中華民國第 55 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組　數學科

040410

正整數排列與對應格子點之研究

學校名稱：國立屏東高級中學

作者：	指導老師：
高二 吳承澔 高二 吳政廷 高二 李紹杰	張宮明

關鍵詞：排列組合、函數一對一原理、格子點

摘要

設 n 是整數，且滿足 $n\geq 2$，一個排列 $\sigma:\{1,2,...,n\}\rightarrow\{1,2,...,n\}$可以表示成包含坐標平面上 n 個點的集合 $P_\sigma=\{(k,\sigma(k)):1\leq k\leq n\}$，在一個以(1,1),(1,n),(n,1),(n,n)四個頂點所圍成的正方形，其四邊皆與座標軸平行，這個集合 P_σ 有最少 2 個點，最多 4 個點在正方形的邊界上，我們求出恰有 m 個點落在正方形的邊上的種類與方法數如下

當 m=2 時，方法數為 2(n-2)! 且 n≧2

當 m=3 時，方法數為 $(n-3)!*4(n-2)^2=4(n-2)(n-2)!$ 且 n≧3

當 m=4 時，方法數 (n-2)(n-3)(n-2)! 且 n≧4

之後再推廣至三維空間：設 n 是整數，且滿足 $n\geq 2$，一個排列 $\sigma:\{1,2,...,n\}\rightarrow\{1,2,...,n\}$，另一個排列 $\tau:\{1,2,...,n\}\rightarrow\{1,2,...,n\}$，可以表示成包含三維坐標平面上 n 個點的集合 $P_\tau=\{(k,\sigma(k),\ \tau(k)):1\leq k\leq n\}$，在一個由邊長為(n-1)所構成的正方體，其十二個邊皆與座標軸平行，我們求出恰有 m 個點在他們正方體邊界上的種類與方法數如下

m=0 時 $\begin{cases} a_6=6, a_7=30, a_8=90 \\ a_{n+1}=a_n+n^3-9n^2+26n-24, n\geq 6 \end{cases}$

m=1 時 $\begin{cases} a_4=4, a_5=30, a_6=96 \\ a_{n+1}=a_n+9n^2-41n+46, n\geq 4 \end{cases}$

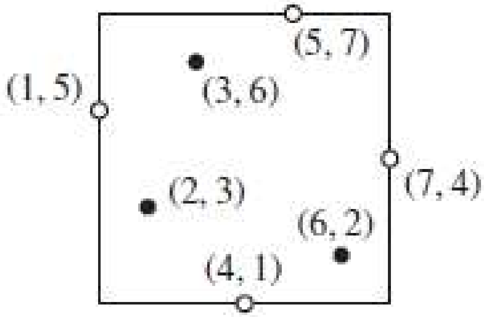
m=2 時 $\begin{cases} a_2=1, a_3=7, a_4=28, \\ a_{n+1}=a_n+15n-24, n\geq 2 \end{cases}$

m=3 時 $\begin{cases} a_3=2, a_4=4, a_5=6 \\ a_{n+1}=a_n+2, n\geq 3 \end{cases}$

壹、研究動機

在數學專題討論課中，老師給我們一篇從文獻[1]中選取的數學文章，讓我們很感興趣，其內容如下:

Let $n\geq 2$ be an integer. A permutation $\sigma:\{1,2,...,n\}\rightarrow\{1,2,...,n\}$ can be represented in the plane by the set of n points $P_\sigma=\{(k,\sigma(k)):1\leq k\leq n\}$. The smallest square bounding P_σ, with sides parallel to the coordinate axis, has at least 2 and at most 4 points of P_σ on its boundary. The figure below shows a permutation σ with 4points on its bounding square. For every $m\in\{2,3,4\}$, determine the number of permutations σ of $\{1,2,...,n\}$ having m points of P_σ on the boundary of their bounding square.



文獻[1]

其意義如下:

設n是整數，且滿足$n\geq 2$，一個排列$\sigma:\{1,2,...,n\}\rightarrow\{1,2,...,n\}$可以表示成包含坐標平面上n個點的集合$P_\sigma=\{(k,\sigma(k)):1\leq k\leq n\}$，在一個以(1,1),(1,n),(n,1),(n,n)四個頂點所圍成的正方形，其四邊皆與座標軸平行，這個集合P_σ有最少2個點，最多4個點在正方形的邊界上，上面的圖形顯示σ有4個點在正方形的邊界上. 對於每個$m\in\{2,3,4\}$，請求出恰有m個點在他們正方形邊界上的排列$\sigma:\{1,2,...,n\}$的種類有多少?

這個問題引起我們想要深入探究的動機.

貳、 研究目的

上述的題目讓我們想探討下列問題

一、找出 m 所有對應出的總數目。

二、探討 m 是否會因 n 的不同而有所限制。

三、當 m=2, 3, 4 時, σ 各有幾種不同的排列方法?

四、找出定量公式可以表達不同 m 的方法數。

五、將上述問題推廣至三維空間中

(一) 找出有多少點在邊上所形成的情形。

(二) 找出 m 所有對應出的總數目。

(三) 探討 m 是否會因 n 的不同而有所限制？

(四) 不同數目的點各有幾種不同的排列方法？

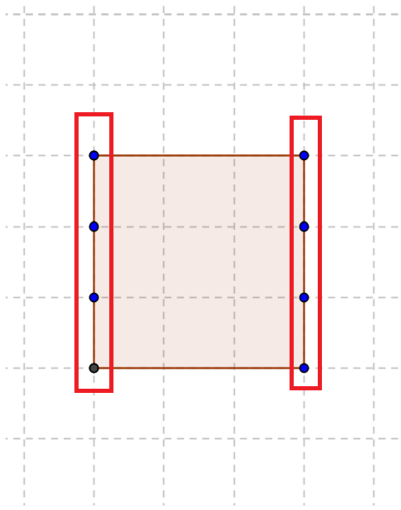
(五) 找出定量公式可以表達不同 m 的方法數。

參、研究設備與器材

筆、紙、筆記本、尺、電腦、小畫家、GeoGebra（繪圖軟體）、Word

肆、研究過程或方法

方法: 由文獻[1]中可得知其排列是以一對一原理來做對應, 所以一個 x 坐標只有對應到一個 y 坐標, 在一個以邊長(n-1)(n-1)所構成的正方形中, 其對應出的 n 個點, 在邊界上的數目 m, 最少有兩個, 最多只能有四個(由上述文獻可知), 我們利用一一列出和圖形來表示不同 n 時, 不同 m 所出現的種類數, 在此我們先討論點在正方形左右兩邊的情況, 如圖(1), 以避免有重複的情況被考慮到。

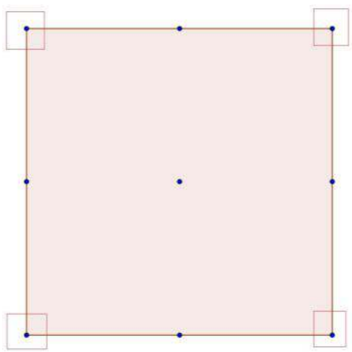


圖(1)

