中華民國第55屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組　數學科

佳作

040412

方方正正

學校名稱：國立基隆女子高級中學

作者：	指導老師：
高二 劉倩妘 高二 林芓昀	郭仲祐

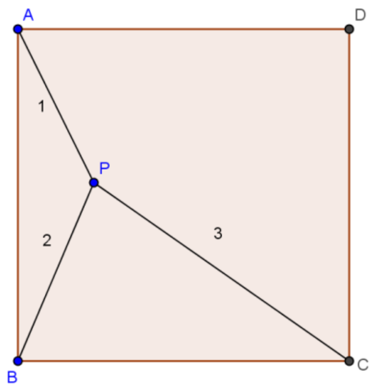
關鍵詞：正方形、旋轉、伸縮

摘要

原始問題：設 P 為正方形 ABCD 內部一點，且 P 到 A、 B 、C 的距離分別為 1、2、3，試求正方形的面積。利用三角函數的和差角公式即可解出此題，我們想了解的是：若到三頂點的距離改變，正方形是否仍存在？我們先將問題簡化，將最短距離設為 1，則距離變數將只剩下二個，再考慮只有兩種距離的情況，我們簡化問題至一個變數，利用平面旋轉變換，及 Geogebra 作圖猜測結果，成功利用作圖完成存在性證明。將此作法再推廣至三種距離的情況，並思考其他相關的四邊形：菱形、矩形、平行四邊形，發現皆能用旋轉伸縮變換處理。

壹、研究動機

高二上第三冊數學課本習題的其中一題讓我們對這個問題產生一些好奇，原本的題目如下：設 P 為正方形 ABCD 內部一點，且 P 到 A、 B 、C 的距離分別為 1、2、3，試求正方形的面積。



我們想了解內部三線段為任意長度時，是否能構成正方形？線段長度的排列是否影響構成正方形的原因？若正方形改成菱形、長方形、平行四邊形，是否仍可構成？若是正五邊形，是否仍存在。

貳、研究目的

一、平面上一定點，及三段固定長，找出正方形，使得三頂點至定點距離為此三段長，並找出此正方形存在條件。

二、平面上一定點，及三段固定長，找出菱形，使得三頂點至定點距離為此三段長，並找出此菱形存在條件。

三、平面上一定點，及三段固定長，找出矩形，使得三頂點至定點距離為此三段長，並找出此矩形存在條件。

四、平面上一定點，及三段固定長，找出平行四邊形，使得三頂點至定點距離為此三段長，並找出此平行四邊形存在條件。

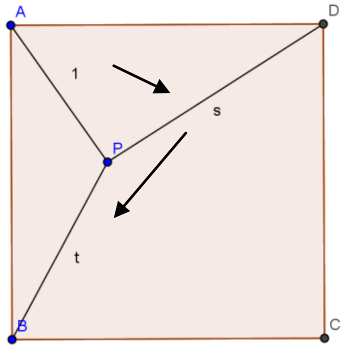
參、研究設備及器材

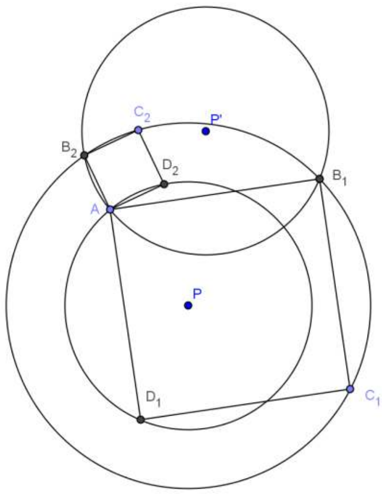
紙、筆、橡皮擦、黑板、粉筆、GeoGebra5、電腦、圓規、直尺。

肆、研究過程或方法

一、正方形：

若平面上一定點 P，給定三個距離 a, b, c，是否存在正方形使得其中三個頂點與 P 的距離為 a, b, c？不妨設最短長度為 1，另兩段長為 t 及 s。以下分成三段距離不等長及兩段等長兩種情形討論。為方便討論，我們稱呼 $1\ s\ t$ 正方形如下：中間線段為 1，依順時針順序，照定點至頂點距離，命名為 $1\ s\ t$。示意圖如下：





(一)到三頂點距離為 $1,\ t$

1. 順序為 $1\ t\ 1$：

若平面上有一定點 P，及三個距離為 $1, 1,\ t$，則：

(1)當 $1 \le t \le \sqrt{2}+1$ 時，存在 $1\ t\ 1$ 正方形，使得 P 至正方形三頂點的距離為 $1,\ t, 1$；其中當 $t=\sqrt{5}$ 時，有最大正方形，邊長為 2。

(2)當 $\sqrt{2}-1 \le t \le \sqrt{2}+1$ 時，$1\ t\ 1$ 正方形中心軌跡為一圓除一點。

作法：

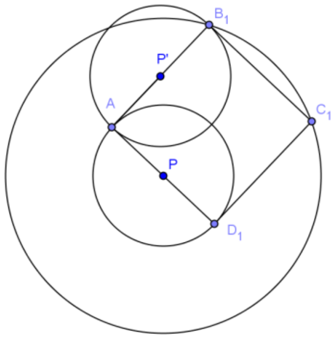
以 P 為圓心，作半徑為 1 及 t 的兩圓。在小圓上取任意一點 A，以 A 為旋轉中心，將 P 旋轉 $90°$ 至 P'。以 P' 為圓心，1 為半徑作圓，交大圓於 B_1, B_2。以 $\overline{AB_1}, \overline{AB_2}$ 為正方形的一邊分別作正方形 $AB_1C_1D_1, AB_2C_2D_2$，則兩正方形即為所求。 □

證明：

(1) 連接 $\overline{PA}, \overline{PD_1}, \overline{P'A}, \overline{P'B_1}$。在 $\Delta P'AB_1$ 和 ΔPAD_1 中，$\because \angle P'AP = \angle B_1AD_1 = 90°$，

$\therefore \angle P'AB_1 = \angle PAD_1$，又 $\overline{P'A} = \overline{PA}$，$\overline{AB_1} = \overline{AD_1}$，則 $\Delta P'AB_1 \cong \Delta PAD_1\,(SAS)$，$\overline{PD_1} = \overline{P'B_1} = 1$，

即D_1在小圓上。同理可證，D_2在小圓上。當大圓與P'圓內切時，大圓半徑$t=\sqrt{2}+1$，即$1\le t\le\sqrt{2}+1$，可作出所求正方形。

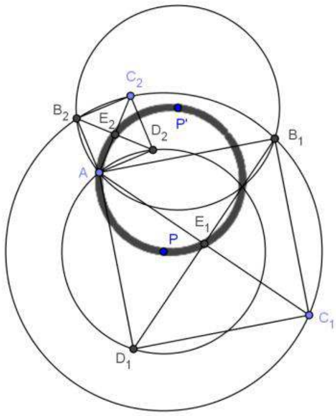


當$\overline{AB_1}$為P'圓的直徑時，$AB_1C_1D_1$為最大正方形，此時

$t=\sqrt{\overline{AB_1}^2+\overline{AP}^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，如圖所示。

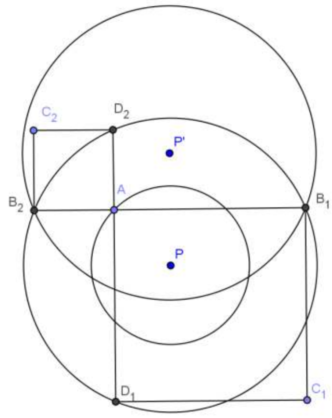
(2)當大圓與P'圓有交點時，才存在正方形。當大圓與P'圓內切，此時有最大半徑$t=\sqrt{2}+1$。

當大圓與P'圓外切，此時有最小半徑$t=\sqrt{2}-1$。



考慮大圓與P'圓的交點B_1,B_2，以$\overline{AB_1},\overline{AB_2}$為正方形的一邊，其中心分別為$E_1,E_2$。以A為伸縮旋轉中心，將$B_1$旋轉$-45^\circ$，伸縮係數為$\frac{\sqrt{2}}{2}$，結果為$E_1$。同理，$B_2$經相同的伸縮旋轉，結果為$E_2$。所以，當$\sqrt{2}-1\le t\le\sqrt{2}+1$，$B_1$及$B_2$繞行整個$P'$圓，$E_1$及$E_2$所形成的軌跡，可視為$P'$圓以A為伸縮旋轉中心，旋轉$-45^\circ$，伸縮係數為$\frac{\sqrt{2}}{2}$，結果為一圓。當$B_2$在A時，$E_2$不存在。所以形成的軌跡為一圓除一點。 □

2. 順序為 1 t t：



若平面上有一定點P，及三個距離為 1，t，t，則：

(1)當$t\ge1$時，存在 1 t t 正方形，使得P至正方形三頂點的距離為 1，t，t 。

(2)當$t\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$時，1 t t 正方形中心軌跡為一直線除一點。

作法：

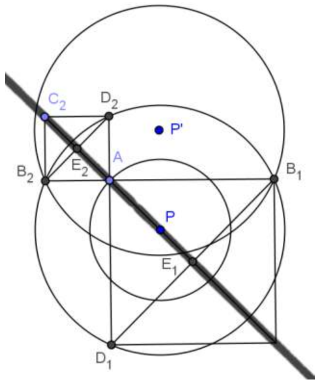
以P為圓心，作半徑為 1 及t的兩圓。在小圓上取任意一點A，以A為旋轉中心，將P旋轉90°至P'。以P'為圓心，t為半徑作圓，交大圓於B_1,B_2。以$\overline{AB_1},\overline{AB_2}$為正方形的一邊分別作正方形$AB_1C_1D_1,AB_2C_2D_2$，則兩正方形即為所求。 □

證明：

(1)連接$\overline{PA},\overline{PD_1},\overline{P'A},\overline{P'B_1}$。在$\Delta P'AB_1$和$\Delta PAD_1$中，$\because\angle P'AP=\angle B_1AD_1=90^\circ$，

$\therefore\angle P'AB_1=\angle PAD_1$，又$\overline{P'A}=\overline{PA},\overline{AB_1}=\overline{AD_1}$，則$\Delta P'AB_1\cong\Delta PAD_1(SAS)$，$\overline{PD_1}=\overline{P'B_1}=t$，

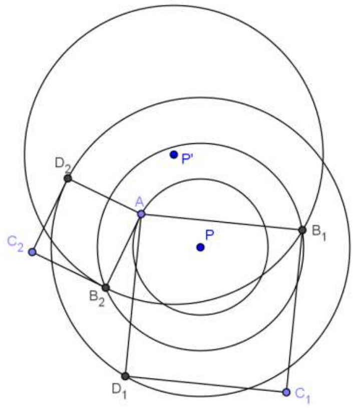
即 D_1 在大圓上。同理可證，D_2 在大圓上。



(2)考慮大圓與 P' 圓的交點 B_1, B_2，以 $\overline{AB_1}, \overline{AB_2}$ 為正方形的一邊，其中心分別為 E_1, E_2。以 A 為伸縮旋轉中心，將 B_1 旋轉 -45°，伸縮係數為 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，結果為 E_1。同理，B_2 經相同的伸縮旋轉，結果為 E_2。所以，當 $t \ge \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 時，B_1 及 B_2 在大圓與 P' 圓的根軸上跑動，E_1 及 E_2 所形成的軌跡，可視為根軸以 A 為伸縮旋轉中心，旋轉 -45°，伸縮係數為 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，結果為一直線。當 B_2 在 A 時，E_2 不存在。所以形成的軌跡為一直線除一點。 □

(二)到三頂點距離為 1, t, s

1. 順序為 1 t s



若平面上有一定點 P，及三個距離為 1, t, s，則：

(1)當 $1 < t < s \le t + \sqrt{2}$ 時，存在 1 t s 正方形，使得 P 至正方形三頂點的距離為 1, t, s；其中當 $s = \sqrt{t^2 + 2t + 2}$ 時，有最大正方形，邊長為 $t+1$。

(2)當 $\left|t - \sqrt{2}\right| \le s \le t + \sqrt{2}$ 時，1 t s 正方形中心軌跡為一圓。

作法：

以 P 為圓心，作半徑為 $1, t$ 及 s 的三圓。在小圓上取任意一點 A，以 A 為旋轉中心，將 P 旋轉 90° 至 P'。以 P' 為圓心，s 為半徑作圓，交中圓於 B_1, B_2。以 $\overline{AB_1}, \overline{AB_2}$ 為正方形的一邊分別作正方形 $AB_1C_1D_1, AB_2C_2D_2$，則兩正方形即為所求。 □

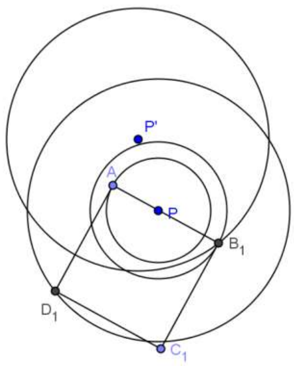
證明：

(1) 連接 $\overline{PA}, \overline{PD_1}, \overline{P'A}, \overline{P'B_1}$。在 $\Delta P'AB_1$ 和 ΔPAD_1 中，$\because \angle P'AP = \angle B_1AD_1 = 90^{\circ}$，

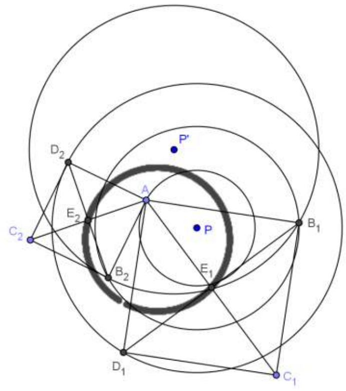
$\therefore \angle P'AB_1 = \angle PAD_1$，又 $\overline{P'A} = \overline{PA}$，$\overline{AB_1} = \overline{AD_1}$，則 $\Delta P'AB_1 \cong \Delta PAD_1\,(SAS)$，$\overline{PD_1} = \overline{P'B_1} = s$，即 D_1 在大圓上。同理可證，D_2 在大圓上。當中圓與 P' 圓內切時，大圓半徑 $s = t + \sqrt{2}$，即 $1 < t < s \le t + \sqrt{2}$，可作出所求正方形。

