中華民國第55屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組　數學科

佳作

040413

超越障礙的勝利之路

學校名稱：國立臺中第一高級中學

作者：	指導老師：
高二 林禹丞	蔡政樺

關鍵詞：方格陣列中障礙物、捷徑走法、遞迴關係

摘要

本研究是想尋找並建立一個數學模式，來探討兩物之間障礙物數量與通過率的關係的問題。我們可以將每個正方形看成一個小單元，因為我們都知道所有東西都可以分割成最小單位。而且也有數學家曾說：當我們做過越多次試驗，則我們所得到的數值會更接近機率。所以，如果有很多樣本通過此方格陣列，則我們可以將此數值看做通過率。再由古典機率的性質，我們反轉先求出路徑的走法數。

而若我們導出這個公式後，我們可以運用在不只是路徑走法的成功率、更能用在電子流動的機率，更可以運用在抽象的事物上，像政府的決策成功率等等。

一、 前言

(一) 研究動機

之前在數學專題課程裡，聽到同學分享他的國中科展的題目，敘述如下：
在一個方陣中，隨機的放入地雷，當地雷數量達到多少時，可以找到一條路徑，使得路徑上都有地雷。我們試圖對這題做了一點改變：在方陣中，隨機置入給定數量的障礙物，找出它通過障礙的捷徑走法之方法數與沒有任何障礙物時的捷徑走法之方法數之比值，我們稱這個比值為通過率。而當我們將方陣縮到無限小時，即是任意兩點之間的通過率。而要計算兩點之間的通過率，我們必須要先求出通過率的分子，即捷徑的走法數。

剛開始解這個問題時，解法需要列舉歸類的邏輯思考與演譯猜想，初步找到一些規律性，後來想運用探究與構想操作的巧思，嘗試破解並找到這個問題的解答之一般式。

(二) 研究目的

1. 試圖尋找問題解決與數學探究的數學模式。
2. 探究在方格陣列$2\times n$有k個障礙物時之捷徑走法數的一般式。
3. 探究k個障礙物在方格陣列$m\times n$捷徑走法數的一般式即通過率一般式。
4. 探究k個障礙物在方體陣列$m\times n\times \ell$捷徑走法數的一般式即通過率一般式。

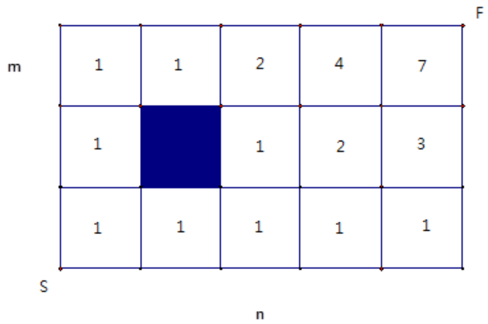
二、 研究方法或過程

(一) 名詞定義：

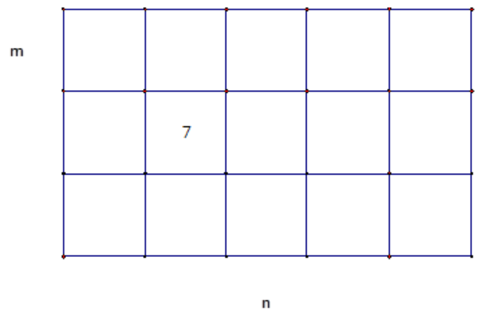
1. 方格陣列$m\times n$與方體陣列$m\times n\times \ell$之定義：前者為：由長 m 個、寬 n 個正方形所組成的長方形方格陣列；後者為：由長 m 個、寬 n 個、高ℓ的正方體所組成的長方體方體陣列。
2. 符號 $f(m\times n,k)$與 $f(m\times n\times \ell,k)$之定義：$m\times n$是指方格陣列之大小、k 值代表障礙物的個數。 $f(m\times n,k)$之值表示在方格陣列$m\times n$中隨機放置 k 個障礙物之所有C_k^{mn}個放法中，所有從左下到達右上之捷徑走法數之總和。$m\times n\times \ell$是指方體陣列之大小、k 值代表障礙物的個數。 $f(m\times n\times \ell,k)$之值表示在方體陣列$m\times n\times \ell$中隨機放置 k 個障礙物之所有$C_k^{mn\ell}$個放法中，所有從左下到達右上之捷徑走法數之總和。由定義，我們可以知道：m,n,ℓ的調換不影響 f 函數的值，也就是說，f 函數的一般是對 m,n,ℓ而言應是對稱的。

3. 符號方格(p,q)與 S、F 之定義：方格(p,q)是指位於方格陣列$m\times n$之由下而上第 p 列(橫)及由左而右第q行(直)交會所在的方格；而 S 代表最左下角的方格，F 代表最右上角的方格。

4. 定義填在方格$m\times n$之某個方格內的數：此數代表障礙物放置在該方格中的捷徑走法數。例如：由圖一，我們利用加法算出，障礙物在方格(2,2)時的捷徑走法數為 7，我們就把 7 填在方格(2,2)，如下圖二。



圖一



圖二

5. $P(m\times n,k)=\dfrac{f(m\times n,k)}{C_k^{mn}\,f(m\times n,0)}$及$P(m\times n\times \ell,k)=\dfrac{f(m\times n\times \ell,k)}{C_k^{mn\ell}\,f(m\times n\times \ell,0)}$：前者，代表在 $m\times n$方格陣列中，存在有 k 個障礙物時，捷徑走法的通過率；後者，代表在 $m\times n\times \ell$方體陣列中，存在有 k 個障礙物時，捷徑走法的通過率。

6. 定義$C\{m,n\}$及$C\{m,n,\ell\}$：

前者代表，$\dfrac{(m+n-2)!}{(m-1)!(n-1)!}$在$m\times n$方格陣列中，有$m-1$條向上路徑，有$n-1$條向右路徑，由不盡相異物排列公式得之；同理，後者表示$\dfrac{(m+n+\ell-3)!}{(m-1)!(n-1)!(\ell-1)!}$。

其中 $f(m\times n,0)=C\{m,n\}$， $f(m\times n\times \ell,0)=C\{m,n,\ell\}$

7. 符號 $f(x)/[x^k]$之定義：符號 $f(x)/[x^k]$表示生成函數 $f(x)$的 x^k 項係數。

8. 【引理一】Vandermonde 恆等式：$\sum_{i=0}^{k}C_i^aC_{k-i}^b=C_k^{a+b}$

三、 探討 $f(m\times n,k)$與$P(m\times n,k)$一般式

(一)方格陣列$m\times n$中 1 個障礙物的探究過程

首先，我們針對方格陣列$m\times n$中的m值分別依 m=2、3、4、…，逐一探討方格陣列

$m \times n$ 中 1 個障礙物的捷徑走法數 $f(m \times n,1)$ 的一般式：

1. 當 m=2 時

【進行探究】

透過下圖三之輔助說明，

(1)若那個障礙物在方格(1,2)，則捷徑走法有(1,1)→(2,1)→(2,2)→(2,3)→…→(2,n)，只有一種，所以在方格(2,1)填入 1。

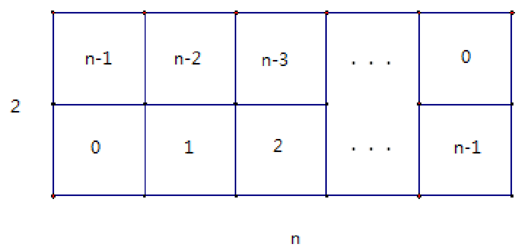
(2)若障礙物在方格(1,3)，則捷徑走法有(1,1)→(2,1)→(2,2)→(2,3)→…→(2,n)和(1,1)→(1,2)→(2,2)→(2,3)→…→(2,n)，共兩種，所以在方格(1,3)填入 2。

(3)依此類推，可推得障礙物在方格(1,i)的捷徑走法有 i-1 (i=1,2,3,…,n)種，故在方格(1,i)中填入 i-1 (i=1,2,3,…,n)，
又因為從 S 點到 F 點及 F 點到 S 點的捷徑走法具對稱性，
可知第二列的方格中捷徑走法數依序填入(n-1),(n-2),…,1,0。

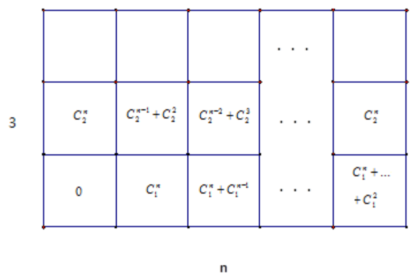
因此，我們推得完成方格陣列 $2 \times n$ 中 1 個障礙物的捷徑走法數為

$$f(2 \times n,1) = 2[(n-1)+(n-2)+...1] = n(n-1)$$

並整理成結果中的引理二。



圖三



圖四

2. 當 m=3 時

發現當 n 分別為奇數與偶數時，障礙物在中間第二列的捷徑走法數會不一樣，所以我們依正整數 n 之奇偶性，進行討論：

【進行探究】

透過上圖四之輔助說明，

(1)若障礙物在方格(1,2)，則捷徑走法有(1,1)→(2,1)→…→(3, n)，有 C_1^n 種，所以在方格(1,2)填入 C_1^n ；若障礙物在方格(1,3)，可分為下列兩種走法：

(a) (1,1)→(2,1)→…→(3, n)，捷徑走法有 C_1^n 種

(b)(1,1)→(1,2)→(2,2)…→(3, n)，捷徑走法有 C_1^{n-1} 種

所以在方格(1,3)填入 $C_1^n + C_1^{n-1}$ 。

同理在障礙物在方格 $(1,i)$ 中的捷徑走法有 $C_1^n + C_1^{n-1} + ... + C_1^{n-i+2}$ (i=1,2,3,…,n)種。