我們利用其一對一原理, 每行每列只能有一點的特性, 我們以左、右兩邊上的點之位置做為分類的依據, 將情況分成下列三種情形:

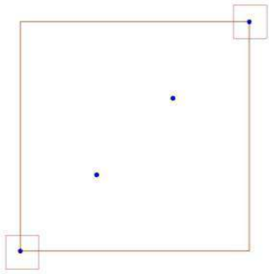
(n≧4 時,m=4 才有可能出現,所以統一以 n=4 做為圖例)

(以下敘述“頂點”指的是正方形兩相鄰邊的交點, 因此一個正方形有 4 個頂點。)如圖(2)



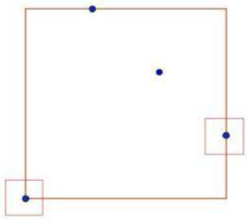
圖(2)

一、兩邊點在頂點(m=2)，如圖(3)所示



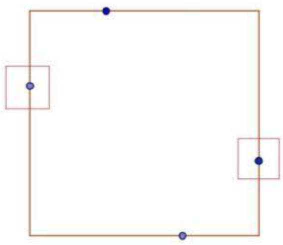
圖(3)

二、一邊點在頂點且一邊點不在頂點(m=3)，如圖(4)所示



圖(4)

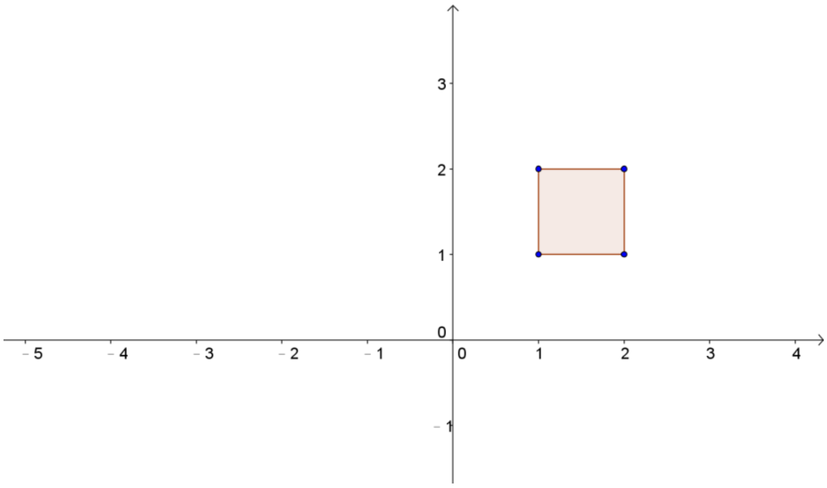
三、兩邊點不在頂點(m=4)，如圖(5)所示



圖(5)

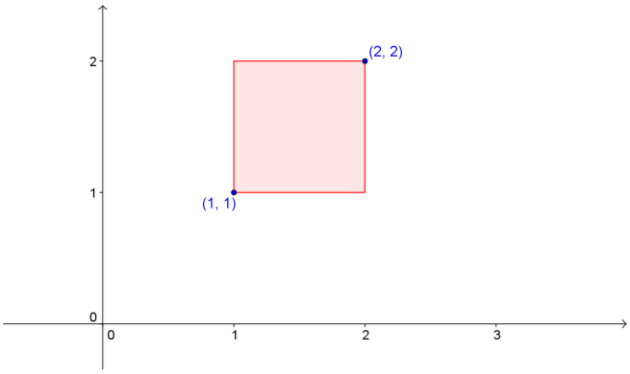
因為排列 $\sigma:\{1,2,...,n\} \to \{1,2,...,n\}$的方法數有 n！種，所以上述三種情形的排列方法數全部加起來會等於 n！.

(一)當 n=2 時，在座標上形成的正方形，和對應出的所有點，如圖(6):

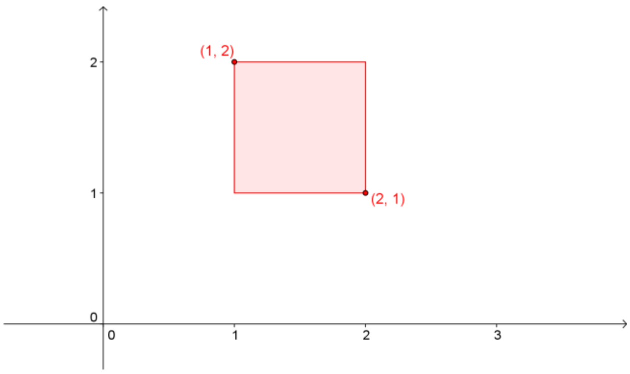


圖(6)

共有 2 種情形:1.兩邊點在頂點，點落在(1,1),(2,2)或(1,2),(2,1)，全部共 2 種=2!，如圖(7)、圖(8)(藍色與紅色的分別表示不同情形)

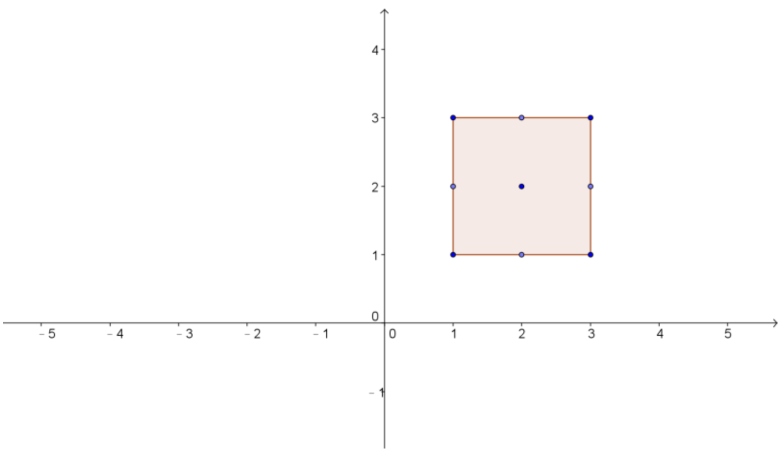


圖(7)



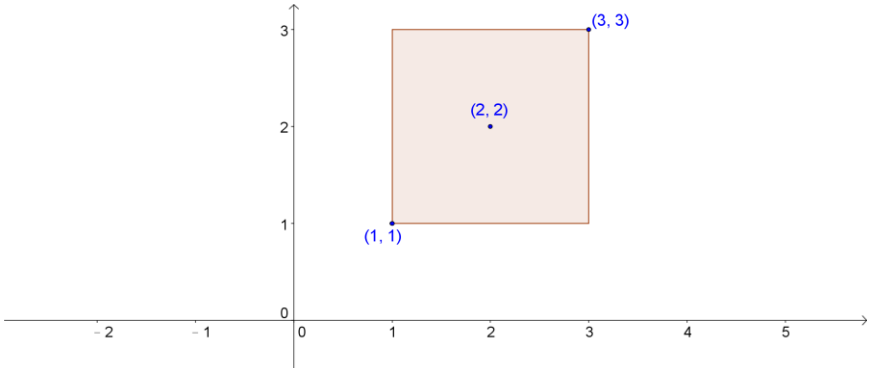
圖(8)

