k-1}-1}\binom{n-1}{n_2+n_3+\cdots+n_k-1}\\
&\quad+\cdots+\binom{n_2+n_3}{n_2}\binom{n_2+n_3+n_4}{n_2+n_3}\cdots\binom{n_2+n_3+\cdots+n_k-1}{n_2+n_3+\cdots+n_{k-1}}\binom{n-1}{n_2+n_3+\cdots+n_k-1}\\
&\quad+\binom{n_2+n_3}{n_2}\binom{n_2+n_3+n_4}{n_2+n_3}\cdots\binom{n_2+n_3+\cdots+n_k}{n_2+n_3+\cdots+n_{k-1}}\binom{n-1}{n_2+n_3+\cdots+n_k}
\end{aligned}
$$

$$
= \binom{n-1}{n_2+n_3+\cdots+n_k-1} \cdot \underbrace{\left(\begin{array}{l} \binom{n_2+n_3-1}{n_2-1}\cdots\binom{n-1}{n_2+n_3+\cdots+n_k-1} \\ +\binom{n_2+n_3-1}{n_2}\cdots\binom{n-1}{n_2+n_3+\cdots+n_k-1} \\ +\cdots+\binom{n_2+n_3}{n_2}\cdots\binom{n-1}{n_2+n_3+\cdots+n_k-1} \end{array} \right)}_{\text{利用}k-1\text{ 項式等式}}
$$

$$
+\binom{n_2+n_3}{n_2}\binom{n_2+n_3+n_4}{n_2+n_3}\cdots\binom{n_2+n_3+\cdots+n_k}{n_2+n_3+\cdots+n_{k-1}}\binom{n-1}{n_2+n_3+\cdots+n_k}
$$

$$
=\binom{n_2+n_3}{n_2}\cdots\binom{n_2+n_3+\cdots+n_k}{n_2+n_3+\cdots+n_{k-1}}\left[\binom{n-1}{n_2+n_3+\cdots+n_k-1}+\binom{n-1}{n_2+n_3+\cdots+n_k}\right]
$$

$$
=\binom{n_2+n_3}{n_2}\cdots\binom{n}{n_2+n_3+\cdots+n_k}
$$

$$
=\frac{(n_2+n_3)!}{n_2!\,n_3!}\cdot\cdots\cdot\frac{n!}{(n_2+n_3+\cdots+n_k)!\,n_1!}=\frac{n!}{n_1!\cdots\cdots n_k!}
$$

【定理 8】

$$
\boldsymbol{k^n = \sum_{n\ge i_1\ge\cdots\ge i_{k-1}\ge 0,\ i_1+\cdots+i_{k-1}=n}^{n} C^{n}_{i_1}C^{i_1}_{i_2}C^{i_2}_{i_3}\cdot\cdots\cdot C^{i_{k-2}}_{i_{k-1}}}\ \text{，其中}\ \boldsymbol{k\ge 2}
$$

【證明】

方法 1：令 $x_1=x_2=\cdots=x_k=1$ 代入k項展開式，得$k^n=\sum\binom{n}{n_1,\cdots,n_k}$。

現在要證明第二個等式，從***k* 項式定理**的***k* 邊形數陣**建構可知，***k* 邊形數陣**所有係數和即是k^n如圖 25 的例子，本文可用**有序性組合數形式表示所有係數**如圖 26 的例子。