當 $\overline{AB_1}$ 通過 P 點時，$AB_1C_1D_1$ 為最大正方形，此時

$s = \sqrt{\overline{PA}^2 + \overline{AD_1}^2} = \sqrt{1^2 + (t+1)^2} = \sqrt{t^2 + 2t + 2}$，如圖所示。

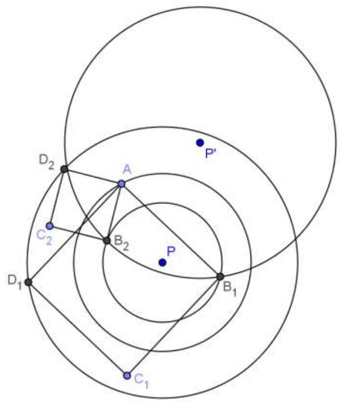


(2)當中圓與 P' 圓有交點時，才存在正方形。當 $t>\sqrt{2}$ ，中圓與 P' 圓內切，此時有最大半徑 $s=t+\sqrt{2}$，也有最小半徑 $s=t-\sqrt{2}$；當 $t<\sqrt{2}$ ，中圓與 P' 圓內切，此時有最大半徑 $s=t+\sqrt{2}$ ，中圓與 P' 圓外切，此時有最小半徑 $s=\sqrt{2}-t$ ； $t=\sqrt{2}$ ，中圓與 P' 圓內切，此時有最大半徑 $s=2\sqrt{2}$。因此，$\left|t-\sqrt{2}\right|\le s\le t+\sqrt{2}$ 時，有正方形存在。



考慮中圓與 P' 圓的交點 B_1,B_2 ，以 $\overline{AB_1},\overline{AB_2}$ 為正方形的一邊，其中心分別為 E_1,E_2。以 A 為伸縮旋轉中心，將 B_1 旋轉 -45° ，伸縮係數為 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，結果為 E_1。同理， B_2 經相同的伸縮旋轉，結果為 E_2。所以，當 $\left|t-\sqrt{2}\right|\le s\le t+\sqrt{2}$ ， B_1 及 B_2 繞行整個中圓， E_1 及 E_2 所形成的軌跡，可視為中圓以 A 為伸縮旋轉中心，旋轉 -45° ，伸縮係數為 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，結果為一圓。 □

2. 順序為 t 1 s



若平面上有一定點 P ，及三個距離為 1, t, s ，則：

(1)當 $1<t<s\le\sqrt{2}t+1$ 時，存在 t 1 s 正方形，使得 P 至正方形三頂點的距離為 1, t, s ；其中當 $s=\sqrt{2t^2+2t+1}$ 時，有最大正方形，邊長為 $t+1$。

(2)當 $\sqrt{2}t-1\le s\le\sqrt{2}t+1$ 時，t 1 s 正方形中心軌跡為一圓。

作法：

以 P 為圓心，作半徑為 1,t 及 s 的三圓。在中圓上取任意一點 A，以 A 為旋轉中心，將 P 旋轉 90° 至 P'。以 P' 為圓心， s 為半徑作圓，交小圓於 B_1,B_2。以 $\overline{AB_1},\overline{AB_2}$ 為正方形的一邊分別作正方形 $AB_1C_1D_1$, $AB_2C_2D_2$ ，則兩正方形即為所求。 □

證明：

(1) 連接 $\overline{PA},\overline{PD_1},\overline{P'A},\overline{P'B_1}$ 。在 $\Delta P'AB_1$ 和 ΔPAD_1 中， $\because \angle P'AP=\angle B_1AD_1=90^\circ$ ，

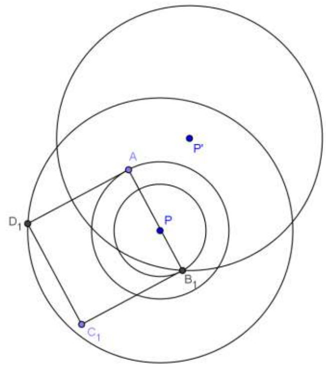
$\therefore \angle P'AB_1 = \angle PAD_1$，又 $\overline{P'A} = \overline{PA}$, $\overline{AB_1} = \overline{AD_1}$，則 $\Delta P'AB_1 \cong \Delta PAD_1\,(SAS)$，$\overline{PD_1} = \overline{P'B_1} = s$，

即 D_1 在大圓上。同理可證，D_2 在大圓上。當小圓與 P' 圓內切時，大圓半徑 $s = \sqrt{2}t + 1$，

即 $1 < t < s \le \sqrt{2}t + 1$，可作出所求正方形。

當 $\overline{AB_1}$ 通過 P 點時，$AB_1C_1D_1$ 為最大正方形，此時

$s = \sqrt{\overline{PA}^2 + \overline{AD_1}^2} = \sqrt{t^2 + (t+1)^2} = \sqrt{2t^2 + 2t + 1}$，如圖所示。



(2)當小圓與 P' 圓有交點時，才存在正方形。當小圓與 P' 圓內切，

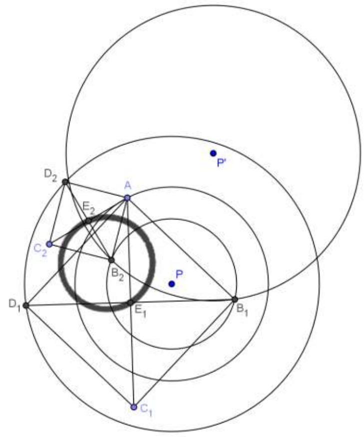
此時有最大半徑 $s = \sqrt{2}t + 1$。

當小圓與 P' 圓外切，次時有最小半徑 $s = \sqrt{2}t - 1$。

考慮小圓與 P' 圓的交點 B_1, B_2，以 $\overline{AB_1}, \overline{AB_2}$ 為正方形的一邊，其

中心分別為 E_1, E_2。以 A 為伸縮旋轉中心，將 B_1 旋轉 -45°，伸縮

係數為 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，結果為 E_1。同理，B_2 經相同的伸縮旋轉，結果為 E_2。



所以，當 $\sqrt{2}t - 1 \le s \le \sqrt{2}t + 1$，$B_1$ 及 B_2 繞行整個小圓，E_1 及 E_2 所形成的軌跡，可視為小圓

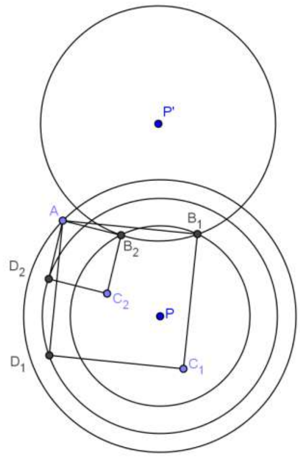
以 A 為伸縮旋轉中心，旋轉 -45°，伸縮係數為 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，結果為一圓。 □

3. 順序為 s 1 t

若平面上有一定點 P，及三個距離為 1, t, s，則：

當 $1 < t < s \le \dfrac{t+1}{\sqrt{2}}$ 時，存在 t 1 s 正方形，使得 P 至正方形三頂點的距

離為 1, t, s。



作法：

以 P 為圓心，作半徑為 1,t 及 s 的三圓。在大圓上取任意一點 A，以 A

為旋轉中心，將 P 旋轉 90° 至 P'。以 P' 為圓心，t 為半徑作圓，交小圓於 B_1, B_2。以 $\overline{AB_1}, \overline{AB_2}$

為正方形的一邊分別作正方形 $AB_1C_1D_1, AB_2C_2D_2$，則兩正方形即為所求。 □

證明：

連接 $\overline{PA}, \overline{PD_1}, \overline{P'A}, \overline{P'B_1}$。在 $\Delta P'AB_1$ 和 ΔPAD_1 中，$\because \angle P'AP = \angle B_1AD_1 = 90°$，

$\therefore \angle P'AB_1 = \angle PAD_1$，又 $\overline{P'A} = \overline{PA}, \overline{AB_1} = \overline{AD_1}$，則 $\Delta P'AB_1 \cong \Delta PAD_1 (SAS)$，$\overline{PD_1} = \overline{P'B_1} = s$，即

D_1 在大圓上。同理可證，D_2 在大圓上。當小圓與 P' 圓外切時，大圓半徑 $s = \frac{t+1}{\sqrt{2}}$，即

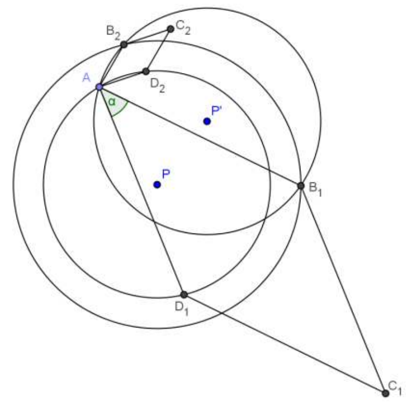
$1 < t < s \le \frac{t+1}{\sqrt{2}}$，可作出所求正方形。 □

二、菱形：

若平面上一定點 P，給定三個距離 a, b, c，角度 α，$0° < \alpha < 180°$，是否存在夾角為 α 的菱形使得其中三個頂點與 P 的距離為 a, b, c？不妨設最短長度為 1，另兩段長為 t 及 s。

(一)到三頂點距離為 1,1,t

1. 順序為 1 t 1



若平面上有一定點 P，及三個距離為 1, 1, t，則：

(1)當 $1 \le t \le 2\sin\frac{\alpha}{2}+1$ 時，存在 1 t 1 菱形，使得 P 至菱形三頂點的距離為 1, t, 1；其中當 $t = \sqrt{5-4\cos\alpha}$ 時，有最大菱形，邊長為 2。

(2)當 $\left|2\sin\frac{\alpha}{2}-1\right| \le t \le 2\sin\frac{\alpha}{2}+1$ 時，1 t 1 菱形中心軌跡為一圓除一點。

作法：

以 P 為圓心，作半徑為 1 及 t 的兩圓。在小圓上取任意一點 A，以 A 為旋轉中心，將 P 旋轉 α 角至 P'。以 P' 為圓心，1 為半徑作圓，交大圓於 B_1, B_2。以 $\overline{AB_1}, \overline{AB_2}$ 為菱形的一邊分別作菱形 $AB_1C_1D_1, AB_2C_2D_2$，則兩菱形即為所求。 □

證明：

(1) 連接 $\overline{PA}, \overline{PD_1}, \overline{P'A}, \overline{P'B_1}$。在 $\Delta P'AB_1$ 和 ΔPAD_1 中，$\because \angle P'AP = \angle B_1AD_1 = \alpha$，

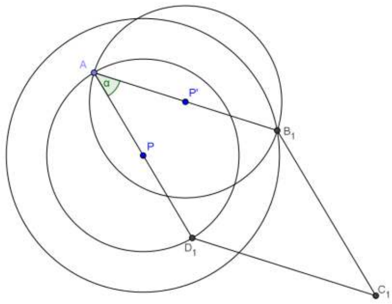
$\therefore \angle P'AB_1 = \angle PAD_1$，又 $\overline{P'A} = \overline{PA}, \overline{AB_1} = \overline{AD_1}$，則 $\Delta P'AB_1 \cong \Delta PAD_1 (SAS)$，$\overline{PD_1} = \overline{P'B_1} = 1$，

即 D_1 在小圓上。同理可證，D_2 在小圓上。當大圓與 P' 圓內切時，大圓半徑 $t = 2\sin\frac{\alpha}{2}+1$，

即$1 \le t \le 2\sin\frac{\alpha}{2}+1$，可作出所求菱形。

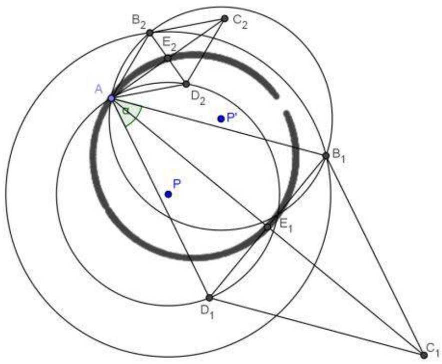
當 $\overline{AB_1}$ 為 P'圓的直徑時，$AB_1C_1D_1$ 為最大菱形，此時

$t=\sqrt{1^2+2^2-2\times1\times2\cos\alpha}=\sqrt{5-4\cos\alpha}$，如圖所示。



(2) 當大圓與 P'圓有交點時，才存在菱形。當$\alpha>60^\circ$，大圓與 P'圓內切，此時有最大半徑 $t=2\sin\frac{\alpha}{2}+1$；大圓與 P'圓外切，此時有最小半徑$t=2\sin\frac{\alpha}{2}-1$。當$\alpha<60^\circ$，大圓$(t>1)$與 P'圓內切，此時有最大半徑$t=2\sin\frac{\alpha}{2}+1$；大圓$(t<1)$與 P'圓內切，此時有最小半徑 $t=1-2\sin\frac{\alpha}{2}$。因此$\left|2\sin\frac{\alpha}{2}-1\right| \le t \le 2\sin\frac{\alpha}{2}+1$，大圓與 P'圓有交點。

考慮大圓與 P'圓的交點 B_1,B_2，以 $\overline{AB_1},\overline{AB_2}$ 為菱形的一邊，其中心分別為 E_1,E_2。以 A為伸縮旋轉中心，將 B_1旋轉$-\frac{\alpha}{2}$，伸縮係數為$\cos\frac{\alpha}{2}$，結果為 E_1。同理，B_2 經相同的伸縮旋轉，結果為 E_2。所以，當$\left|2\sin\frac{\alpha}{2}-1\right| \le t \le 2\sin\frac{\alpha}{2}+1$，$B_1$及 B_2 繞行整個 P'圓，E_1 及 E_2 所形成的軌跡，可視為 P'圓以 A為伸縮旋轉中心，旋轉$-\frac{\alpha}{2}$，伸縮係數為$\cos\frac{\alpha}{2}$，結果為一圓。當 B_2 在 A時，E_2 不存在。所以形成的軌跡為一圓除一點。