故在方格 $(1,i)$ 填入 $C_1^n + C_1^{n-1} + ... + C_1^{n-i+2}$ (i=1,2,3,…,n)，

又因為從 S 點到 F 點及 F 點到 S 點的對稱性，可知第三列的方格中捷徑走法數依序

填入 $C_1^n + C_1^{n-1} + ... + C_1^2$, …, $C_1^n + C_1^{n-1}$, C_1^n 。

(2)接下來討論障礙物在第二列方格中之捷徑走法數：

若障礙物在方格(2,1)時，則捷徑走法為(1,1)→(1,2)→…→ $(3,n)$ ，共 C_2^n 種；

若障礙物在方格(2,2)時，則捷徑可分為下列兩種走法：

(a) (1,1)→(2,1)→(3,1)→(3,2)→(3,3)→…→ $(3,n)$ ，捷徑走法有 C_2^2 種

(b) (1,1)→(1,2)→(1,3)→…→ $(3,n)$ ，捷徑走法有 C_2^{n-1} 種

所以障礙物在方格(2,2)之捷徑走法有 $C_2^2 + C_2^{n-1}$ ；

同理，若障礙物在方格(2,3)之捷徑走法有 $C_2^3 + C_2^{n-2}$ 。

(3)最後，正整數 n 之奇偶性討論：

(a)當n為偶數時(令n=2m)，方格陣列 $m \times n$ 中 1 個障礙物的捷徑走法數為

$$f(3\times n,1) = C_1^n + (C_1^n + C_1^{n-1}) + \ldots + (C_1^n + ... + C_1^{n-(m-2)}) + 2(C_2^n + C_2^{n-1} + ... + C_2^{n-(m-1)})$$

$$= 8m^3 - 2m = n^3 - n$$

(b)當n為奇數時(令n=2m+1)，方陣 $3\times n$ 中 1 個障礙物的捷徑走法數為

$$f(3\times n,1) = C_1^n + (C_1^n + C_1^{n-1}) + \ldots + (C_1^n + ... + C_1^{n-(m-2)}) + 2(C_2^n + C_2^{n-1} + ... + C_2^{n-(m-1)})$$

$$+ (C_2^2 + C_2^3 + ... + C_2^m) + (C_1^1 C_1^{n-1} + C_1^2 C_1^{n-2} + ... + C_1^{n-m} C_1^m)$$

$$+ (C_1^n + C_1^{n-1} + ... + C_1^{n-(m-1)}) + 2(C_2^{n-m} + C_2^{m+1} + C_1^{n-m-1} C_1^{m+1}) = n^3 - n$$

因此，我們推得完成方格陣列$3\times n$中 1 個障礙物的捷徑走法數為 $f(3\times n,1)=n(n^2-1)$

並整理成結果中的引理三。

3. 當 m=4 時

【進行探究】

(1)若障礙物在方格(1,2)，則捷徑走法有(1,1)→(2,1)→…→$(4,n)$，有C_2^{n+1} 種，所以在方格(1,2)填入C_2^{n+1}；

(2)若障礙物在方格(1,3)，可分為下列兩種走法：

(a) (1,1)→(2,1)→…→$(4,n)$，捷徑走法有C_2^{n+1}種

(b) (1,1)→(1,2)→(2,2)…→$(4,n)$，捷徑走法有C_2^n種

所以在方格(1,3)填入$C_2^{n+1}+C_2^n$。同理，障礙物在方格$(1,i)$中的捷徑走法有

$C_2^{n+1}+C_2^n+...+C_2^{n-i+3}$ (i=1,2,3,…,n)種。

故在方格$(1,i)$填入$C_2^{n+1}+C_2^n+...+C_2^{n-i+3}$ (i=1,2,3,…,n)，

又因為從 S 點到 F 點及 F 點到 S 點的對稱性，可知第四列的方格中捷徑走法數依序填入$C_2^{n+1}+C_2^n+...+C_2^3$, … , $C_2^{n+1}+C_2^n$, C_2^{n+1} 。

(3)接下來討論障礙物在第二列方格中之捷徑走法數：

若障礙物在方格(2,1)時，則捷徑走法為(1,1)→(1,2)→…→$(3,n)$，共C_3^{n+1}種；

若障礙物在方格(2,2)時，則捷徑可分為下列兩種走法：

(a) (1,1)→(2,1)→(3,1)→…→$(4,n)$，捷徑走法有C_1^n種

(b) (1,1)→(1,2)→(1,3)→…→$(4,n)$，捷徑走法有C_3^n種

所以障礙物在方格(2,2)之捷徑走法有$C_1^n+C_3^n$；

若障礙物在方格(2,3)時，則捷徑可分為下列三種走法：

(a) (1,1)→(2,1)→(3,1)→…→$(4,n)$，捷徑走法有C_1^n種

(b) (1,1)→…→(2,2)→(3,2)→…→$(4,n)$，捷徑走法有$2C_1^{n-1}$種

(c) (1,1)→(1,2)→(1,3)→(1,4)→…→$(4,n)$，捷徑走法有C_3^{n-1}種

所以障礙物在方格(2,3)之捷徑走法有$C_1^n+2C_1^{n-1}+C_3^{n-1}$；

若障礙物在方格(2,4)時，可分為以下 4 種走法：

(a) $(1,1)\to(2,1)\to(3,1)\to\ldots\to(4,n)$，捷徑走法有 C_1^n 種

(b) $(1,1)\to\ldots\to(2,2)\to(3,2)\to\ldots\to(4,n)$，捷徑走法有 $2C_1^{n-1}$ 種

(c) $(1,1)\to\ldots\to(2,3)\to(3,3)\to\ldots\to(4,n)$，捷徑走法有 $3C_1^{n-2}$ 種

(d) $(1,1)\to(1,2)\to(1,3)\to(1,4)\to(1,5)\ldots\to(4,n)$，捷徑走法有 C_3^{n-2} 種

所障礙物在方格(2,4)之捷徑走法有 $C_1^n+2C_1^{n-1}+3C_1^{n-2}+C_3^{n-2}$ ；

同理(2,i)有$(C_1^n+2C_1^{n-1}+\ldots+(i-1)C_1^{n+2-i})+C_3^{n+2-i}$

又因為從 S 點到 F 點及 F 點到 S 點的對稱性，

可知(3,n+1-i)亦有$(C_1^n+2C_1^{n-1}+\ldots+(i-1)C_1^{n+2-i})+C_3^{n+2-i}$

最後將全部相加，得 $f(4\times n,1)$

$$=2\{\sum_{i=2}^{n}(C_2^{n+1}+C_2^{n}+\ldots+C_2^{n-i+3})+\sum_{i=1}^{n}[(C_1^n+2C_1^{n-1}+3C_1^{n-2}+\ldots+(i-1)C_1^{n+2-i})+C_3^{n+2-i}]\}$$

$$=\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{2}$$

因此，我們推得完成方格陣列 $4\times n$ 中 1 個障礙物的捷徑走法數為

$$f(4\times n,1)=\frac{n^4+2n^3-n^2-2n}{2}=\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{2}\ ,\ \forall m,n\in N\ 。$$

並整理成結果中的引理四。

4. 針對 $f(m\times n,1)$ 之一般式的歸納猜想與論證：

當討論到 $m=4$ 時，可以發現 $f(4\times n,1)$ 的數學式可由四個正整數之連乘積除以 2 來表示，而 $f(3\times n,1)$ 卻沒有類似的型式。

所以我們將引理二、三、四中的數學式再做個轉換：

$$f(4\times n,1)=\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{2!}\ ;\ f(3\times n,1)=\frac{(n+1)n(n-1)}{1!}\ ;\ f(2\times n,1)=\frac{n(n-1)}{0!}\ 。$$

發現其中的規律性並猜想： $f(m\times n,1)=\dfrac{(n-1)n(n+1)\ldots(n+m-2)}{(m-2)}=\dfrac{(n+m-2)!}{(n-2)!(m-2)!}$ 。

【證明】

利用數學歸納法

(1)由上面已算出的 $f(i\times n,1), i=1,2,3,4$ ，作為數學歸納法的起始值之正確基礎

(2)假設 $f(m\times n,1)=\dfrac{(n-1)n(n+1)\ldots(n+m-2)}{(m-2)!}=\dfrac{(n+m-2)!}{(n-2)!(m-2)!}$ 成立

(3)從S走到方格(m,n)可分為由S走到方格(m,n-1)，再到方格(m,n)以及S走到方格(m-1,n)，再到方格(m,n)兩種。

先討論由S走到A格子再到方格(m,n)的走法，而這些走法中，由障礙物的擺放位置，又可以分為以下兩種：

(a)障礙物在第n行：由引理一可以得到：有 $(m-1)C_{n-2}^{m+n-3}$ 種走法。

(b)障礙物在除了第n行以外的格子內：由(2)有 $f(m\times n-1,1)$ 種捷徑走法。

故經由A方格到達方格(m,n)有 $f(m\times n-1,1)+(m-1)C_{n-2}^{m+n-3}$ 種捷徑走法。

同理，經由B方格到達方格(m,n)有 $f(m-1\times n,1)+(n-1)C_{m-2}^{m+n-3}$ 種捷徑走法。

所以到方格(m,n)總共有

$$f(m-1\times n,1)+f(m\times n-1,1)+(m-1)C_{n-2}^{m+n-3}+(n-1)C_{m-2}^{m+n-3}=f(m\times n,1)$$ 種走法。

故由數學歸納法：對任意 $m,n\in N$ ，有

$$f(m\times n,1)=\frac{(n-1)n(n+1)\ldots(n+m-2)}{(m-2)!}=\frac{(n+m-2)!}{(n-2)!(m-2)!}$$ 。得證。

因此，我們綜合上述引理一至四的演繹與歸納過程之結果，將此論證結果整理成【定理一】，並得到一個【數學模式】，以作為後續探究的基礎。

【定理一】

若 1 個障礙物放置在方格陣列 $m\times n$ 中，則從 S 出發到達 F 的捷徑走法數為

$$f(m\times n,1)=\frac{(n-1)n(n+1)\ldots(n+m-2)}{(m-2)!}=\frac{(n+m-2)!}{(n-2)!(m-2)!}\ ,\ \forall m,n\in N$$ 。

【數學模式】

1. 障礙物在方格 $(1,i)$ 中的捷徑走法數：

   障礙物在方格陣列 $m\times n$ 的方格 $(1,i)$ 中的捷徑走法數為

   $C_{m-2}^{n+m-3}+C_{m-2}^{n+m-4}+C_{m-2}^{n+m-5}+\ldots+C_{m-2}^{n-i+2}$ (i=1,2,3,…,n)。

例如：當 $m=3$ 時障礙物在方格 $(1,i)$ 中的捷徑走法有 $C_1^{n}+C_1^{n-1}+...+C_1^{n-i+2}$ (i=1,2,3,…,n)

種；當 $m=4$ 時障礙物在方格 $(1,i)$ 中的捷徑走法有 $C_2^{n+1}+C_2^{n}+...+C_2^{n-i+3}$ (i=1,2,3,…,n)

種。

2.遞迴關係：

從 S 走到方格(m,n)可分為由 S 走到方格(m,n-1)，再從方格(m,n-1)到方格(m,n)以及 S 走到方格(m-1,n)，再從方格(m-1,n)到方格(m,n)兩種。

即 $f(m\times n,1)=f(m-1\times n,1)+f(m\times n-1,1)+(m-1)C_{n-2}^{m+n-3}+(n-1)C_{m-2}^{m+n-3}$