(二)當 n=3 時，在座標上形成的正方形，和對應出的所有點，如圖(9)

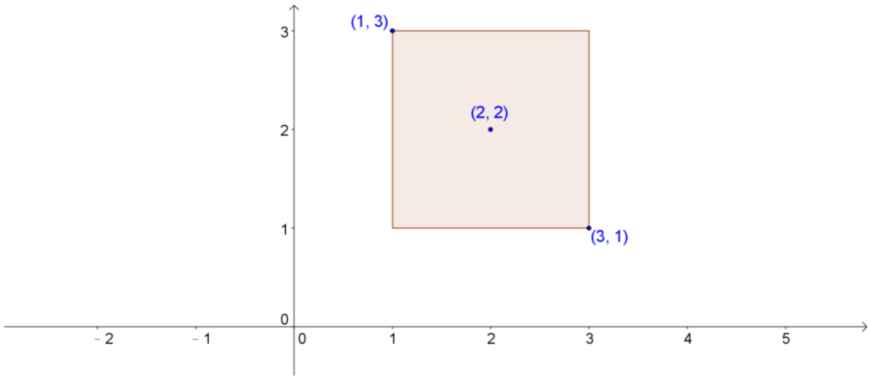


圖(9)

1.兩邊點在頂點:點落在(1,1).(2,2).(3,3)或(1,3).(2,2).(3,1)共 2 種,如圖(10)、圖(11)共 2 種



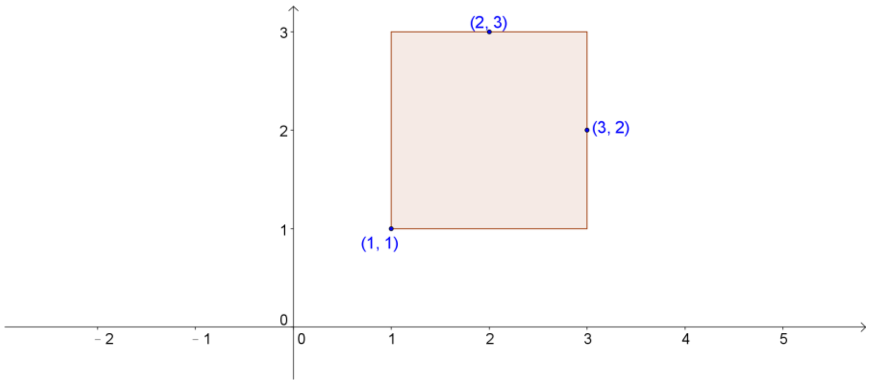
圖(10)



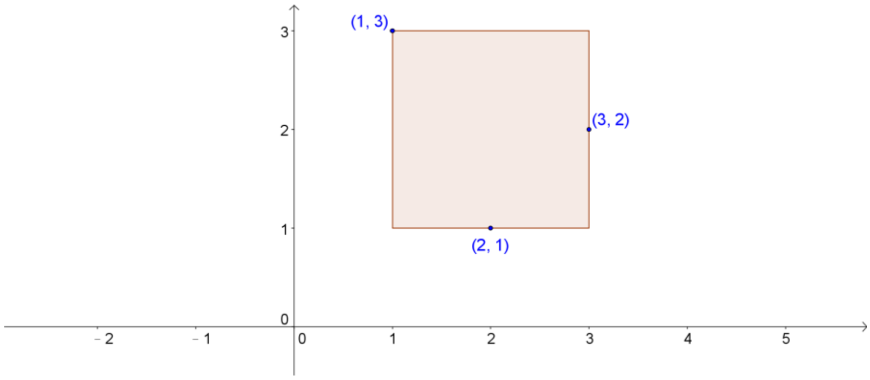
圖(11)

2.一邊點在頂點, 一邊點不在頂點: 點分別落在(1,1).(2,3).(3,2)或(1,3).(2,1).(3,2)或(1,2).(2,3).(3,1)或(1,2).(2,1).(3,3)共 4 種.

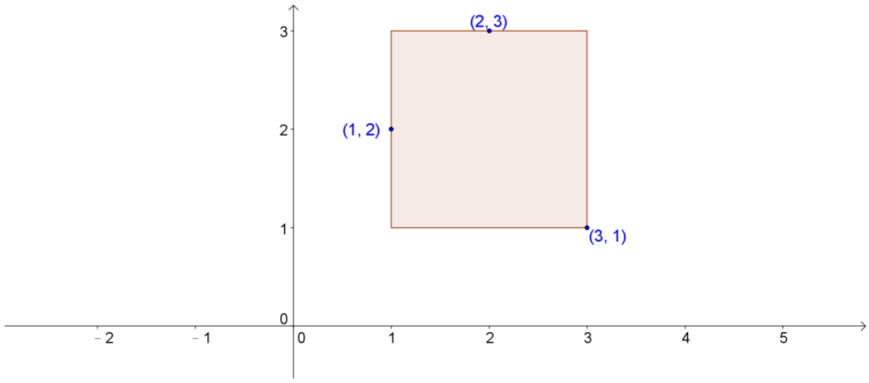
圖形如圖(12)圖(13)圖(14)圖(15):



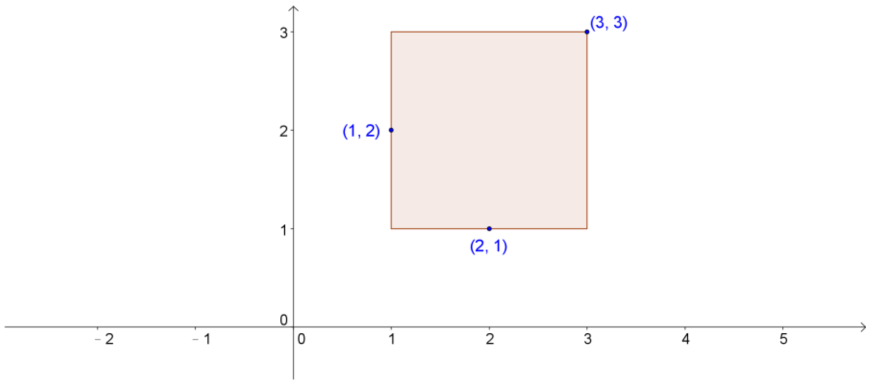
圖(12)



圖(13)



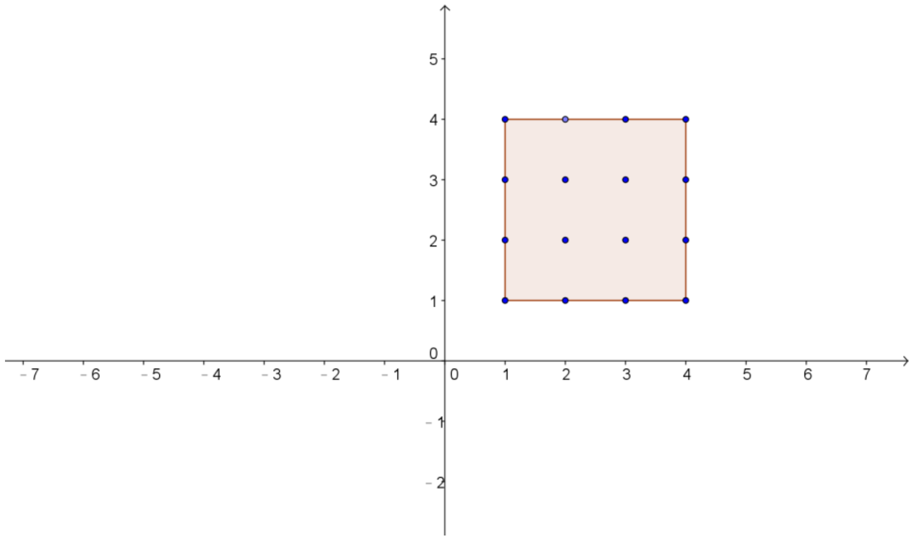
圖(14)



圖(15)

全部共 6 種=3!

