中華民國第 55 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組　數學科

040411

最近的相思

學校名稱：臺北市立成功高級中學

作者：	指導老師：
高二 許竣澤 高二 龔泰維	劉國莉

關鍵詞：最短距離、對稱、角平分

摘要

我們在高一時學到如何在銳角三角形三邊上任取一點形成周長最小的三角形。而我們現在將原有三角形的三邊轉化成圓或點，來探討三個元件上各取一點滿足最小周長的條件。

當我們以幾何的證明方法找尋三角形周長發生最小值的條件時，可由前幾個例子發現三角形周長發生最小值時皆具有角平分的特性，之後我們便朝此方向證明所有情況。接著，我們再以物理最小能量原理重新解釋每一種情況發生最小周長時的條件。

目前我們仍無法克服的為兩圓一點或三圓的情況，雖然已知滿足最小周長時會具備角平分的特性，但在明確找出點的確切位置時，我們目前只能經由圖形的觀測，發現一些有趣的特點，這之間還存在許多有趣的秘密等待我們去探索。

壹、 研究動機

在高一的特色課程中提到在銳角三角形三邊上任取一點所形成周長最小的三角形時，恰為垂足三角形，此垂足三角形的內心又恰為原三角形之垂心，覺得非常奧妙。

同時，在高二的課程單元“圓與直線”中，經常探討圓與直線的距離。在老師一次談到直線可視為半徑無限大的圓時，我們突然想到是否可以從特色課程中的銳角三角形最小內接周長的問題，延伸到點、線、圓三圖形之間最小距離的探討，而開啟我們一連串的探索旅程。

貳、 研究目的

在原有銳角三角形三邊的角色，任意改成“點、線、圓”，任取 3 個(可重複)的組合(與位置關係)中，找到 3 者間有最小周長的三角形，並觀察這些情況是否有其共通性。

參、 研究設備及器材

紙筆、黑板、電腦

肆、 研究過程與結果

由於總共圖形組合方式共有 $H_3^3=10$ 種，我們的討論順序就由簡入繁、從易到難，一個個逐一討論。先針對每一種情況猜測發生最小周長的條件，再嘗試以初等幾何的方式證明。但由前幾種簡單例子我們覺得幾何證明的結果與物理光學的反射定律雷同，因此我們再嘗試以物理學的觀點來解決我們的問題。我們將十種情況整理如下：

一、三個點

已知三相異點 P 、Q 、R ，則三點兩兩相連之線段和(周長)最小，ΔPQR 即為所求。

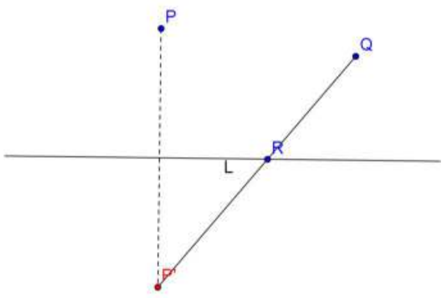
二、兩點一線

已知一直線 L 及位於 L 同側的相異兩點 P、Q，求直線 L 上動點 R，使的 $\overline{PQ}+\overline{PR}+\overline{RQ}$ 和最小。

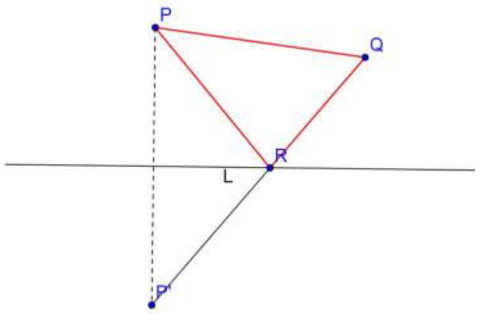
幾何作法：

1.以直線 L 為對稱軸，作點 P 的對稱點 P'。連 $\overline{P'Q}$，交直線 L 於 R(如圖 1 A1)

2.連線段 $\overline{PR}$、$\overline{PQ}$。則三角形 PQR 周長即為所求(如圖 1 A2)



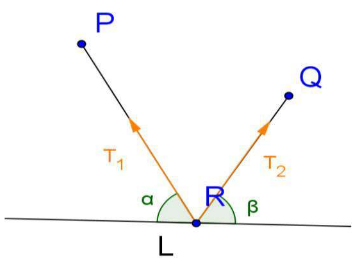
(圖 1 A1)



(圖 1 A2)

物理觀點：

假設現有一條具有彈性的繩子(不計質量)，今將其兩端分別綁在 P、Q 兩點(如圖 2 A3)，並繞過在 R 點上的滑輪，其中滑輪可在直線 L 上移動。根據物理的最小能量原理，系統穩定時會保持在最小位能。平衡時會使繩子長度 $\overline{PR}+\overline{QR}$ 有最小值，此時系統平衡即滑輪固定不動，故



(圖 2 A3)

$$T_1 \cdot \cos\alpha = T_2 \cdot \cos\beta \text{ 。}$$

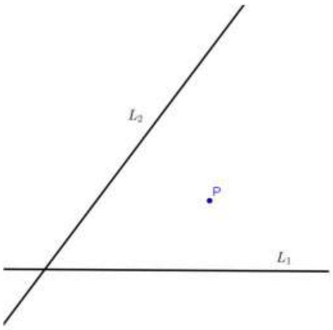
且因為同一條輕繩上繩張力處處相等，即 $T_1 = T_2$。由此可知 $\cos\alpha = \cos\beta \Rightarrow \alpha = \beta$。即當 $\overline{RP}$ 和 $\overline{RQ}$ 的角平分向量垂直 L 時，ΔPQR 周長即為所求。

三、一點兩線

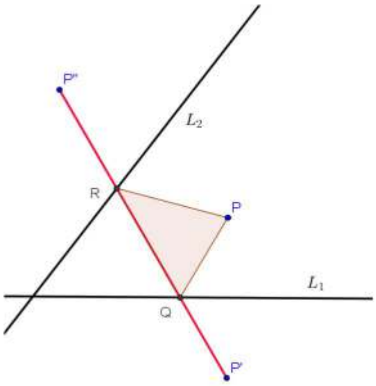
已知兩直線 L_1、L_2 及不在線上的點 P，兩直線 L_1、L_2 交於點 S，求兩線上各找一點 Q、R，使三者相連後線段和最小。(在此我們直接討論 L_1 不平行 L_2 的情況)

(一)　若點 P 位於直線 L_1 及 L_2 的銳角分割部分(如圖 3 A1)

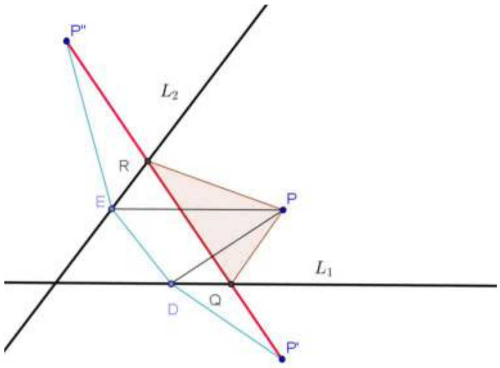
幾何作法：



(圖 3 A1)



(圖 3 A2)



(圖 3 A 3)

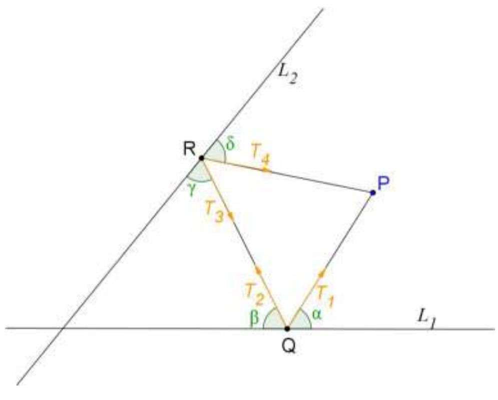
1. 以直線 L_1 、L_2 分別為對稱軸，作點 P 的對稱點 P' 、P'' 。連接 $\overline{P'P''}$ ，設 $\overline{P'P''}$ 與直線 L_1 、L_2 分別交於點 Q 、R 。
2. 連線段 $\overline{PR}$ 、$\overline{PQ}$ 。則三角形 PQR 即滿足線段和最小(如圖 3 A2)

幾何證明：

1. 在直線 L_1 、L_2 上分別任取一點 D 、E ，連接 $\overline{DP}$ 、$\overline{DP'}$ 、$\overline{EP}$ 、$\overline{EP'}$ 。
2. ΔPED 周長為 $\overline{ED}+\overline{DP}+\overline{EP}=\overline{ED}+\overline{DP'}+\overline{EP'}\geq\overline{P'P''}=\Delta PQR$ 周長。
3. 則得證 ΔPQR 故周長為最小值(如圖 3 A 3)。

物理觀點：

假設現有一條具有彈力的輕繩，將其兩端皆綁於 P 點上，且繞過在 Q 點和 R 點上的滑輪，兩滑輪分別可在直線 L_1 和 L_2 上移動 (圖 3 A4)。根據物理的最小能量原理，系統穩定時會保持在最小位能。平衡時會使輕繩長度 $\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RP}$ 有最小值，此時點 R 、Q 保持靜力平衡，故



(圖 3 A4)

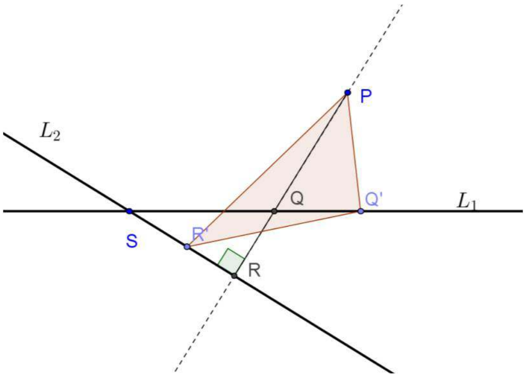
$$T_1\cdot\cos\alpha=T_2\cdot\cos\beta \text{ 且 } T_3\cdot\cos\gamma=T_4\cdot\cos\delta \text{ 。}$$