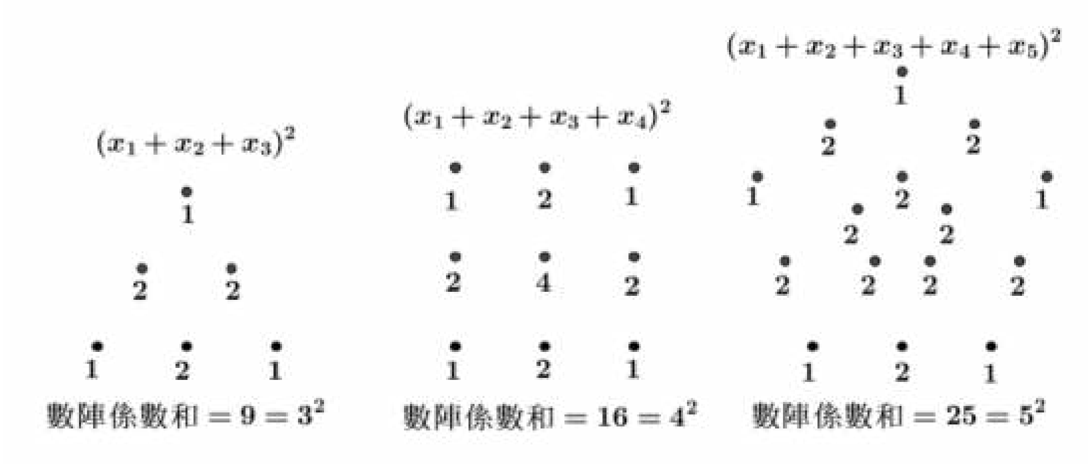


圖 25. 3,4,5 邊形數陣所有係數和

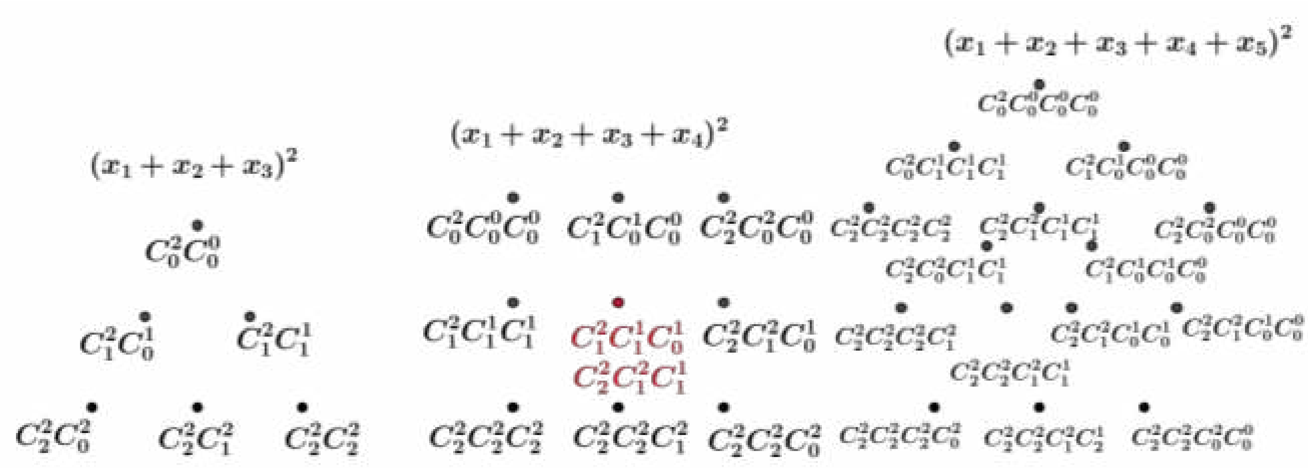


圖 26. 數陣$P(3,n)$、$P(4,n)$、$P(5,n)$ 有序性組合數形式表示所有係數

因此有序性組合數和形式可寫成

$$k^n=\sum_{n\geq i_1\geq\cdots\geq i_{k-1}\geq 0,\ i_1+\cdots+i_{k-1}=n}^{n} C_{i_1}^{n}C_{i_2}^{i_1}C_{i_3}^{i_2}\cdot\cdots\cdot C_{i_{k-1}}^{i_{k-2}}\text{，其中}k\geq 2$$

方法 2：改考慮

$$C_{i_1}^{n}\cdot\cdots\cdot C_{i_{k-1}}^{i_{k-2}}=\frac{n!}{(n-i_1)!\,i_1!}\cdot\cdots\cdot\frac{i_{k-2}!}{(i_{k-2}-i_{k-1})!\,i_{k-1}!}=\frac{n!}{(n-i_1)!\cdot\cdots\cdot(i_j-i_{j+1})!\cdot\cdots\cdot i_{k-1}!}$$

其中$1\leq j\leq k-2$

取$n_1=n-i_1$，$n_2=i_1-i_2$，…，$n_k=i_{k-2}-i_{k-1}$，$n_k=i_{k-1}$，則

$$\sum_{n\geq i_1\geq\cdots\geq i_{k-1}\geq 0,\ i_1+\cdots+i_{k-1}=n}^{n} C_{i_1}^{n}C_{i_2}^{i_1}C_{i_3}^{i_2}\cdot\cdots\cdot C_{i_{k-1}}^{i_{k-2}}=\sum\binom{n}{n_1,\cdots,n_k}=k^n \qquad \blacksquare$$

【定理 9】(多項展開式係數性質)

(1)當$n<k$時

$$k^n=\sum_{i=1}^{k}C_{k-i}^{k}(k-i)^n\,(-1)^{(i+1)}$$

(2)當$n\geq k$時

$$k^n\geq\sum_{i=1}^{k}C_{k-i}^{k}(k-i)^n\,(-1)^{(i+1)}$$

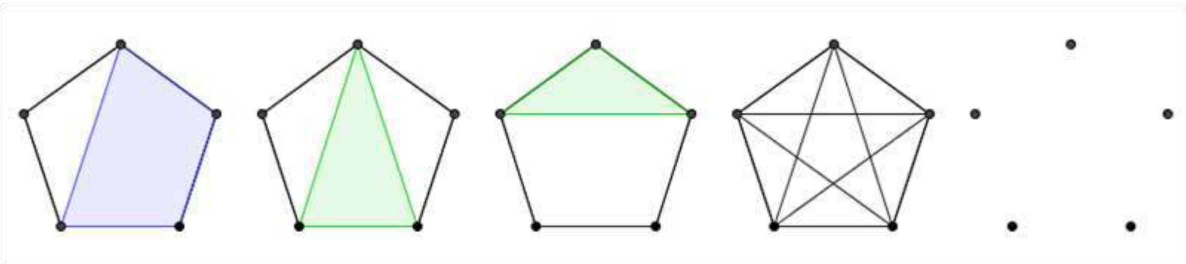
【證明】由**定理 8** 得 $k^n = \boldsymbol{k}$ **邊形數陣所有係數和**，也就是考慮每個 h 變數的係數和。

(1)當 $n < k$時，以k 項式定理展開項不會有k變數項，所以k^n是在$\boldsymbol{h \le k-1}$下 h 變數項的係數和，另外幾何建構得k變數項會在k 邊形產生，因此利用**排容原理**得

$$\boldsymbol{k^n} = (\boldsymbol{k-1}\text{變數項係數和}) - (\boldsymbol{k-2}\text{變數項係數和}) + \cdots + (-\boldsymbol{1})^{(\boldsymbol{k+1})}(\boldsymbol{k-k}\text{變數項係數和})$$

現在來求$\boldsymbol{5^4} = (\boldsymbol{4}\text{變數項係數和}) - \cdots + (\boldsymbol{0}\text{變數項係數和})$

$$\boldsymbol{5^4} = C_4^5 4^4 - C_3^5 3^4 + C_2^5 2^4 - C_1^5 1^4 + C_0^5 0^4 = 625$$