(三)n=4 時，在座標上形成的正方形，和對應出的所有點，如圖(16)



圖(16)

共有下列幾種情形:

1.兩邊點在頂點:點落在(1,1)(2,2)(3,3)(4,4)或(1,1)(2,3)(3,2)(4,4)或(1,4).(2,2).(3,3).(4,1)(1,4)或(1,4)(2,3).(3,2).(4,1).

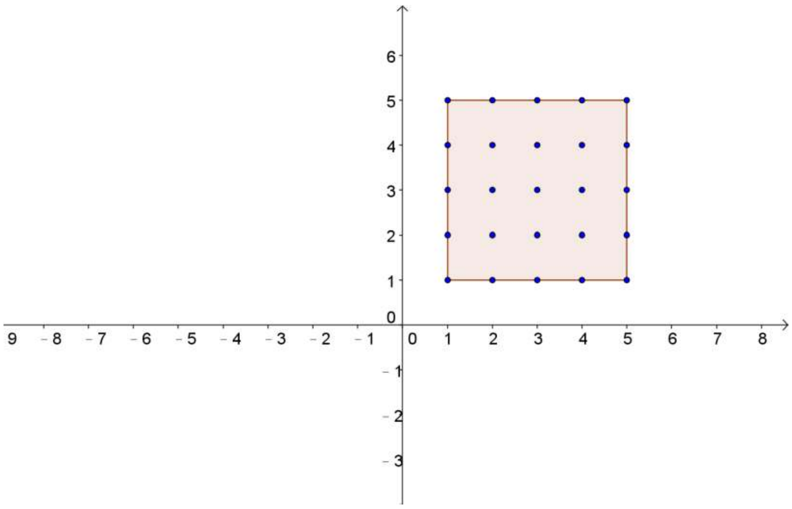
2.一邊點在頂點,一邊點不在頂點: 點落在(1,1)(4,2)(2,3)(3,4)或(1,1)(4,2)(2,4)(3,3)或(1,1)(4,3)(2,2)(3,4)或(1,1)(4,3)(2,4)(3,2)或(1,4)(4,2)(2,1)(3,3)或(1,4)(4,2)(2,3)(1,3)或(1,4)(4,3)(2,1)(3,2)或(1,4)(4,3)(2,2)(3,1)或(1,2)(4,1)(2,1)(3,4)或(1,2)(4,1)(2,4)(3,1)或(1,2)(4,4)(2,1)(3,3)或(1,2)(4,4)(2,3)(3,1)或(1,3)(4,1)(2,2)(3,4)或(1,3)(4,1)(2,4)(3,2)或(1,3)(4,4)(2,1)(3,2)或(1,3)(4,4)(2,2)(3,1)

3.兩邊點不在頂點: (1,2)(4,3)(2,1)(3,4)或(1,2)(4,3)(2,4)(3,1)或(1,3)(4,2)(2,1)(3,4)或(1,3)(4,2)(2,4)(3,1),

全部共 24 種=4!

到了 n=5 之後, 因為種類數量太多, 若把各個情形的座標全部列出會過於繁雜, 所以我們會用較簡單的方式來表示出各情形的種類數目, 因此我們採用排列組合的方法來做呈現, 而且舉出一些不同情況下的例子來表示

(四)當 n=5 時, 在座標上形成的正方形, 和對應出的所有點, 如圖(17)



圖(17)

共有下列幾種情形:

1.兩邊點在頂點:(1,1).(5,5).(2,2).(3,3).(4,4)或(1,1).(5,5).(2,3).(3,2).(4,4)或(1,1).(5,5).(2,2).(3,4).(4,3)或(1,1).(5,5).(2,4).(3,3).(4,2)或(1,1).(5,5).(2,3).(3,4).(4,2)……等，若要表示全部種類，用排列組合的方式來看:

(1)先選取兩邊的點, y 座標有 1 和 5 可選擇。共有 2x1=2!共 2 種變化

(2)再來選取中間的點, y 座標有(5-2)!=3x2x1=3!共 6 種變化

(3)之後再把(兩邊的變化種類)x(座標中間的變化種類)=該情形的變化量，所以兩邊點在頂點的情形有 2x6 共 12 種

2.一邊點在頂點，一邊點不在頂點: (1,1).(5,4).(2,2).(3,3).(4,5)或(1,1).(5,4).(2,3).(3,2).(4,5)或(1,1).(5,4).(2,2).(3,5).(4,3)或(1,1).(5,4).(2,5).(3,3).(4,2)或(1,1).(5,4).(2,3).(3,5).(4,2)……等,

(1)先選取兩邊的點，這時 y 座標要分成兩種情況,第一種情況是如果左邊是選頂點的話, y 座標有 1 和 5 可選，右邊則剩 2,3,4 可選擇，有 2x3=6 種；第二種情況是如果左邊不是選頂點，此時 y 座標有 2,3,4 可選，右邊則剩 1,5 可選擇 有 3x2=6 種。再把這兩種情況的種類數加總,所以共有 12 種變化

(2)再來選取中間的點, y 座標有(5-2)!=3x2x1=3!共 6 種變化

(3)之後再把(兩邊的變化種類)x(中間的變化種類)=該情形的變化量，所以一邊點在頂點，一邊點不在頂點的情形有 12x6 共 72 種

3.兩邊點不在頂點:(1,2).(5,4).(2,1).(3,3).(4,5)或(1,2).(5,4).(2,3).(3,1).(4,5)或

(1,2).(5,4).(2,5).(3,3).(4,1)或(1,2).(5,4).(2,1).(3,5).(4,3)或(1,2).(5,4).(2,3).(3,5).(4,1)……等,