且因為同一條輕繩上繩張力處處相等，即 $T_1=T_2=T_3=T_4$ 。由此可知

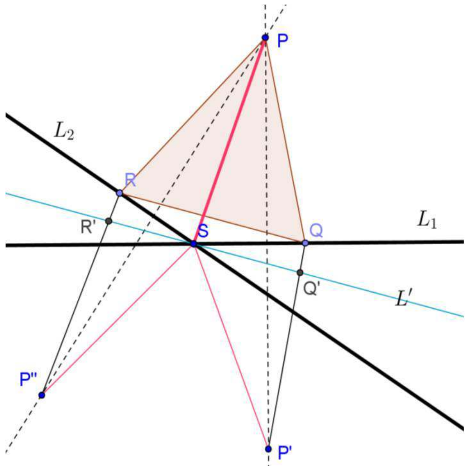
$\cos\alpha=\cos\beta$ 且 $\cos\gamma=\cos\delta$ ，$\alpha=\beta$ 且 $\gamma=\delta$ 。即當 $\overline{QP}$ 和 $\overline{QR}$ 的角平分線向量垂直 L_1

且$\overline{RP}$和$\overline{RQ}$的角平分向量垂直 L 或平行L_2時，ΔPQR周長即為所

(二) 若點P位於直線L_1及L_2的鈍角分割部分，且點P對L_1及L_2的垂足位於交點S之同側時(如圖 3 B)



(圖 3 B)



(圖 3 C)

幾何作法：

1. 可設點P離直線L_2較遠，過點P作直線L_2的垂足R。
2. 設$\overline{PR}$交直線L_1於點Q，則此時$\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{PR}$和最小。

幾何證明：

1. 任取直線L_1、L_2上的動點Q'、R'，則$\Delta PQ'R'$周長$\overline{PR'}+\overline{R'Q'}+\overline{PQ'}\geq\overline{PR'}+\overline{PR'}=2\overline{PR'}\geq 2\overline{PR}$
2. 故取直線L_1、L_2上的點為Q及垂足R時，$\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{PR}$和有最小值。

(三) 若點P位於直線L_1及L_2的鈍角分割部分分，且點P對L_1及L_2的垂足位於交點S之異側時(如圖 3 C)，當取L_1上的動點Q點為S，且L_2上的動點R也為S時，$\overline{PS}+\overline{PS}$為最小值。

幾何證明(如圖 3 C)：

1.任取直線L_1、L_2上的任取一點Q、R。以直線L_1、L_2分別為對稱軸，作點P的對稱點P'、P''。

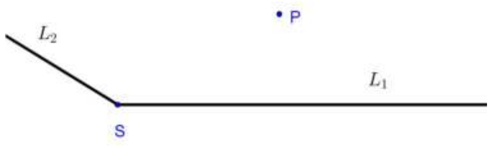
2.過P點作直線L'平行$\overline{RQ}$，設$\overline{QP'}$交直線L'於Q'，$\overline{RP''}$交直線L'於R'。

3.則ΔPQR周長$=\overline{PQ}+\overline{PR}+\overline{QR}=\overline{P'Q}+\overline{P''R}+\overline{QR}$

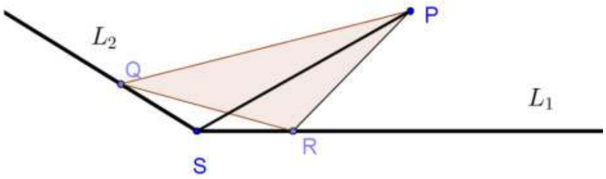
$$>\overline{P'Q'}+\overline{P''R'}+\overline{Q'R'}=\overline{P'Q'}+\overline{P''R'}+\overline{Q'S}+\overline{R'S}\geq 2\overline{P'S}=2\overline{PS}$$

故取直線 L_1 、 L_2 上的交點 S 時， $\overline{PS}+\overline{PS}$ 有最小值。

(四)　若點 P 位於射線 L_1 及 L_2 的鈍角分割部分(如圖 3 D)



(圖 3 D1)



(圖 3 D2)

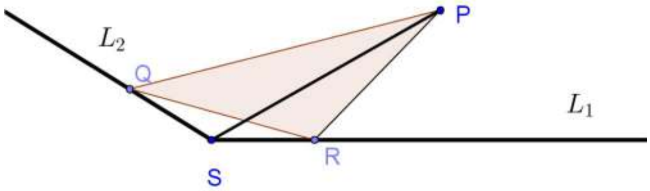
設射線 L_1 和 L_2 交於點 S ，當取 L_1 上的動點 Q 點為 S ，且 L_2 上的動點 R 也為 S 時， $\overline{PS}+\overline{PS}$ 為最小值。

幾何證明(如圖 3 D3)：

1.(如圖 3 D3)可設點 P 離 L_2 較遠，點 Q 、 R 分別為射線 L_1 和 L_2 的動點，連 $\overline{PR}$ 、 $\overline{PQ}$ 、 $\overline{QR}$ 。

2.則 ΔPQR 周長 $=\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RP}\geq\overline{PQ}+\overline{PQ}$

$\geq\overline{PS}+\overline{PS}=2\overline{PS}$



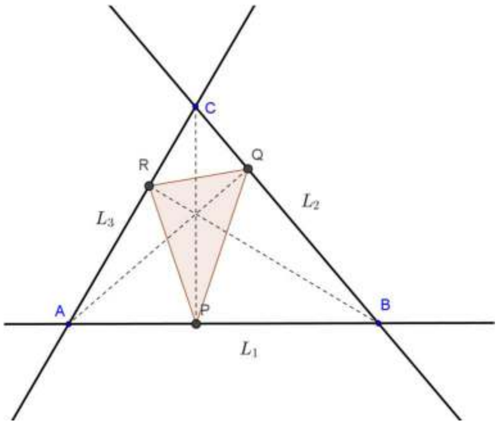
(圖 3 D 3)

四、三線

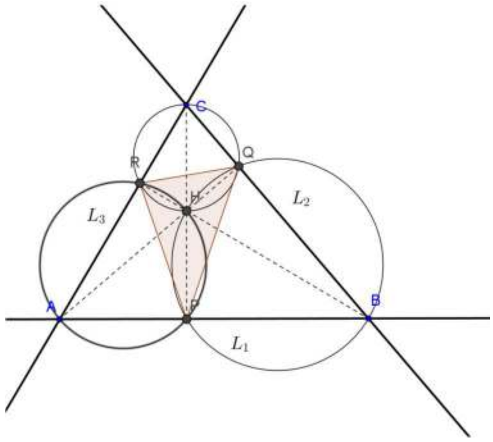
給定三相異直線 L_1、L_2、L_3，且兩兩相交於點 A、B、C，三線上各找 一點 P、Q、R，使的 ΔPQR 的周長最小。

幾何作法：

(一) 當 ΔABC 為銳角三角形時，作 ΔABC 三邊垂足 P 、 Q 、 R ，則 ΔPQR 的周長最小。而且此時 $\angle RPA=\angle QPB$ 、 $\angle PQB=\angle RQC$ 、 $\angle PRA=\angle QRC$ ，我們稱 ΔPQR 為 ΔABC 的等角內接三角形。(圖 4 A1)



(圖 4 A1)



(圖 4 A 2)

幾何證明：

1.我們先證明垂足三角形 PQR 為 ΔABC 之等角內接三角形(如圖 4 A2)

(1)設三垂線交於一點 H

(2)$\because P$ 、Q 、 R 為垂足，故 H、P、A、R 四點共圓，

H、P、B、Q 四點共圓，H、Q、C、R 四點共圓 。

(3) $\angle HPQ = \frac{1}{2}\overset{\frown}{HQ} = \angle QBH = \angle CBR = \angle CAQ = \frac{1}{2}\overset{\frown}{RH} = \angle HPR$

又 $\overline{CP} \perp L_1$ ，則 $\angle QPB = \angle RPA$ 同理可證 $\angle PQB = \angle RQC$ ， $\angle QRC = \angle PRA$ 。

故 ΔPQR 為 ΔABC 的等角內接三角形。

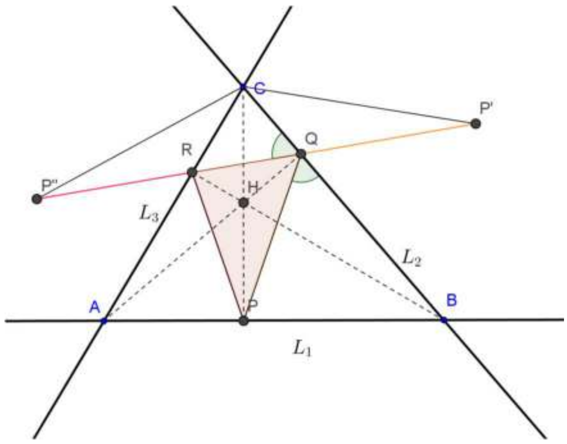
2.接著我們要證明 ΔPQR 的周長最小(如 4 A3)

(1) 以 L_2 為對稱軸，作點 P 的對稱點 P' ，連 $\overline{QP'}$ ，則 $\overline{QP} = \overline{QP'}$ 。

(2) $\because \angle PQB = \angle RQC \Rightarrow R, Q, P'$ 共線

(3) 同理，以 L_3 為對稱軸，作點 P 的對稱點 P'' ，則

$\overline{RP} = \overline{RP''}$ ，且 Q, R, P'' 共線



(圖 4 A3)