四變數項有 C_4^5 個　三變數項有 C_3^5 個　二變數項有 C_2^5 個　單變數項有 C_1^5 個

因此

$$\boldsymbol{k^n} = \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{C_{k-i}^{k}(k-i)^n(-1)^{(i+1)}}$$

(2)當$n \ge k$時，k 項式定理展開項會多了有 k變數項，因此

$$\boldsymbol{k^n} \ge \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{C_{k-i}^{k}(k-i)^n(-1)^{(i+1)}}$$

■

（六）項點分析

k項式定理的疊圖$G(k,n)$各頂點分布微妙的呈現了對稱關係，為了更清楚分布程度於是用**圓來切割分層觀察**各頂點的分布情形，**定義$\boldsymbol{k}$邊形疊圖$\boldsymbol{G(k,n)}$中，只取大$\boldsymbol{k}$邊形依序作外接圓如紅色圓、相鄰二頂點做中點作圓如藍色圓，接著間隔不相鄰二頂點做中點作圓如綠色圓是間隔一個頂點與紫色圓是間隔二個頂點…等等直到無法畫圓如圖 27，同時由外而內的分成$\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$層的圓環($\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$是上高斯符號)，如圖 27 五邊形疊圖$\boldsymbol{G(5,n)}$作圓分割可分成三層(紅色圓至藍色圓區域為第 1 層的圓環、藍色圓至綠色圓區域為第 2 層的圓環且綠色圓內為第 3 層的圓環)，依同樣方法疊圖$\boldsymbol{G(7,n)}$作圓分割可分成四層為例如圖 27。**

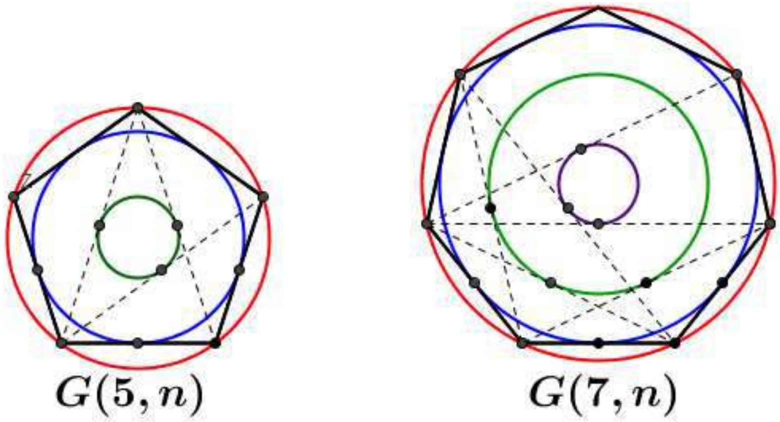


圖 27. 五邊形疊圖$\boldsymbol{G(5,n)}$作圓分割分成三層與七邊形疊圖$\boldsymbol{G(7,n)}$作圓分割分成四層

【推論】在$\boldsymbol{k}$邊形疊圖$\boldsymbol{G(k,n)}$作圓分割成層，得到當第$\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil$層的頂點分布最稠密。

【證明】透過 Visual Basic 電腦繪圖得到當n足夠大時，第$\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil$層的$G(k,n)$中頂點分布最稠密，如圖 28 中 $G(11,3)$~$G(11,6)$的頂點分布，可看到當n越大時，最內圈頂點分布是最稠密。■

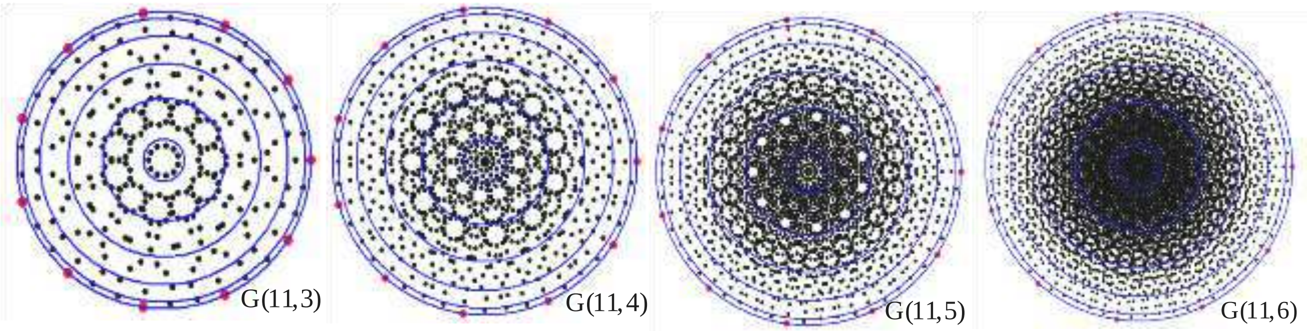


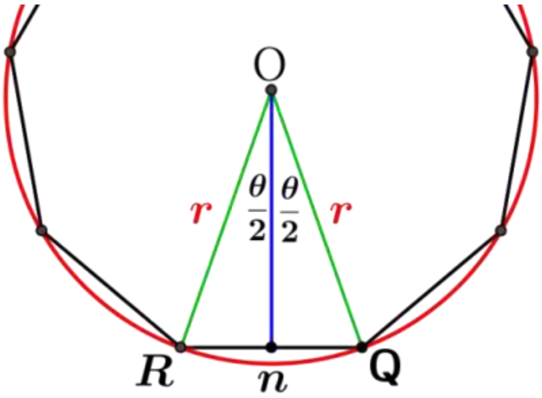
圖 28. $\boldsymbol{G(11,3)}$~$\boldsymbol{G(11,6)}$的頂點分布

【性質 7】($\boldsymbol{k}$邊形疊圖的頂點向量式)