(二) 方格陣列 $2\times n$ 中 k 個障礙物的探究過程

接下來，我們針對方格陣列 $2\times n$ 中的 k 值分別依 k =2、3、4、…，逐一探討方格陣列 $2\times n$ 中 k 個障礙物的捷徑走法數 $f(2\times n,k)$ 的一般式：

1. 探討 $f(2\times n,2)$ 的一般式：

【進行探究】

分為兩種狀況討論：

(1)兩個障礙物在不同列：

如果其中一個障礙物在方格(2,1)，那麼另一個障礙物在方格(1,i)時，會有i-2 種捷徑走法(i=3~n)。即當其中一障礙物在方格(2,1)時，捷徑走法有 1+2+…+(n-2)= $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ 種。所以當障礙物在不同列時，總捷徑走法有 $\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$ 種。

(2)兩個障礙物在同一列：

假設兩障礙物皆在第一列。不難知道，當一個障礙物在方格(1,2)，

另一個在方格(1,3)~ 方格(1,n)，其捷徑走法就有 $(n-2)\times 1$ 種。同理，

當一個障礙物在方格(i,1)，另一個障礙物在方格(1,i+1)~ 方格(1,n)，其捷徑走法就有 $(n-i)(i-1)$ 種。又因為上下對稱，所以上列捷徑走法與下列相同。

所以 $f(2\times n,2)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}+2\sum_{k=1}^{n}(n-k)(k-1)=\frac{n(n-1)(n-2)}{2}$

因此，我們透過之前所建立的數學模式做出以下的【猜想一】：

【猜想一】

$f(2\times n,k)$ 的一般式為 $f(2\times n,k)=\dfrac{n(n-1)\ldots(n-k)}{k!}$ ，$\forall k,n\in N$ 。

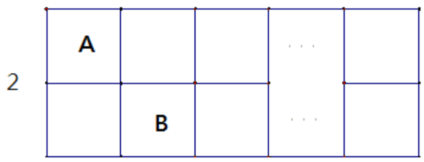
【證明】

我們使用數學歸納法論證

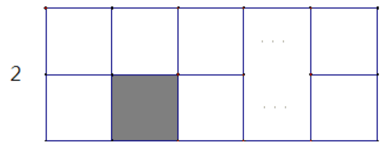
(1) t=2 成立：前面已經論證 $f(2\times n,2)=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{2}$ 是成立的。

(2)假設 $\forall i,j\in N, i<n, j<m$ 成立，即 $f(2\times i,j-1)=\dfrac{i(i-1)\ldots(i-j+1)}{(j-1)!}$

(3)當t=k時可分為兩種情形討論：



圖五



圖六

(a)上排有障礙物：

如果k個障礙物中的一個在方格(2,1)，即圖五中A方格，則捷徑必由 (1,1)→(1,2)→…→(2,n)，所以可視為從方格(1,2)走到方格(2,n)的捷徑走法數即 $f(2\times(n-1),k-1)$ 。

(b)上排沒有障礙物：即障礙物皆在下排。

若k個障礙物中其中一個擺在圖六中A方格，則捷徑走法有 1 種，而其餘(k-1)個擺在其右方。所以若k個障礙物中其中一個擺在方格(1,2)，共有 $1\times C^{n-2}_{k-1}$ 種方法。同理當k個障礙物中其中一個擺在方格(1,i)，則會有(i-1)× C^{n-i}_{k-1} 種方法。所以當k個障礙物皆在下排時，有 $\sum_{i=2}^{n-k+1}(i-1)C^{n-i}_{k-1}=C^{n-2}_{k-1}+2C^{n-3}_{k-1}+3C^{n-3}_{k-1}+\ldots+(n-k)C^{k-1}_{k-1}=C^{n}_{k+1}$

所以由(a)及(b)，得 $f(2\times n,k)$

$$=f(2\times(n-1),k-1)+f(2\times(n-2),k-1)+\ldots+f(2\times k,k-1)+C^{n}_{k+1}$$

$$=\frac{(n-1)\ldots(n-k)}{(k-1)!}+\frac{(n-2)\ldots(n-k-1)}{(k-1)!}+\frac{(n-3)\ldots(n-k-2)}{(k-1)!}+\ldots+\frac{k!}{(k-1)!}+C^{n}_{k+1}$$

$$=\frac{n(n-1)\ldots(n-k)}{k!}$$ 。

故由數學歸納法可得證。

同時，我們也將上述【猜想一】的論證結果，整理成以下的【定理二】:

【定理二】

若 k 個障礙物放置在方格陣列 $2\times n$ 中，則從S出發到達F的捷徑走法數為

$f(2\times n,k)=\dfrac{n(n-1)...(n-k)}{k!}$ ，$\forall k,n\in N$ 。

綜合上述的探究結果，再我們進一步歸納得到一個重要的猜想，可整理成以下的【猜想二】，此猜想對於求出 $f(m\times n,k)$ 的一般式具有關鍵性的效果。

【猜想二】

若 k 個障礙物放置在方格陣列 $m\times n$ 中，從 S 出發到達 F 的捷徑走法數為 $f(m\times n,k)$ ，則 $f(m\times n,k)$ 為以 n 為變數的多項式且其最高次為 m+k-1。

【說明】

此猜想的探究與證明部分，我們將透過後面的(四)及(五)之探究與論證過程，得到一些立論基礎，最後再進行完整性的證明。

(四)方格陣列 $m\times n$ 中 2 個障礙物的探究過程

接下來，我們再針對方格陣列 $m\times n$ 中的 m 值分別依 m =2、3、4、…，逐一探討方格陣列 $m\times n$ 中 2 個障礙物的捷徑走法數 $f(m\times n,2)$ 的一般式：

1.當 m=2 時，由【定理二】的公式 $f(2\times n,k)=\dfrac{n(n-1)...(n-k)}{k!}$ ，可知

$$f(2\times n,2)=\frac{n(n-1)(n-2)}{2}$$

2.當 m=3 時，我們先算 n=0、1、2、3、4 時所對應的 $f(3\times n,2)$ 之值。

並由【猜想二】，猜想 $f(3\times n,2)$ 為 n 的 3+2-1 次式，即為 4 次。進而猜想 $f(3\times n,2)$ 的一般式，最後再給予證明。

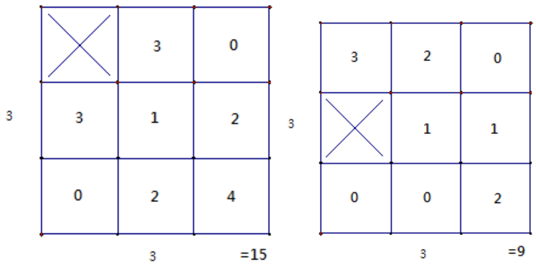
(1) $f(3\times 0,2)$ ： 3×0 沒有路徑，所以 $f(3\times 0,2)=0$

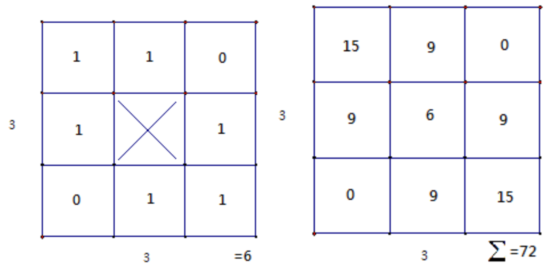
(2) $f(3\times 1,2)$ ： 3×1 中任意放置 2 個障礙物一定沒有路徑，所以 $f(3\times 1,2)=0$

(3) $f(3\times 2,2)$ ：由【定理二】的公式 $f(2\times n,k)=\dfrac{n(n-1)...(n-k)}{k!}$ ，可得

$$f(3\times 2,2)=f(2\times 3,2)=\frac{3\times 2\times 1}{2!}=3$$

(4) $f(3\times3,2)$，如下圖七、八：



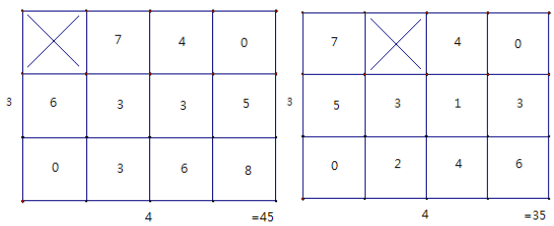


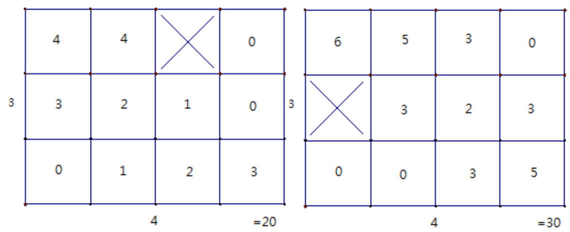
圖七　　　　　　　　　　圖八

【說明】

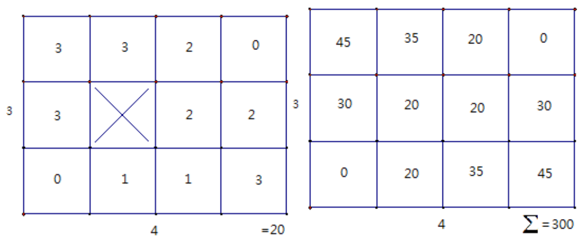
以上打叉處是第一個障礙物的位置，而數字是第二個障礙物所在該位置時的路徑走法數。每個方陣的右下角為該方格內所有數字的總和。最後一張圖中，數字是其中一個障礙物所在該位置時的路徑走法數。我們由對稱性及前幾張圖，就可填出最後一張圖。因為這種算法同一組障礙物被算了兩次，所以 $f(3\times3,2)=\dfrac{72}{2}=36$

(5) $f(3\times4,2)$，如下圖九、十：





圖九　　　　　　　　　　圖十



圖十一

【說明】

以上打叉處是第一個障礙物的位置，而數字是第二個障礙物所在該位置時的路徑走法數。每個方陣的右下角為該方格內所有數字的總和。最後一張圖(圖十一)中，數字是其中一個障礙物所在該位置時的路徑走法數。

我們由對稱性及前幾張圖，就可填出最後一張圖(圖十一)。因為這種算法同一組障

礙物被算了兩次，所以 $f(3\times 4,2)=\frac{300}{2}=150$

接下來，我們根據【猜想二】之結果，利用上述討論的結果： $f(3\times 0,2)=0$， $f(3\times 1,2)=0$， $f(3\times 2,2)=3$， $f(3\times 3,2)=36$， $f(3\times 4,2)=150$，求 $f(3\times n,2)$ 的數學式。

因此，我們令 $f(3\times n,2)=an^4+bn^3+cn^2+dn+e$

n 分別代 0,1,2,3,4，可解得： $a=1$， $b=-\frac{3}{2}$ ， $c=-1$ ， $d=\frac{3}{2}$ ， $e=0$

故透過【猜想二】可推得 $f(3\times n,2)=n^4-\frac{3}{2}n^3-n^2+\frac{3}{2}n=\frac{(n-1)n(n+1)(2n-3)}{2}$