(4) 因此 ΔPQR 的周長等於 $\overline{P'P''}$ 長

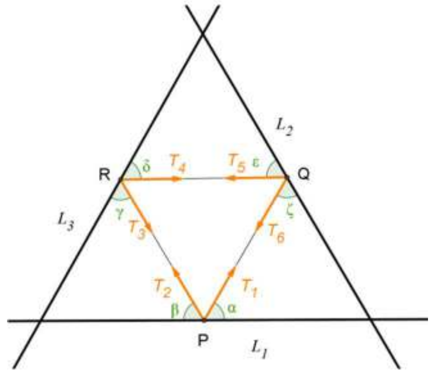
(5) 考慮$\Delta CP'P''$，$\overline{CP'}=\overline{CP}=\overline{CP''}$，且$\angle P''CP'=2\angle ACB$頂角固定，當腰長$\overline{CP}$最小時，底邊有最小值。

故當ΔPQR為垂足三角形時有最小內接周長。

物理觀點：

假設現有一條具有彈力的輕繩圈，將其繞過在 P 點、Q 點和 R 點上的滑輪，三滑輪分別可在直線L_1、L_2和L_3上滑動。

根據物理的最小能量原理，系統穩定時會保持在最小位能。平衡時會使輕繩長度$\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RP}$有最小值，此時點$R$、$Q$保持靜力平衡，故



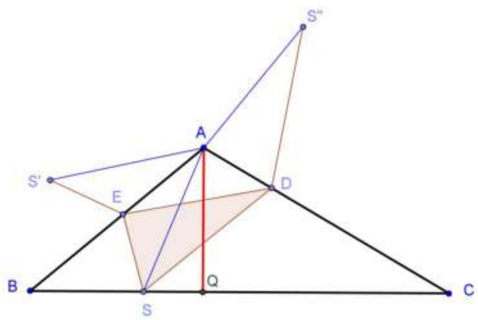
(圖 4 A1)

$$T_1\cdot\cos\alpha=T_2\cdot\cos\beta\text{ 、 }T_3\cdot\cos\gamma=T_4\cdot\cos\delta\text{ 且 }T_5\cdot\cos\varepsilon=T_6\cdot\cos\zeta\text{ 。}$$

且因為同一條輕繩上繩張力處處相等，即$T_1=T_2=T_3=T_4=T_5=T_6$。由此可知$\cos\alpha=\cos\beta$、$\cos\gamma=\cos\delta$且$\cos\varepsilon=\cos\zeta$，$\alpha=\beta$、$\gamma=\delta$且$\varepsilon=\zeta$。

即當$\overleftrightarrow{QP}$和$\overleftrightarrow{RP}$的角平分線垂直L_1或平行L_1、$\overleftrightarrow{PQ}$和$\overleftrightarrow{RQ}$的角平分線垂直L_2或平行L_2且$\overleftrightarrow{PR}$和$\overleftrightarrow{QR}$的角平分線垂直L_3或平行L_3時，ΔPQR周長即為所求。

(二)當ΔABC為鈍角三角形時，設$\angle A$為鈍角(如圖 4 B)，若三點P、Q、R只能在三角形三邊$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$移動。作$\overline{AQ}\perp\overline{BC}$於點$Q$，則當線段$\overline{AB}$及$\overline{AC}$上的動點$P$、$Q$都取點$A$，線段$\overline{BC}$上的動點取垂足$Q$，此時$\overline{AQ}+\overline{AQ}$有最小值。



(圖 4 B)

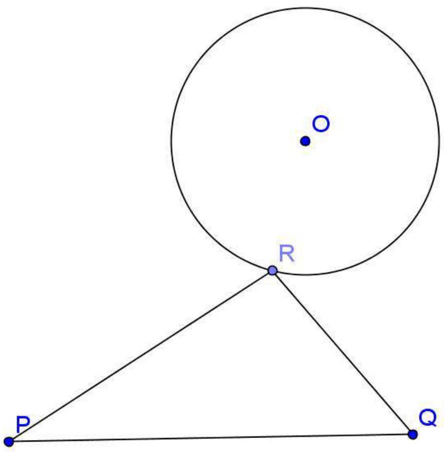
幾何證明：

在線段$\overline{AB}$、$\overline{AC}$、$\overline{BC}$任取三點E、D、S，作點S的對稱點S'、S''(如圖)則ΔEDS周長$=\overline{S'E}+\overline{ED}+\overline{DS''}\geq\overline{AS'}+\overline{AS'}$($\because \angle S'AS''<180°$)，$2\overline{AS'}=2\overline{AS}\geq 2\overline{AQ}$，故取點$E$為$A$，取點$D$為$A$，取點$S$為$Q$時有最小值。

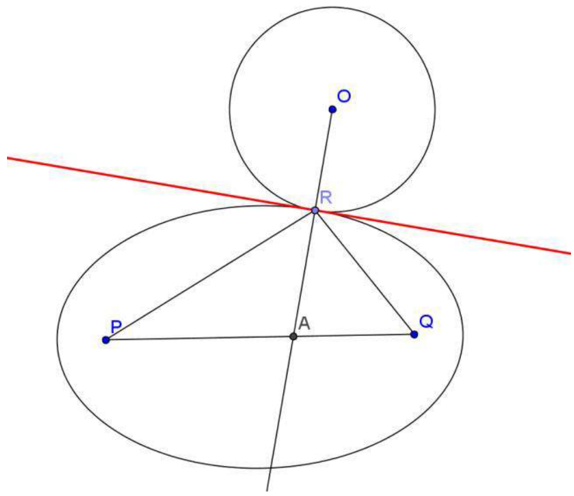
五、兩點一圓

幾何作法：

(一)給定圓O及圓外兩點P、Q，假設此時圓O 與線段$\overline{PQ}$不相交(如圖 5 A1)。考慮圓上動點R，當ΔPQR的周長最短時，直線$\overleftrightarrow{OR}$恰平分$\angle PRQ$，且點R恰為橢圓Γ與圓O相切的切點 ，其中橢圓Γ為以點P、Q為焦點的橢圓。(如圖 5 A2)



(圖 5 A1)



(圖 5 A2)

幾何證明：

1. 我們欲證明當ΔPQR的周長最短時，此時直線$\overleftrightarrow{OR}$恰平分$\angle PRQ$

   (1) 若$\overleftrightarrow{OR}$不平分$\angle PRQ$，我們可找到圓上另一點S滿足$\overleftrightarrow{OS}$平分∠PSQ，且作過S的切線L將圓O與點P、Q分於異側

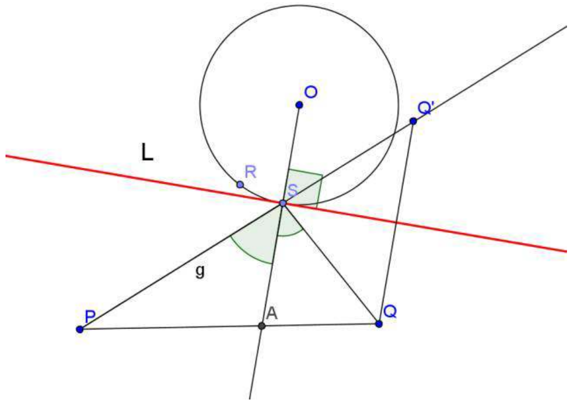
(2) 以 L 為對稱軸，作點Q的對稱點 Q'，

連 $\overline{SQ'}$。

(3) 因為 $\overleftrightarrow{OS}$ 平分 $\angle PSQ$，所以 P、S、Q'

三點共線。ΔPSQ 周長為

$\overline{PQ}+\overline{PQ'}$。



(4) ΔPQR 周長等於

$\overline{PQ}+\overline{PR}+\overline{RQ}\geq\overline{PQ}+\overline{PR}+\overline{RQ'}>\overline{PQ}+\overline{PQ'}$

(圖 5A3)

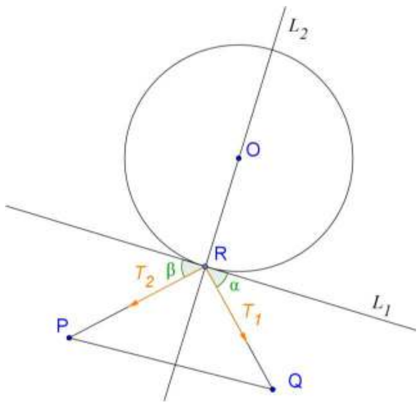
為 ΔPSQ 周長，與 ΔPQR 周長為最小值產生矛盾。(如圖 5A 3)

故當 ΔPQR 周長為最小值時，直線 $\overleftrightarrow{OR}$ 恰平分 $\angle PRQ$。

2. 設 $\min\left[\Delta PQR'周長\middle|R'在圓周上\right]=l$，$\Delta PQR$ 周長恰為最小值 l 時，點 R 滿足 $\overline{RP}+\overline{RQ}=l-\overline{PQ}$，即點 R 在以 P、Q 為焦點，長軸長為 $l-\overline{PQ}$ 的橢圓 Γ 上。且圓上的其他點 R' 皆滿足 $\overline{R'P}+\overline{R'Q}>l-\overline{PQ}$ 即點 R' 皆在橢圓 Γ 外。此時點 R 恰為橢圓 Γ 與圓 O 的切點。

物理觀點：

假設現有一條具有彈性的輕繩，今將其兩端分別綁在 P、Q 兩點，並繞過在 R 點上的滑輪，其中滑輪可在圓 O 上移動。根據物理的最小能量原理，系統穩定時會保持在最小位能。平衡時會使輕繩長度 $\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RP}$ 有最小值，此時點 R 保持靜力平衡，則 $T_1\cdot\cos\alpha=T_2\cdot\cos\beta$。因為同一條輕繩上繩張力處處相等，即 $T_1=T_2\Rightarrow\alpha=\beta$。由此得知當 ΔPQR 周長為最小值時，直線 $\overleftrightarrow{OR}$ 恰平分 $\angle PRQ$。