在坐標平面上，O為原點，設$V_{n_1,n_2,n_3,\cdots,n_k}(x,y)$為$\boldsymbol{k}$邊形疊圖$G(k,n)$的頂點坐標，若 r 為疊圖$G(k,n)$中大正$\boldsymbol{k}$邊形的外接圓半徑，則

存在 k 個方向的單位向量 $\overrightarrow{V_1},\overrightarrow{V_2},\cdots,\overrightarrow{V_k}$ ，滿足 $\overrightarrow{OV_{n_1,n_2,n_3,\cdots,n_k}}=n_1\overrightarrow{V_1}+n_2\overrightarrow{V_2}+\cdots+n_k\overrightarrow{V_k}$ ，且

$$V_{n_1,n_2,n_3,\cdots,n_k}(x,y)=\left(\frac{r}{n}\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\cos\frac{(2k-2)\pi}{k},\frac{r}{n}\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\sin\frac{(2k-2)\pi}{k}\right)\text{其中 } r=\frac{n}{2}\csc\frac{\pi}{k}$$



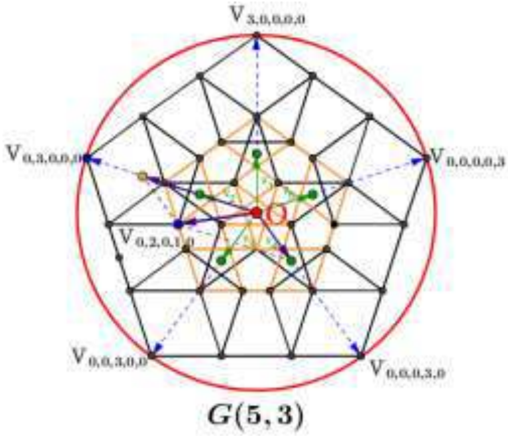


圖 29.求外接圓半徑　　圖 30. 五邊形疊圖 G(5,3) 中五個單位向量

【**說明**】如圖 29 中紅色的圓半徑為 r，且不難推導出 $\mathrm{r}=\frac{n}{2}csc\frac{\pi}{k}$ 。

在坐標平面上，O為原點，取 k 個向量 $\overrightarrow{OV_{n,0,0,\cdots,0}}$ ， … ， $\overrightarrow{O\,V_{0,0,0,\cdots,n}}$的**單位向量**為$\overrightarrow{V_1},\overrightarrow{V_2},\cdots,\overrightarrow{V_k}$，並且設 k **個單位向量**坐標為$\overrightarrow{V_1}=\left(\frac{\mathrm{r}}{n}\cos 0,\frac{\mathrm{r}}{n}\sin 0\right),\cdots,\overrightarrow{V_k}=\left(\frac{\mathrm{r}}{n}\cos\frac{(2k-2)\pi}{k},\frac{\mathrm{r}}{n}\sin\frac{(2k-2)\pi}{k}\right)$。

五邊形疊圖$G(5,3)$其五個單位向量 $\overrightarrow{V_1}=\left(\frac{\mathrm{r}}{3}\cos 0,\frac{\mathrm{r}}{3}\sin 0\right),\cdots,\overrightarrow{V_5}=\left(\frac{\mathrm{r}}{3}\cos\frac{8\pi}{5},\frac{\mathrm{r}}{3}\sin\frac{8\pi}{5}\right)$，

如上圖 30 中綠色向量。

【**例 1**】$(x_1+\cdots+x_5)^n$之中的x_2^3

x_2^3為$G(5,3)$的頂點$V_{0,3,0,0,0}$，因此換成向量就相當於是取$\alpha_1=\alpha_3=\alpha_4=\alpha_5=0,\alpha_2=3$，

則 $\overrightarrow{OV_{0,3,0,0,0}}=3\overrightarrow{V_2}=\left(\frac{3r_1}{3}\cos\frac{2\pi}{5},\frac{3r_1}{3}\sin\frac{2\pi}{5}\right)=\left(r_1\cos\frac{2\pi}{5},r_1\sin\frac{2\pi}{5}\right)$ **如圖 30**。

【**例 2**】$(x_1+\cdots+x_5)^n$之中的$x_2^2x_4$

$x_2^2x_4$為$G(5,3)$的頂點$V_{0,2,0,1,0}$，因此換成向量就相當於是取$\alpha_1=\alpha_3=\alpha_5=0,\alpha_2=2,$

$\alpha_4=1$，則 $\overrightarrow{OV_{0,2,0,1,0}}=2\overrightarrow{V_2}+\overrightarrow{V_4}=\left(\frac{2r_1}{3}\cos\frac{2\pi}{5},\frac{2r_1}{3}\sin\frac{2\pi}{5}\right)+\left(\frac{r_1}{3}\cos\frac{6\pi}{\mathrm{k}},\frac{r_1}{3}\sin\frac{6\pi}{\mathrm{k}}\right)=$

$\left(\frac{2r_1}{3}\cos\frac{2\pi}{5}+\frac{r_1}{3}\cos\frac{6\pi}{\mathrm{k}},\frac{2r_1}{3}\sin\frac{2\pi}{5}+\frac{r_1}{3}\sin\frac{6\pi}{\mathrm{k}}\right)$**如圖 30**

由此可見依照**頂點向量式**同理可推導出在k**邊形疊圖每個中的頂點**。 ■

【**定理 10**】**當 k 為質數，在k邊形疊圖中不會產生重疊點，當 k 為合數，就會產生重疊點。**

【**證明**】依照**頂點向量式可**找到$V_{n_1,n_2,n_3,\cdots,n_k}(x,y)$，若**疊圖中產生重疊點**，則存在存在$k$個方向的單位向量 $\overrightarrow{V_1},\overrightarrow{V_2},\cdots,\overrightarrow{V_k}$ 使得