為了，說明這個局部性的猜想是正確的，因此我們提出以下的證明，並將此結果整理結果中的【引理五】。

【證明】

利用數學歸納法，透過前面證明 $f(m\times n,1)$ 的方法：

(1)由上面已算出的 $f(3\times i,2), i=1,2,3,4$ ，作為數學歸納法的起始值之正確基礎

(2)假設 $f(3\times n-1,2)=\frac{(n-2)(n-1)n(2n-5)}{2}$ 成立

(3)從S走到方格(m,n)可分為由S走到方格(m,n-1)，再到方格(m,n)以及S走到方格(m-1,n)，再到方格(m,n)兩種。

先討論由S走到A格子再到方格(m,n)的走法，而這些走法中，由障礙物的擺放位置，又可以分為以下三種：

(a)兩個障礙物皆在第n行：兩個障礙物皆在第n行有 C_2^2 種放法，而前n行有 $f(3\times n-1,0)$ 種走法。由乘法原理共有 $C_2^2 f(3\times n-1,0)$ 種放法

(b)一個障礙物在第n行，另一個障礙物在前n行：一個障礙物在第n行有 C_1^2 種放法，另一個障礙物在前n行有 $f(3,n-1,1)$ 種走法。由乘法原理共有 $C_1^2 f(3\times n-1,1)$ 種放法

(c)兩個障礙物皆在除了第n行以外的格子內：兩個障礙物在前n行有 $C_0^2 f(3\times n-1,2)$ 種走法。

故經由A到達F共有 $C_2^2 f(3\times n-1,0)+C_1^2 f(3\times n-1,1)+C_0^2 f(3\times n-1,2)$ 種走法

同理，經由B方格到達方格(m,n)有$C_2^{n-1}f(2\times n-1,0)+C_1^{n-1}f(2\times n-1,1)+C_0^{n-1}f(2\times n-1,2)$

種捷徑走法。

利用之前所證明的公式及(2)的條件，可知到方格(m,n)總共有

$$C_2^2 f(3\times n-1,0)+C_1^2 f(3\times n-1,1)+C_0^2 f(3\times n-1,2)+$$

$$C_2^{n-1}f(2\times n-1,0)+C_1^{n-1}f(2\times n-1,1)+C_0^{n-1}f(2\times n-1,2)=\frac{(n-1)n(n+1)(2n-3)}{2}$$ 種走法。

故由數學歸納法：對任意 $n\in N$ ，有 $f(3\times n,2)=\frac{(n-1)n(n+1)(2n-3)}{2}$ 。得證。

透過由上述的探究與數學歸納法論證，我們可以歸納整理出以下的【定理三】:

【定理三】
若 k 個障礙物放置在方格陣列 $m\times n$ 中，若從 S 出發到達 F 的捷徑走法數為 $f(m\times n,k)$ ，則 $f(m\times n,k)$ 滿足遞迴式 $f(m\times n,k)=\sum_{i=0}^{k}C_{k-i}^{m-1}f(m\times n-1,i)+\sum_{j=0}^{k}C_{k-j}^{n-1}f(n\times m-1,j)$ 。

【證明】

先討論由S走到A格子再到方格(m,n)的走法。

若i個障礙物皆在第n行有C_{k-i}^{m-1}種放法，而前n行有 $f(m\times n-1,i)$ 種走法。由乘法原理共有

$C_{k-i}^{m-1}f(m\times n-1,i)$ 種放法(其中i=1,2,3,...,n)

故經由A到達F共有$\sum_{i=0}^{k}C_{k-i}^{m-1}f(m\times n-1,i)$ 種走法

同理，經由B方格到達方格(m,n)有$\sum_{j=0}^{k}C_{k-j}^{n-1}f(n\times m-1,j)$ 種捷徑走法。

可知到方格(m,n)總共有

$$f(m\times n,k)=\sum_{i=0}^{k}C_{k-i}^{m-1}f(m\times n-1,i)+\sum_{j=0}^{k}C_{k-j}^{n-1}f(n\times m-1,j)$$ 種捷徑走法。得證。

由上述 1 及 2 的討論與論證結果，接下來我們將透過上述的結果，求出之 $f(4\times n,2)$ 一般式並證明之。

由上述 1 及 2 的討論與論證結果，接下來我們將透過上述的結果，求出之 $f(4\times n,2)$ 一般式並證明之。

3. 當 m=4 時，利用【定理三】中的遞迴式

$f(m\times n,k)=\sum_{i=0}^{k}C_{k-i}^{m-1}f(m\times n-1,i)+\sum_{j=0}^{k}C_{k-j}^{n-1}f(n\times m-1,j)$，求出之 $f(4\times n,2)$ 一般式。

【探究與證明】

(1)由遞迴式 $f(m\times n,k)=\sum_{i=0}^{k}C_{k-i}^{m-1}f(m\times n-1,i)+\sum_{j=0}^{k}C_{k-j}^{n-1}f(n\times m-1,j)$

有 $f(4\times n,2)=\sum_{i=0}^{2}C_{2-i}^{3}f(4\times n-1,i)+\sum_{j=0}^{2}C_{2-j}^{n-1}f(n\times 3,j)$

代入之前所得之所有公式得：$f(4\times n,2)-f(4\times n-1,2)=\dfrac{n(n+1)(n-1)(15n-22)}{4}$

再來利用遞迴關係求出 $f(4\times n,2)$

$$\{f(4\times n,2)-f(4\times n-1,2)\}+\ldots+\{f(4\times 2,2)-f(4\times 1,2)\}=\sum_{d=1}^{n}\frac{d(d+1)(d-1)(15d-22)}{4}$$

$$f(4\times n,2)=\sum_{d=1}^{n}\frac{d(d+1)d(-1)d(1\,5}{4}=\frac{2n2n)-\ n(+\ 1n)+(\ 1n)-(}{4}$$

故 $f(4\times n,2)=\dfrac{n(n-1)(n+1)(n+2)(3n-4)}{4}$

(2)數學歸納法的證明：

(a)當 $k=1$ 時，則 $f(4\times 1,2)=0$ 成立

(b)設 $k=n-1$ 時成立，即 $f(4\times n-1,2)=\dfrac{(n-1)(n-2)n(n+1)(3n-7)}{4}$

(c)則 $k=n$ 時， $f(4\times n-1,2)+\dfrac{n(n+1)(n-1)(15n-22)}{4}$

$$=\frac{(n-1)(n-2)n(n+1)(3n-7)}{4}+\frac{n(n+1)(n-1)(15n-22)}{4}$$

$=\dfrac{n(n-1)(n+1)(n+2)(3n-4)}{4}$ 即 $k=n$ 時，也成立

故由數學歸納法：對任意 $n\in N$，有 $f(4\times n,2)=\dfrac{n(n-1)(n+1)(n+2)(3n-4)}{4}$。得證。

同樣地，我們利用上述 1~3 的討論與論證結果，接下來我們再利用【定理三】中的遞迴式，求出之 $f(5\times n,2)$ 一般式並證明之。

4. 當 m=5 時，利用遞迴式 $f(m\times n,k)=\sum_{i=0}^{k}C_{k-i}^{m-1}f(m\times n-1,i)+\sum_{j=0}^{k}C_{k-j}^{n-1}f(n\times m-1,j)$ 求出之 $f(5\times n,2)$ 一般式。

【探究與證明】

由遞回式 $f(m\times n,k)=\sum_{i=0}^{k}C_{k-i}^{m-1}f(m\times n-1,i)+\sum_{j=0}^{k}C_{k-j}^{n-1}f(n\times m-1,j)$

有 $f(5\times n,2)=\sum_{i=0}^{2}C_{2-i}^{4}f(5\times n-1,i)+\sum_{j=0}^{2}C_{2-j}^{n-1}f(n\times 4,j)$

代入之前所得之所有公式得： $f(5\times n,2)-f(5\times n-1,2)=\dfrac{(n-1)n(n+1)(n+2)(8n-11)}{4}$

再來利用遞迴關係求出 $f(5\times n,2)$

$$\{f(5\times n,2)-f(5\times n-1,2)\}+...+\{f(5\times 2,2)-f(5\times 1,2)\}=\sum_{d=1}^{n}\frac{(d-1)d(d+1)(d+2)(8d-11)}{4}$$

$$f(5\times n,2)=\sum_{d=1}^{n}\frac{(d-1)d(d+1)(d+2)(8d-11)}{4}=\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)(4n-5)}{12}$$

故 $f(5\times n,2)=\dfrac{(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)(4n-5)}{12}$

(2)數學歸納法證明：

(a) 當 $k=1$ 時，則 $f(5\times 1,2)=0$

(b) 設 $k=n-1$ 時成立，即 $f(5\times n-1,2)=\dfrac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(4n-9)}{12}$

(c) 則 $k=n$ 時， $f(5\times n,2)=f(5\times n-1,2)+\dfrac{(n-1)n(n+1)(n+2)(8n-11)}{4}$

$=\dfrac{(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)(4n-5)}{12}$ 即 $k=n$ 時，也成立

故由數學歸納法：對任意 $n\in N$，有 $f(5\times n,2)=\dfrac{(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)(4n-5)}{12}$。

得證。

有了上述的探究與論證基礎，接下來我們針對前面的【猜想二】進行證明。

5. 完成猜想二之論證：即證明 $f(m\times n,k)$ 為 n 的 m+k-1 次多項式。

【證明】

我們把 n 作為變數，並藉由定理一。可知：

$$f(m\times n,k)=\sum_{i=0}^{k}C_{k-i}^{m-1}f(m\times n-1,i)+\sum_{j=0}^{k}C_{k-j}^{n-1}f(n\times m-1,j)$$

得 $f(m\times n,k)-f(m\times n-1,k)=f(n\times m-1,k)+\sum_{i=0}^{k-1}C_{k-i}^{m-1}f(m\times n-1,i)+\sum_{j=0}^{k-1}C_{k-j}^{n-1}f(n\times m-1,j)$

又 $f(m\times n,k)=\sum_{i=1}^{n}\{f(m\times i,k)-f(m\times i-1,k)\}$

故 $f(m\times n,k)=\sum_{i=1}^{n}\{f(n\times m-1,k)+\sum_{i=0}^{k-1}C_{k-i}^{m-1}f(m\times n-1,i)+\sum_{j=0}^{k-1}C_{k-j}^{n-1}f(n\times m-1,j)\}$

$$\deg_n\{f(m\times n,k)\}=\deg_n\{\sum_{i=1}^{n}\{f(n\times m-1,k)+\sum_{i=0}^{k-1}C_{k-i}^{m-1}f(m\times n-1,i)+\sum_{j=0}^{k-1}C_{k-j}^{n-1}f(n\times m-1,j)\}\}$$