(圖 5 A3)

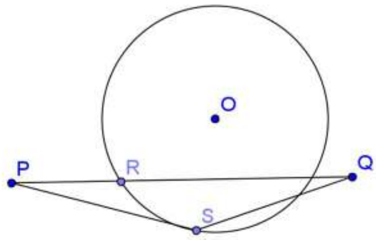
(二)給定圓O及圓外兩點P、Q，若此時圓O與線段$\overline{PQ}$相交(如圖 5 B)。考慮圓上動點R，當點R恰在$\overline{PQ}$上時，$\overline{RP}+\overline{RQ}+\overline{PQ}$有最小值。

幾何作法：

在圓O上任取一點S，則ΔPQS的周長為

$\overline{PQ}+\overline{QS}+\overline{SP}\geq\overline{PQ}+\overline{PQ}=2\overline{PQ}$，故在圓上取一點 R，使

$\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RP}$有最小值。

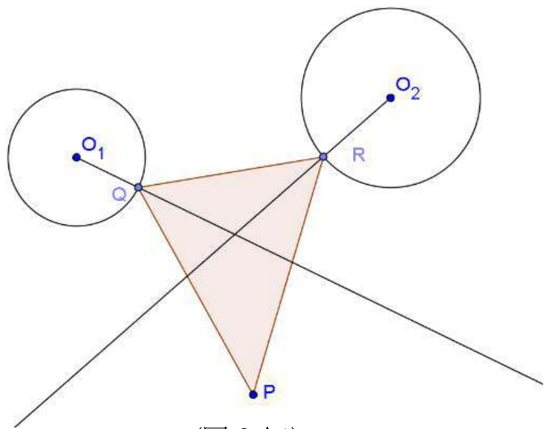


(圖 5 B)

六、一點兩圓

幾何作法：

給定圓O_1、O_2及圓外一點P，考慮圓上動點Q、R，當ΔPQR的周長最短時，則直線$\overleftrightarrow{O_1Q}$恰平分$\angle PQR$ 且直線$\overleftrightarrow{O_2R}$恰平分$\angle PRQ$ (圖 6 A1)



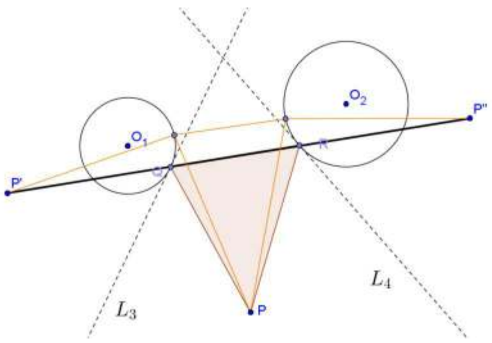
(圖 6 A1)

幾何證明：

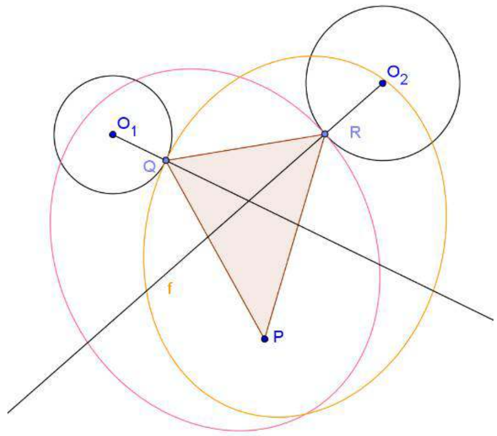
1. 當ΔPQR的周長為最短時，若此時直線$\overleftrightarrow{O_1Q}$未平分$\angle PQR$，則即可在圓$O_1$上找到另一點$Q'$使$\Delta PQ'R$的周長小於$\Delta PQR$的周長，與已知矛盾，故直線$\overleftrightarrow{O_1Q}$平分$\angle PQR$。
2. 同理，此時直線$\overleftrightarrow{O_2R}$也平分$\angle PRQ$。
3. 設過點Q、R的切線為L_3、L_4
4. 以L_3、L_4為對稱軸，做點P的對稱點P'、P''，連$\overline{P'P''}$，則P'、Q、R、P''四點共線。

5. ΔPQR 的周長等於 $\overline{P'P''}$(如圖 6 A2)

6. 另外，當 ΔPQR 的周長為最短時，設此周長為 l，令 Γ_1 為以點 P、R 為焦點，$l-\overline{PR}$ 長為長軸的橢圓，則此時點 Q 恰為圓 O_1 和橢圓 Γ_1 的切點。同時，令 Γ_2 為以點 P、Q 為焦點，$l-\overline{PQ}$ 長為長軸的橢圓，則此時點 R 恰為圓 O_2 和橢圓 Γ_2 的切點。(如圖 6 A3)



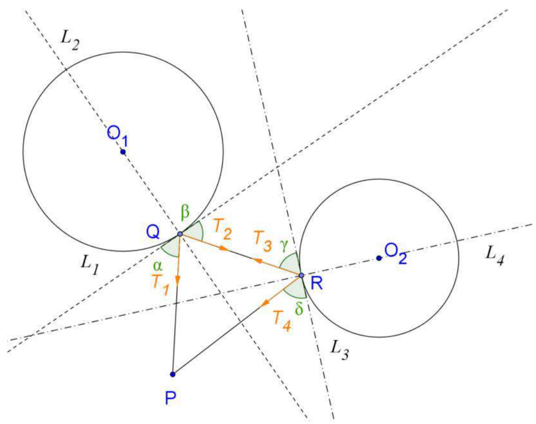
(圖 6 A2)



(圖 6 A3)

物理觀點：

假設現在有一條具有彈力的輕繩，將其兩端皆綁於 P 點上，且繞過在 Q 點和 R 點上的滑輪，兩滑輪分別可在圓 O_1、O_2 上移動(如圖 6A4)。根據物理的最小能量原理，系統穩定時會保持在最小位能。平衡時會使輕繩長度 $\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RP}$ 有最小值，此時點 Q、R 保持靜力平衡，即 $T_1\cdot\cos\alpha=T_2\cdot\cos\beta$ 且 $T_3\cdot\cos\gamma=T_4\cdot\cos\delta$。



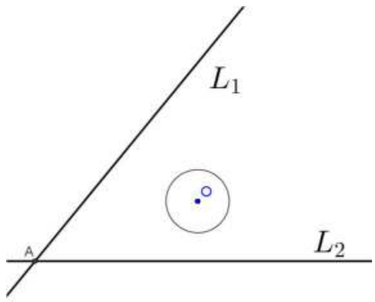
(圖 6 A4)

又同一條輕繩上繩張力處處相等，即 $T_1=T_2=T_3=T_4$，可得 $\alpha=\beta$ 且 $\gamma=\delta$。故當 ΔPQR 的周長最短時，則直線 $\overleftrightarrow{O_1Q}$ 恰平分 $\angle PQR$ 且直線 $\overleftrightarrow{O_2R}$ 恰平分 $\angle PRQ$。

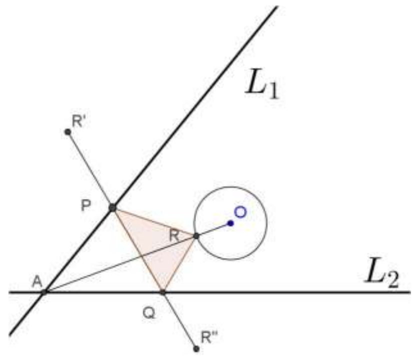
七、兩線一圓

(一) 給定兩相交直線 L_1、L_2 及與直線不相交的圓 O，若此時圓 O 位於兩線的銳交角部份(如

圖 7 A1) ，找出直線 L_1 、 L_2 及圓 O 上動點 P、Q、R，使的 ΔPQR 的周長為最小。



(圖 7 A1)



(圖 7 A2)

幾何作法：

1. 設 L_1 與 L_2 的交點為 A ，連 $\overline{OA}$ ，交圓 O 於點 R 。

2. 以直線 L_1 、 L_2 為對稱軸，作點 R 的對稱點 R' 、 R'' 。連 $\overline{R'R''}$ ，直線 L_1 、 L_2 於點 P 、 Q

3. ΔPQR 為所求(如圖 7 A2)

幾何證明：

1. 考慮圓上任一定點 R ，直線 L_1 、 L_2 上的動點選擇方式如上所列之作法時 ， ΔPQR 周長有最小值 (如情況三：兩線一點之情形)

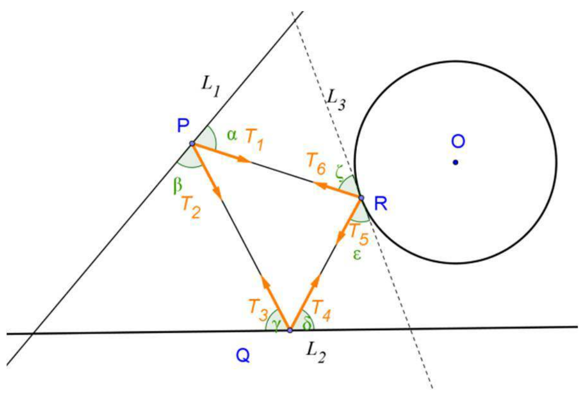
2. 接著再將點 R 視為圓上的動點， ΔPQR 周長等於 $\overline{R'R''}$ 長。

3. 無論點 R 如何變動，其相對應的 $\Delta R'AR''$ 恆為等腰三角形($\overline{AR'} = \overline{AR} = \overline{AR''}$)，且頂角恆為 $2\angle PAQ$ 。