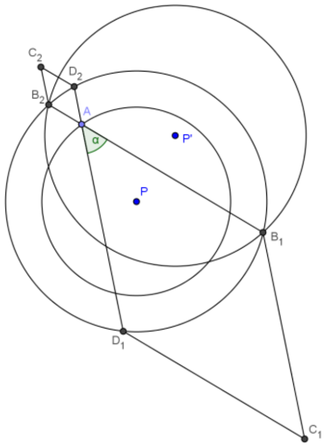
□

2. 順序為 1 t t

若平面上有一定點P ，及三個距離為 1, t, t ，則：

(1)當$t \ge 1$時，存在 1 t t 菱形，使得 P 至菱形三頂點的距離為 1, t, t 。

(2)當$t \ge \sin\frac{\alpha}{2}$時，1 t t 菱形中心軌跡為一直線除一點。



作法：

以 P 為圓心，作半徑為 1 及t的兩圓。在小圓上取任意一點 A，

以 A為旋轉中心，將 P 旋轉α 角至 P'。以 P'為圓心，t 為半徑作圓，交大圓於 B_1,B_2。以

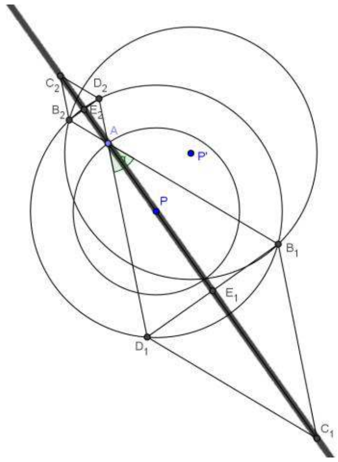
$\overline{AB_1}, \overline{AB_2}$ 為菱形的一邊分別作菱形 $AB_1C_1D_1, AB_2C_2D_2$，則兩菱形即為所求。 □

證明：

(1)連接 $\overline{PA}, \overline{PD_1}, \overline{P'A}, \overline{P'B_1}$。在 $\Delta P'AB_1$ 和 ΔPAD_1 中，$\because \angle P'AP = \angle B_1AD_1 = \alpha$，

$\therefore \angle P'AB_1 = \angle PAD_1$，又 $\overline{P'A} = \overline{PA}, \overline{AB_1} = \overline{AD_1}$，則 $\Delta P'AB_1 \cong \Delta PAD_1 (SAS)$，$\overline{PD_1} = \overline{P'B_1} = t$，

即 D_1 在大圓上。同理可證，D_2 在大圓上。

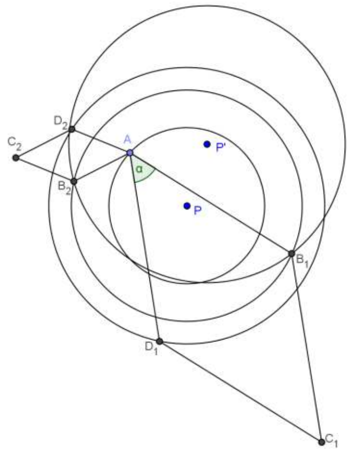


(2)考慮大圓與 P' 圓的交點 B_1, B_2，以 $\overline{AB_1}, \overline{AB_2}$ 為菱形的一邊，其中心分別為 E_1, E_2。以 A 為伸縮旋轉中心，將 B_1 旋轉 $-\dfrac{\alpha}{2}$，伸縮係數為 $\cos\dfrac{\alpha}{2}$，結果為 E_1。同理，B_2 經相同的伸縮旋轉，結果為 E_2。所以，當 $t \ge \sin\dfrac{\alpha}{2}$ 時，B_1 及 B_2 在大圓與 P' 圓的根軸上跑動，E_1 及 E_2 所形成的軌跡，可視為根軸以 A 為伸縮旋轉中心，旋轉 $-\dfrac{\alpha}{2}$，伸縮係數為 $\cos\dfrac{\alpha}{2}$，結果為一直線。當 B_2 在 A 時，E_2 不存在。所以形成的軌跡為一直線除一點。 □

(二)到三頂點距離為 1,t,s

1. 順序為 1 t s

若平面上有一定點 P，及三個距離為 1, t, s，則：



(1)當 $1 < t < s \le 2\sin\dfrac{\alpha}{2} + t$ 時，存在 1 t s 菱形，使得 P 至菱形三頂點的距離為 1, t, s；其中當 $s = \sqrt{t^2 + 2t + 2 - 2(t+1)\cos\alpha}$ 時，有最大菱形，邊長為 $t+1$。

(2)當 $\left|2\sin\dfrac{\alpha}{2} - t\right| \le s \le 2\sin\dfrac{\alpha}{2} + t$ 時，1 t s 菱形中心軌跡為一圓。

作法：

以 P 為圓心，作半徑為 1,t 及 s 的三圓。在小圓上取任意一點 A，以 A 為旋轉中心，將 P 旋轉 α 角至 P'。以 P' 為圓心，s 為半徑作圓，交中圓於 B_1, B_2。以 $\overline{AB_1}, \overline{AB_2}$ 為菱形的一邊分別作菱形 $AB_1C_1D_1, AB_2C_2D_2$，則兩菱形即為所求。 □

證明：

(1) 連接 $\overline{PA}, \overline{PD_1}, \overline{P'A}, \overline{P'B_1}$。在 $\Delta P'AB_1$ 和 ΔPAD_1 中，$\because \angle P'AP = \angle B_1AD_1 = \alpha$，

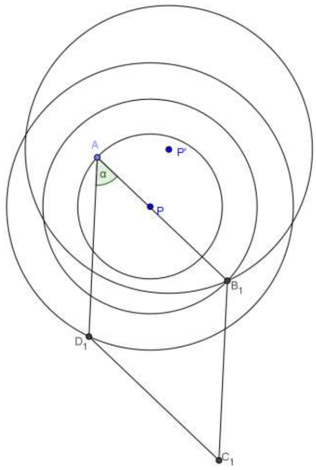
$\therefore \angle P'AB_1 = \angle PAD_1$，又 $\overline{P'A} = \overline{PA}$，$\overline{AB_1} = \overline{AD_1}$，則 $\Delta P'AB_1 \cong \Delta PAD_1 (SAS)$，$\overline{PD_1} = \overline{P'B_1} = s$，

即 D_1 在大圓上。同理可證，D_2 在大圓上。當中圓與 P' 圓內切時，大圓半徑 $s=2\sin\frac{\alpha}{2}+t$ ，

即 $1<t<s\le 2\sin\frac{\alpha}{2}+t$ ，可作出所求菱形。

當 $\overline{AB_1}$ 通過 P 點時， $AB_1C_1D_1$ 為最大菱形，此時

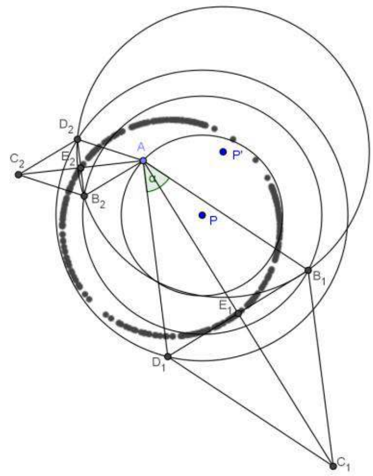
$s=\sqrt{\overline{PA}^2+\overline{AD_1}^2-2\overline{PA}\times\overline{AD_1}\cos\alpha}=\sqrt{t^2+2t+2-2(t+1)\cos\alpha}$，如圖所示。



(2)當中圓與 P' 圓有交點時，才存在菱形。當 $\sin\frac{\alpha}{2}>\frac{t}{2}$，中圓與 P' 圓內切，此時有最大半徑 $s=2\sin\frac{\alpha}{2}+t$ ，中圓與 P' 圓外切，有最小半徑 $s=2\sin\frac{\alpha}{2}-t$ ；當 $\sin\frac{\alpha}{2}<\frac{t}{2}$ ，中圓與 P' 圓內切，此時有最大半徑 $s=2\sin\frac{\alpha}{2}+t$ ，也有最小半徑 $s=t-2\sin\frac{\alpha}{2}$ ；當 $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{t}{2}$ ，中圓與 P' 圓內切，此時有最大半徑 $s=2t$ 。因此，

$\left|2\sin\frac{\alpha}{2}-t\right|\le s\le 2\sin\frac{\alpha}{2}+t$ 時，有菱形存在。

考慮中圓與 P' 圓的交點 B_1, B_2 ，以 $\overline{AB_1}, \overline{AB_2}$ 為菱形的一邊，其中心分別為 E_1, E_2 。以 A 為伸縮旋轉中心，將 B_1 旋轉 $-\frac{\alpha}{2}$ ，伸縮係數為 $\cos\frac{\alpha}{2}$，結果為 E_1。同理，B_2 經相同的伸縮旋轉，結果為 E_2 。所以，當 $\left|2\sin\frac{\alpha}{2}-t\right|\le s\le 2\sin\frac{\alpha}{2}+t$，$B_1$ 及 B_2 繞行整個中圓，E_1 及 E_2 所形成的軌跡，可視為中圓以 A 為伸縮旋轉中心，旋轉 $-\frac{\alpha}{2}$ ，伸縮係數為 $\cos\frac{\alpha}{2}$，結果為一圓。

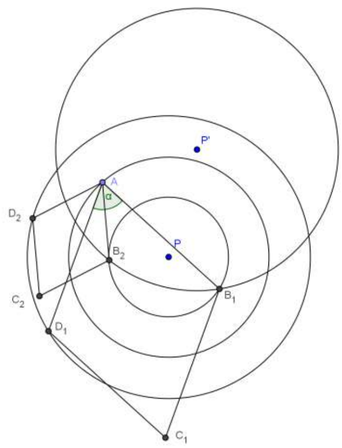


□

2. 順序為 t 1 s

若平面上有一定點 P ，及三個距離為 1, t, s ，則：

(1)當 $1<t<s\le 2t\sin\frac{\alpha}{2}+1$ 時，存在 t 1 s 菱形，使得 P 至菱形三頂點的距離為 1, t, s ；其中當 $s=\sqrt{2t^2+2t+1-2t(t+1)\cos\alpha}$



時，有最大菱形，邊長為 $t+1$。

(2)當 $2t\sin\frac{\alpha}{2}-1\le s\le 2t\sin\frac{\alpha}{2}+1$ 時，t 1 s 菱形中心軌跡為一圓。

作法：

以 P 為圓心，作半徑為 $1, t$ 及 s 的三圓。在中圓上取任意一點 A，以 A 為旋轉中心，將 P 旋轉 α 角至 P'。以 P' 為圓心，s 為半徑作圓，交小圓於 B_1, B_2。以 $\overline{AB_1}, \overline{AB_2}$ 為菱形的一邊分別作菱形 $AB_1C_1D_1, AB_2C_2D_2$，則兩菱形即為所求。 □

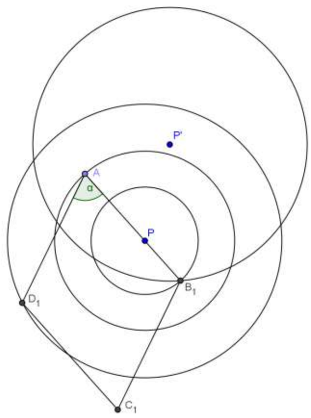
證明：

(1) 連接 $\overline{PA}, \overline{PD_1}, \overline{P'A}, \overline{P'B_1}$。在 $\Delta P'AB_1$ 和 ΔPAD_1 中，$\because \angle P'AP=\angle B_1AD_1=\alpha$，

$\therefore \angle P'AB_1=\angle PAD_1$，又 $\overline{P'A}=\overline{PA}$，$\overline{AB_1}=\overline{AD_1}$，則 $\Delta P'AB_1\cong\Delta PAD_1$ (SAS)，$\overline{PD_1}=\overline{P'B_1}=s$，

即 D_1 在大圓上。同理可證，D_2 在大圓上。當小圓與 P' 圓內切時，大圓半徑 $s=2t\sin\frac{\alpha}{2}+1$，

即 $1<t<s\le 2t\sin\frac{\alpha}{2}+1$，可作出所求菱形。

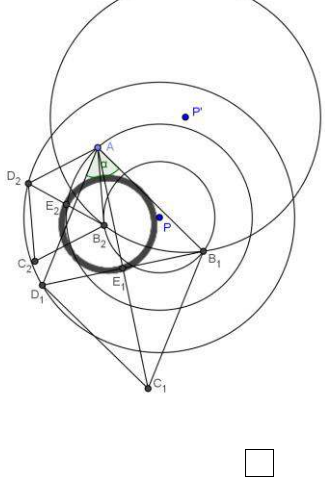


當 $\overline{AB_1}$ 通過 P 點時，$AB_1C_1D_1$ 為最大菱形，此時

$s=\sqrt{\overline{PA}^2+\overline{AD_1}^2-2\overline{PA}\times\overline{AD_1}\cos\alpha}=\sqrt{2t^2+2t+1-2t(t+1)\cos\alpha}$，如圖所示。

(2)當小圓與 P' 圓有交點時，才存在菱形。當小圓與 P' 圓內切，此時有最大半徑 $s=2t\sin\frac{\alpha}{2}+1$。當小圓與 P' 圓外切，此時有最小半徑 $s=2t\sin\frac{\alpha}{2}-1$。

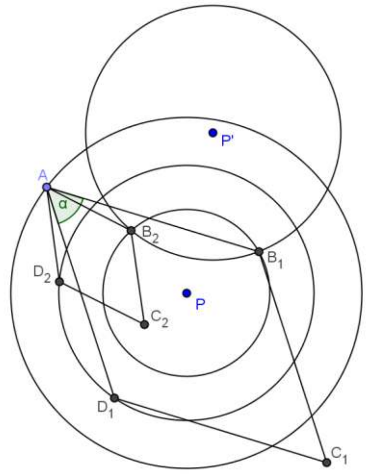
考慮小圓與 P' 圓的交點 B_1, B_2，以 $\overline{AB_1}, \overline{AB_2}$ 為菱形的一邊，其中心分別為 E_1, E_2。以 A 為伸縮旋轉中心，將 B_1 旋轉 $-\frac{\alpha}{2}$，伸縮係數為 $\cos\frac{\alpha}{2}$，結果為 E_1。同理，B_2 經相同的伸縮旋轉，結果為 E_2。所以，當 $2t\sin\frac{\alpha}{2}-1\le s\le 2t\sin\frac{\alpha}{2}+1$，$B_1$ 及 B_2 繞行整個小圓，E_1 及 E_2 所形成的軌跡，可視為小圓以 A 為伸縮旋轉中心，旋轉 $-\frac{\alpha}{2}$，伸縮係數為 $\cos\frac{\alpha}{2}$，結果為一圓。 □



3. 順序為 $s\ 1\ t$

若平面上有一定點 P，及三個距離為 1, t, s，則：

當 $1<t<s\le \dfrac{t+1}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}$ 時，存在 $t\ 1\ s$ 菱形，使得 P 至菱形三頂點的距離為 1, t, s。