假設 $s\le m-1$， $\deg_n\{f(s\times n,k)\}=s+k-1$ 成立

則 $\deg_n\{f(m\times n,k)\}=\deg_n\{\sum_{i=1}^{n}\{f(m\times n-1,k-1)\}\}=m+k-1$

故由數學歸納法，我們可以證明猜想二的正確性。

透過以上的探究與數學歸納法論證，我們可以歸納整理出以下的【定理四】:

【定理四】 若 k 個障礙物放置在方格陣列 $m\times n$ 中，從 S 出發到達 F 的捷徑走法數為 $f(m\times n,k)$ ，則 $f(m\times n,k)$ 為以 n 為變數的多項式且其最高次為 $m+k-1$。

(五)方格陣列 $m\times n$ 中 2 個障礙物之捷徑走法數 $f(m\times n,2)$ 的一般式之猜想與證明

1.在前面(四)裡的討論過程，已經算出並且證明 $f(i\times n,2)$ 的值($i=2,3,4,5$)的一般式，如下：

$$f(2\times n,2)=\frac{(n-1)n(n-2)}{2}$$

$$f(3\times n,2)=\frac{(n-1)n(n+1)(2n-3)}{2}$$

$$f(4\times n,2)=\frac{n(n-1)(n+1)(n+2)(3n-4)}{4}$$

$$f(5\times n,2)=\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)(4n-5)}{12}$$

2.透過 $f(i\times n,2)$ 的值($i=2,3,4,5$)的一般式之結果，我們猜想 $f(m\times n,2)$ 的值為

$$\frac{(n-1)n(n+1)...(n+m-2)\{(m-1)n-m\}}{2(m-2)!}\ ,$$

即 $f(m\times n,2)=\dfrac{(n-1)n(n+1)...(n+m-2)\{(m-1)n-m\}}{2(m-2)!}=\dfrac{(n+m-2)!(mn-m-n)}{2(m-2)!(n-2)!}$

【證明】利用數學歸納法證明：

(1)論證初始值的正確：

由前面(三)裡的證明結果，已說明 $f(i\times n,2)=\dfrac{(n+i-2)!(in-i-n)}{2(i-2)!(n-2)!}$(其中 $i=2,3,4,5$)的正確性。

(2)再論證具有延續性：

(a)假設當 $t\le m-1$ 時， $f(t\times n,2)=\dfrac{(n+t-2)!(tn-t-n)}{2(t-2)!(n-2)!}$

(b)利用【定理一】的遞迴式 $f(m\times n,k)=\sum_{i=0}^{k}C_{k-i}^{m-1}f(m\times n-1,i)+\sum_{j=0}^{k}C_{k-j}^{n-1}f(n\times m-1,j)$

可以得到： $f(m\times n,2)=\sum_{i=0}^{2}C_{2-i}^{m-1}f(m\times n-1,i)+\sum_{j=0}^{2}C_{2-j}^{n-1}f(n\times m-1,j)$

$$=C_2^{m-1}f(m\times n-1,0)+C_1^{m-1}f(m\times n-1,1)+C_0^{m-1}f(m\times n-1,2)+C_2^{n-1}f(n\times m-1,0)$$

$$+C_1^{n-1}f(n\times m-1,1)+C_0^{n-1}f(n\times m-1,2)$$

$$=f(m\times n-1,2)+f(n\times m-1,2)+\frac{(m+n-3)!(4mn-5m-5n+4)}{2(m-2)!(n-2)!}$$

此時，不妨設 $m\ge n$ ，則

$$f(m\times n,2)=f(m\times n-1,2)+f(m-1\times n,2)+\frac{(m+n-3)!(4mn-5m-5n+4)}{2(m-2)!(n-2)!}$$

$$=\frac{(n+m-3)!(mn-2m-n+1)}{2(m-2)!(n-3)!}+\frac{(n+m-3)!(mn-m-2n+1)}{2(m-3)!(n-2)!}+\frac{(m+n-3)!(4mn-5m-5n+4)}{2(m-2)!(n-2)!}$$

$$=\frac{(n+m-2)!(mn-m-n)}{2(m-2)!(n-2)!}$$

故由數學歸納法可知 $f(m\times n,2)=\dfrac{(n+m-2)!(mn-m-n)}{2(m-2)!(n-2)!}$

因此，我們綜合上述過程的論證結果整理成【定理五】。

> 【定理五】
>
> 若 2 個障礙物放置在方格陣列 $m\times n$ 中，則從 S 出發到達 F 的捷徑走法數為
>
> $f(m\times n,2)=\dfrac{(n+m-2)!(mn-m-n)}{2(m-2)!(n-2)!}$ ， $\forall m,n\in N$ 。

(六) 方格陣列 $m\times n$ 中 3 個障礙物之捷徑走法數 $f(m\times n,3)$ 的探究過程

1. 首先，我們再利用【定理三】中的遞迴式

$$f(m\times n,k)=\sum_{i=0}^{k}C_{k-i}^{m-1}f(m\times n-1,i)+\sum_{j=0}^{k}C_{k-j}^{n-1}f(n\times m-1,j)$$

可以得到： $f(m\times n,3)=\sum_{i=0}^{3}C_{3-i}^{m-1}f(m\times n-1,i)+\sum_{j=0}^{3}C_{3-j}^{n-1}f(n\times m-1,j)$

$$=C_{3}^{m-1}f(m\times n-1,0)+C_{2}^{m-1}f(m\times n-1,1)+C_{1}^{m-1}f(m\times n-1,2)+C_{0}^{m-1}f(m\times n-1,3)$$

$$+C_{3}^{n-1}f(n\times m-1,0)+C_{2}^{n-1}f(n\times m-1,1)+C_{1}^{n-1}f(n\times m-1,2)+C_{0}^{n-1}f(n\times m-1,3)$$

$$=f(m\times n-1,3)+f(n\times m-1,3)$$
$$+\frac{(m+n-3)!}{6(m-2)!(n-2)!}\{6m^2n^2-15mn^2-15m^2n+10m^2+10n^2-8m-8n+24mn\}$$

令 $g(m,n)=\frac{(m+n-3)!}{6(m-2)!(n-2)!}\{6m^2n^2-15mn^2-15m^2n+10m^2+10n^2-8m-8n+24mn\}$

則 $f(m\times n,3)=f(m\times n-1,3)+f(n\times m-1,3)+g(m,n)$

$$f(m\times n,3)-f(m\times n-1,3)=f(n\times m-1,3)+g(m,n)$$

$$f(m\times n,3)=\sum_{d=1}^{n}f(m\times d,3)-f(m\times d-1,3)=\sum_{d=1}^{n}\{f(n\times m-1,3)+g(m,n)\}$$

這裡我們將 $m=3,4,5$ 分別帶入，以找出 $f(m\times n,3)$ 一般式的規律。

(1) 當 $m=3$ 時，求出 $f(m\times n,3)$ 的一般式

【探討與證明】

$$f(3\times n,3)=\sum_{d=1}^{n}\{f(d\times 2,3)+g(3,d)\}$$

利用 $f(2\times n,k)=\frac{n(n-1)...(n-k)}{k!}$ ，可得：

$$f(3\times n,3)=\sum_{d=1}^{n}\{\frac{d(d-1)(d-2)(d-3)}{6}+\frac{d(d-1)(19d^2-71d+66)}{6}\}$$

整理得， $f(3\times n,3)=\frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(2n-3)}{3}$

(2) 當 $m=4$ 時，求出 $f(m\times n,3)$ 的一般式

【探討與證明】

$$f(4\times n,3)=\sum_{d=1}^{n}\{f(d\times 3,3)+g(4,d)\}$$

利用 $f(2\times n,k)=\dfrac{n(n-1)...(n-k)}{k!}$ ，可得：

$$f(4\times n,3)=\frac{1}{6}\sum_{d=1}^{n}\{2(d-2)(d-1)d(d+1)(2d-3)+(d+1)d(d-1)(23d^2-76d+64)\}$$

得 $f(4\times n,3)=\dfrac{(n-1)n(n+1)(n+2)(3n-5)(3n-4)}{12}$

(3) 當 $m=5$ 時，求出 $f(m\times n,3)$ 的一般式

【探討與證明】

$$f(5\times n,3)=\sum_{d=1}^{n}\{f(d\times 4,3)+g(5,d)\}$$

$$f(5\times n,3)=\sum_{d=1}^{n}\{\frac{(d-1)d(d+1)(d+2)(3d-5)(3d-4)}{12}+g(5,d)\}$$

整理得， $f(5\times n,3)=\dfrac{(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)(4n-5)(2n-3)}{18}$

2. $f(m\times n,3)$ 之猜想與證明

透過上述 $f(i\times n,3)$ 的值($i=3,4,5$)的一般式之結果，如下：

(1)前面已經算出並且證明， $f(i\times n,3)$ 的值($i=3,4,5$)

$$f(3\times n,3)=\frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(2n-3)}{3}=\frac{(n-1)n(n+1)(2n-3)(2n-4)}{6}$$

$$f(4\times n,3)=\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)(3n-4)(3n-5)}{12}$$

$$f(5\times n,3)=\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)(4n-5)(2n-3)}{18}=\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)(4n-5)(4n-6)}{36}$$

(2)由此，我們猜想 $f(m\times n,3)$ 的值為 $\dfrac{(n-1)n(n+1)...(n+m-2)[(m-1)n-m][(m-1)n-m-1]}{6(m-2)!}$ ，即

$$f(m\times n,3)=\frac{(n+m-2)!(mn-m-n)(mn-m-n-1)}{6(m-2)!(n-2)!}$$

(3)數學歸納法證明：

(a)論證初始值的正確：

由前面的探究與證明之結果，已說明 $f(i\times n,3)=\dfrac{(n+i-2)!(in-i-n)(in-i-n-1)}{6(i-2)!(n-2)!}$

(其中 $i=3,4,5$)的正確性

(b)再論證具有延續性：假設當$t\le m-1$時，

$$f(t\times n,3)==\frac{(n+t-2)!(tn-t-n)(tn-t-n-1)}{6(t-2)!(n-2)!}$$

利用【定理三】中的遞迴式

$$f(m\times n,k)=\sum_{i=0}^{k}C_{k-i}^{m-1}f(m\times n-1,i)+\sum_{j=0}^{k}C_{k-j}^{n-1}f(n\times m-1,j)$$