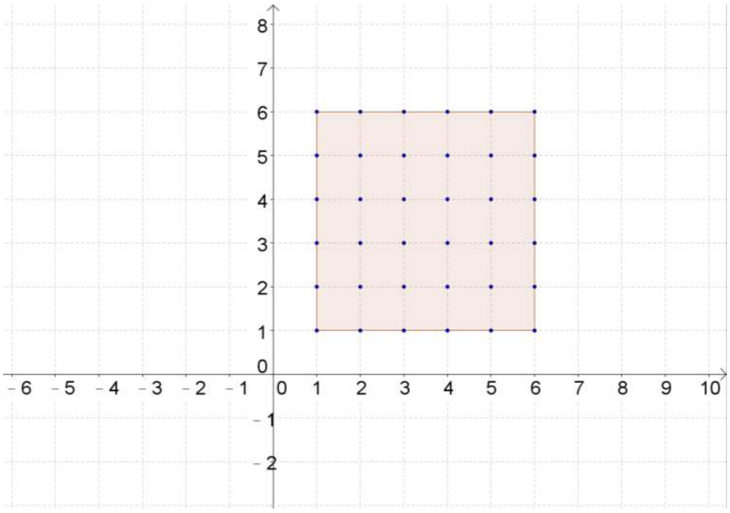
(1)先選取兩邊的點, y 座標有 2,3,4 可選擇。共有 3x2 共 6 種變化

(2)再來選取中間的點, y 座標有(5-2)!=3x2x1=3!共 6 種變化

(3)之後再把(兩邊的變化種類)x(座標中間的變化種類)=該情形的變化量, 所以兩邊點在邊的情形有 6x6 共 36 種,

全部共 120 種=5!

(五)當 n=6 時, 在座標上形成的正方形, 和可選擇的點,如圖(18)



圖(18)

共有下列幾種情形:

1.兩邊點在頂點:(1,1).(6,6).(2,2).(3,3).(4,4).(5,5)或(1,1).(6,6).(2,3).(3,2).(4,4).(5,5)或(1,1).(6,6).(2,4).(3,3).(4,2).(5,5)或(1,1).(6,6).(2,5).(3,3).(4,4).(5,2)或(1,1).(6,6).(2,2).(3,4).(4,3).(5,5)或(1,1).(6,6).(2,2).(3,5).(4,4).(5,3)……等, 以排列組合來看

(1) 先選取兩邊的點, y 座標有 1 和 6 可選擇。有 2x1=2!共 2 種變化

(2) 再來選取中間的點, y 座標有(6-2)!=4x3x2x1=4!共 24 種變化

(3) 之後再把(兩邊的變化種類)x(座標中間的變化種類)=該情形的變化量, 所以兩邊點在頂點的情形有 2x24 共 48 種

2.一邊點在頂點, 一邊點不在頂點:(1,1).(6,5).(2,2).(3,3).(4,4).(5,6)或(1,1).(6,5).(2,3).(3,2).(4,4).(5,6)或(1,1).(6,5).(2,4).(3,3).(4,2).(5,6)或(1,1).(6,5).(2,6).(3,3).(4,4).(5,2)或

(1,1).(6,5).(2,2).(3,4).(4,3).(5,6)或(1,1).(6,5).(2,2).(3,6).(4,4).(5,3)……等

(1) 先選取兩邊的點，這時 y 座標要分成兩種情況,第一種情況是如果左邊是選頂點的話, y 座標有 1 和 6 可選，右邊則剩 2,3,4,5 可選擇，有 2x4=8 種;第二種情況是如果左邊不是選頂點，此時 y 座標有 2,3,4,5 可選，右邊則剩 1,6 可選擇 有 4x2=8 種。再把這兩種情況的種類數加總,所以共有 16 種變化

(2) 再來選取中間的點, y 座標有(n-2)!=4x3x2x1=4!共 24 種變化

(3) 之後再把(兩邊的變化種類)x(座標中間的變化種類)=該情形的變化量，所以一邊點在頂點，一邊點在邊上的情形有 16x24 共 384 種

3.兩邊點不在頂點: (1,2).(6,5).(2,1).(3,3).(4,4).(5,6)或(1,2).(6,5).(2,3).(3,1).(4,4).(5,6)或(1,2).(6,5).(2,4).(3,3).(4,1).(5,6)或(1,2).(6,5).(2,6).(3,3).(4,4,).(5,1)或(1,2).(6,5).(2,1).(3,4).(4,3).(5,6)或(1,2).(6,5).(2,1).(3,6).(4,4).(5,3)……等

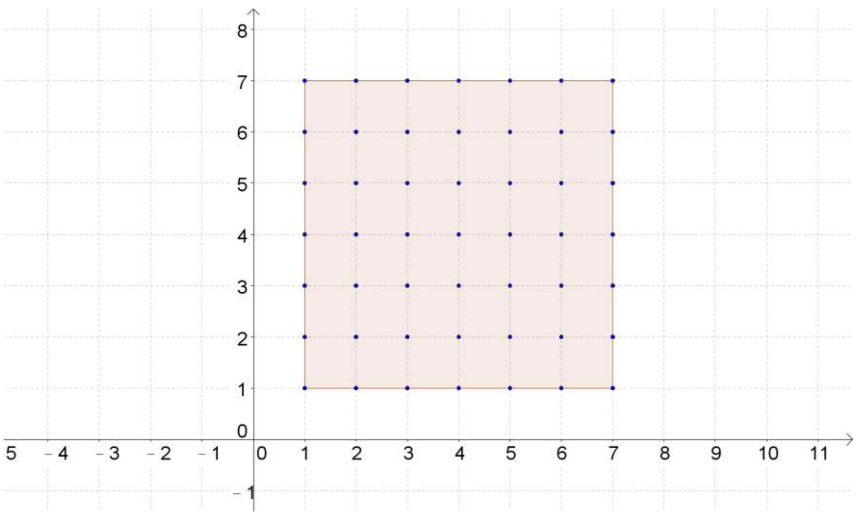
(1) 先選取兩邊的點, y 座標有 2,3,4,5 可選擇。有 4x3 共 12 種變化

(2) 再來選取中間的點, y 座標有(6-2)!=4x3x2x1=4!共 24 種變化

(3) 之後再把(兩邊的變化種類)x(座標中間的變化種類)=該情形的變化量，所以兩邊點在邊的情形有 12x24 共 288 種

全部共 720 種=6!

(六)n=7 時，在座標上形成的正方形，和可選擇的點，如圖(19)



圖(19)

共有下列幾種情形:

1.兩邊點在頂點:(1,1).(7,7).(2,2).(3,3).(4,4).(5,5).(6,6)或(1,1).(7,7).(2,3).(3,2).(4,4).(5,5).(6,6)或(1,1).(7,7).(2,4).(3,3).(4,2).(5,5).(6,6)或(1,1).(7,7).(2,5).(3,3).(4,4).(5,2).(6,6)或(1,1).(7,7).(2,6).(3,3).(4,4).(5,5).(6,2)或(1,1).(7,7).(2,2).(3,4).(4,3).(5,5).(6,6)或(1,1).(7,7).(2,2).(3,5).(4,4).(5,3).(6,6)……等