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \overrightarrow{V_i} = \sum_{i=1}^{k} \beta_i \overrightarrow{V_i}\text{，其中}\alpha_i, \beta_i \in \{0,1,2,\cdots,n\}$$

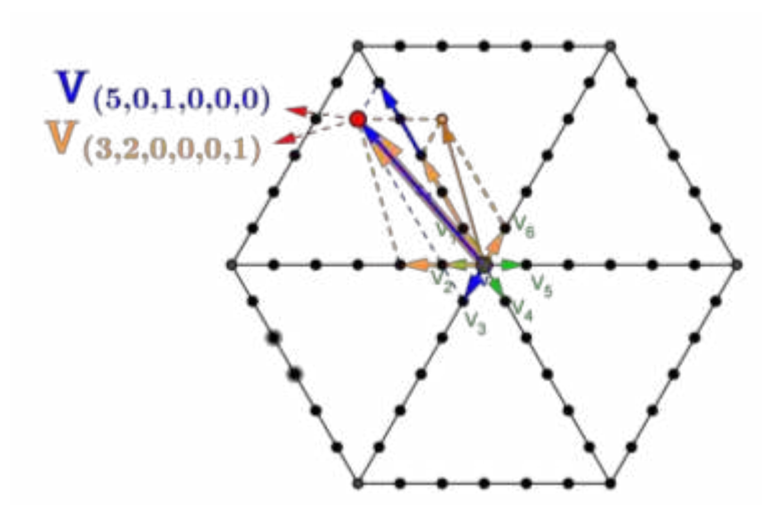
$$\text{由}\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = \sum_{i=1}^{k} \beta_i = n\text{可推得}\sum_{i=1}^{k} (\alpha_i - \beta_i)\overrightarrow{V_i} = \vec{0}$$

因為k為質數，而單位向量位在單位圓分成k等分且相距夾角為$\frac{2\pi}{k}$上，所以僅有$\alpha_i = \beta_i$時

$$\sum_{i=1}^{k} (\alpha_i - \beta_i)\overrightarrow{V_i} = \vec{0}\text{式才能恆成立}$$

因此**在k邊形疊圖中不會產生重疊點。** ■

然而，當 k 為合數，在k邊形疊圖中會產生重疊點，如下說明：



紅色頂點可由兩個或三個非零向量

$$\overrightarrow{OV_{n_1,n_2,n_3,\cdots,n_k}} = 5\overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_3}$$

$$\overrightarrow{OV_{n_1,n_2,n_3,\cdots,n_k}} = 3\overrightarrow{V_1} + 2\overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_6}$$

而得，對應展開項為V_{501000}與V_{320001}。

【定理 11】設k的質因數分解為$p_1^{t_1} \cdot p_2^{t_2} \cdot \cdots \cdot p_m^{t_m}$，有以下個結果

(1)當滿足$n = q_1 p_1 + q_2 p_2 + \cdots + q_m p_m$的等式時，$k$邊形簡圖必有一頂點在中心，本文稱為中心點，其中$q_1, q_2, \cdots, q_m \in N \cup \{0\}$, $p_1, p_2, \cdots, p_m \in P$，且$p_1 < p_2 < \cdots < p_m$。

(2)當取n為 k 中大於 1 的因數時，此時k邊形簡圖的中心點為重疊點。

(3)考慮 k角錐$G''(k,n)$中，若中心點O'滿足(2)且n為 k 中最小因數時，則存在一個以頂點O'唯一的相似 k角錐$G''(k,n)$，使得錐內所有頂點都是重疊點。

【**說明**】(1) 當$n = q_a p_a$時，由$n = q_a\overrightarrow{V_{\frac{k}{p_a}}} + q_a\overrightarrow{V_{\frac{2k}{p_a}}} + \cdots + q_a\overrightarrow{V_{\frac{p_a k}{p_a}}}$的情形，能滿足$n = q_a p_a$有中心點，因此當$n = \sum_{a=1}^{m} q_a p_a$時，必有情形能滿足此等式有中心點。(2)(3)由**定理** 10 與幾何表現就很顯然得證，說明如圖 30 中，六邊形簡圖$G'(6,2)$的頂點O'為中心點也是重疊點，對應展開項有三個為x_1x_4、x_2x_5與x_3x_6，同時也得到以頂點O'的藍色六角錐內頂點皆為重疊點，其角錐對應 k項定理展開式為$(x_1x_4 + x_2x_5 + x_3x_6)(x_1 + \cdots + x_6)^{n-2}$。然而在**$k$角錐中要找到相似的$k$角錐有無限多個，但僅有**藍色六角錐內頂點皆為重疊點，而如圖 31 中綠色六角錐與紅色六角錐內頂點不全為重疊點，其兩角錐對應 k項定理式展開式分別為$x_2x_6(x_1 + \cdots + x_6)^{n-2}$與$x_3x_4x_5(x_1 + \cdots + x_6)^{n-3}$。