可以得到：

$$f(m\times n,3)=\sum_{i=0}^{3}C_{3-i}^{m-1}f(m\times n-1,i)+\sum_{j=0}^{3}C_{3-j}^{n-1}f(n\times m-1,j)$$

$$=f(m\times n-1,3)+f(n\times m-1,3)$$

$$+\frac{(m+n-3)!}{6(m-2)!(n-2)!}\{6m^2n^2-15mn^2-15m^2n+10m^2+10n^2-8m-8n+24mn\}$$

此時，不妨設$m\ge n$，則

$$f(m\times n,3)$$

$$=\frac{(n+m-3)!(mn-2m-n+1)(mn-2m-n)}{6(m-2)!(n-3)!}+\frac{(n+m-3)!(mn-2n-m+1)(mn-2n-m)}{6(m-3)!(n-2)!}$$

$$+\frac{(m+n-3)!}{6(m-2)!(n-2)!}\{6m^2n^2-15mn^2-15m^2n+10m^2+10n^2-8m-8n+24mn\}$$

$$=\frac{(n+m-2)!(mn-m-n)(mn-m-n-1)}{6(m-2)!(n-2)!}$$

故由數學歸納法可知 $f(m\times n,3)=\dfrac{(n+m-2)!(mn-m-n)(mn-m-n-1)}{6(m-2)!(n-2)!}$。得證。

因此，我們綜合上述過程的論證結果整理成【定理六】。

【定理六】

若 3 個障礙物放置在方格陣列$m\times n$中，則從 S 出發到達 F 的捷徑走法數為

$f(m\times n,3)=\dfrac{(n+m-2)!(mn-m-n)(mn-m-n-1)}{6(m-2)!(n-2)!}$，$\forall m,n\in N$。

(七) 方格陣列 $f(m\times n,k)$的探究過程

1. 前面已經算出並且證明，$f(m\times n,k)$的值($k=0,1,2,3$)

$f(m\times n,0)=\dfrac{(m+n-2)!}{(m-1)!(n-1)!}$，$f(m\times n,1)=\dfrac{(n+m-2)!}{(n-2)!(m-2)!}$，$f(m\times n,2)=\dfrac{(n+m-2)!(mn-m-n)}{2(m-2)!(n-2)!}$

$$f(m\times n,3)=\frac{(n+m-2)!(mn-m-n)(mn-m-n-1)}{6(m-2)!(n-2)!}$$

2. 由此，我們猜想 $f(m\times n,k)$ 的值為 $\frac{(n+m-2)!(mn-m-n)!}{(m-2)!(n-2)!(mn-m-n-k+1)!k!}$ ，即

$$f(m\times n,k)=\frac{(n+m-2)!(mn-m-n)!}{(m-2)!(n-2)!(mn-m-n-k+1)!k!}=\frac{(n+m-2)!(mn-m-n+1)!}{(m-1)!(n-1)!(mn-m-n-k+1)!k!}$$

$=C_{m-1}^{m+n-2}C_k^{mn-m-n+1}$(其中， $k\in N_0$)

3. 數學歸納法證明：

(a) 第一點已說明 $f(m\times n,k)=C_{m-1}^{m+n-2}C_k^{mn-m-n+1}$(其中 $k=0,1,2,3$)的正確性

(b) 假設當 $t\le m-1$ 時， $f(t\times n,k)=C_{t-1}^{t+n-2}C_k^{tn-t-n+1}$

(c) 利用【定理一】 $f(m\times n,k)=\sum_{i=0}^{k}C_{k-i}^{m-1}f(m\times n-1,i)+\sum_{j=0}^{k}C_{k-j}^{n-1}f(n\times m-1,j)$

不妨設 $m\ge n$ ，則

$$f(m\times n,k)=\sum_{i=0}^{k}C_{k-i}^{m-1}f(m\times n-1,i)+\sum_{j=0}^{k}C_{k-j}^{n-1}f(n\times m-1,j)$$

$$f(m\times n,k)=\sum_{i=0}^{k}C_{k-i}^{m-1}C_{m-1}^{m+n-3}C_k^{mn-2m-n+2}+\sum_{j=0}^{k}C_{k-j}^{n-1}C_{n-1}^{m+n-3}C_k^{mn-m-2n+2}$$

整理得， $f(m\times n,k)=C_{m-1}^{m+n-3}\sum_{i=0}^{k}C_{k-i}^{m-1}C_k^{mn-2m-n+2}+C_{n-1}^{m+n-3}\sum_{j=0}^{k}C_{k-j}^{n-1}C_k^{mn-m-2n+2}$

由 Vandermond 恆等式，有

$$\sum_{i=0}^{k}C_{k-i}^{m-1}C_i^{mn-2m-n+2}=C_k^{(m-1)+(mn-2m-n+2)}=C_k^{mn-m-n+1}$$

$$\sum_{j=0}^{k}C_{k-j}^{n-1}C_j^{mn-2n-m+2}=C_k^{(n-1)+(mn-2n-m+2)}=C_k^{mn-m-n+1}$$

故 $f(m\times n,k)=C_{m-1}^{m+n-3}C_k^{mn-m-n+1}+C_{n-1}^{m+n-3}C_k^{mn-m-n+1}$

$$f(m\times n,k)=C_k^{mn-m-n+1}(C_{m-1}^{m+n-3}+C_{n-1}^{m+n-3})$$

整理得， $f(m\times n,k)=C_k^{mn-m-n+1}\frac{(m+n-2)!}{(m-1)!(n-1)!}=C_{m-1}^{m+n-2}C_k^{mn-m-n+1}$

故由數學歸納法可知： $f(m\times n,k)=C_{m-1}^{m+n-2}C_k^{mn-m-n+1}$ 。我們將之稱為【定理七】

【定理七】

若k個障礙物放置在方格陣列m×n中，則從S出發到達F的捷徑走法數為

$$f(m\times n,k)=C_{m-1}^{m+n-2}C_{k}^{mn-m-n+1}$$

(八) $P(m\times n,k)$ 之探討

1.由定義及【定理七】，可得：

$$P(m\times n,k)=\frac{f(m\times n,k)}{C_k^{mn}f(m\times n,0)}=\frac{C_{m-1}^{m+n-2}C_k^{mn-m-n+1}}{C_k^{mn}C_{m-1}^{m+n-2}}=\frac{C_k^{mn-m-n+1}}{C_k^{mn}}=\frac{C_k^{(m-1)(n-1)}}{C_k^{mn}}=\frac{\dfrac{[(m-1)(n-1)]!}{[(m-1)(n-1)-k]!}}{\dfrac{mn!}{(mn-k)!}}$$

$$=\frac{\dfrac{(mn-k)!}{[(m-1)(n-1)-k]!}}{\dfrac{mn!}{[(m-1)(n-1)]!}}=\frac{\dfrac{(mn-k)!}{[(m-1)(n-1)-k]!(m+n-1)!}}{\dfrac{mn!}{[(m-1)(n-1)]!(m+n-1)!}}=\frac{C_{m+n-1}^{mn-k}}{C_{m+n-1}^{mn}}$$ 。我們將之稱為【定理八】

四、 探討 $f(m\times n\times\ell,k)$ 與 $P(m\times n\times\ell,k)$ 一般式

(一) 遞迴式：依據前面所探討 $f(m\times n,k)$ 一般式的過程，我們先找尋 $f(m\times n\times\ell,k)$ 的遞迴式

$$f(m\times n\times\ell,k)=\sum_{i=0}^{k}C_{k-i}^{m\ell-1}f(m\times n-1\times\ell,i)$$

$$+\sum_{j=0}^{k}C_{k-j}^{n\ell-1}f(m-1\times n\times\ell,j)+\sum_{h=0}^{k}C_{k-h}^{mn-1}f(m\times n\times\ell-1,h)$$

以下我們簡寫成 $f(m\times n\times\ell,k)=\{\sum_{i=0}^{k}C_{k-i}^{m\ell-1}f(m\times n-1\times\ell,i)\}_{cyc}$

(二) $f(m\times n\times 2,k)$ 之探究過程

1. $f(2\times n\times 2,k)$ 的一般式探討：

(1) 整理 $f(2\times n\times 2,k)$ 遞迴式：

$$f(2\times n\times 2,k)=\sum_{i=0}^{k}C_{k-i}^{3}f(2\times n-1\times 2,i)+2\sum_{j=0}^{k}C_{k-j}^{2n-1}f(2\times n\times 1,j)$$

整理得， $f(2\times n\times 2,k)=\sum_{i=0}^{k}C_{k-i}^{3}f(2\times n-1\times 2,i)+2\sum_{j=0}^{k}C_{k-j}^{2n-1}C_1^nC_k^{n-1}$

由 Vandermonde 可得： $f(2\times n\times 2,k)=\sum_{i=0}^{k}C_{k-i}^{3}f(2\times n-1\times 2,i)+2C_1^nC_k^{3n-2}$

(2) 當 k=1 時： $f(2\times n\times 2,1)=\sum_{i=0}^{1} C_{1-i}^{3} f(2\times n-1\times 2,i)+2C_1^nC_1^{3n-2}$

得 $f(2\times n\times 2,1)=\sum_{d=0}^{n} f(2\times d\times 2,1)-f(2\times d-1\times 2,1)=\sum_{d=0}^{n} 9d^2-7d=n(n+1)(3n-2)$

(3) k=2 時： $f(2\times n\times 2,2)=\sum_{i=0}^{2} C_{2-i}^{3} f(2\times n-1\times 2,i)+2C_1^nC_2^{3n-2}$

整理得， $f(2\times n\times 2,2)=\dfrac{3(n-1)n(n+1)(3n-2)}{2}$

(4) k=3 時： $f(2\times n\times 2,3)=\sum_{i=0}^{3} C_{3-i}^{3} f(2\times n-1\times 2,i)+2C_1^nC_3^{3n-2}$

$f(2\times n\times 2,3)-f(2\times n-1\times 2,3)$

$=C_1^3 f(2\times n-1\times 2,2)+C_2^3 f(2\times n-1\times 2,1)+C_3^3 f(2\times n-1\times 2,0)+2C_1^nC_3^{3n-2}$

$=\dfrac{3n(n-1)(15n^2-39n+26)}{2}$

整理得， $f(2\times n\times 2,3)=\sum_{d=0}^{n} f(2\times d\times 2,3)-f(2\times d-1\times 2,3)=\sum_{d=0}^{n}\dfrac{3d(d-1)(15d^2-39d+26)}{2}$

$=\dfrac{(n-1)n(n+1)(3n-4)(3n-2)}{2}$

(5) 猜想 $f(2\times n\times 2,k)$ 一般式：

由 $f(2\times n\times 2,1)=n(n+1)(3n-2)$

$f(2\times n\times 2,2)=\dfrac{3(n-1)n(n+1)(3n-2)}{2}=\dfrac{n(n+1)(3n-2)(3n-3)}{2}$