作法：

以 P 為圓心，作半徑為 $1, t$ 及 s 的三圓。在大圓上取任意一點 A，以 A 為旋轉中心，將 P 旋轉 α 角至 P'。以 P' 為圓心，t 為半徑作圓，交小圓於 B_1, B_2。以 $\overline{AB_1}, \overline{AB_2}$ 為菱形的一邊分別作菱形 $AB_1C_1D_1, AB_2C_2D_2$，則兩菱形即為所求。 □

證明：

連接 $\overline{PA}, \overline{PD_1}, \overline{P'A}, \overline{P'B_1}$。在 $\Delta P'AB_1$ 和 ΔPAD_1 中，$\because \angle P'AP = \angle B_1AD_1 = \alpha$，

$\therefore \angle P'AB_1 = \angle PAD_1$，又 $\overline{P'A} = \overline{PA}, \overline{AB_1} = \overline{AD_1}$，則 $\Delta P'AB_1 \cong \Delta PAD_1\,(SAS)$，$\overline{PD_1} = \overline{P'B_1} = t$，即 D_1 在大圓上。同理可證，D_2 在大圓上。當小圓與 P' 圓外切時，大圓半徑 $s = \dfrac{t+1}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}$，即

$1<t<s\le \dfrac{t+1}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}$，可作出所求菱形。 □

三、矩形：

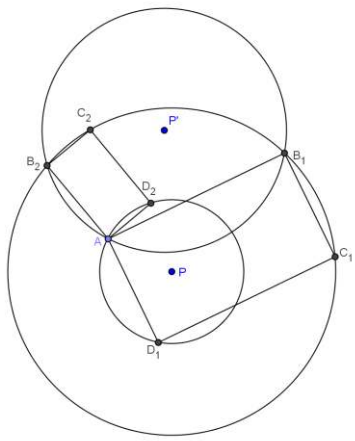
若平面上一定點 P，給定三個距離 a, b, c，是否存在長邊為短邊 m 倍($m>1$)的矩形使得其中三個頂點與 P 的距離為 a, b, c？不妨設最短長度為 1，另兩段長為 t 及 s。

(一)到三頂點距離為 $1, t$

1. 順序為 $1\ t\ 1$

若平面上有一定點 P，及三個距離為 1, 1, t，則：

(1)當 $1\le t\le \sqrt{m^2+1}+m$ 時，存在 $1\ t\ 1$ 矩形，使得 P 至矩形三頂點的距離為 1, t, 1；其中當 $t=\sqrt{4m^2+1}$ 時，有最大矩形，短邊長為 2，長邊長為 $2m$。



(2)當 $\sqrt{m^2+1}-m \le t \le \sqrt{m^2+1}+m$ 時，1 t 1 矩形中心軌跡為一圓除一點。

作法：

以 P 為圓心，作半徑為 1 及 t 的兩圓。在小圓上取任意一點 A，以 A 為伸縮旋轉中心，將 P 旋轉 $90°$，伸縮係數為 m 至 P'。以 P' 為圓心，m 為半徑作圓，交大圓於 B_1, B_2。以 A 為伸縮旋轉中心，將 B_1 及 B_2 旋轉 $-90°$，伸縮係數為 $\frac{1}{m}$ 至 D_1, D_2，以 $\overline{AB_1}, \overline{AD_1}$ 為矩形的兩邊作矩形 $AB_1C_1D_1$；以 $\overline{AB_2}, \overline{AD_2}$ 為矩形的兩邊作矩形 $AB_2C_2D_2$，則兩矩形即為所求。 □

證明：

(1)連接 $\overline{PA}, \overline{PD_1}, \overline{P'A}, \overline{P'B_1}$。在 $\Delta P'AB_1$ 和 ΔPAD_1 中，$\because \angle P'AP = \angle B_1AD_1 = 90°$，

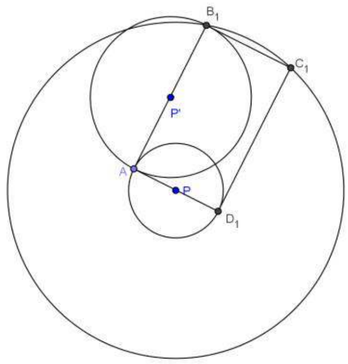
$\therefore \angle P'AB_1 = \angle PAD_1$，又 $\overline{P'A} = m\overline{PA}, \overline{AB_1} = m\overline{AD_1}$，則 $\Delta P'AB_1 \sim \Delta PAD_1\,(SAS)$，

$\overline{PD_1} = \frac{1}{m}\overline{P'B_1} = 1$，即 D_1 在小圓上。同理可證，D_2 在小圓上。當大圓與 P' 圓內切時，

大圓半徑 $t = \sqrt{m^2+1}+m$，即 $1 \le t \le \sqrt{m^2+1}+m$，可作出所求矩形。

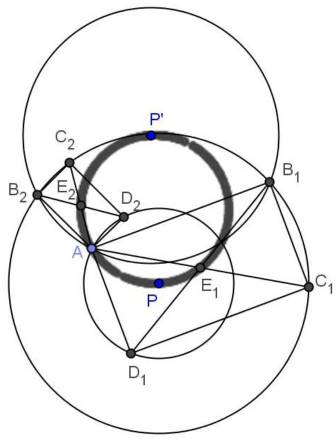
當 $\overline{AB_1}$ 為 P' 圓的直徑時，$AB_1C_1D_1$ 為最大矩形，此時

$t = \sqrt{\overline{AB_1}^2 + \overline{AP}^2} = \sqrt{4m^2+1}$，如圖所示。



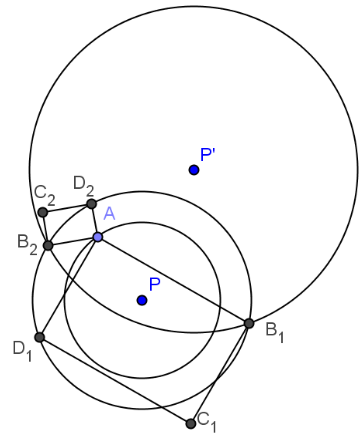
(2)當大圓與 P' 圓有交點時，才存在矩形。當大圓與 P' 圓內切，此時有最大半徑 $t = \sqrt{m^2+1}+m$。當大圓與 P' 圓外切，此時有最小半徑 $t = \sqrt{m^2+1}-m$。

考慮大圓與 P' 圓的交點 B_1, B_2，以 $\overline{AB_1}, \overline{AB_2}$ 為矩形的一邊，其中心分別為 E_1, E_2。以 A 為伸縮旋轉中心，將 B_1 旋轉 $-\angle B_1AC_1$，伸縮係數為 $\frac{\sqrt{m^2+1}}{2m}$，結果為 E_1。同理，B_2 經相同的伸縮旋轉，結果為 E_2。所以，當 $\sqrt{m^2+1}-m \le t \le \sqrt{m^2+1}+m$，$B_1$ 及 B_2 繞行整個 P' 圓，E_1 及 E_2 所形成的軌跡，可視為 P' 圓以 A 為伸縮旋轉中心，旋轉 $-\angle B_1AC_1$，伸縮係數為 $\frac{\sqrt{m^2+1}}{2m}$，結果為一圓。當 B_2 在 A 時，E_2 不存在。所以形成的軌跡為一圓除一點。 □



2. 順序為 1 t t

若平面上有一定點 P ，及三個距離為 1, t, t ，則：



(1)當 $1 \le t \le \frac{\sqrt{m^2+1}}{m-1}$ 時，存在 1 t t 矩形，使得 P 至矩形三頂點的距離為 1, t, t 。

(2)當 $\frac{\sqrt{m^2+1}}{m+1} \le t \le \frac{\sqrt{m^2+1}}{m-1}$ 時，1 t t 矩形中心軌跡為一圓除一點；當 $t = \frac{\sqrt{m^4+6m^2+1}}{m^2-1}$ 時，存在最大矩形，長邊為 $\frac{2m\sqrt{m^2+1}}{m^2-1}$ 。

作法：

以 P 為圓心，作半徑為 1 及 t 的兩圓。在小圓上取任意一點 A，以 A 為伸縮旋轉中心，將 P 旋轉 $90°$ ，伸縮係數為 m 至 P' 。以 P' 為圓心， mt 為半徑作圓，交大圓於 B_1, B_2 。以 A 為伸縮旋轉中心，將 B_1 及 B_2 旋轉 $-90°$ ，伸縮係數為 $\frac{1}{m}$ 至 D_1, D_2 ，以 $\overline{AB_1}, \overline{AD_1}$ 為矩形的兩邊作矩形 $AB_1C_1D_1$ ；以 $\overline{AB_2}, \overline{AD_2}$ 為矩形的兩邊作矩形 $AB_2C_2D_2$ ，則兩矩形即為所求。 □

證明：

(1)連接 $\overline{PA}, \overline{PD_1}, \overline{P'A}, \overline{P'B_1}$ 。在 $\Delta P'AB_1$ 和 ΔPAD_1 中，$\because \angle P'AP = \angle B_1AD_1 = 90°$ ，

$\therefore \angle P'AB_1 = \angle PAD_1$ ，又 $\overline{P'A} = m\overline{PA}, \overline{AB_1} = m\overline{AD_1}$ ，則 $\Delta P'AB_1 \sim \Delta PAD_1 (SAS)$ ，

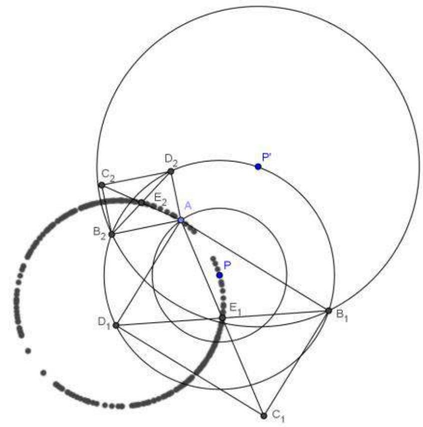
$\overline{PD_1} = \frac{1}{m}\overline{P'B_1} = t$ ，即 D_1 在大圓上。同理可證， D_2 在大圓上。當大圓與 P' 圓內切時，

大圓半徑 $t = \frac{\sqrt{m^2+1}}{m-1}$ ，即 $1 \le t \le \frac{\sqrt{m^2+1}}{m-1}$ ，可作出所求矩形。

(2)當大圓與 P' 圓有交點時，才存在矩形。當大圓與 P' 圓內切，此時有最大半徑 $t = \frac{\sqrt{m^2+1}}{m-1}$ 。

當大圓與 P' 圓外切，此時有最小半徑 $t = \frac{\sqrt{m^2+1}}{m+1}$ 。

考慮大圓與 P' 圓的交點 B_1, B_2 ，以 $\overline{AB_1}, \overline{AB_2}$ 為矩形的一邊，其中心分別為 E_1, E_2 。以 A 為伸縮旋轉中心，將 B_1 旋轉 $-\angle B_1AC_1$ ，伸縮係數為 $\frac{\sqrt{m^2+1}}{2m}$ ，結果為 E_1 。同理，B_2 經相同的伸縮旋轉，結果為 E_2 。所以，當 $\frac{\sqrt{m^2+1}}{m+1} \le t \le \frac{\sqrt{m^2+1}}{m-1}$ ，



$\overline{B_1P}:\overline{B_1P'}=\overline{B_2P}:\overline{B_2P'}=1:m$，即 B_1 及 B_2 的軌跡為阿波羅尼斯圓，E_1 及 E_2 所形成的軌跡，可視為此阿波羅尼斯圓以 A 為伸縮旋轉中心，旋轉 $-\angle B_1AC_1$，伸縮係數為 $\frac{\sqrt{m^2+1}}{2m}$，結果為一圓。當 B_2 在 A 時，E_2 不存在。所以形成的軌跡為一圓除一點。

當 $\overline{AB_1}$ 為阿波羅尼斯圓的直徑時，有最大矩形 $AB_1C_1D_1$，此時直徑

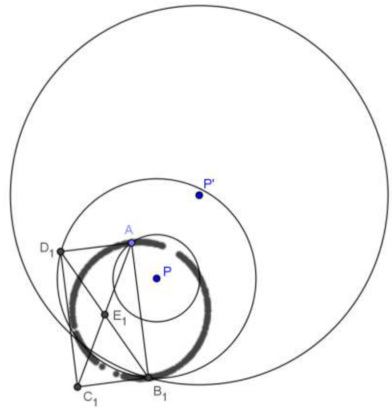
$$\overline{AB_1}=\frac{\overline{PP'}}{m-1}+\frac{\overline{PP'}}{m+1}=\frac{2m\sqrt{m^2+1}}{m^2-1}$$

。設 $\overline{AB_1}$ 的中點為 M，半徑

$$R=\frac{1}{2}\overline{AB_1}=\frac{m\sqrt{m^2+1}}{m^2-1}\text{，}\overline{MP}=R-\frac{\overline{PP'}}{m+1}=\frac{R}{m}\text{，}$$

$$\cos\angle PAM=\cos\angle PAB_1\Rightarrow\frac{R^2+1-(\frac{R}{m})^2}{2R}=\frac{4R^2+1-t^2}{4R}\text{，}$$

$$t^2=2R^2+\frac{2R^2}{m^2}-1\text{，}t=\frac{\sqrt{m^4+6m^2+1}}{m^2+1}$$



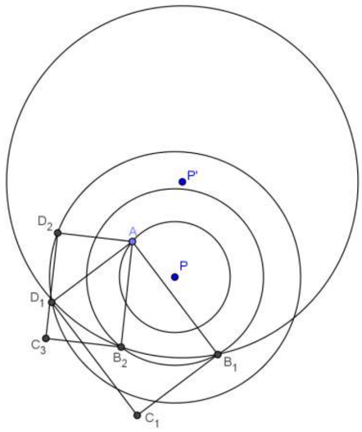
□

(二)到三頂點距離為 $1,t,s$

1. 順序為 1 t s

若平面上有一定點 P，及三個距離為 1，t，s，則：

(1)當 $1<t<s\le\frac{\sqrt{m^2+1}+t}{m}$ 時，存在 1 t s 矩形，使得 P 至矩形三頂點的距離為 1，t，s；其中當 $s=\frac{\sqrt{m^2+t^2+2t+1}}{m}$ 時，有最大矩形，邊長為 $t+1$。