4. 故當腰長最短時有最短底邊，因此當點 R 為 $\overline{OA}$ 連線與圓 O 的交點時， ΔPQR 周長為最小值。

物理觀點：

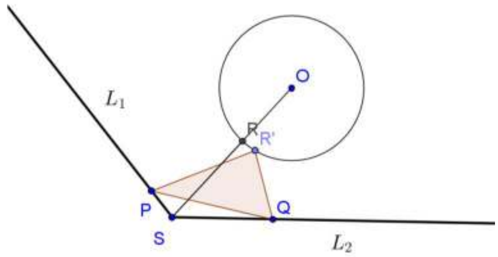
假設現有一條具有彈力的輕繩圈，將其繞過在 P 點、Q 點和 R 點上的滑輪，三滑輪分別可在直線 L_1 、 L_2 和圓 O 上移動。根據物理的最小能量原理，系統



(圖 7 A3)

穩定時會保持在最小位能。平衡時會使輕繩長度$\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RP}$有最小值，此時點$P$、$Q$、$R$保持靜力平衡，故$T_1\cdot\cos\alpha=T_2\cdot\cos\beta$、$T_3\cdot\cos\gamma=T_4\cdot\cos\delta$且$T_5\cdot\cos\varepsilon=T_6\cdot\cos\zeta$。且因為同一條輕繩上繩張力處處相等，即$T_1=T_2=T_3=T_4=T_5=T_6$。由此可知$\cos\alpha=\cos\beta$、$\cos\gamma=\cos\delta$且$\cos\varepsilon=\cos\zeta$，$\alpha=\beta$、$\gamma=\delta$且$\varepsilon=\zeta$。

(二)給定兩射線L_1、L_2及與射線不相交的圓O，(如 7 B)，若此時圓O位於兩射線的鈍交角部份，找出射線L_1、L_2及圓O上動點P、Q、R，使的ΔPQR的周長為最小。



(圖 7 B)

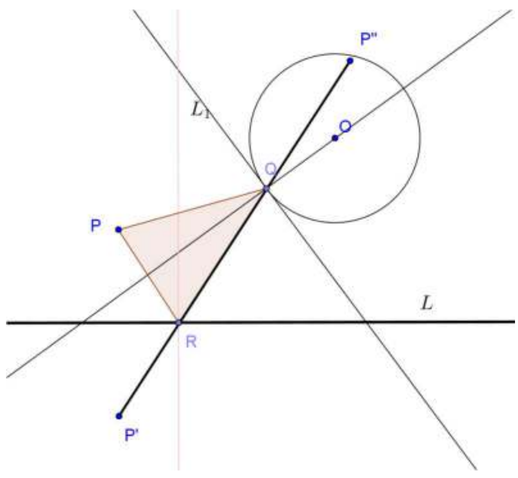
幾何證明：

1. 設射線L_1、L_2相交於點S，$\overline{OS}$交圓O於點R
2. 考慮圓上任一定點R'，直線L_1、L_2上的動點P、Q，$\Delta PQR'$周長$\geq 2\overline{R'S}\geq 2\overline{RS}$
3. 故取L_1和L_2上動點為皆為S時有最小值。

八、一點一線一圓

給定一點P、一圓O及與圓不相交的直線L，設此時點P與圓O位於直線同側。考慮圓上動點Q及直線上動點R，當ΔPQR的周長最短時，則直線$\overleftrightarrow{OQ}$恰平分$\angle PQR$且過點R且垂直L的直線平分$\angle PRQ$ (如圖 8 A1)。

幾何證明：



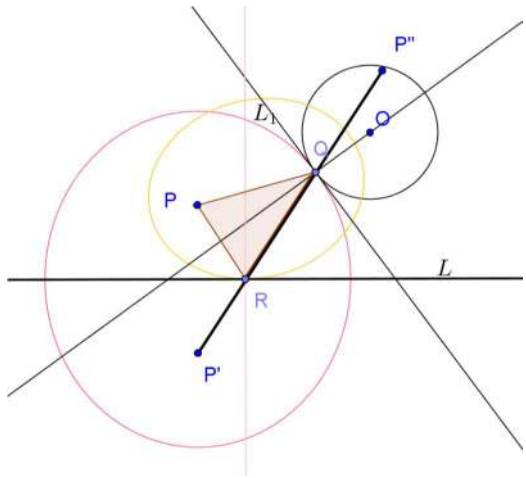
(圖 8 A1)

1. 當ΔPQR的周長為最短時，若此時直線$\overleftrightarrow{OQ}$未平分$\angle PQR$，則可在圓O上找到另一點Q'使$\Delta PQ'R$的周長小於ΔPQR的周長，與已知矛盾，故直線$\overleftrightarrow{OQ}$平分$\angle PQR$。(如兩點一圓情況)
2. 此時過點R且垂直L的直線也平分$\angle PRQ$ (如兩點一線情況)。

3. 設過點Q的切線為L_1，以L、L_1為對稱軸，做點P的對稱點P'、P''，連$\overline{P'P''}$，則P'、R、Q、P''四點共線。

4. ΔPQR的周長等於$\overline{P'P''}$。

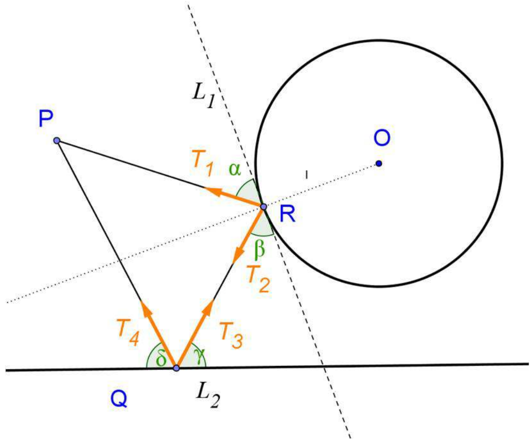
5. 此時點Q恰為以點P、P'為焦點的橢圓與圓O的切點。點R恰為以點P、Q為焦點的橢圓與直線L的切點。(如圖 8A2)



(圖 8 A2)

物理觀點：

假設現有一條具有彈力的輕繩，將其兩端皆綁於 P 點上，且繞過在 Q 點和 R 點上的滑輪，兩滑輪分別可在圓 O 和直線L_3上移動(圖 8 A2)。根據物理的最小能量原理，系統穩定時會保持在最小位能。平衡時會使輕繩長度$\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RP}$有最小值，此時點$Q$、$R$保持靜力平衡，故$T_1\cdot\cos\alpha=T_2\cdot\cos\beta$且$T_3\cdot\cos\gamma=T_4\cdot\cos\delta$。



(圖 8 A2)

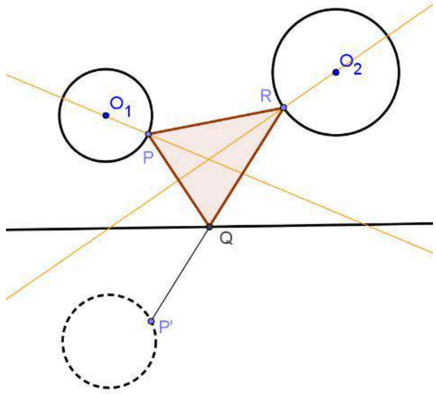
且因為同一條輕繩上繩張力處處相等，即$T_1=T_2=T_3=T_4$。由此可知$\cos\alpha=\cos\beta$且$\cos\gamma=\cos\delta$，得$\alpha=\beta$且$\gamma=\delta$。故當ΔPQR的周長最短時，則直線$\overleftrightarrow{OQ}$恰平分$\angle PQR$且過點R且垂直L的直線平分$\angle PRQ$。

九、一線兩圓

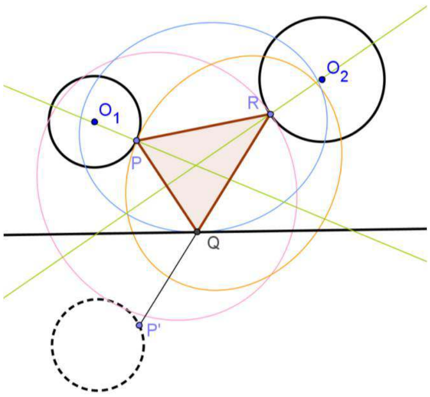
給定不相交兩圓O_1、O_2及兩圓外一直線L(且兩圓位於直線L同側)，在圓O_1、O_2及直線L上各取動點P、R、Q使ΔPQR的周長為最短，則此時直線$\overleftrightarrow{O_1P}$恰平分$\angle RPQ$、直線$\overleftrightarrow{O_2R}$恰平分$\angle PRQ$且過點$Q$且垂直$L$的直線恰平分$\angle PQR$ (如圖 9 A1)

幾何證明：

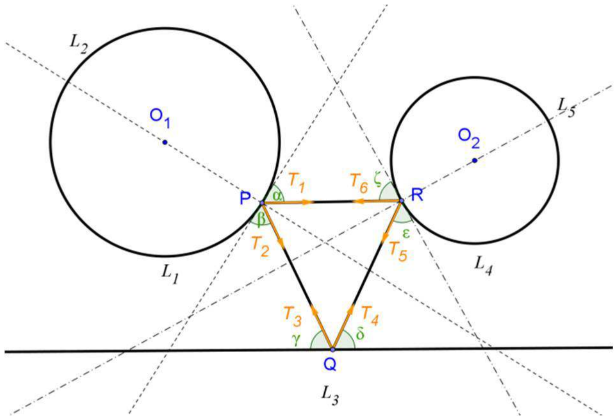
1. 將點 P 、 R 視為定點，由兩點一線之情形知，ΔPQR 的周長為最短時，過點 Q 且垂直 L 的直線恰平分 $\angle PQR$ 。
2. 將點 P 、Q 視為定點，由 兩點一圓 之情形知，ΔPQR 的周長為最短時，直線 $\overleftrightarrow{O_2R}$ 恰平分 $\angle PRQ$ 。
3. 同理可證當 ΔPQR 的周長為最短時，直線 $\overleftrightarrow{O_1P}$ 恰平分 $\angle RPQ$ 。
4. 此時 P 、 Q 、 R 恰為橢圓與圓 O 或直線 L 的切點。(如圖 9 A2)