$f(2\times n\times 2,3)=\dfrac{(n-1)n(n+1)(3n-4)(3n-2)}{2}=\dfrac{n(n+1)(3n-2)(3n-3)(3n-4)}{6}$

我們猜想：

$f(2\times n\times 2,k)=\dfrac{n(n+1)(3n-2)(3n-3)...(3n-k-1)}{k!}=\dfrac{n(n+1)(3n-2)!}{k!(3n-k-2)!}=n(n+1)C_k^{3n-2}$

即 $f(2\times n\times 2,k)=\dfrac{n(n+1)(3n-2)!}{k!(3n-k-2)!}$

(6) 數學歸納法證明：

1. 由(4)，已經確立 $f(2\times n\times 2,k)=\dfrac{n(n+1)(3n-2)!}{k!(3n-k-2)!}$，k=1,2,3 的正確性。

2. 假設當 $t<n$ 時， $f(2\times t\times 2,k)=\dfrac{t(t+1)(3t-2)!}{k!(3t-k-2)!}$ 。

3. 則 $f(2\times n\times 2,k)=\sum_{i=0}^{k}C_{k-i}^{3}f(2\times n-1\times 2,i)+2C_1^nC_k^{3n-2}$

$\sum_{i=0}^{k}C_{k-i}^{3}n(n\text{-}1)C_k^{3n\text{-}5}+2C_1^nC_k^{3n-2}$

$=n(n\text{-}1)C_k^{3n\text{-}2}+2nC_k^{3n-2}$(由 Vandermonde)$=n(n+1)C_k^{3n\text{-}2}=f(2\times n\times 2,k)$

4. 故由數學歸納法證明： $f(2\times n\times 2,k)=\dfrac{n(n+1)(3n-2)!}{k!(3n-k-2)!}$

2. $f(3\times n\times 2,k)$的一般式探討：

(1) 整理 $f(3\times n\times 2,k)$ 遞迴式：

$f(3\times n\times 2,k)$

$$=\sum_{i=0}^{k}C_{k-i}^{5}f(3\times n-1\times 2,i)+\sum_{j=0}^{k}C_{k-j}^{2n-1}f(2\times n\times 2,j)+\sum_{h=0}^{k}C_{k-h}^{3n-1}f(3\times n\times 1,h)$$

$$=\sum_{i=0}^{k}C_{k-i}^{5}f(3\times n-1\times 2,i)+n(n+1)C_k^{5n\text{-}3}+C_2^{n+1}C_k^{5n-3}\text{(Vandermonde)}$$

$$=\sum_{i=0}^{k}C_{k-i}^{5}f(3\times n-1\times 2,i)+\frac{3}{2}n(n+1)C_k^{5n-3}$$

故 $f(3\times n\times 2,k)=\sum_{i=0}^{k}C_{k-i}^{5}f(3\times n-1\times 2,i)+\dfrac{3}{2}n(n+1)C_k^{5n-3}$

(2) 觀察並猜想：由上式末項C_k^{5n-3}，我們猜想 $f(3\times n\times 2,k)$的一般式中，可能存在著此一元素。

故我們令 $f(3\times n\times 2,k)=g(n)\cdot C_k^{5n-3}$，代入整理得： $g(n)=g(n\text{-}1)+\dfrac{3}{2}n(n+1)$

$$g(n)=\sum_{d=0}^{n}g(n)\text{-}g(n\text{-}1)=\sum_{d=0}^{n}\frac{3}{2}n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{2}$$

所以 $f(3\times n\times 2,k)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{4}C_k^{5n-3}$

3. $f(4\times n\times 2,k)$的一般式探討：

(1) 整理 $f(4\times n\times 2,k)$ 遞迴式：

$f(4\times n\times 2,k)$

$$=\sum_{i=0}^{k}C_{k-i}^{7}f(4\times n-1\times 2,i)+\sum_{j=0}^{k}C_{k-j}^{2n-1}f(3\times n\times 2,j)+\sum_{h=0}^{k}C_{k-h}^{4n-1}f(4\times n\times 1,h)$$

$$=\sum_{i=0}^{k} C_{k-i}^{7} f(4\times n-1\times 2,i)+\frac{n(n+1)(n+2)}{2} C_k^{7n-4}+C_k^{7n-4} C_3^{n+2} \text{ (Vandermonde)}$$

(2) 觀察並猜想：由 $f(3\times n\times 2,k)$ 的探究過程我們確信其一般式存在 C_k^{7n-4} 。

故我們令 $f(4\times n\times 2,k)=g(n)\cdot C_k^{7n-4}$

代入整理得： $f(4\times n\times 2,k)=g(n)\cdot C_k^{7n-4}$

$$g(n)\cdot C_k^{7n-4}=g(n\text{-}1)C_k^{7n-4}+\frac{n(n+1)(n+2)}{2}C_k^{7n-4}+C_k^{7n-4}C_3^{n+2}$$

$$g(n)\text{-}g(n\text{-}1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{2}+C_3^{n+2}=\frac{2n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$g(n)=\sum_{d=0}^{n}\frac{2d(d+1)(d+2)}{3}=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$$

所以 $f(4\times n\times 2,k)=\dfrac{6n(n+1)(n+2)(n+3)}{6}C_k^{7n-4}$

4. $f(m\times n\times 2,k)$ 之猜想與證明：

(1) 觀察以求出的一般式，我們猜想： $f(m\times n\times 2,k)=\dfrac{(n+m\text{-}1)!}{(n\text{-}1)!(m\text{-}1)!}C_k^{2mn\text{-}m\text{-}n}$

【證明】

$$\sum_{i=0}^{k}C_{k-i}^{2m-1}\frac{(n+m\text{-}2)!}{(n\text{-}2)!(m\text{-}1)!}C_i^{2mn\text{-}3m\text{-}n+1}+\sum_{j=0}^{k}C_{k-j}^{2n-1}\frac{(n+m\text{-}2)!}{(n\text{-}1)!(m\text{-}2)!}C_j^{2mn\text{-}m\text{-}3n+1}+\sum_{h=0}^{k}C_{k-h}^{mn-1}C_{m-1}^{m+n-2}C_h^{mn-m-n+1}$$

$$=\frac{(n+m\text{-}2)!}{(n\text{-}2)!(m\text{-}1)!}C_k^{2mn-m-n}+\frac{(n+m\text{-}2)!}{(n\text{-}1)!(m\text{-}2)!}C_k^{2mn-m-n}+C_{m-1}^{m+n-2}C_k^{2mn-m-n}$$

$$=\frac{(n+m\text{-}1)!}{(n\text{-}1)!(m\text{-}1)!}C_k^{2mn-m-n}=f(m\times n\times 2,k)$$

(三) $f(m\times n\times \ell,k)$ 之猜想及證明

1. 由前面以求出的一般式，以及 *m,n,* ℓ 的對稱性，我們猜想

$$f(m\times n\times \ell,k)=\frac{(n+m+\ell\text{-}3)!}{(n\text{-}1)!(m\text{-}1)!(\ell\text{-}1)!}C_k^{mn\ell\text{-}m\text{-}n\text{-}\ell+2}$$

【證明】

$$\sum_{i=0}^{k}C_{k-i}^{m\ell-1}\frac{(n+m+\ell\text{-}4)!}{(n\text{-}2)!(m\text{-}1)!(\ell\text{-}1)!}C_i^{mn\ell\text{-}m\text{-}n\text{-}\ell-m\ell+3}+\sum_{j=0}^{k}C_{k-j}^{n\ell-1}\frac{(n+m+\ell\text{-}4)!}{(n\text{-}1)!(m\text{-}2)!(\ell\text{-}1)!}C_j^{mn\ell\text{-}m\text{-}n\text{-}\ell-nl+3}$$

$$+\sum_{h=0}^{k}\frac{(n+m+\ell\text{-}4)!}{(n\text{-}1)!(m\text{-}1)!(\ell\text{-}2)!}C_h^{mn\ell\text{-}m\text{-}n\text{-}mn\text{-}\ell+3}=\frac{(n+m+\ell\text{-}4)!}{(n\text{-}1)!(m\text{-}2)!(\ell\text{-}1)!}(n+m+\ell\text{-}3)C_k^{mn\ell\text{-}m\text{-}n\text{-}\ell+2}$$

$$=\frac{(n+m+\ell-3)!}{(n-1)!(m-1)!(\ell-1)!}C_k^{mn\ell-m-n-\ell+2}=f(m\times n\times\ell,k)$$

2. 由數學歸納法，可以證明 $f(m\times n\times\ell,k)=\frac{(n+m+\ell-3)!}{(n-1)!(m-1)!(\ell-1)!}C_k^{mn\ell-m-n-\ell+2}$，

我們將之定為【定理九】。

(四) $P(m\times n\times\ell,k)$

由通過率函數的定義，以及已求出的 $f(m\times n\times\ell,k)$ 一般式，可得：

$P(m\times n\times\ell,k)=\frac{C_k^{mn\ell-m-n-\ell+2}}{C_k^{mn\ell}}=\frac{C_{m+n+\ell-2}^{mn\ell-k}}{C_{m+n+\ell-2}^{mn\ell}}$，我們將之定為【定理十】。

五、探討 $f(m\times n,k)$ 與 $f(m\times n\times\ell,k)$ 函數的生成函數

(一)1 個障礙物在方格陣列 $m\times n$ 捷徑走法數的一般式之生成函數

1. 當 1 個障礙物在方格陣列 $m\times n$ 捷徑走法數 $f(m\times n,1)$ 之生成函數

【探討】

(1)單變數之生成函數

因為組合數列 C_k^n 的生成函數為 $f(x)=(1+x)^n$，即 $f(x)/[x^k]=C_k^n$

又 $f(m\times n,1)=\frac{(m+n-2)!}{(m-2)!(n-2)!}=n(n-1)C_{m-2}^{m+n-2}$

又組合數列 C_{m-2}^{m+n-2} 的生成函數為 $g(x)=(1+x)^{m+n-2}$，即 $g(x)/[x^{m-2}]=C_{m-2}^{m+n-2}$

因此，可推得數值 $f(m\times n,1)=\frac{(m+n-2)!}{(m-2)!(n-2)!}=n(n-1)C_{m-2}^{m+n-2}$ 的生成函數為

$h(x)=n(n-1)(1+x)^{m+n-2}$，即 $n(n-1)(1+x)^{m+n-2}/[x^{m-2}]=n(n-1)C_{m-2}^{m+n-2}$。

(2)雙變數之生成函數

由於單變數不方便觀察出其意義，故改用雙變數觀察

令 $u=n-1$，$v=m-1$

則 $f(m\times n,1)=\frac{(m+n-2)!}{(m-2)!(n-2)!}=(n-1)(m-1)C_{m-1}^{m+n-2}=uv(x+y)^{u+v}[x^u y^v]$