(2)當 $\left|\frac{\sqrt{m^2+1}-t}{m}\right|\le s\le\frac{\sqrt{m^2+1}+t}{m}$ 時，1 t s 矩形中心軌跡為一圓。

作法：

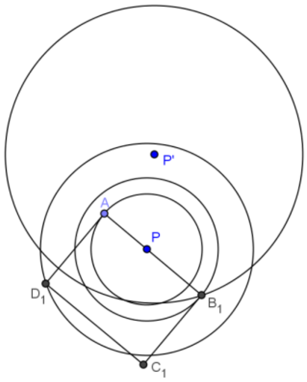
以 P 為圓心，作半徑為 $1,t$ 及 s 的三圓。在小圓上取任意一點 A，以 A 為旋轉中心，將 P 旋轉 $90°$，伸縮係數為 m 至 P'。以 P' 為圓心，ms 為半徑作圓，交中圓於 B_1,B_2。以 A 為伸縮旋轉中心，將 B_1 及 B_2 旋轉 $-90°$，伸縮係數為 $\frac{1}{m}$ 至 D_1,D_2，以 $\overline{AB_1},\overline{AD_1}$ 為矩形的兩邊作矩形 $AB_1C_1D_1$；以 $\overline{AB_2},\overline{AD_2}$ 為矩形的兩邊作矩形 $AB_2C_2D_2$，則兩矩形即為所求。□

證明：

(1) 連接 $\overline{PA},\overline{PD_1},\overline{P'A},\overline{P'B_1}$。在 $\Delta P'AB_1$ 和 ΔPAD_1 中，$\because \angle P'AP=\angle B_1AD_1=90^\circ$，

$\therefore \angle P'AB_1=\angle PAD_1$，又 $\overline{P'A}=m\overline{PA},\ \overline{AB_1}=m\overline{AD_1}$，則 $\Delta P'AB_1 \sim \Delta PAD_1\,(SAS)$，

$\overline{PD_1}=\dfrac{1}{m}\overline{P'B_1}=s$，即 D_1 在大圓上。同理可證，D_2 在大圓上。當中圓與 P' 圓內切時，大圓半徑 $s=\dfrac{\sqrt{m^2+1}+t}{m}$，即 $1<t<s\le\dfrac{\sqrt{m^2+1}+t}{m}$，可作出所求矩形。



當 $\overline{AB_1}$ 通過 P 點時，$AB_1C_1D_1$ 為最大矩形，此時

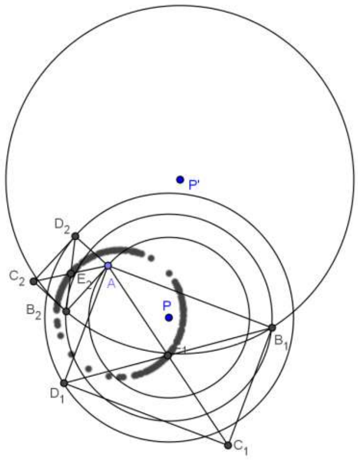
$s=\sqrt{\overline{PA}^2+\overline{AD_1}^2}=\sqrt{1^2+(\dfrac{t+1}{m})^2}=\dfrac{\sqrt{m^2+t^2+2t+1}}{m}$，如圖所示。

(2)當中圓與 P' 圓有交點時，才存在矩形。當 $t>\sqrt{m^2+1}$，中圓與 P' 圓內切，此時有最大半徑 $s=\dfrac{\sqrt{m^2+1}+t}{m}$，也有最小半徑 $s=\dfrac{t-\sqrt{m^2+1}}{m}$；

當 $t<\sqrt{m^2+1}$，中圓與 P' 圓內切，此時有最大半徑 $s=\dfrac{\sqrt{m^2+1}+t}{m}$，中圓與 P' 圓外切，此時有最小半徑 $s=\dfrac{\sqrt{m^2+1}-t}{m}$；$t=\sqrt{m^2+1}$，中圓與 P' 圓內切，此時有最大半徑 $s=\dfrac{2\sqrt{m^2+1}}{m}$。

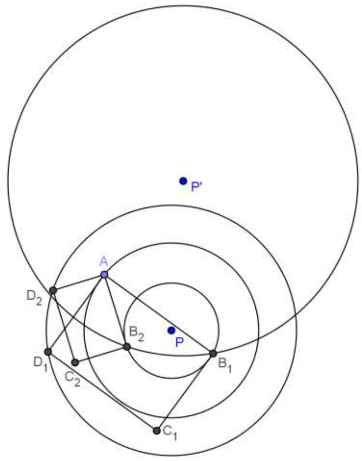
因此，$\left|\dfrac{\sqrt{m^2+1}-t}{m}\right|\le s\le\dfrac{\sqrt{m^2+1}+t}{m}$ 時，有矩形存在。

考慮中圓與 P' 圓的交點 B_1,B_2，以 $\overline{AB_1},\overline{AB_2}$ 為矩形的一邊，其中心分別為 E_1,E_2。以 A 為伸縮旋轉中心，將 B_1 旋轉 $-\angle B_1AC_1$，伸縮係數為 $\dfrac{\sqrt{m^2+1}}{2m}$，結果為 E_1。同理，B_2 經相同的伸縮旋轉，結果為 E_2。所以，當 $\left|\dfrac{\sqrt{m^2+1}-t}{m}\right|\le s\le\dfrac{\sqrt{m^2+1}+t}{m}$，$B_1$ 及 B_2 繞行整個中圓，E_1 及 E_2 所形成的軌跡，可視為中圓以 A 為伸縮旋轉中心，旋轉 $-\angle B_1AC_1$，伸縮係數為 $\dfrac{\sqrt{m^2+1}}{2m}$，結果為一圓。 □



2. 順序為 t 1 s

若平面上有一定點 P ，及三個距離為 1, t, s ，則：



(1)當 $1<t<s\le\dfrac{t\sqrt{m^2+1}+1}{m}$ 時，存在 t 1 s 矩形，使得 P 至矩形三頂點的距離為 1, t, s ；其中當 $s=\dfrac{\sqrt{m^2t^2+t^2+2t+1}}{m}$ 時，有最大矩形，邊長為 $t+1$。

(2)當 $\dfrac{t\sqrt{m^2+1}-1}{m}\le s\le\dfrac{t\sqrt{m^2+1}+1}{m}$ 時，t 1 s 矩形中心軌跡為一圓。

作法：

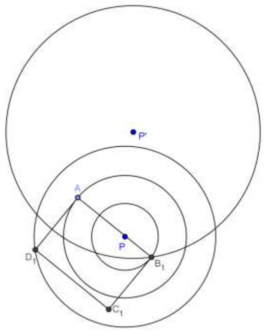
以 P 為圓心，作半徑為 1,t 及 s 的三圓。在中圓上取任意一點 A，以 A 為旋轉中心，將 P 旋轉 $90°$，伸縮係數為 m 至 P'。以 P' 為圓心， ms 為半徑作圓，交小圓於 B_1, B_2 。以 A 為伸縮旋轉中心，將 B_1 及 B_2 旋轉 $-90°$，伸縮係數為 $\dfrac{1}{m}$ 至 D_1, D_2 ，以 $\overline{AB_1}, \overline{AD_1}$ 為矩形的兩邊作矩形 $AB_1C_1D_1$ ；以 $\overline{AB_2}, \overline{AD_2}$ 為矩形的兩邊作矩形 $AB_2C_2D_2$ ，則兩矩形即為所求。 □

證明：

(1) 連接 $\overline{PA}, \overline{PD_1}, \overline{P'A}, \overline{P'B_1}$ 。在 $\Delta P'AB_1$ 和 ΔPAD_1 中，$\because \angle P'AP=\angle B_1AD_1=90°$，

$\therefore \angle P'AB_1=\angle PAD_1$ ，又 $\overline{P'A}=m\overline{PA}, \overline{AB_1}=m\overline{AD_1}$ ，則 $\Delta P'AB_1\sim\Delta PAD_1(SAS)$，

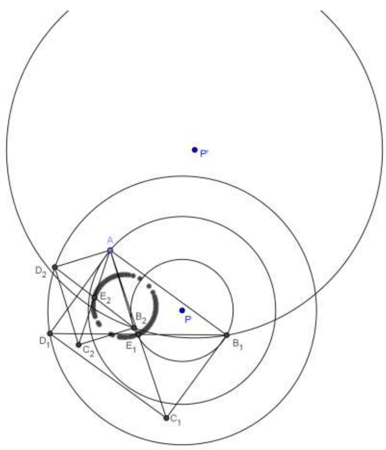
$\overline{PD_1}=\dfrac{1}{m}\overline{P'B_1}=s$ ，即 D_1 在大圓上。同理可證， D_2 在大圓上。當小圓與 P' 圓內切時，大圓半徑 $s=\dfrac{t\sqrt{m^2+1}+1}{m}$ ，即 $1<t<s\le\dfrac{t\sqrt{m^2+1}+1}{m}$ ，可作出所求矩形。



當 $\overline{AB_1}$ 通過 P 點時， $AB_1C_1D_1$ 為最大矩形，此時

$s=\sqrt{\overline{PA}^2+\overline{AD_1}^2}=\sqrt{t^2+(\dfrac{t+1}{m})^2}=\dfrac{\sqrt{m^2t^2+t^2+2t+1}}{m}$ ，如圖所示。

(2)當小圓與 P' 圓有交點時，才存在矩形。當小圓與 P' 圓內切，此時有最大半徑 $s=\dfrac{t\sqrt{m^2+1}+1}{m}$ 。當小圓與 P' 圓外切，此時有最小半徑 $s=\dfrac{t\sqrt{m^2+1}-1}{m}$ 。

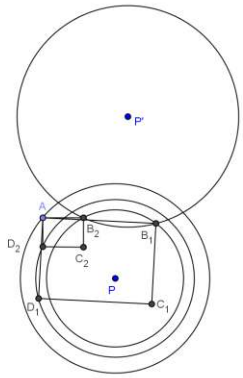


考慮小圓與 P' 圓的交點 B_1, B_2 ，以 $\overline{AB_1}, \overline{AB_2}$ 為矩形的一邊，

其中心分別為 E_1, E_2。以 A 為伸縮旋轉中心，將 B_1 旋轉 $-\angle B_1AC_1$，伸縮係數為 $\dfrac{\sqrt{m^2+1}}{2m}$，結果為 E_1。同理，B_2 經相同的伸縮旋轉，結果為 E_2。所以，當 $\dfrac{t\sqrt{m^2+1}-1}{m} \le s \le \dfrac{t\sqrt{m^2+1}+1}{m}$，$B_1$ 及 B_2 繞行整個小圓，E_1 及 E_2 所形成的軌跡，可視為小圓以 A 為伸縮旋轉中心，旋轉 $-\angle B_1AC_1$，伸縮係數為 $\dfrac{\sqrt{m^2+1}}{2m}$，結果為一圓。 □

3. 順序為 s 1 t

若平面上有一定點 P，及三個距離為 1, t, s，則：



當 $1 < t < s \le \dfrac{mt+1}{\sqrt{m^2+1}}$ 時，存在 s 1 t 矩形，使得 P 至矩形三頂點的距離為 1, t, s。

作法：

以 P 為圓心，作半徑為 1, t 及 s 的三圓。在大圓上取任意一點 A，以 A 為旋轉中心，將 P 旋轉 90°，伸縮係數為 m 至 P'。以 P' 為圓心，mt 為半徑作圓，交小圓於 B_1, B_2。以 A 為伸縮旋轉中心，將 B_1 及 B_2 旋轉 -90°，伸縮係數為 $\dfrac{1}{m}$ 至 D_1, D_2，以 $\overline{AB_1}, \overline{AD_1}$ 為矩形的兩邊作矩形 $AB_1C_1D_1$；以 $\overline{AB_2}, \overline{AD_2}$ 為矩形的兩邊作矩形 $AB_2C_2D_2$，則兩矩形即為所求。 □

證明：

連接 $\overline{PA}$，$\overline{PD_1}$，$\overline{P'A}$，$\overline{P'B_1}$。在 $\Delta P'A_1I$ 和 ΔPAD_1 中，$\because \angle P'AP = \angle B_1AD_1 = 90^\circ$，$\therefore \angle P'AB_1 = \angle PAD_1$，又 $\overline{P'A} = m$，$\overline{AB_1} = m\overline{AD_1}$，則 $\Delta P'AB_1 \sim \Delta PAD_1$（SAS），$\overline{PD_1} = \dfrac{1}{m}\overline{P'B_1} = t$，即 D_1 在中圓上。同理可證，D_2 在中圓上。當小圓與 P' 圓外切時，大圓半徑 $s = \dfrac{mt+1}{\sqrt{m^2+1}}$，即 $1 < t < s \le \dfrac{mt+1}{\sqrt{m^2+1}}$，可作出所求矩形。 □

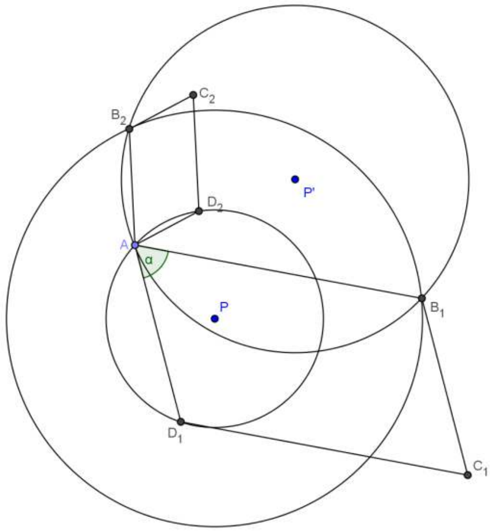
四、平行四邊形：

若平面上一定點 P，給定三個距離 a, b, c，是否存在長邊為短邊 m 倍$(m>1)$，角度 α，$0^\circ < \alpha < 180^\circ$ 的平行四邊形，使得其中三個頂點與 P 的距離為 a, b, c？不妨設最短長度為 1，另兩段長為 t 及 s。

(一)到三頂點距離為 $1, t$

1. 順序為 $1\,t\,1$

若平面上有一定點 P ，及三個距離為 $1,\ 1,\ t$ ，則：



(1)當 $1 \le t \le \sqrt{m^2+1-2m\cos\alpha}+m$ 時，存在 $1\,t\,1$ 平行四邊形，

使得 P 至平行四邊形三頂點的距離為 $1,\ t, 1$；其中當

$t=\sqrt{4m^2+1-4m\cos\alpha}$ 時，有最大平行四邊形，短邊長為

2 ，長邊長為 $2m$ 。

(2)當 $\left|\sqrt{m^2+1-2m\cos\alpha}-m\right| \le t \le \sqrt{m^2+1-2m\cos\alpha}+m$ 時，$1\,t\,1$