(圖 9 A1)



(圖 9 A2)



(圖 9 A3)

物理觀點：

假設現有一條具有彈力的輕繩圈，將其繞過在 P 點、Q 點和 R 點上的滑輪，三滑輪分別可在圓 O_1、直線 L_3 和圓 O_2 上滑動。根據物理的最小能量原理，系統穩定時會保持在最小位能。平衡時會使輕繩長度 $\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RP}$ 有最小值，此時點 P 、 Q 、 R 保持靜力平衡，故

$$T_1\cdot\cos\alpha=T_2\cdot\cos\beta \text{ 、 } T_3\cdot\cos\gamma=T_4\cdot\cos\delta \text{ 且 } T_5\cdot\cos\varepsilon=T_6\cdot\cos\zeta \text{ 。}$$

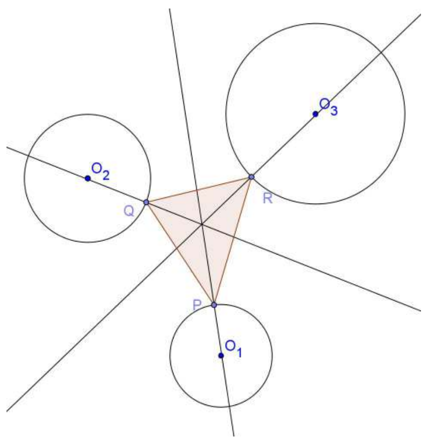
且因為同一條輕繩上繩張力處處相等，即 $T_1=T_2=T_3=T_4=T_5=T_6$ 。由此可知 $\cos\alpha=\cos\beta$ 、 $\cos\gamma=\cos\delta$ 且 $\cos\varepsilon=\cos\zeta$ ，得 $\alpha=\beta$ 、 $\gamma=\delta$ 且 $\varepsilon=\zeta$ 。即當 ΔPQR 的周長為最短時，此時直線 $\overleftrightarrow{O_1P}$ 恰平分 $\angle RPQ$ 、直線 $\overleftrightarrow{O_2R}$ 恰平分 $\angle PRQ$ 且過點 Q 且垂直 L 的直線恰平分 $\angle PQR$ 。

十、三圓

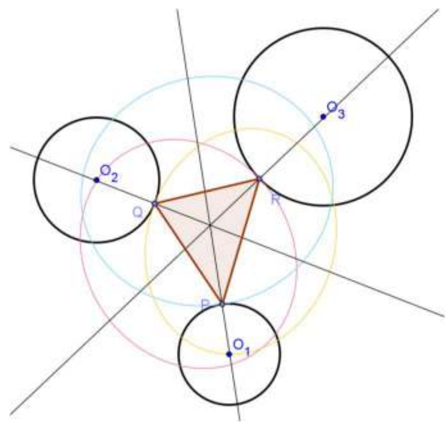
給定三圓O_1、O_2及O_3，考慮三圓上動點依次為P、Q、R，當ΔPQR的周長最短時，則直線$\overleftrightarrow{O_1P}$平分$\angle QPR$、直線$\overleftrightarrow{O_2Q}$平分$\angle PQR$且直線$\overleftrightarrow{O_3R}$平分$\angle PRQ$ (如圖 10A1)。

幾何證法：

1. 將點P、Q視為定點，由兩點一圓之情形知，ΔPQR的周長為最短時，直線$\overleftrightarrow{O_3R}$恰平分$\angle PRQ$。
2. 同理可證直線$\overleftrightarrow{O_1P}$平分$\angle QPR$、直線$\overleftrightarrow{O_2Q}$平分$\angle PQR$。
3. 此時P、Q、R恰為橢圓與圓O的切點。



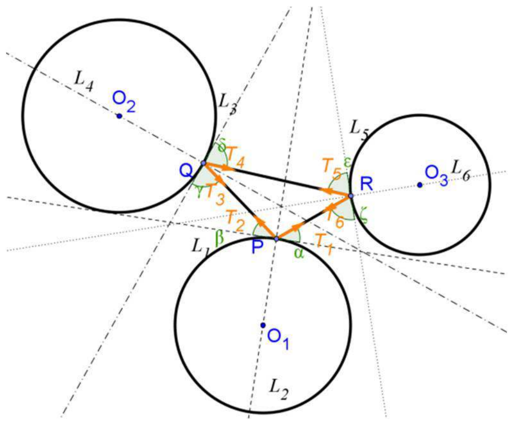
(圖 10 A1)



(圖 10 A2)

物理觀點：

假設現有一條具有彈力的輕繩圈，將其繞過在 P 點、Q 點和 R 點上的滑輪，三滑輪分別可在圓O_1、圓O_2和圓O_3上移動。根據物理的最小能量原理，系統穩定時會保持在最小位能。平衡時會使輕繩長度$\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RP}$有最小值，此時點$P$、$Q$、$R$保持靜力平衡，故



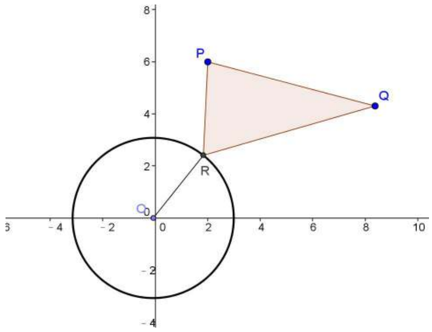
(圖 10 A3)

$$T_1\cdot\cos\alpha=T_2\cdot\cos\beta \text{ 、 } T_3\cdot\cos\gamma=T_4\cdot\cos\delta \text{ 且 } T_5\cdot\cos\varepsilon=T_6\cdot\cos\zeta \text{ 。}$$

且因為同一條輕繩上繩張力處處相等，即$T_1=T_2=T_3=T_4=T_5=T_6$。由此可知$\cos\alpha=\cos\beta$、$\cos\gamma=\cos\delta$且$\cos\varepsilon=\cos\zeta$，得$\alpha=\beta$、$\gamma=\delta$且$\varepsilon=\zeta$。則當$\Delta PQR$的周長最短時，直線$\overleftrightarrow{O_1P}$平分$\angle QPR$、直線$\overleftrightarrow{O_2Q}$平分$\angle PQR$且直線$\overleftrightarrow{O_3R}$平分$\angle PRQ$。

伍、討論

我們在處理兩點一圓的情況時，我們希望不只得到定性的結果(即滿足角平分的結論)，更希望可以明確求出圓上動點R的位置。原本想沿用兩點一線時點對稱的方法，卻苦於找不到對稱軸。因此我們搜尋更多資料，才知道兩點一圓(點在圓外)的狀況是有名的 Alhazen' problem。在參考資料[4]中提到，給定一單位圓O及圓外兩定點A、B(此時O為原點)，當直線OC平分$\angle ACB$時，點C恰在圓O與一雙曲線的交點上。



(圖 11)

一、我們模仿[4]中 Alhazen's Problem-Huygen's Solution 的方法，試圖找出在兩點一圓的情況下，滿足最小周長時圓上動點R的位置。考慮複數平面上的兩定點$P(z_1)$、$Q(z_2)$，及圓C：$|z|=r$上一動點$R(z)$，由之前的幾何證法及物理觀點得知，當ΔPQR周長最小時，$\angle PRO=\angle ORQ$，我們先找出滿足$\angle PRO=\angle ORQ$的R點軌跡(如圖 11)。

$$\because \angle PRO=\angle ORQ \Leftrightarrow Arg\left(\frac{z_1-z}{0-z}\right)=Arg\left(\frac{0-z}{z_2-z}\right)\Leftrightarrow Arg\left(\frac{z_1-z}{-z}\right)=Arg\left(\frac{-z}{z_2-z}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{z_1-z}{-z}\right)\left(\frac{-z}{z_2-z}\right)^{-1}\in R \Leftrightarrow \left(\frac{z_1-z}{z}\right)\left(\frac{z_2-z}{z}\right)\in R$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{z_1-z}{z}\right)\left(\frac{z_2-z}{z}\right)=\overline{\left(\frac{z_1-z}{z}\cdot\frac{z_2-z}{z}\right)}$$

$$\Leftrightarrow (z_1-z)(z_2-z)\left(\overline{z}\right)^2=\left(\overline{z_1}-\overline{z}\right)\left(\overline{z_2}-\overline{z}\right)z^2$$

$$\Leftrightarrow z_1z_2\left(\bar{z}\right)^2-z_1z\left(\bar{z}\right)^2-z_2z\left(\bar{z}\right)^2+z^2\left(\bar{z}\right)^2=\left(\bar{z}_1\right)\left(\bar{z}_2\right)z^2-\overline{z_1}\,\overline{z}z^2-\overline{z_2}\,\overline{z}z^2+\left(\bar{z}\right)^2z^2$$

$$\Leftrightarrow z_1z_2\left(\bar{z}\right)^2-\overline{z_1}\,\overline{z_2}\left(z\right)^2=z_1z\left(\bar{z}\right)^2+z_2z\left(\bar{z}\right)^2-\overline{z_1}\,\overline{z}\left(z\right)^2-\overline{z_2}\,\overline{z}\left(z\right)^2$$

$$\Leftrightarrow z_1z_2\left(\bar{z}\right)^2-\overline{z_1z_2\left(\bar{z}\right)^2}=\left(z_1+z_2\right)z\left(\bar{z}\right)^2-\overline{\left(z_1+z_2\right)z\left(\bar{z}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Im}\left(z_1z_2\left(\bar{z}\right)^2\right)=\operatorname{Im}\left(\left(z_1+z_2\right)z\left(\bar{z}\right)^2\right)$$ --(*)