故 $f(m\times n,1)$ 的雙變數生成函數為 $\sum_{m,n\in N}f(m\times n,1)x^{m-1}y^{n-1}=(m-1)(n-1)(x+y)^{m+n-2}$。

由此我們可以看出：如果我們把原本的方格陣列轉換為路徑網，則此 $m\times n$ 路徑網之長與寬中所有路徑走法所構成的生成函數之乘積，即為 $f(m\times n,1)$ 之生成函數。

因此，可由已給定的 u,v 之值，求得 $f(m\times n,1)$ 之值。

(二) k 個障礙物在方格陣列 $2\times n$ 捷徑走法數的一般式之生成函數。

1. k 個障礙物在方格陣列 $2\times n$ 捷徑走法數 $f(2\times n,k)$ 之生成函數

【探討】

因為組合數列 C_k^n 的生成函數為 $f(x)=(1+x)^n$，即 $f(x)/[x^k]=C_k^n$

又 $f(2\times n,k)=\dfrac{n(n-1)...(n-k)}{k!}=nC_k^{n-1}$

又組合數列 nC_k^{n-1} 的生成函數為 $g(x)=n(1+x)^{n-1}$，即 $g(x)/[x^k]=nC_k^{n-1}$

因此，可推得數值 $f(2\times n,k)$ 的生成函數為 $n(1+x)^{n-1}$，即 $n(1+x)^{n-1}/[x^k]=nC_k^{n-1}$。

(三) k 個障礙物在方體陣列 $m\times n\times \ell$ 捷徑走法數的一般式之生成函數。

1. 由 $f(m\times n\times \ell,k)=\dfrac{(n+m+\ell-3)!}{(n-1)!(m-1)!(\ell-1)!}C_k^{mn\ell-m-n-\ell+2}$，

$$f(m\times n\times \ell,k)=\frac{(n+m+\ell-3)!}{(n-1)!(m+\ell-2)!}\frac{(m+\ell-2)!}{(m-1)!(\ell-1)!}C_k^{mn\ell-m-n-\ell+2}。$$

亦可利用前面的探討過程，求得其生成函數為：

$$(1+x)^{n+m+\ell-3}(1+y)^{m+\ell-2}(1+z)^{mn\ell-m-n-\ell+2}/[x^{n-1}y^{m-1}z^k]$$

且當 $\ell=1$ 時，即可得 $f(m\times n,k)$ 之生成函數為 $(1+x)^{n+m-2}(1+y)^{mn-m-n+1}/[x^{n-1}y^k]$

六、 研究結果與討論

(一) 【數學模式】

1.當 1 個障礙物在方格陣列 $m\times n$ 的方格 $(1,i)$ 中的捷徑走法數為

$C_{m-2}^{n+m-3}+C_{m-2}^{n+m-4}+C_{m-2}^{n+m-5}+...+C_{m-2}^{n-i+2}$ (i=1,2,3,…,n；j=1,2,3,…,m)。

2.遞迴關係式： $f(m\times n,1)=f(m-1\times n,1)+f(m\times n-1,1)+(m-1)C_{n-2}^{m+n-3}+(n-1)C_{m-2}^{m+n-3}$

(二) 【定理一】

若 1 個障礙物放置在方格陣列 $m\times n$ 中，則從 S 出發到達 F 的捷徑走法數為

$$f(m\times n,1)=\frac{(n-1)n(n+1)...(n+m-2)}{(m-2)!}=\frac{(n+m-2)!}{(n-2)!(m-2)!}，\forall m,n\in N。$$

(三) 【定理二】

若 k 個障礙物放置在方格陣列 $2\times n$ 中，則從 S 出發到達 F 的捷徑走法數為

$$f(2\times n,k)=\frac{n(n-1)...(n-k)}{k!}$$ ，$\forall k,n\in N$ 。

(四) 【定理三】

若 k 個障礙物放置在方格陣列 $m\times n$ 中，若從 S 出發到達 F 的捷徑走法數為 $f(m\times n,k)$ ，則 $f(m\times n,k)$ 滿足遞迴式

$$f(m\times n,k)=\sum_{i=0}^{k}C_{k-i}^{m-1}f(m\times n-1,i)+\sum_{j=0}^{k}C_{k-j}^{n-1}f(n\times m-1,j)$$ 。

(五) 【定理四】

若 k 個障礙物放置在方格陣列 $m\times n$ 中，從 S 出發到達 F 的捷徑走法數為 $f(m\times n,k)$，則 $f(m\times n,k)$ 為以 n 為變數的多項式且其最高次為 $m+k-1$。

(六) 【定理五】

若 2 個障礙物放置在方格陣列 $m\times n$ 中，則從 S 出發到達 F 的捷徑走法數為

$$f(m\times n,2)=\frac{(n+m-2)!(mn-m-n)}{2(m-2)!(n-2)!}$$ ，$\forall m,n\in N$ 。

(七) 【定理六】

若 3 個障礙物放置在方格陣列 $m\times n$ 中，則從 S 出發到達 F 的捷徑走法數為

$$f(m\times n,3)=\frac{(n+m-2)!(mn-m-n)(mn-m-n-1)}{6(m-2)!(n-2)!}$$ ，$\forall m,n\in N$ 。

(八) 【定理七】

若 k 個障礙物放置在方格陣列 $m\times n$ 中，則從 S 出發到達 F 的捷徑走法數為

$$f(m\times n,k)=C_{m-1}^{m+n-2}C_{k}^{mn-m-n+1}$$ ，$\forall m,n\in N$ 。

(九) 【定理八】

若 k 個障礙物放置在方格陣列 $m\times n$ 中，則從 S 出發到達 F 的通過率為

$$P(m\times n,k)=\frac{C_{k}^{(m-1)(n-1)}}{C_{k}^{mn}}$$ ，$\forall m,n\in N$ 。

(一〇) 【定理九】

若 k 個障礙物放置在方體陣列 $m\times n\times \ell$ 中，則從捷徑走法數之組合為

$$f(m\times n\times \ell,k)=\frac{(n+m+\ell-3)!}{(n-1)!(m-1)!(\ell-1)!}C_{k}^{mn\ell-m-n-\ell+2}$$ ，$\forall m,n\in N$ 。

(一一) 【定理十】

若 k 個障礙物放置在方體陣列 $m\times n\times \ell$ 中，則捷徑走法之通過率為

$$P(m\times n\times \ell,k)=\frac{C_{k}^{mn\ell-m-n-\ell+2}}{C_{k}^{mn\ell}}=\frac{C_{m+n+\ell-2}^{mn\ell-k}}{C_{m+n+\ell-2}^{mn\ell}}$$ ，$\forall m,n\in N$ 。

七、討論與應用

(一) 討論：

1.在探究的過程中，已建構一個數學模式，針對方格陣列 $m\times n$ 內有 k 個障礙物探討出具體的結果與定理，也探究出此種情形之一般式的遞迴關係。

2.捷徑走法函數 $f(m\times n\times \ell,k)$ (我們只討論 3 維，因為 2 維即是 $\ell=1$時)：由已證明的等式，可以得到： $f(m\times n\times \ell,k)=f(m\times n\times \ell,0)\cdot C_k^{mn\ell\text{-}m\text{-}n\text{-}\ell+2}$ ，也就是說，當 m,n,ℓ 固定的情況下， $f(m\times n\times \ell,k)$ 的極值發生在 $k=\left\lfloor \dfrac{mn\ell\text{-}m\text{-}n\text{-}\ell}{2} \right\rfloor+1$時，其中$\lfloor\ \rfloor$為地板函數。

3. .通過率函數 $P(m\times n\times \ell,k)$ (我們只討論 3 維，因為 2 維即是 $\ell=1$時)：由已證明的等式，可以得到： $P(m\times n\times \ell,k)=\dfrac{C_k^{mn\ell\text{-}m\text{-}n\text{-}\ell+2}}{C_k^{mn\ell}}=\dfrac{C_{m+n+\ell-2}^{mn\ell-k}}{C_{m+n+\ell-2}^{mn\ell}}$ ，我們可以明顯地看見，當 m,n,ℓ 固定的情況下，分子正在遞減。並且，因為

$$P(m\times n\times \ell,k)-P(m\times n\times \ell,k+1)=\frac{C_{m+n+\ell-2}^{mn\ell-k}}{C_{m+n+\ell-2}^{mn\ell}}-\frac{C_{m+n+\ell-2}^{mn\ell-k-1}}{C_{m+n+\ell-2}^{mn\ell}}=\frac{C_{m+n+\ell-3}^{mn\ell-k-1}}{C_{m+n+\ell-2}^{mn\ell}}$$

，所以若我們做出 $P(m\times n\times \ell,k)$ 對 k 的圖，其斜率的變化量為 $\dfrac{\Delta P}{\Delta k}=\dfrac{C_{m+n+\ell-3}^{mn\ell-k-1}}{C_{m+n+\ell-2}^{mn\ell}}$ ，其值會隨著 k 的增加而減少，故此圖為凸函數圖形。

(二) 應用：

本研究之探究過程與結果，可以運用至路徑走法的成功率、過關之通過機率、網路流通機制問題等各領域，亦可運用在電子流動的機率，更可以運用在抽象的事物上，像政府的決策成功率等等。

八、參考文獻

(一) 陳一理編著，新觀念數學叢書－組合 2011 年 4 月增訂版，建興出版社，120 頁～123 頁

(二) 張堯、冷崗松、沈文選著，奧賽經典－奧林匹克數學中的組合問題，2005 年 5 月初版，曉園出版社，53 頁～68 頁。

(三) 單墫、熊斌主編，新奧數教程－高三，凡異出版社，15 頁～20 頁。

(四) 嚴鎮軍、胡大同主編，國際數學奧林匹克大陸隊訓練教材，九章出版社，258 頁～261 頁。

(五) **Vandermonde's identity**，http://en.wikipedia.org/wiki/Vandermonde%27s_identity。

(六) **Gamma function**，，http://en.wikipedia.org/wiki/Vandermonde%27s_identity

【評語】040413

本作品從探究方格陣列 $2n$ 有 k 個障礙物導出一完整而簡潔捷徑走法數公式，分析透徹而完整，文中討論障礙數的所有可能情況做累加，計算不通過路徑比例後可求通過比率；利用計算函數 $f(m\times n, k)$ 與定理三的遞迴式很快可推出定理五與定理六，其中定理四是基本觀察且定理七是本文的重要結果。

文中所獲得的研究成果完整，成果也豐富。惟文中的生成函數需做一些修正。在未來的研究方向上若能深入研究（障礙物放在何處會使通過路徑最少）主題將是一極富挑戰且有趣的研究課題。