(1) 先選取兩邊的點, y 座標有 1 和 7 可選擇。共有 2x1=2!共 2 種變化

(2) 再來選取中間的點, y 座標有(7-2)!=5x4x3x2x1 共 120 種變化

(3) 之後再把(兩邊的變化種類)x(座標中間的變化種類)=該情形的變化量, 所以兩邊點在頂點的情形有 2x120 共 240 種

2.一邊點在頂點, 一邊點不在頂點:(1,1).(7,6).(2,2).(3,3).(4,4).(5,5).(6,7)或(1,1).(7,6).(2,3).(3,2).(4,4).(5,5).(6,7)或(1,1).(7,6).(2,4).(3,3).(4,2).(5,5).(6,7)或(1,1).(7,6).(2,5).(3,3).(4,4).(5,2).(6,7)或(1,1).(7,6).(2,7).(3,3).(4,4).(5,5).(6,2)或(1,1).(7,6).(2,2).(3,4).(4,3).(5,5).(6,7)或(1,1).(7,6).(2,2).(3,5).(4,4).(5,3).(6,7)……等

(1) 先選取兩邊的點, ,這時 y 座標要分成兩種情況,第一種情況是如果左邊是選頂點的話, y 座標有 1 和 7 可選, 右邊則剩 2,3,4,5,6 可選擇, 有 2x5=10 種；第二種情況是如果左邊不是選頂點, 此時 y 座標有 2,3,4,5,6 可選, 右邊則剩 1,7 可選擇 有 5x2=10 種。再把這兩種情況的種類數加總,所以共有 20 種變化

(2) 再來選取中間的點, y 座標有(7-2)!=5x4x3x2x1 共 120 種變化

(3) 之後再把(兩邊的變化種類)x(座標中間的變化種類)=該情形的變化量, 所以一邊點在頂點, 一邊點在邊上的情形, 所以有 20x120 共 2400 種

3.兩邊點不在頂點:(1,2).(7,6).(2,1).(3,3).(4,4).(5,5).(6,7)或(1,2).(7,6).(2,3).(3,1).(4,4).(5,5).(6,7)或(1,2).(7,6).(2,4).(3,3).(4,1).(5,5).(6,7)或(1,2).(7,6).(2,5).(3,3).(4,4).(5,1).(6,7)或(1,2).(7,6).(2,7).(3,3).(4,4).(5,5).(6,1)或(1,2).(7,6).(2,1).(3,4).(4,3).(5,5).(6,7)或(1,2).(7,6).(2,1).(3,5).(4,4).(5,3).(6,7)……等

(1) 先選取兩邊的點, y 座標有 2,3,4,5,6 可選擇。有 5x4 共 20 種變化

(2) 再來選取中間的點, y 座標有(7-2)!=5x4x3x2x1=5!共 120 種變化

(3) 之後再把(兩邊的變化種類)x(座標中間的變化種類)=該情形的變化量, 所以兩

邊點在邊的情形有 20x120 共 2400 種

全部共 5040 種=7!

根據上面所做出來的結果我們可以做出表一

表一:

m \ n	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	2	4	12	48	240
3	0	0	4	16	72	384	2400
4	0	0	0	4	36	288	2400

我們也可以找到不同 m 的相對應的公式

舉 n=4 的情況當例子:

若想得出 m=2 的數量，我們先從兩邊開始選，會有 2 種選法，再選中間會有(4-2)!種選法，一共有 2(4-2)!種，共 4 種

若想得出 m=3 的數量，我們先從兩邊開始選，先選「點」會有 4 種，再選邊有(4-2)種，然後選中間,會有(4-2)!種，一共有 4(4-2)(4-2)!種

若想得出 m=4 的數量，我們先從兩邊開始選，會有(4-2)(4-3)種,再選中間,會有(4-2)(4-3)種

]我們將上述推論一般化得出下列定理

定理 1. 設 n 是整數，且滿足 n≥2，一個排列 $\sigma:\{1,2,\ldots,n\}\rightarrow\{1,2,\ldots,n\}$可以表示成包含坐標平面上 n 個點的集合 $P_\sigma=\{(k,\sigma(k)):1\le k\le n\}$,在一個以(1,1),(1,n),(n,1),(n,n)四個頂點所圍成的正方形，令 m 是在他們正方形邊界上的點的數目,

則 m=2 、3 或 4 且

當 m=2 時，方法數為 2(n-2)! 且 n≧2

當 m=3 時，方法數為 $(n-3)!*4(n-2)^2=4(n-2)(n-2)!$ 且 n≧3

當 m=4 時，方法數 (n-2)(n-3)(n-2)! 且 n≧4

三維空間的推廣

當我們找出平面的公式時，我們想說既然平面可以找出公式來表示點在正方體的邊上的種類，試著尋找出在立體的圖形是否也可以用公式表示出來。

定義:

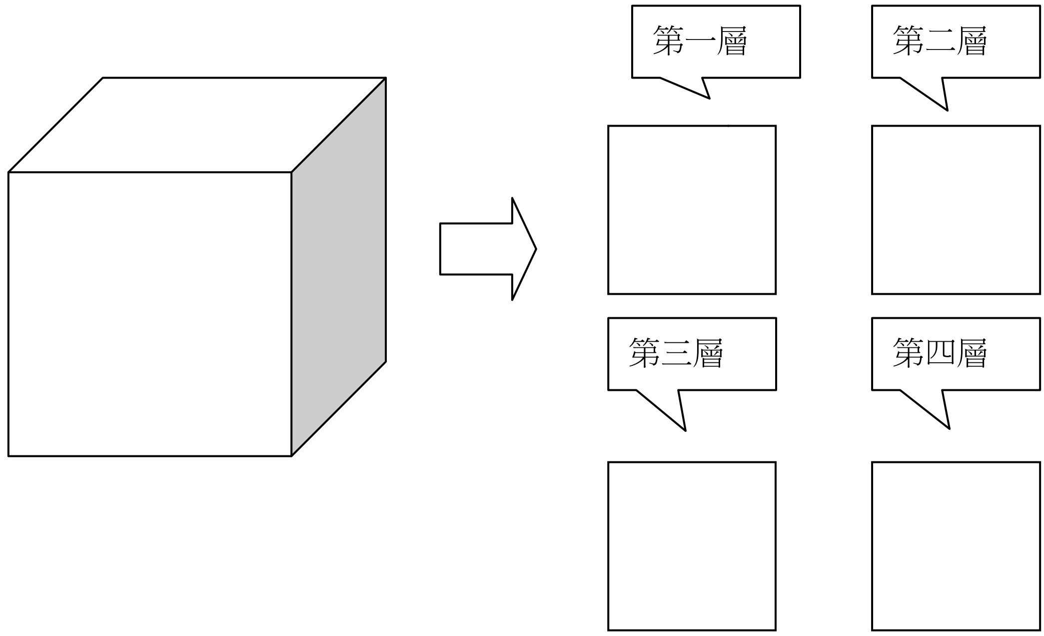
設 n 是整數，且滿足 $n \geq 2$，一個排列 $\sigma:\{1,2,...,n\} \to \{1,2,...,n\}$， 另一個排列 $\tau:\{1,2,...,n\} \to \{1,2,...,n\}$，可以表示成包含三維坐標平面上 n 個點的集合 $P_{\sigma\tau}=\{(k,\sigma(k), \tau(k)):1\leq k\leq n\}$，在一個由(1,1,1),(n,1,1),(1,n,1),(n,n,1),(1,1,n),(n,1,n),(1,n,n),(n,n,n)八個頂點所構成的正方體，請求出恰有 m 個點在他們正方體邊界上的 $P_{\sigma\tau}$的種類有多少?