設 $z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$，$z=x+iy$，則

$z_1z_2=\left(x_1x_2-y_1y_2\right)+i\left(x_1y_2+y_1x_2\right)$，$\left(\bar{z}\right)^2=\left(x-iy\right)^2=\left(x^2-y^2\right)-2xyi$

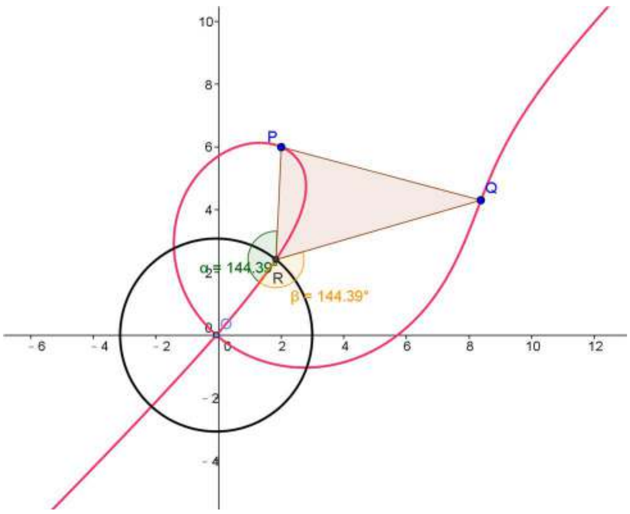
令 $q=\operatorname{Re}(z_1z_2)=\left(x_1x_2-y_1y_2\right)$，$p=\operatorname{Im}\left(z_1z_2\right)=\left(x_1y_2+y_1x_2\right)$，

$r=\operatorname{Re}(z_1+z_2)=x_1+x_2$，$s=\operatorname{Im}\left(z_1+z_2\right)=y_1+y_2$，(*)式整理後可得 x 和 y 的三次方程式

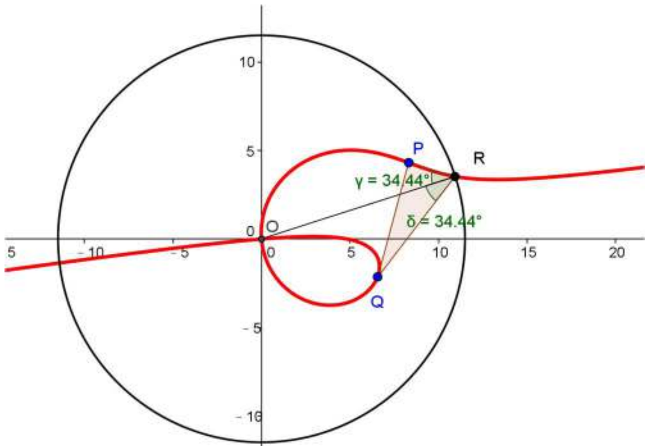
$$px^2-2qxy-py^2-(x^2+y^2)(sx-ry)=0$$ --(**)

可得動點 R 的軌跡為 x 和 y 三次的方程式，而滿足 ΔPQR 周長最小的點 R 發生在此三次方程式與圓 O 的交點(如圖 12)。

特別當圓 O 為以原點為圓心的單位圓時，因 $x^2+y^2=1$ 為定值，則三次方程式(**)退化為一雙曲線 $px^2-2qxy-py^2-(sx-ry)=0$，此即為參考資料[4]所提之情況。



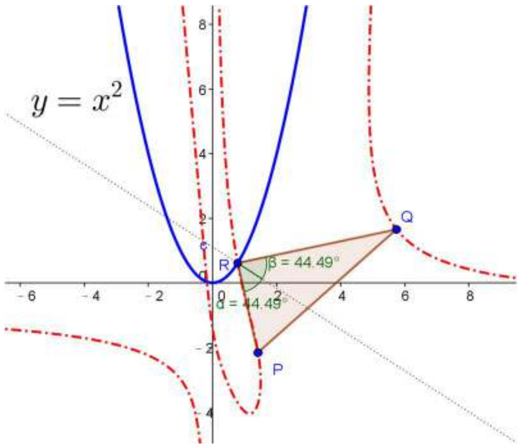
(圖 12)



(圖 13)

二、上述 x、y 的三次方程式 $px^2-2qxy-py^2-(x^2+y^2)(sx-ry)=0$ 是在平面上滿足 $\angle PRO=\angle ORQ$ 的 R 點軌跡，我們拉動圓的半徑至兩定點 P、Q 在圓內，得此三次方程式與圓的交點 R，點 R 滿足 ΔPQR 周長最小(如圖 13)。此時兩點在圓內即為有趣的 Circular Billiard 問題。

三、接著我們想擴展至兩定點及圓錐曲線的情況，以拋物線為例，若動點 R 在拋物線上，給定拋物線外兩定點 P、Q，我們亦能仿前述之作法，找到滿足 ΔPQR 周長最小的點 R (如圖 14 所示)，作法如下：



(圖 14)

設兩定點 $P(z_1)$、$Q(z_2)$，動點 $R(z)$ 在拋物線 $y=x^2$ 上(其中 $z=x+yi$)。當 ΔPQR 周長最小時，過點 R 的法向量 $\vec{n}$ 會平分 $\angle PRQ$，$\vec{n}=(2x,-1)$。令 $n=2x-i$，$\because$ $\vec{n}$ 會平分 $\angle PRQ \Leftrightarrow \arg\left(\dfrac{z_1-z}{n}\right)=\arg\left(\dfrac{n}{z_2-z}\right)$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{z_1-z}{n}\right)\left(\frac{z_2-z}{n}\right)\in R \Leftrightarrow \left(\frac{z_1-z}{n}\right)\left(\frac{z_2-z}{n}\right)=\overline{\left(\frac{z_1-z}{n}\right)\left(\frac{z_2-z}{n}\right)}$$

$$\Leftrightarrow (z_1-z)(z_2-z)\bar{n}^2=(\overline{z_1}-\bar{z})(\overline{z_2}-z)n^2$$

$$\Leftrightarrow (z_1z_2-z_1z-z_2z+z^2)(\bar{n})^2=(\overline{z_1z_2}-\overline{z_1}\bar{z}-\overline{z_2}\bar{z}+\bar{z}^2)n^2 \quad \mathrm{Im}\left((z_1z_2+z^2)\bar{n}^2\right)=\mathrm{Im}\left(z(z_1+z_2)\bar{n}^2\right)\text{----(*)}$$

設 $z_1=x_1+y_1i$，$z_2=x_2+y_2i$，$z=x+yi$，

則 $z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$，$z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$

$z^2=(x^2-y^2)+(2xy)i$，$(\bar{n})^2=(2x+i)^2=(4x^2-1)+(4x)i$，帶入(*)式後得

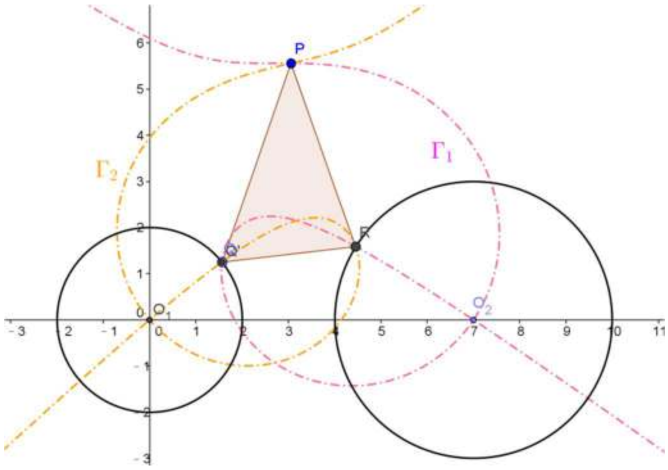
$$(4x^2-1)(2xy+\mathrm{Im}(z_1z_2))+4x(x^2-y^2+\mathrm{Re}(z_1z_2))$$

$$=(4x^2-1)\left(x(y_1+y_2)+y(x_1+x_2)+4x\left(x(x_1+x_2)-y(y_1+y_2)\right)\right)\text{。}$$

此曲線與原拋物線 $y=x^2$ 的其中一個交點 R 即滿足 ΔPQR 周長最小。

四、接著我們想處理兩圓一點或三圓的情況，但是目前我們只能樸拙的以下列方式呈現：

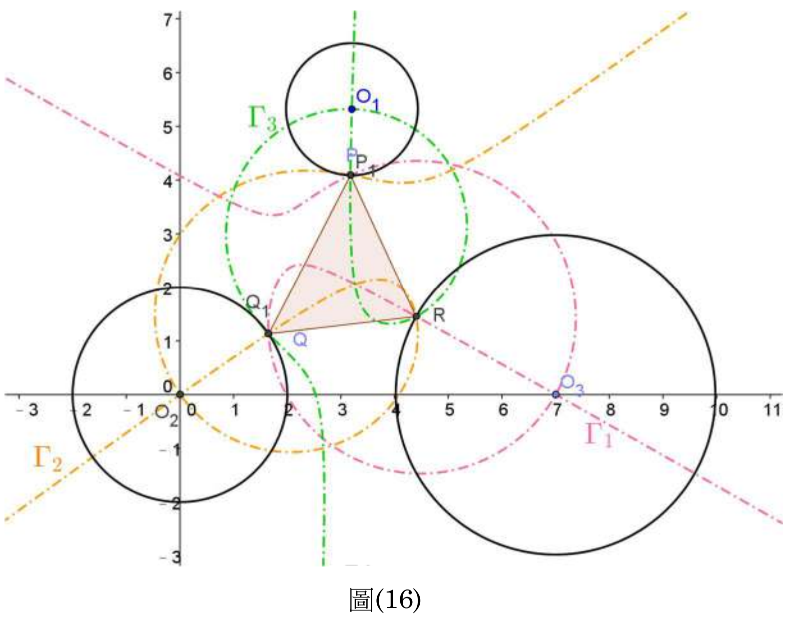
(一)、當兩圓一點時，我們先取定點P及圓O_1上的點Q，仿兩定點一圓的方法找到三次方程式Γ_1與圓O_2的交點R。再利用定點R與P找到三次方程式Γ_2與圓O_1的交點Q'。移動點Q時，點R與點Q'隨之移動，當點Q與點Q'重合時，即滿足ΔPQR的周長最小(如圖15所示)。