平行四邊形中心軌跡為一圓

除一點。

作法：

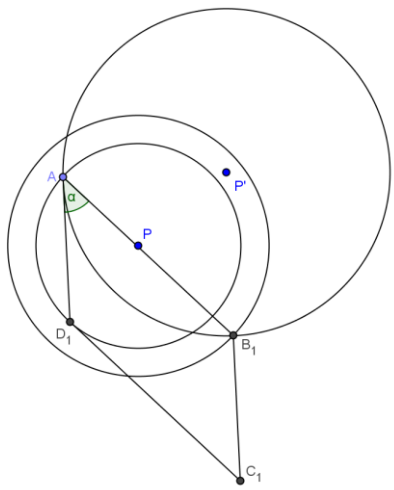
以 P 為圓心，作半徑為 1 及 t 的兩圓。在小圓上取任意一點 A，以 A 為伸縮旋轉中心，將 P 旋轉 α ，伸縮係數為 m 至 P' 。以 P' 為圓心， m 為半徑作圓，交大圓於 B_1, B_2 。以 A 為伸縮旋轉中心，將 B_1 及 B_2 旋轉 $-\alpha$ ，伸縮係數為 $\dfrac{1}{m}$ 至 D_1, D_2 ，以 $\overline{AB_1}, \overline{AD_1}$ 為平行四邊形的兩邊作平行四邊形 $AB_1C_1D_1$ ；以 $\overline{AB_2}, \overline{AD_2}$ 為平行四邊形的兩邊作平行四邊形 $AB_2C_2D_2$ ，則兩平行四邊形即為所求。 □

證明：

(1)連接 $\overline{PA}, \overline{PD_1}, \overline{P'A}, \overline{P'B_1}$ 。在 $\Delta P'AB_1$ 和 ΔPAD_1 中，$\because \angle P'AP=\angle B_1AD_1=\alpha$ ，

$\therefore \angle P'AB_1=\angle PAD_1$ ，又 $\overline{P'A}=m\overline{PA}, \overline{AB_1}=m\overline{AD_1}$ ，則 $\Delta P'AB_1 \sim \Delta PAD_1\,(SAS)$，

$\overline{PD_1}=\dfrac{1}{m}\overline{P'B_1}=1$ ，即 D_1 在小圓上。同理可證， D_2 在小圓上。當



大圓與 P' 圓內切時，大圓半徑 $t=\sqrt{m^2+1-2m\cos\alpha}+m$ ，即

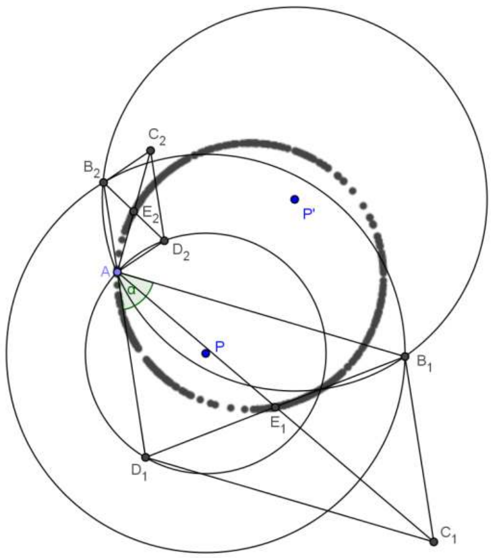
$1 \le t \le \sqrt{m^2+1-2m\cos\alpha}+m$ ，可作出所求平行四邊形。

當 $\overline{AB_1}$ 為 P' 圓的直徑時， $AB_1C_1D_1$ 為最大平行四邊形，此時

$t=\sqrt{\overline{AB_1}^2+\overline{AP}^2-2\overline{AB_1}\times\overline{AP}\cos\alpha}=\sqrt{4m^2+1-4m\cos\alpha}$ ，

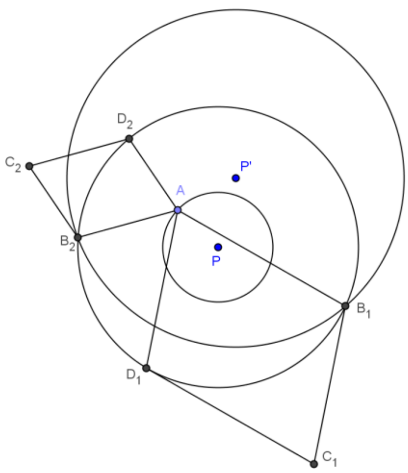
如圖所示。

(2)當大圓與 P' 圓有交點時，才存在平行四邊形。當 $\cos\alpha > \dfrac{1}{2m}$ ，大圓與 P' 圓內切，此時有最大半徑 $t=\sqrt{m^2+1-2m\cos\alpha}+m$，大圓與 P' 圓外切，有最小半徑 $t=\sqrt{m^2+1-2m\cos\alpha}-m$；當 $\cos\alpha < \dfrac{1}{2m}$ ，大圓與 P' 圓內切，此時有最大半徑 $t=\sqrt{m^2+1-2m\cos\alpha}+m$，也有最小半徑 $t=m-\sqrt{m^2+1-2m\cos\alpha}$ ；當 $\cos\alpha=\dfrac{1}{2m}$ ，大圓與 P' 圓內切，此時有最大半徑 $s=2m$。因此，$\left|\sqrt{m^2+1-2m\cos\alpha}-m\right| \le t \le \sqrt{m^2+1-2m\cos\alpha}+m$ 時，有平行四邊形存在。



考慮大圓與 P' 圓的交點 B_1, B_2 ，以 $\overline{AB_1}, \overline{AB_2}$ 為平行四邊形的一邊，其中心分別為 E_1, E_2。以 A 為伸縮旋轉中心，將 B_1 旋轉 $-\angle B_1AC_1$ ，伸縮係數為 $\dfrac{\sqrt{m^2+1+2m\cos\alpha}}{2m}$ ，結果為 E_1 。同理， B_2 經相同的伸縮旋轉，結果為 E_2 。所以，當 $\left|\sqrt{m^2+1-2m\cos\alpha}-m\right| \le t \le \sqrt{m^2+1-2m\cos\alpha}+m$，$B_1$ 及 B_2 繞行整個 P' 圓，E_1 及 E_2 所形成的軌跡，可視為 P' 圓以 A 為伸縮旋轉中心，旋轉 $-\angle B_1AC_1$ ，伸縮係數為 $\dfrac{\sqrt{m^2+1+2m\cos\alpha}}{2m}$，結果為一圓。當 B_2 在 A時，E_2 不存在。所以形成的軌跡為一圓除一點。 □

2. 順序為 1 t t



若平面上有一定點 P ，及三個距離為 1, t, t ，則：

(1)當 $1 \le t \le \dfrac{\sqrt{m^2+1-2m\cos\alpha}}{m-1}$ 時，存在 1 t t 平行四邊形，使得 P 至平行四邊形三頂點的距離為 1, t, t 。

(2)當 $\dfrac{\sqrt{m^2+1-2m\cos\alpha}}{m+1} \le t \le \dfrac{\sqrt{m^2+1-2m\cos\alpha}}{m-1}$ 時，1 t t 平行四邊形中心軌跡為一圓除一點；當 $t=\dfrac{\sqrt{m^4+6m^2+1-2m^3\cos\alpha-4m\cos\alpha}}{m^2+1}$ 時，存在最大平行四邊

形，長邊為 $\dfrac{2m\sqrt{m^2+1-2m\cos\alpha}}{m^2-1}$ 。

作法：

以 P 為圓心，作半徑為 1 及 t 的兩圓。在小圓上取任意一點 A，以 A 為伸縮旋轉中心，將 P 旋轉 α ，伸縮係數為 m 至 P'。以 P' 為圓心，mt 為半徑作圓，交大圓於 B_1, B_2 。以 A 為伸縮旋轉中心，將 B_1 及 B_2 旋轉 $-\alpha$ ，伸縮係數為 $\dfrac{1}{m}$ 至 D_1, D_2 ，以 $\overline{AB_1}, \overline{AD_1}$ 為平行四邊形的兩邊作平行四邊形 $AB_1C_1D_1$ ；以 $\overline{AB_2}, \overline{AD_2}$ 為平行四邊形的兩邊作平行四邊形 $AB_2C_2D_2$ ，則兩平行四邊形即為所求。 □

證明：

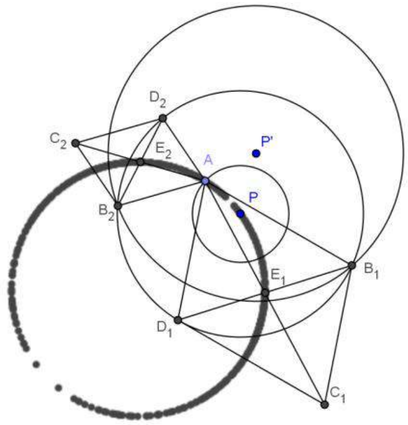
(1)連接 $\overline{PA}, \overline{PD_1}, \overline{P'A}, \overline{P'B_1}$ 。在 $\Delta P'AB_1$ 和 ΔPAD_1 中，$\because \angle P'AP = \angle B_1AD_1 = \alpha$ ，

$\therefore \angle P'AB_1 = \angle PAD_1$ ，又 $\overline{P'A} = m\overline{PA}, \overline{AB_1} = m\overline{AD_1}$ ，則 $\Delta P'AB_1 \sim \Delta PAD_1\,(SAS)$ ，

$\overline{PD_1} = \dfrac{1}{m}\overline{P'B_1} = t$ ，即 D_1 在大圓上。同理可證， D_2 在大圓上。當大圓與 P' 圓內切時，

大圓半徑 $t = \dfrac{\sqrt{m^2+1-2m\cos\alpha}}{m-1}$ ，即 $1 \le t \le \dfrac{\sqrt{m^2+1-2m\cos\alpha}}{m-1}$ ，可作出所求平行四邊形。

(2)當大圓與 P' 圓有交點時，才存在平行四邊形。當大圓與 P' 圓內切，此時有最大半徑 $t = \dfrac{\sqrt{m^2+1-2m\cos\alpha}}{m-1}$ 。當大圓與 P' 圓外切，此時有最小半徑 $t = \dfrac{\sqrt{m^2+1-2m\cos\alpha}}{m+1}$ 。

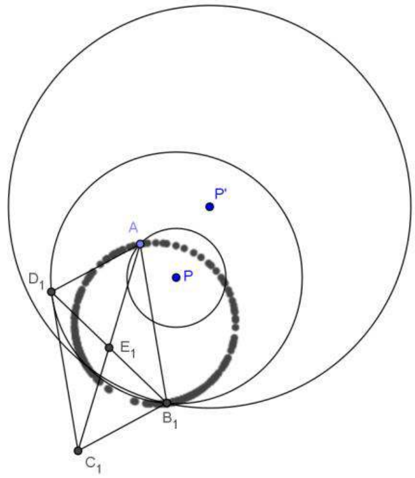


考慮大圓與 P' 圓的交點 B_1, B_2 ，以 $\overline{AB_1}, \overline{AB_2}$ 為平行四邊形的一邊，其中心分別為 E_1, E_2 。以 A 為伸縮旋轉中心，將 B_1 旋轉 $-\angle B_1AC_1$ ，伸縮係數為 $\dfrac{\sqrt{m^2+1+2m\cos\alpha}}{2m}$ ，結果為 E_1 。同理，B_2 經相同的伸縮旋轉，結果為 E_2 。所以，當 $\dfrac{\sqrt{m^2+1-2m\cos\alpha}}{m+1} \le t \le \dfrac{\sqrt{m^2+1-2m\cos\alpha}}{m-1}$ ，

$\overline{B_1P} : \overline{B_1P'} = \overline{B_2P} : \overline{B_2P'} = 1 : m$ ，即 B_1 及 B_2 的軌跡為一阿波羅尼斯圓，E_1 及 E_2 所形成的軌跡，可視為此阿波羅尼斯圓以 A 為伸縮旋轉中心，旋轉 $-\angle B_1AC_1$ ，伸縮係數為 $\dfrac{\sqrt{m^2+1+2m\cos\alpha}}{2m}$ ，結果為一圓。當 B_2 在 A 時， E_2 不存在。所以形成的軌跡為一圓除一點。

當 $\overline{AB_1}$ 為阿波羅尼斯圓的直徑時，有最大平行四邊形 $AB_1C_1D_1$，

此時直徑 $\overline{AB_1}=\dfrac{\overline{PP'}}{m-1}+\dfrac{\overline{PP'}}{m+1}=\dfrac{2m\sqrt{m^2+1-2m\cos\alpha}}{m^2-1}$。



設 $\overline{AB_1}$ 的中點為 M，半徑 $R=\dfrac{1}{2}\overline{AB_1}=\dfrac{m\sqrt{m^2+1-2m\cos\alpha}}{m^2-1}$，

$\overline{MP}=R-\dfrac{\overline{PP'}}{m+1}=\dfrac{R}{m}$，

$\cos\angle PAM=\cos\angle PAB_1\Rightarrow\dfrac{R^2+1-(\frac{R}{m})^2}{2R}=\dfrac{4R^2+1-t^2}{4R}$，

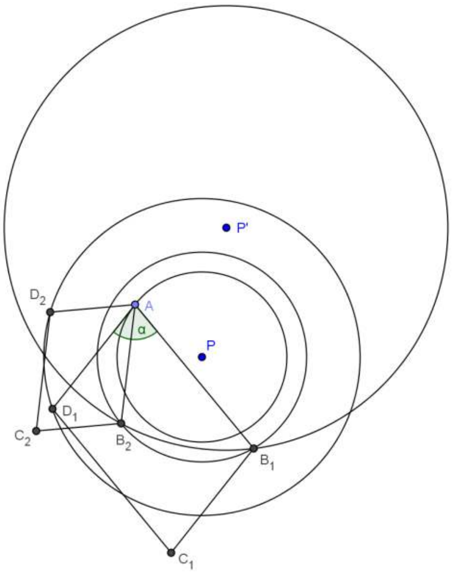
$t^2=2R^2+\dfrac{2R^2}{m^2}-1$，$t=\dfrac{\sqrt{m^4+6m^2+1-2m^3\cos\alpha-4m\cos\alpha}}{m^2+1}$。 □