研究過程：

m 為「點」位於正方體的邊長上的數目，從邊長為(n-1)的正方形中，找出 m 的表示方法； 當我們列出 n=6 的圖時，發現竟然出現有 m=0 的情況：若有 4 個點的位置出現在除了最上及最下層的任一層的「邊」位置時，就不會有任何點出現在正方體的邊上，即 m=0 發生的情況，而 m=4 的情況：因為每選一個點在正方體的邊上會至少會佔到二個平面，而正方體只有六個面，最多只會有 3 個點在邊上，因此此種情況並不會出現；我們認為在正方形中, m=0、1、2、3 僅有這四種情況，這個集合 $P_{\sigma\tau}$有最少 0 個點，最多 3 個點在正方體的邊界上,對於每個 $m\in\{0,1,2,3,\}$。同平面的概念，因為一對一原理，所以選任一個點，通過其的面上的點都不能選。 在平面時,排列$\sigma:\{1,2,...,n\} \to \{1,2,...,n\}$的方法數有 n! 種，那到了三維空間又多對應一個排列$\tau:\{1,2,...,n\} \to \{1,2,...,n\}$，所以方法數就會是 n!n!種。

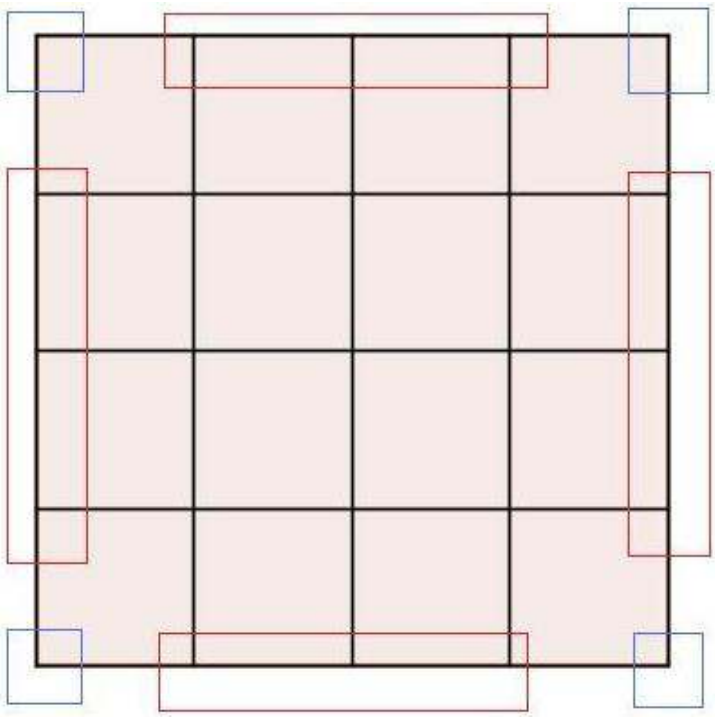
已知全部共會有 n 個點，又 n!n!種排法，因求出來的數字龐大，嘗試用不同於平面之方法來尋找。

1.先將正方體視為 n 個邊長為(n-1)正方形以間隔為 1 向上堆疊（以 n=4 為例），如圖(20)。



圖(20)

2.將點會出現的位置分為 3 個部分(以 n=5 為例)，如圖(21)：



圖(21)

點：正方形中的四個頂點(藍線)

邊：正方形的邊長扣除點的數目(紅線)

面：正方形中除了「點」、「邊」所剩下的位置。

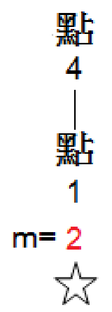
3.我們以樹狀圖的方式（排列組合）記錄，以第一層（最下）開始依上述的定義來畫圖，並依次寫下上一層中所剩可選的點、邊、面的數量直到最後為一層，再相乘，表示該排列方式可得的數量，並觀察出其中的關聯性。

4.發現當點的位置為在定義中的任一層的「點」上，在最上或最下層的「邊」上時，此點就是位在正方體的邊上。

5.在整理的過程中發現，發現得出來的數（n 相同時）皆為「☆」的倍數，且「☆」為所有得出的數中的最大公因數，再仔細觀察，發現在排法中只有「沒有任何一點位在任一層的『邊』上」時，那一種排法得出來的數洽為「☆」；我們選取將 2 個點置於正方體的最上及最下層的「點」位置，共有 4 種排法，剩下的點皆位在「面」上，在平面上看會有(n-2)!種排法，在將 z 軸上的選法(n-2)!乘入，可得到☆=4(n-2)!(n-2)!，選其當作基準；再將排法所得出來的數以「☆」作替換。