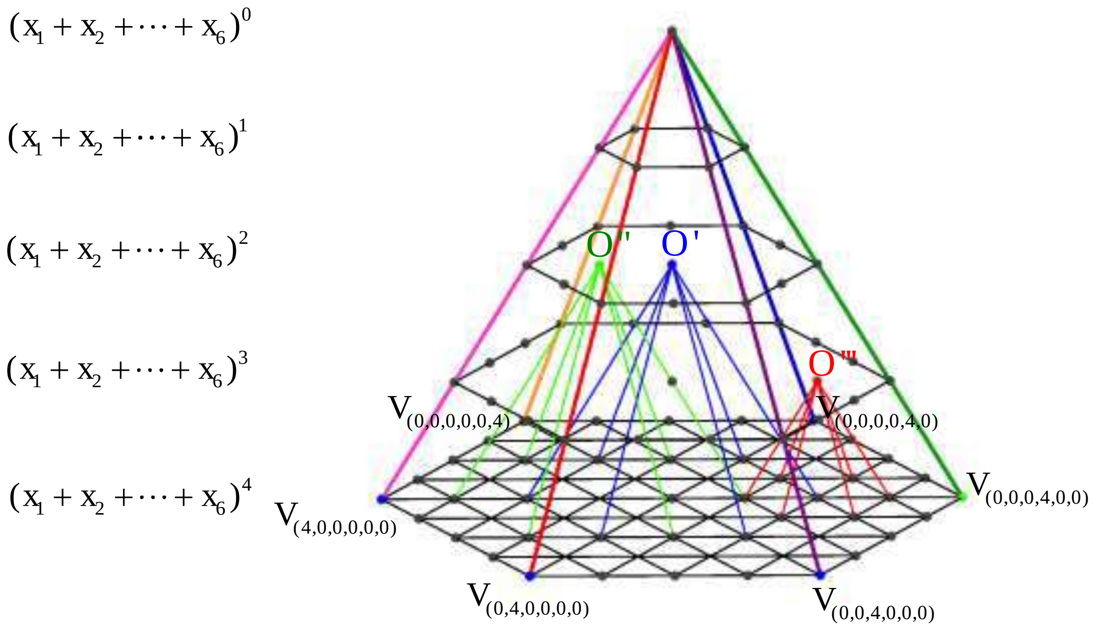


圖 31. 藍色、綠色與紅色六角錐

（七）特化數陣

我們發現：得到向量的結果後更進一步的說明了改變向量之方向並不影響等分點之結論，也就是說我們得以任意改變向量之方向，現在我們重新敘述 $k = 4, 8$ 之數陣。

我們先敘述$k = 4$的情況，將 4 視為 2×2 得到的結果如圖 30，記作$P'(4,n)$

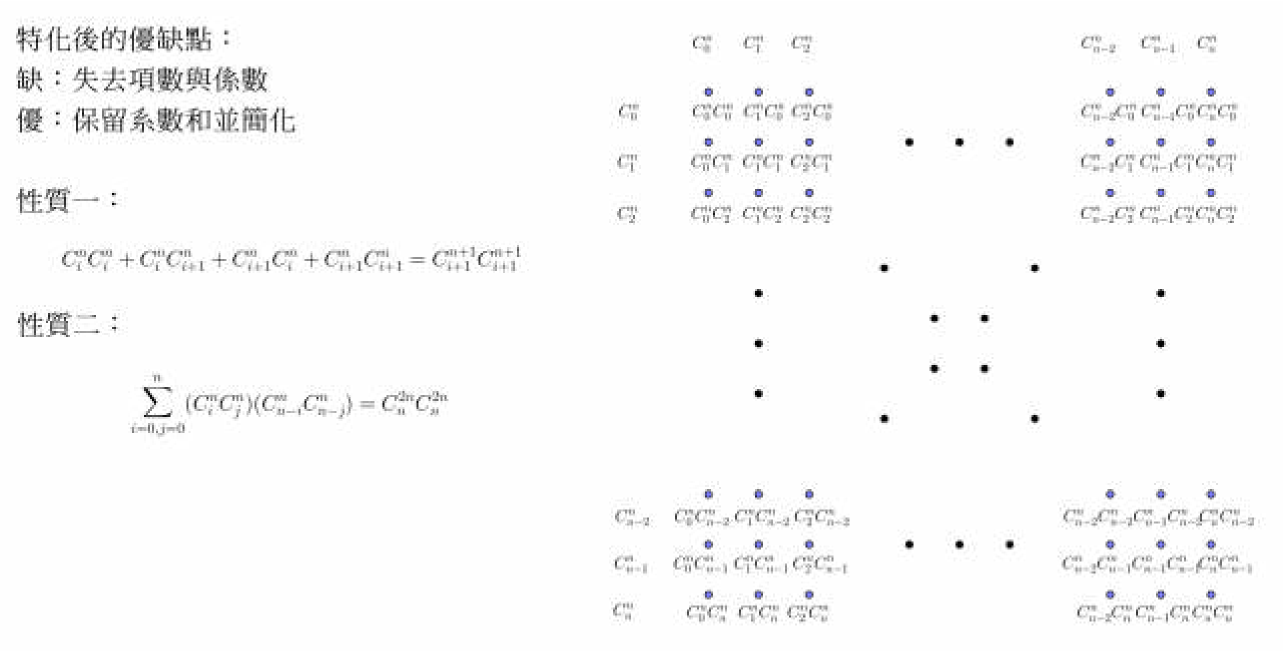


圖 32.特化後的四邊形數陣

【定理 12】（性質一與性質二）

【證明】

性質一：

$$C_i^nC_j^n+C_{i+1}^nC_j^n+C_i^nC_{j+1}^n+C_{i+1}^nC_{j+1}^n=C_{i+1}^{n+1}C_{j+1}^{n+1}$$

由數陣的擴張及合併的結果能得上式，現在用巴斯卡等式來證明

$$C_i^nC_j^n+C_{i+1}^nC_j^n+C_i^nC_{j+1}^n+C_{i+1}^nC_{j+1}^n=C_i^nC_j^n+C_{i+1}^nC_j^n+C_i^nC_{j+1}^n+C_{i+1}^nC_{j+1}^n$$

$$=C_j^n(C_i^n+C_{i+1}^n)+C_{j+1}^n(C_i^n+C_{i+1}^n)=(C_i^n+C_{i+1}^n)(C_j^n+C_{j+1}^n)=C_{i+1}^{n+1}C_{j+1}^{n+1}$$