(二)到三頂點距離為 $1,t,s$

1. 順序為 $1\ t\ s$

若平面上有一定點 P，及三個距離為 1, t, s，則：

(1)當 $1<t<s\le\dfrac{\sqrt{m^2+1-2m\cos\alpha}+t}{m}$ 時，存在 $1\ t\ s$ 平行四邊形，使得 P 至平行四邊形三頂點的距離為 1, t, s；其中當 $s=\dfrac{\sqrt{m^2+t^2+2t+1-2m(t+1)\cos\alpha}}{m}$ 時，有最大平行四邊形，長邊長為 $t+1$。



(2)當 $\left|\dfrac{\sqrt{m^2+1-2m\cos\alpha}-t}{m}\right|\le s\le\dfrac{\sqrt{m^2+1-2m\cos\alpha}+t}{m}$ 時，$1\ t\ s$ 平行四邊形中心軌跡為一圓。

作法：

以 P 為圓心，作半徑為 $1,t$ 及 s 的三圓。在小圓上取任意一點 A，以 A 為旋轉中心，將 P 旋轉 α，伸縮係數為 m 至 P'。以 P' 為圓心，ms 為半徑作圓，交中圓於 B_1,B_2。以 A 為伸縮旋轉中心，將 B_1 及 B_2 旋轉 $-\alpha$，伸縮係數為 $\dfrac{1}{m}$ 至 D_1,D_2，以 $\overline{AB_1},\overline{AD_1}$ 為平行四邊形的兩邊作平行四邊形 $AB_1C_1D_1$；以 $\overline{AB_2},\overline{AD_2}$ 為平行四邊形的兩邊作平行四邊形 $AB_2C_2D_2$，則兩平行四邊形即為所求。 □

證明：

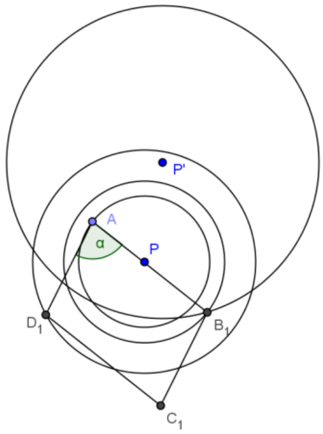
(1) 接 $\overline{PA}, \overline{PD_1}, \overline{P'A}, \overline{P'B_1}$ 。在 $\Delta P'AB_1$ 和 ΔPAD_1 中，$\because \angle P'AP = \angle B_1AD_1 = \alpha$ ，

$\therefore \angle P'AB_1 = \angle PAD_1$ ，又 $\overline{P'A} = m\overline{PA}, \overline{AB_1} = m\overline{AD_1}$ ，則 $\Delta P'AB_1 \sim \Delta PAD_1\,(SAS)$，

$\overline{PD_1} = \dfrac{1}{m}\overline{P'B_1} = s$ ，即 D_1 在大圓上。同理可證， D_2 在大圓上。當中圓與 P' 圓內切時，

大圓半徑 $s = \dfrac{\sqrt{m^2+1-2m\cos\alpha}+t}{m}$ ，即 $1 < t < s \le \dfrac{\sqrt{m^2+1-2m\cos\alpha}+t}{m}$ ，

可作出所求平行四邊形。

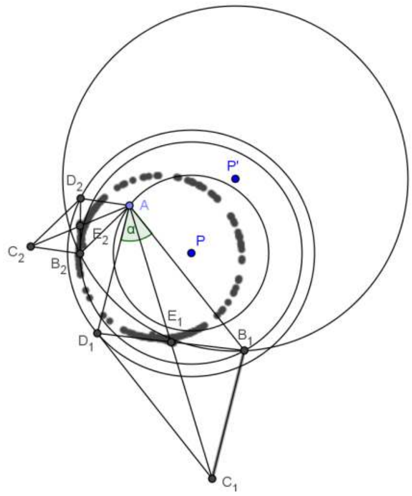


當 $\overline{AB_1}$ 通過 P 點時， $AB_1C_1D_1$ 為最大平行四邊形，此時

$s = \dfrac{\sqrt{\overline{AB_1}^2 + \overline{AP'}^2 - 2\overline{AB_1}\times\overline{AP'}\cos\alpha}}{m} = \dfrac{\sqrt{m^2+t^2+2t+1-2m(t+1)\cos\alpha}}{m}$ ，如圖所示。

(2) 當中圓與 P' 圓有交點時，才存在平行四邊形。當 $\cos\alpha > \dfrac{m^2+1-t^2}{2m}$ ，中圓與 P' 圓內切，此時有最大半徑 $s = \dfrac{\sqrt{m^2+1-2m\cos\alpha}+t}{m}$ ，中圓與 P' 圓外切，有最小半徑 $s = \dfrac{\sqrt{m^2+1-2m\cos\alpha}-t}{m}$ ；當 $\cos\alpha < \dfrac{m^2+1-t^2}{2m}$ ，大圓與 P' 圓內切，此時有最大半徑 $s = \dfrac{\sqrt{m^2+1-2m\cos\alpha}+t}{m}$ ，也有最小半徑 $s = \dfrac{t-\sqrt{m^2+1-2m\cos\alpha}}{m}$ ；當 $\cos\alpha = \dfrac{m^2+1-t^2}{2m}$ ，中圓與 P' 圓內切，此時有最大半徑 $s = \dfrac{2t}{m}$ 。因此，

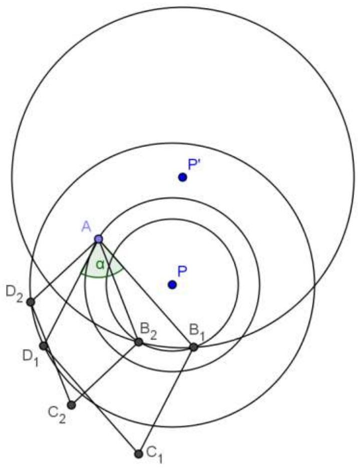
$\left|\dfrac{\sqrt{m^2+1-2m\cos\alpha}-t}{m}\right| \le s \le \dfrac{\sqrt{m^2+1-2m\cos\alpha}+t}{m}$ 時，有平行四邊形存在。



考慮中圓與 P' 圓的交點 B_1, B_2 ，以 $\overline{AB_1}, \overline{AB_2}$ 為平行四邊形的一邊，其中心分別為 E_1, E_2 。以 A 為伸縮旋轉中心，將 B_1 旋轉 $-\angle B_1AC_1$ ，伸縮係數為 $\dfrac{\sqrt{m^2+1+2m\cos\alpha}}{2m}$ ，結果為 E_1 。同理，B_2 經相同的伸縮旋轉，結果為 E_2 。所以，當 $\left|\dfrac{\sqrt{m^2+1-2m\cos\alpha}-t}{m}\right| \le s \le \dfrac{\sqrt{m^2+1-2m\cos\alpha}+t}{m}$ ， B_1 及 B_2 繞行

整個中圓，E_1 及 E_2 所形成的軌跡，可視為中圓以 A 為伸縮旋轉中心，旋轉 $-\angle B_1AC_1$，伸縮係數為 $\dfrac{\sqrt{m^2+1+2m\cos\alpha}}{2m}$，結果為一圓。 □

2. 順序為 $t\ 1\ s$



若平面上有一定點 P，及三個距離為 1, t, s，則：

(1)當 $1<t<s\le\dfrac{t\sqrt{m^2+1-2m\cos\alpha}+1}{m}$ 時，存在 $t\ 1\ s$ 平行四邊形，使得 P 至平行四邊形三頂點的距離為 1, t, s；其中當

$s=\dfrac{\sqrt{m^2t^2+t^2+2t+1-2m(t+1)\alpha c}}{m}$ 時，有最大平行四邊形，

長邊為 $t+1$。

(2)當 $\left|\dfrac{t\sqrt{m^2+1-2m\cos\alpha}-1}{m}\right|\le s\le\dfrac{t\sqrt{m^2+1-2m\cos\alpha}+1}{m}$ 時，$t\ 1\ s$ 平行四邊形中心軌跡為一圓。

作法：

以 P 為圓心，作半徑為 $1, t$ 及 s 的三圓。在中圓上取任意一點 A，以 A 為旋轉中心，將 P 旋轉 α，伸縮係數為 m 至 P'。以 P' 為圓心，ms 為半徑作圓，交小圓於 B_1, B_2。以 A 為伸縮旋轉中心，將 B_1 及 B_2 旋轉 $-\alpha$，伸縮係數為 $\dfrac{1}{m}$ 至 D_1, D_2，以 $\overline{AB_1}, \overline{AD_1}$ 為平行四邊形的兩邊作平行四邊形 $AB_1C_1D_1$；以 $\overline{AB_2}, \overline{AD_2}$ 為平行四邊形的兩邊作平行四邊形 $AB_2C_2D_2$，則兩平行四邊形即為所求。 □

證明：

(1) 接 $\overline{PA}, \overline{PD_1}, \overline{P'A}, \overline{P'B_1}$。在 $\Delta P'AB_1$ 和 ΔPAD_1 中，$\because \angle P'AP=\angle B_1AD_1=\alpha$，

$\therefore \angle P'AB_1=\angle PAD_1$，又 $\overline{P'A}=m\overline{PA}, \overline{AB_1}=m\overline{AD_1}$，則 $\Delta P'AB_1\sim\Delta PAD_1\,(SAS)$，

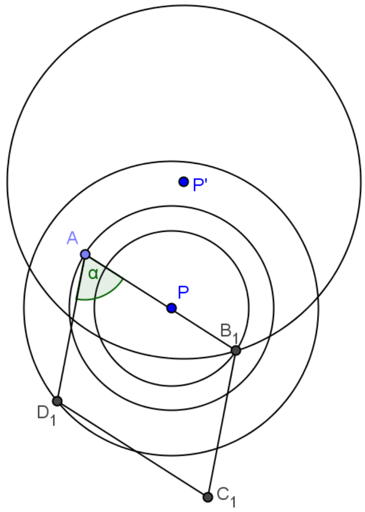
$\overline{PD_1}=\dfrac{1}{m}\overline{P'B_1}=s$，即 D_1 在大圓上。同理可證，D_2 在大圓上。當小圓與 P' 圓內切時，

大圓半徑 $s=\dfrac{t\sqrt{m^2+1-2m\cos\alpha}+1}{m}$，即 $1<t<s\le\dfrac{t\sqrt{m^2+1-2m\cos\alpha}+1}{m}$，可作出所求平行四邊形。

當 $\overline{AB_1}$ 通過 P 點時，$AB_1C_1D_1$ 為最大平行四邊形，此時

$$s=\frac{\sqrt{\overline{AB_1}^2+\overline{AP'}^2-2\overline{AB_1}\times\overline{AP'}\cos\alpha}}{m}=\frac{\sqrt{m^2t^2+t^2+2t+1-2m(t+1)\cos\alpha}}{m}$$

，如圖所示。



(2) 當小圓與 P'圓有交點時，才存在平行四邊形。當

$\cos\alpha<\frac{m^2t^2+t^2-1}{2mt^2}$，小圓與 P'圓內切，此時有最大半徑

$s=\frac{t\sqrt{m^2+1-2m\cos\alpha}+1}{m}$，小圓與 P'圓外切，有最小半徑

$s=\frac{t\sqrt{m^2+1-2m\cos\alpha}-1}{m}$；當 $\cos\alpha>\frac{m^2t^2+t^2-1}{2mt^2}$，小圓與 P'圓內切，此時有最大半徑

$s=\frac{t\sqrt{m^2+1-2m\cos\alpha}+1}{m}$，也有最小半徑 $s=\frac{1-t\sqrt{m^2+1-2m\cos\alpha}}{m}$；當 $\cos\alpha=\frac{m^2t^2+t^2-1}{2mt^2}$，

小圓與 P'圓內切，此時有最大半徑 $s=\frac{t+1}{m}$。因此，當

$$\left|\frac{t\sqrt{m^2+1-2m\cos\alpha}-1}{m}\right|\le s\le\frac{t\sqrt{m^2+1-2m\cos\alpha}+1}{m}$$ 時，有平行四邊形存在。

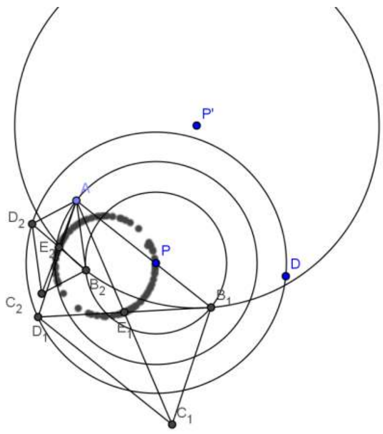
考慮小圓與 P'圓的交點 B_1,B_2，以 $\overline{AB_1},\overline{AB_2}$ 為平行四邊形的一邊，

其中心分別為 E_1,E_2。以 A 為伸縮旋轉中心，將 B_1 旋轉 $-\angle B_1AC_1$，

伸縮係數為 $\frac{\sqrt{m^2+1+2m\cos\alpha}}{2m}$，結果為 E_1。同理，B_2 經相同的伸

縮旋轉，結果為 E_2。所以，當

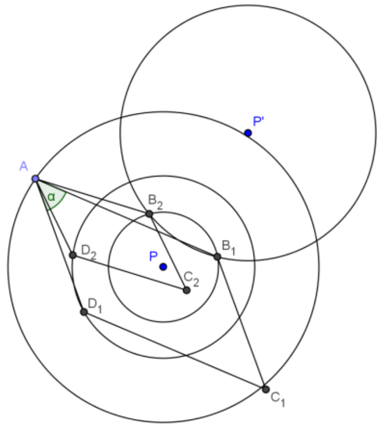
$\left|\frac{t\sqrt{m^2+1-2m\cos\alpha}-1}{m}\right|\le s\le\frac{t\sqrt{m^2+1-2m\cos\alpha}+1}{m}$，$B_1$ 及 B_2 繞行整