(二)、

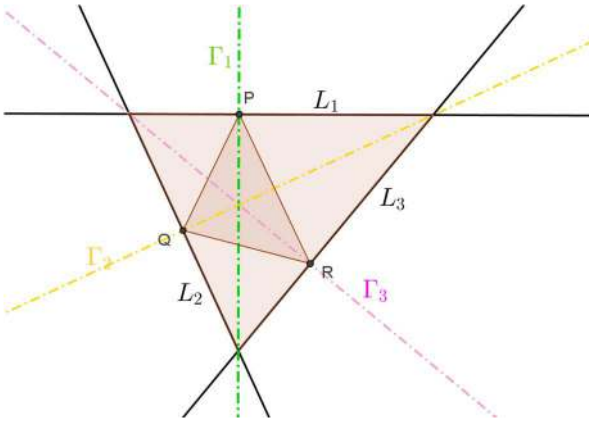
圖(15)

1. 當三圓時，我們先取圓O_1上的點P及圓O_2上的點Q，仿兩定點一圓的方法找到三次方程式Γ_1與圓O_3的交點R。再利用點R與P找到三次方程式Γ_2與圓O_2的交點Q_1。最後再利用點R與Q_1找到三次方程式Γ_3與圓O_1的交點P_1。移動點P與點Q，點R、點Q_1與點P_1隨之移動，當點Q與點Q_1重合且點P與點P_1重合時，即滿足ΔPQR的周長最小(如圖16所示)。



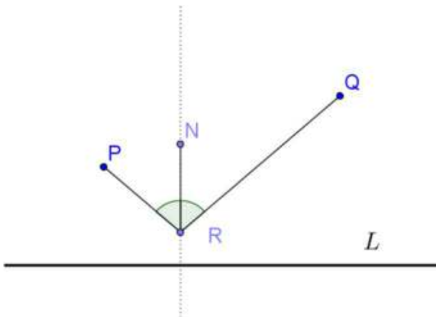
圖(16)

2. 在圖(16)三圓的情況中，當我們適當挪動P、Q使點Q與點Q_1重合且點P與點P_1重合時，我們驚訝的發現三曲線Γ_1、Γ_2、Γ_3共點。此與三直線的情況(如圖 17)竟有共同的相似之處，我們猜測這兩者圖形之間存在某種聯結等待我們去探索。

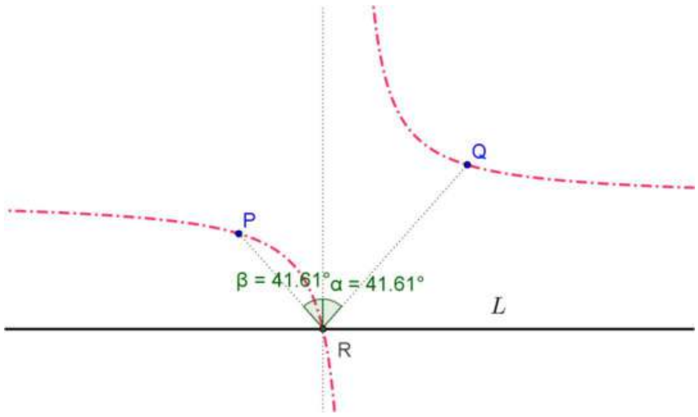


圖(17)

五、至此，我們回頭檢視兩定點P、Q及一直線的情況，如圖(18)，我們想找到在平面上滿足向量$\overline{RN}$會平分$\angle PRQ$的動點R(其中$\overline{RN}$為直線L的法向量)，作法如下：



圖(18)



圖(19)

不失其一般性，我們假設直線$L: y=0$，兩定點$P(z_1)$，$Q(z_2)$，其中$z_1 = x_1 + y_1 i$，$z_2 = x_2 + y_2 i$。直線L的法向量$\vec{n} = (0,1)$，令$n = 0 + 1i$。如圖(18)，我們欲在平面上找到滿足$\angle PRN = \angle NRQ$的動點R，即滿足$Arg\left(\dfrac{n}{z_1 - z}\right) = Arg\left(\dfrac{z_2 - z}{n}\right) \Leftrightarrow \dfrac{n}{z_1 - z}\left(\dfrac{n}{z_2 - z}\right) \in R$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{n}{z_1-z}\right)\left(\frac{n}{z_2-z}\right)=\overline{\left(\frac{n}{z_1-z}\right)\left(\frac{n}{z_2-z}\right)} \Leftrightarrow n^2\left(\overline{z_1}-\overline{z}\right)\left(\overline{z_2}-\overline{z}\right)=\overline{n}^2\left(z_1-z\right)\left(z_2-z\right)$$

$$\Leftrightarrow n^2\overline{z_1}\,\overline{z_2}-\overline{n}^2z_1z_2+n^2\overline{z}^2-\overline{n}^2z^2=n^2\overline{z_1}\,\overline{z}+n^2\overline{z_2}\,\overline{z}-\overline{n}^2z_1z-\overline{n}^2z_2z$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{Im}(n^2\left(\overline{z_1}\,\overline{z_2}+\overline{z}^2\right))=\mathrm{Im}\left(n^2\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}\right)\overline{z}\right)$$

整理後得 $2xy-\left(y_1+y_2\right)x-\left(x_1+x_2\right)y+\left(x_1y_2+x_2y_1\right)=0$ 。我們驚訝地發現在平面上滿足向量 $\overline{RN}$ 會平分 $\angle PRQ$ 的動點 R 的軌跡為一過 $P\left(x_1,y_1\right)$ 、 $Q\left(x_2,y_2\right)$ 的雙曲線 Γ 的一部分(如圖(19))。當此雙曲線 Γ 與 L 的交點 R 即滿足 ΔPQR 周長最小。我們猜測點 R 的軌跡在物理上有其應用。

陸、結論

一、從基礎的兩點一線、兩線一點、兩線一圓、三線的情況中，在幾何的證明方法中我們皆使用了找對稱點，並設法將三角形周長轉變成線段長的方式證明。

二、到了兩點一圓的情況，一開始想延用之前的手法(找直線的對稱點)卻不知如何找到對稱軸。因此我們回頭重新檢視之前的情況，發現除了找對稱點之外，同時也都滿足具有角平分的性質。加上兩點一圓的情況讓我們連結起橢圓的光學性質，利用橢圓的特性我們找到兩點一圓滿足最小周長時必滿足角度相等的特性。

三、之後我們開始往角平分的方向思考，而順利解出其他情況。因覺得這些情況與物理光的反射定律(在同一介質中，光的行進會滿足入射角等於反射角)雷同，因此我們重新將所有情況以物理的最小能量原理，系統穩定時會保持在最小位能的觀點重新解讀，得到系統平衡時會達到最小周長，再利用靜力平衡得到角平分的結果。

四、為了要找到兩點一圓時，圓上動點 R 的確切位置，我們才得知此為 Alhazen’problem，而且已證實無法以尺規作圖求得 R 點的位置。我們參考了 Huygen’s Solution，找到點 R 的確切位置。並發現若將圓 O 半徑拉大至兩定點在圓內時，此時三次曲線與圓 O 的交點亦

滿足角平分的特性，此為有趣的 Circular Billiard 問題。

五、接著我們覺得角平分的特性及 Huygen’s Solution 應該可以推廣至兩定點及凸曲線的情況，因此我們以拋物線 $y=x^2$ 為例，找到滿足 ΔPQR 周長最小的點 R (其中點 R 在拋物線上)。

六、最後我們再回頭檢視兩定點 P、Q 及一直線 L 的情況，我們想找到在平面上滿足向量 $\overline{RN}$ 會平分 $\angle PRQ$ 的動點 R (其中 $\overline{RN}$ 為直線 L 的法向量)，沒想到點 R 的軌跡落在一通過 P、Q 兩點的雙曲線上。我們猜測點 R 的軌跡在物理上有其應用。

七、目前我們尚無法明確找出兩圓一點或三圓時點 Q、R 的確切位置，我們暫時以兩定點一圓為基礎，建構出如討論四中的曲線 Γ_1、Γ_2、Γ_3。經由觀測圖形，我們驚訝的發現當滿足 ΔPQR 為最小周長時，三曲線 Γ_1、Γ_2、Γ_3 共點。我們感到很神奇，因此時與三直線的情況有異曲同工之妙，這之間必存在某些關聯等待我們去探索。

柒、參考資料及其他

1. 許志農 高中數學第四冊

2. 黃家禮 幾何明珠 第一版 台北市 九章 p15~p17,p22~p23,2000

3. 多邊形的尋短

   http://www.math.ntu.edu.tw/~shing_tung/PDF/1st/Oh(US).pdf

4. Roger C. Alperin, MATHEMATICAL ORIGAMI: ANOTHER VIEW OF ALHAZEN'S OPTICAL PROBLEM

   http://www.math.sjsu.edu/~alperin/Alhazen.pdf

5. L.A.Lyusternik 最短線 蘇聯青年數學科普叢書 九章、開明

【評語】040411

本作品理論正確，但只得到較簡單的結果，困難的部分還是無法突破，何況還有幾種情況沒有包含在內，如三直線圍出的圖形為鈍角三角形的情況等等。另外，以物理觀點而言，能量是否與繩長成正比，宜謹慎考慮，就數學觀點而言，P.20 中的三次方程式是有趣的，不過文中沒有進一步考慮這一方程式所代表的意涵，建議深入討論。