性質二：

$$\sum_{i=0\,,j=0}^{n}(C_i^nC_j^n)(C_{n-i}^nC_{n-j}^n)=C_n^{2n}C_n^{2n}$$

由數陣的擴張及合併的結果能得上式，現在用二項定理來證明

將：C_i^n視為$(1+x)^n$中x^i之係數、C_{n-i}^n視為$(1+x)^n$中x^{n-i}之係數

C_j^n視為$(1+y)^n$中y^j之係數、C_{n-j}^n視為$(1+y)^n$中y^{n-j}之係數

C_n^{2n}視為$(1+x)^{2n}$中x^n之係數、C_n^{2n}視為$(1+y)^{2n}$中y^n之係數，則：

$$\sum_{i=0\,,j=0}^{n}C_i^nx^i\times C_{n-i}^nx^{n-i}\times C_j^ny^j\times C_{n-j}^ny^{n-j}=C_n^{2n}x^n\times C_n^{2n}y^n$$

現再將$x = y = 1$帶入，又因為$C_i^n C_j^n = C_{n-i}^n C_{n-j}^n$，得到

$$\sum_{i=0\,,j=0}^{n} \left(C_i^n C_j^n\right)\left(C_{n-i}^n C_{n-j}^n\right) = \sum_{i=0\,,j=0}^{n} \left(C_i^n C_j^n\right)^2 = C_n^{2n} C_n^{2n} \qquad \blacksquare$$

現在我們敘述$k = 8$的情況，將 8 視為 2×2×2 得到的結果如圖 32，記作$P'(8, n)$

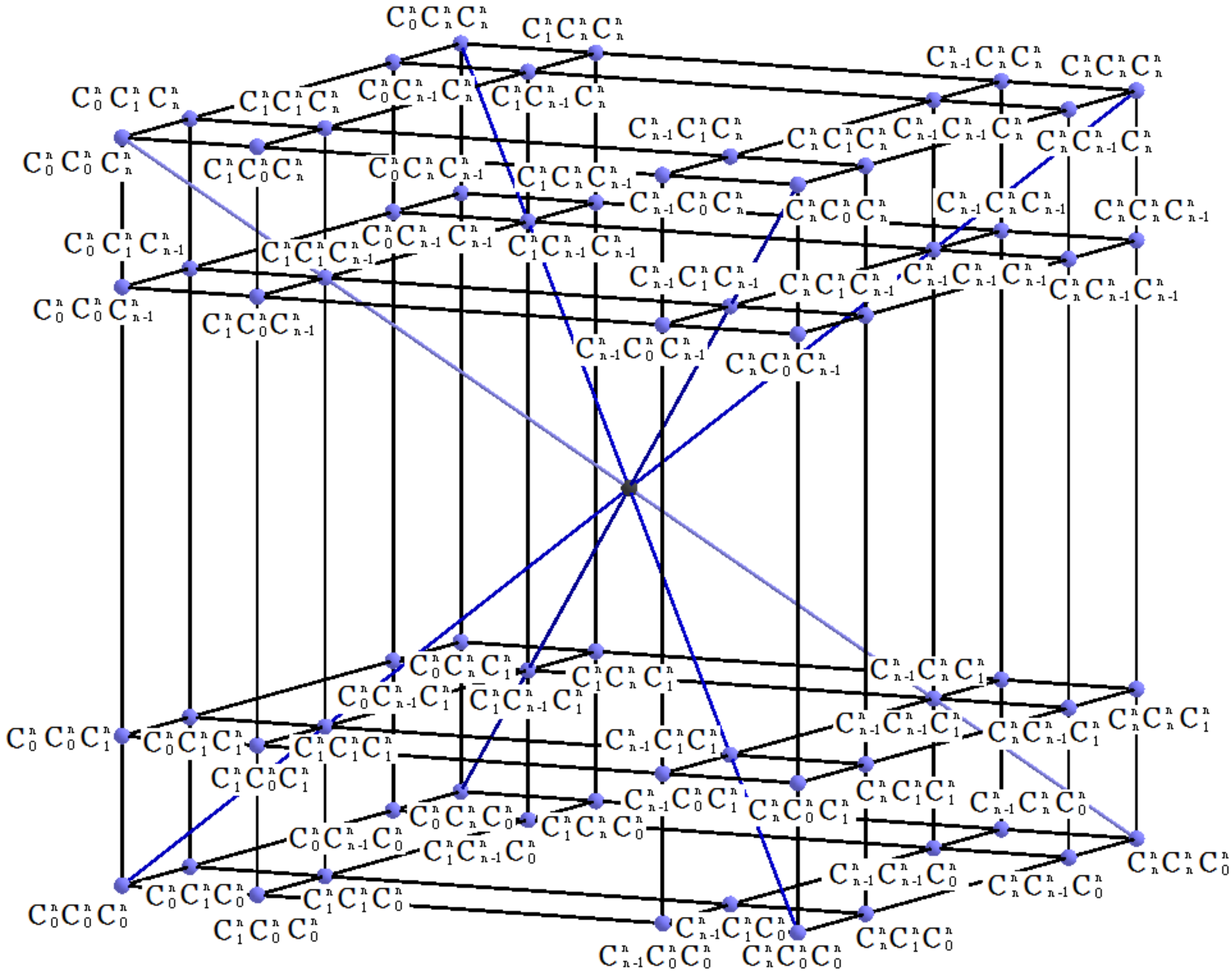


圖 33.特化後的八邊形數陣——正立方體

【**定理 13**】由數陣的擴張及合併的結果能得到下列的兩個結果：

$$C_i^n C_j^n C_l^n + C_{i+1}^n C_j^n C_l^n + C_i^n C_{j+1}^n C_l^n + C_i^n C_j^n C_{l+1}^n + C_{i+1}^n C_{j+1}^n C_l^n +$$

$$C_i^n C_{j+1}^n C_{l+1}^n + C_{i+1}^n C_j^n C_{l+1}^n + C_{i+1}^n C_{j+1}^n C_{l+1}^n = C_{i+1}^{n+1} C_{j+1}^{n+1} C_{l+1}^{n+1}$$

$$\sum_{i=0\,,j=0,l=0}^{n} \left(C_i^n C_j^n C_l^n\right)\left(C_{n-i}^n C_{n-j}^n C_{n-l}^n\right) = C_n^{2n} C_n^{2n} C_n^{2n}$$