個小圓，E_1 及 E_2 所形成的軌跡，可視為小圓以 A 為伸縮旋轉中心，

旋轉 $-\angle B_1AC_1$，伸縮係數為 $\frac{\sqrt{m^2+1+2m\cos\alpha}}{2m}$，結果為一圓。 □

3. 順序為 s 1 t



若平面上有一定點 P，及三個距離為 1, t, s，則：

當 $1<t<s\le\dfrac{mt+1}{\sqrt{m^2+1-2m\cos\alpha}}$ 時，存在 s 1 平行四邊形，使得 P 至平行四邊形三頂點的距離為 1, t, s。

作法：

以 P 為圓心，作半徑為 1,t 及 s 的三圓。在大圓上取任意一點 A，以 A 為旋轉中心，將 P 旋轉 α，伸縮係數為 m 至 P'。以 P' 為圓心，mt 為半徑作圓，交小圓於 B_1, B_2。以 A 為伸縮旋轉中心，將 B_1 及 B_2 旋轉 $-\alpha$，伸縮係數為 $\dfrac{1}{m}$ 至 D_1, D_2，以 $\overline{AB_1}, \overline{AD_1}$ 為平行四邊形的兩邊作平行四邊形 $AB_1C_1D_1$；以 $\overline{AB_2}, \overline{AD_2}$ 為平行四邊形的兩邊作平行四邊形 $AB_2C_2D_2$，則兩平行四邊形即為所求。 □

證明：

連接 $\overline{PA}, \overline{PD_1}, \overline{P'A}, \overline{P'B_1}$。在 $\Delta P'AB_1$ 和 ΔPAD_1 中，$\because \angle P'AP=\angle B_1AD_1=\alpha$，

$\therefore \angle P'AB_1=\angle PAD_1$，又 $\overline{P'A}=m\overline{PA}$，$\overline{AB_1}=m\overline{AD_1}$，則 $\Delta P'AB_1\sim\Delta PAD_1(SAS)$，$\overline{PD_1}=\overline{P'B_1}=t$，

即 D_1 在中圓上。同理可證，D_2 在中圓上。當小圓與 P' 圓外切時，大圓半徑

$s=\dfrac{mt+1}{\sqrt{m^2+1-2m\cos\alpha}}$，即 $1<t<s\le\dfrac{mt+1}{\sqrt{m^2+1-2m\cos\alpha}}$，可作出所求平行四邊形。 □

伍、研究結果

我們將研究結果利用表格方式呈現，以利看出相關性。

一、正方形：

(一)到三頂點距離為 1, t

順序	1 t 1 正方形	1 t t 正方形
正方形存在時 t 的範圍	$1\le t\le\sqrt{2}+1$	$t\ge1$
最大正方形	當 $t=\sqrt{5}$ 時，有最大正方形，邊長為 2	無
中心軌跡	當 $\sqrt{2}-1\le t\le\sqrt{2}+1$ 時，1 t 1 正方形中心軌跡為一圓除一點	當 $t\ge\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 時，1 t t 正方形中心軌跡為一直線除一點

(二)到三頂點距離為 1，t，s

順序	1 t s 正方形	t 1 s 正方形	s 1 t 正方形
正方形存在時 s，t 的範圍	$1<t<s\le t+\sqrt{2}$	$1<t<s\le\sqrt{2}t+1$	$1<t<s\le\dfrac{t+1}{\sqrt{2}}$
最大正方形	當 $s=\sqrt{t^2+2t+2}$ 時，有最大正方形，邊長為 $t+1$。	當 $s=\sqrt{2t^2+2t+1}$ 時，有最大正方形，邊長為 $t+1$。	無
中心軌跡	當 $\left\|t-\sqrt{2}\right\|\le s\le t+\sqrt{2}$ 時，中心軌跡為一圓	當 $\sqrt{2}t-1\le s\le\sqrt{2}t+1$ 時，中心軌跡為一圓	

二、菱形：

(一) 到三頂點距離為 1，t

順序	1 t 1 菱形	1 t t 菱形
菱形存在時 t 的範圍	$1\le t\le 2\sin\dfrac{\alpha}{2}+1$	$t\ge 1$
最大菱形	當 $t=\sqrt{5-4\cos\alpha}$ 時，有最大菱形，邊長為 2	無
中心軌跡	當 $\left\|2\sin\dfrac{\alpha}{2}-1\right\|\le t\le 2\sin\dfrac{\alpha}{2}+1$ 時，中心軌跡為一圓除一點	當 $t\ge\sin\dfrac{\alpha}{2}$ 時，中心軌跡為一直線除一點

(二) 到三頂點距離為 1，t，s

順序	1t s 菱形	t 1 s 菱形	s 1 t 菱形
菱形存在時 s,t 的範圍	$1<t<s\le 2\sin\dfrac{\alpha}{2}+t$	$1<t<s\le 2t\sin\dfrac{\alpha}{2}+1$	$1<t<s\le\dfrac{t+1}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}$
最大菱形	當 $s=\sqrt{t^2+2t+2-2(t+1)\cos\alpha}$ 時，有最大菱形，邊長為 $t+1$。	當 $s=\sqrt{2t^2+2t+1-2t(t+1)\cos\alpha}$ 時，有最大菱形，邊長為 $t+1$	無
中心軌跡	當 $\left\|2\sin\dfrac{\alpha}{2}-t\right\|\le s\le 2\sin\dfrac{\alpha}{2}+t$ 時，中心軌跡為一圓	當 $2t\sin\dfrac{\alpha}{2}-1\le s\le 2t\sin\dfrac{\alpha}{2}+1$ 時，中心軌跡為一圓	

三、矩形：

(一)到三頂點距離為 1，t

順序	1 t 1 矩形	1 t t 矩形

矩形存在時 t的範圍	$1\le t\le\sqrt{m^2+1}+m$	$1\le t\le\dfrac{\sqrt{m^2+1}}{m-1}$
最大矩形	當 $t=\sqrt{4m^2+1}$ 時，有最大矩形， 短邊長為 2 ，長邊長為 2m 。	當 $t=\dfrac{\sqrt{m^4+6m^2+1}}{m^2-1}$ 時，有最大矩形， 長邊為 $\dfrac{2m\sqrt{m^2+1}}{m^2-1}$
中心軌跡	當 $\sqrt{m^2+1}-m\le t\le\sqrt{m^2+1}+m$ 時， 中心軌跡為一圓除一點	當 $\dfrac{\sqrt{m^2+1}}{m+1}\le t\le\dfrac{\sqrt{m^2+1}}{m-1}$ 時， 中心軌跡為一圓除一點

(二)到三頂點距離為 $1,t,s$

順序	1 t s 矩形	t 1 s 矩形	s 1 t 矩形
矩形存在時 s,t 的範圍	$1<t<s\le\dfrac{\sqrt{m^2+1}+t}{m}$	$1<t<s\le\dfrac{t\sqrt{m^2+1}+1}{m}$	$1<t<s\le\dfrac{mt+1}{\sqrt{m^2+1}}$
最大矩形	當 $s=\dfrac{\sqrt{m^2+t^2+2t+1}}{m}$ 時，有最大矩形，邊長為 $t+1$	當 $s=\dfrac{\sqrt{m^2t^2+t^2+2t+1}}{m}$ 時，有最大矩形，邊長為 $t+1$	無
中心軌跡	當 $\left\lvert\dfrac{\sqrt{m^2+1}-t}{m}\right\rvert\le s\le\dfrac{\sqrt{m^2+1}+t}{m}$ 時，中心軌跡為一圓	當 $\dfrac{t\sqrt{m^2+1}-1}{m}\le s\le\dfrac{t\sqrt{m^2+1}+1}{m}$ 時，中心軌跡為一圓	

四、平行四邊形：

(一)到三頂點距離為 1，t

順序	1 t 1 平行四邊形	1 t t 平行四邊形
平行四邊形存在時t的範圍	$1\le t\le\sqrt{m^2+1-2m\cos\alpha}+m$	$1\le t\le\dfrac{\sqrt{m^2+1-2m\cos\alpha}}{m-1}$
最大平行四邊形	當 $t=\sqrt{4m^2+1-4m\cos\alpha}$ 時，有最大平行四邊形，短邊長為 2 ，長邊長為 2m	當 $t=\dfrac{\sqrt{m^4+6m^2+1-2m^3\cos\alpha-4m\cos\alpha}}{m^2+1}$ 時，有最大平行四邊形，長邊長為 $\dfrac{2m\sqrt{m^2+1-2m\cos\alpha}}{m^2-1}$
中心軌跡	$\left\lvert\sqrt{m^2+1-2m\cos\alpha}-m\right\rvert\le t\le\sqrt{m^2+1-2m\cos\alpha}+m$ 中心軌跡為一圓除一點	$\dfrac{\sqrt{m^2+1-2m\cos\alpha}}{m+1}\le t\le\dfrac{\sqrt{m^2+1-2m\cos\alpha}}{m-1}$ 中心軌跡為一圓除一點

(二)到三頂點距離為 1, t , s

順序	平行四邊形存在時 s , t 的範圍	最大平行四邊形
1 t s 平行四邊形	$1<t<s\le\dfrac{\sqrt{m^2+1-2m\cos\alpha}+t}{m}$	$s=\dfrac{\sqrt{m^2+t^2+2t+1-2m(t+1)\cos\alpha}}{m}$ 有最大平行四邊形，長邊長為 $t+1$
t 1 s 平行四邊形	$1<t<s\le\dfrac{t\sqrt{m^2+1-2m\cos\alpha}+1}{m}$	$s=\dfrac{\sqrt{m^2t^2+t^2+2t+1-2m(t+1)\cos\alpha}}{m}$ 有最大平行四邊形，長邊長為 $t+1$
s 1 t 平行四邊形	$1<t<s\le\dfrac{mt+1}{\sqrt{m^2+1-2m\cos\alpha}}$	無

順序	中心軌跡
1 t s 平行四邊形	當 $\left\lvert\dfrac{\sqrt{m^2+1-2m\cos\alpha}-t}{m}\right\rvert\le s\le\dfrac{\sqrt{m^2+1-2m\cos\alpha}+t}{m}$ 時，中心軌跡為一圓
t 1 s 平行四邊形	當 $\left\lvert\dfrac{t\sqrt{m^2+1-2m\cos\alpha}-1}{m}\right\rvert\le s\le\dfrac{t\sqrt{m^2+1-2m\cos\alpha}+1}{m}$ 時，中心軌跡為一圓
s 1 t 平行四邊形	

陸、討論

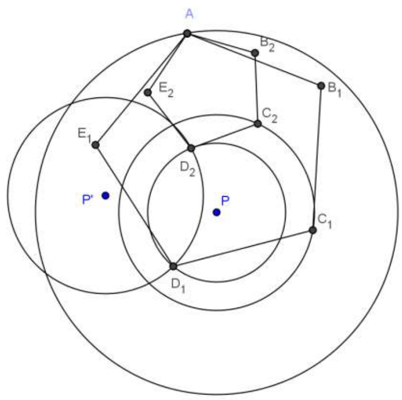
一、因為 s1t 正方形的定點在大圓上，當大圓半徑變動時，定點也隨著跑動，因此不討論中心軌跡。

二、若平面上一定點，及三段固定長，可利用此方法找出正 n 邊形，使得三相鄰頂點至定點距離為此三段長。若三頂點不相鄰，無法用相同方法找出正 n 邊形。

三、正五邊形：若平面上一定點 P ，給定三個距離 a,b,c ，是否存在正五邊形使得其中三個頂點與 P 的距離為 a,b,c ？不妨設最短長度為 1，另兩段長為 t 及 s 。若距離為 1, t,s 的三頂點為相鄰，則正五邊形的作圖方法與正方形的作圖方法雷同，旋轉角度改為正五邊形的內角-108°即可。若三頂點不相鄰，我們提供的作法如下：以 P 為圓心，作半徑為 $1,t$ 及 s 的三圓。在大圓上取任意一點 A，以 A 為旋轉中心，將 P 旋轉 $-36°$ 至 P'。以 P' 為圓心，t 為半徑作圓，交小圓於 D_1,D_2。以 A 為旋轉中心，將 D_1,D_2 旋轉 $36°$ 至 C_1,C_2，

以 $\overline{C_1D_1}, \overline{C_2D_2}$ 為正五邊形的一邊分別作正五邊形

$AB_1C_1D_1E_1, AB_2C_2D_2E_2$，則兩正五邊形即為所求。



四、平面上一定點，及三段固定長，可否找出一致性的方法作出正 n 邊形，使得三頂點至定點距離為此三段長？

五、空間中一定點，及四段固定長，可否找出立方體，使得四頂點至定點距離為此四段長，並找出此立方體存在條件？又，需要若干固定長才能決定立方體存在？

六、如何利用四邊形的分類方式決定正 n 邊形的分類原則？

柒、結論

一、若將 $1ts$ 正方形及 $t1s$ 正方形中的 t 設為 1，其結果與 $1t1$ 正方形相同。

二、$1ts$ 及 $t1s$ 正方形、菱形、矩形、平行四邊形的最大邊長皆為 $t+1$。

三、在 $1tt$ 矩形及平行四邊形中，將 m 趨近於 1，則 B_1 及 B_2 所在的阿波羅尼斯圓將退化為 $\overline{PP'}$ 的中垂線，結果分別與 $1tt$ 正方形及菱形結果相同。

四、將 α 設為 $90°$，則菱形結果與正方形相同。將 m 設為 1，則矩形結果與正方形相同。

五、分別將 m 設為 1 且 α 設為 $90°$，則平行四邊形結果分別與菱形及矩形相同。

六、若不限制 $1ts$ 大小關係，利用 GGB 作圖置換大中小圓，則 $1ts, s1t, t1s$ 作圖皆相同。

捌、參考資料及其他

左銓如、季素月（1998）。初等幾何研究（一版）。臺北市：九章。

游森棚等（2014）。普通高級中學數學第三冊。臺南市：翰林。

許志農等（2011）。普通高級中學數學第四冊。臺北市：龍騰。

【評語】040412

本論文主要在研究已知一方形中某點 P 到三頂點的距離為 1、s、t 求出存在這樣的正方形及 P 點的條件，並求出所有可能的正方形中心的軌跡。接著，論文並將討論由正方形延伸到菱形、矩形、平行四邊形。

整體來說，對於正方形、菱形、長方形、平行四邊形的討論完整，論文有一定的難度。

若有缺點，可能是有些情況分得太細，例如，討論正方形的時候分為 $1t1$、$1tt$、$1ts$、$t1s$、$s1t$ 等等情況，可以再求整合，以便精煉。其他有關菱形、長方形、平行四邊形的討論也有類似的現象。