【**證明**】類似【**定理 12**】一用巴斯卡等式證明，二用二項定理證明

【推論】由【定理 12】及【定理 13】推論出下列兩結果：

$$\sum_{l=0}^{j}\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_j\text{其中}l\text{個}+1} C_{i_1}^{n}C_{i_2}^{n}\cdots C_{i_j}^{n}=C_{i_1+1}^{n+1}C_{i_2+1}^{n+1}\cdots C_{i_j+1}^{n+1}$$

$$\sum_{i_1=i_2=\cdots=i_j=0}^{n}\left(C_{i_1}^{n}C_{i_2}^{n}\cdots C_{i_j}^{n}\right)\left(C_{n-i_1}^{n}C_{n-i_2}^{n}\cdots C_{n-i_j}^{n}\right)=C_{n}^{2n^j}$$

伍、研究結果

一、建構出 k 項式定理的四種幾何表現：

k邊形數陣$P(k,n)$、k邊形疊圖$G(k,n)$、k邊形簡圖$G'(k,n)$、k角錐$G''(k,n)$，得到性質：

(一)疊圖 $G(k,n)$中小正k邊形個數等於$G(k,n-1)$的頂點數，並且當 k 為質數，在k邊形疊圖中不會產生重疊點。

(二)從簡圖$G'(k,n)$中，可更快速找到 $\boldsymbol{k}$ 項式定理展開項與利用等分點法找到展開項係數。

(三)在三角錐中，三邊形截面內頂點的係數均可由巴斯卡三角形遵循規律而得。

(四)k角錐內頂點所成的線段與截面可找到 k項定理展開式，並且存在一個以頂點唯一的相似 k角錐，使得錐內所有頂點都是重疊點。

二、證明$\boldsymbol{k}$ 項式定理重要的性質：

(一)推廣的巴斯卡等式 (**定理 3 與定理 7**)

(二)h 變數項的項數 $N_k(n,h)=\frac{1}{h}\left[C_1^{k-(h-1)}\cdot N_k(n-1,h-1)+C_1^{h}\cdot N_k(n-1,h)\right]$

(三)不同類的項個數為 $H_n^k=C_1^kH_{n-1}^2+\cdots+C_k^kH_{n-k}^2=C_1^kC_{n-1}^{n-1}+\cdots+C_k^kC_{n-k}^{n-1}=C_n^{k+n-1}$

(四)多項展開式係數為$\binom{n}{n_1,\cdots,n_k}=C_{i_1}^{n}C_{i_2}^{i_1}C_{i_3}^{i_2}\cdot\cdots\cdot C_{i_{k-1}}^{i_{k-2}}$

(五)$\boldsymbol{k^n=\sum_{n\geq i_1\geq\cdots\geq i_{k-1}\geq 0,\ i_1+\cdots+i_{k-1}=n}^{n} C_{i_1}^{n}C_{i_2}^{i_1}C_{i_3}^{i_2}\cdot\cdots\cdot C_{i_{k-1}}^{i_{k-2}}}$，**其中**$\boldsymbol{k\geq 2}$

(六)**當**$\boldsymbol{n}<k$**時**，$\boldsymbol{k^n=\sum_{i=1}^{k}C_{k-i}^{k}(k-i)^n\,(-1)^{(i+1)}}$

當$\boldsymbol{n\geq k}$**時**，$\boldsymbol{k^n\geq\sum_{i=1}^{k}C_{k-i}^{k}(k-i)^n\,(-1)^{(i+1)}}$

(七)用特化數陣的性質找出之定理 12 與定理 13 以及推論出的兩個結果

陸、結論與未來展望

本篇建構「多項式定理」的幾何表現，主要是採點成線，線成面，面成體的概念去建構，希望能抽絲剝繭找出其中的規則與性質，串起了代數下的幾何描述，相互間密不可分意義，充份展現數與形的完美搭配性，也呈現頂點與邊微妙的幾何價值。

多項定理的展開是複雜的，因為等分點概念引進，讓多項展開式係數可容易試算出來，其次，本篇期盼能有更多的代數的與幾何的規律性質，在「多項式定理」下，衍生出幾何規律的美，至於規律性與延續性是我們未來努力的方向，相信必能有出乎意料的驚喜。

柒、參考文獻

【1】A. W. F. Edwards (2002)。Pascal's Arithmetical Triangle: The Story of a Mathematical Idea。London：Charles Griffin & Company LTD。

【2】Kiselev, A. P. (2006).Kiselev's Geometry, Book I: Planimetry.USA：Alexander Givental.

【3】王元元(主編) (2000)。**組合數學-原理及題解**。台北市：中央圖書出版社。

【4】許志農(主編) (2011)。**數學 2. 3. 4、數學甲上下冊**。新北市：龍騰書局。

【評語】040414

本作品利用探究多項式定理的展開式獲得一些疊圖與簡圖性質是一有趣的切入點，作品中推導出一系列的組合數學公式，其中定理九是有趣的結果，建議若能對所獲得的簡潔公式多加說明並賦予主題，應可讓整個研究主題更完整與深入。