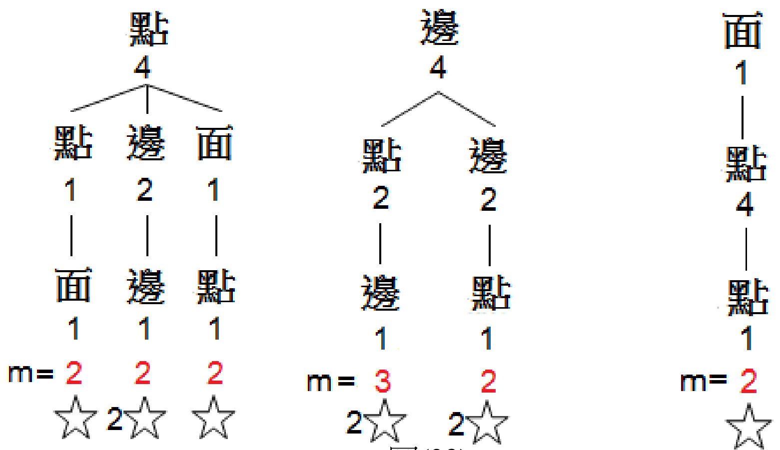
6.將 n=2~4 的樹狀圖畫出如下

n=2



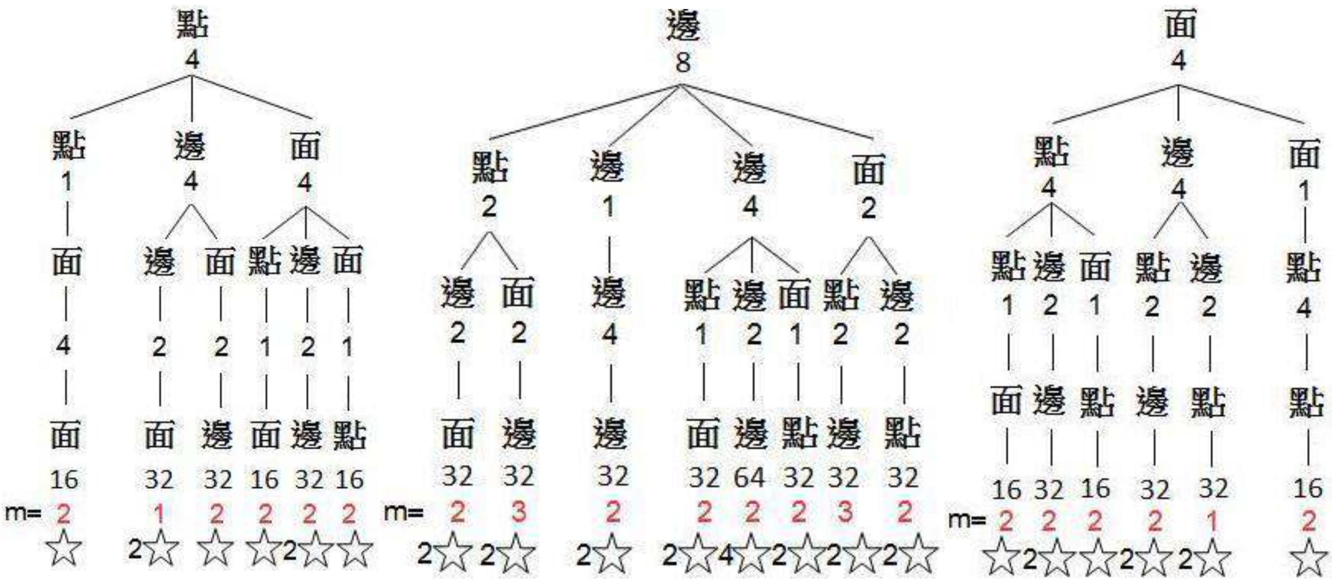
圖(22)

n=3



圖(23)

n=4



圖(24)

7.將所得出的數依序加總繪製成表二

表二:

m \ n	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	13824	1728000	186624000	21337344000
1	0	0	64	4320	221184	12672000	870912000	72546969600
2	4	28	448	9216	264960	10425600	543283200	36375091200
3	0	8	64	864	18432	576000	24883200	1422489600

8.我們將所得到的數目分別除以「☆」=4(n-2)!(n-2)!再加總，可得表三

表三:

n / m	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0	0	0	0	6	30	90	210	420	756	1260
1	0	0	4	30	96	220	420	714	1120	1656	2340
2	1	7	28	64	115	181	262	358	469	595	736
3	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
總和	1^2	3^2	6^2	10^2	15^2	21^2	28^2	36^2	45^2	55^2	66^2

9.從表三中推算後得知:

(1)總和公式:我們已知全部會有 n!n!個方法數，將它除以 4(n-2)!(n-2)!可得到$\frac{n(n-1)n(n-1)}{4}=\left[\frac{n(n-1)}{2}\right]^2$

(2)m=0，因 m=0 的情況是從 n=6 時才開始出現，而我們只做到了 n=8 時的圖形，想找出 m=0 的規律實在是沒有辦法；我們發現在之前找出的規律中, m=3 成等差數列、m=2 成二階等差數列、m=1 成三階等差數列，因此我們假設「m=0 成四階等差數列」，我們利用之前找出的規律來推得 n=9、n=10、n=11 時的數據，在反推得到 n=9、n=10、n=11 時 m=0 的數量，再逐一相減得出公差為 6，且符合當初的假設，我們確定 m=0 成四階等差數列，其公差值為 6，用遞迴數列可表示成$\begin{cases} a_6=6, a_7=30, a_8=90 \\ a_{n+1}=a_n+n^3-9n^2+26n-24, n\geq 6 \end{cases}$

(3)m=1，將所有已得的數分別減去前一項的數，可得到 4、26、66、124...，再相減一次，可得 22、40、58...，發現為三階等差數列且公差值為 18，用遞迴關係式可表示成$\begin{cases} a_4 = 4, a_5 = 30, a_6 = 96 \\ a_{n+1} = a_n + 9n^2 - 41n + 46, n \ge 4 \end{cases}$

(4)m=2，將所有已得的數分別減去前一數，可分別得到 6、21、36、51、66...，發現此為二階等差數列且公差值為 15，列出算式〔6+6+15(n-3)〕(n-2) ÷2+1，化簡後得到〔$15n^2$－63n＋66〕÷2＋1=$\dfrac{(15n^2 - 63n + 68)}{2}$ ，用遞迴關係式可表示成 $\begin{cases} a_2 = 1, a_3 = 7, a_4 = 28, \\ a_{n+1} = a_n + 15n - 24, n \ge 2 \end{cases}$

(5) m＝3 的個數成一等差數列，其中公差值＝2，可得(2n－4)為其關係式，再乘回 4（n-2）!（n-2）!可得其數量為(2n－4) 4（n-2）!（n-2）!簡化後為 8（n-2）(n-2）!(n-2)!,用遞迴關係式可表示成 $\begin{cases} a_3 = 2, a_4 = 4, a_5 = 6 \\ a_{n+1} = a_n + 2, n \ge 3 \end{cases}$

(6)用遞迴式所求出來的數必須在乘回 4(n-2)!(n-2)!，才是各 m 所對應的數

由上述的討論與證明,我們得到以下的定理

定理 2. 設 n 是整數，且滿足 n≥2，一個排列 σ : {1,2,...,n} → {1,2,...,n}， 另一個排列 τ : {1,2,...,n} → {1,2,...,n}，可以表示成包含三維坐標平面上 n 個點的集合 $P_{\sigma\tau}$= {(k , σ(k), τ(k)):1≤k ≤n}，在一個由(1,1,1),(n,1,1),(1,n,1),(n,n,1),(1,1,n),(n,1,n),(1,n,n),(n,n,n)八個頂點所構成的正方體中，令恰有 m 個點在正方體邊界上，則

m 的值只有 0,1,2 或 3 四種可能，而且

當 m=0 且 n≧6 時, $P_{\sigma\tau}$有 $(n^4 - 14n^3 + 71n^2 - 154n + 120)(n-2)!(n-2)!$種,

當 m=1 且 n≧4 時, $P_{\sigma\tau}$有 $4(3n^3 - 25n^2 + 68n - 60)(n-2)!(n-2)!$種

當 m=2 且 n≧2 時, $P_{\sigma\tau}$有 $2(15n^2 - 63n + 68)(n-2)!(n-2)!$種

當 m=3 且 n≧3 時, $P_{\sigma\tau}$有 $4(2n-4)(n-2)!(n-2)!$種

伍、研究結果

我們可以知道:

一、平面

(一)全部方法數共有 n!種

(二)m=2 時的方法數 2(n-2)! 但前提是 n≧2

(三)m=3 時的方法數 4(n-2)(n-2)! 但前提是 n≧3

(四)m=4 時的方法數 (n-2)(n-3)(n-2)! 但前提是 n≧4

二、三維空間

(一) 全部方法數有 n! n!種

(二）m 的範圍介於 0~3 之間

(三) 將方法數除以 4(n-2)!(n-2)!可得知各個 m 所對應的遞迴式:

m=0 時, $\begin{cases} a_6 = 6, a_7 = 30, a_8 = 90 \\ a_{n+1} = a_n + n^3 - 9n^2 + 26n - 24, n \geq 6 \end{cases}$

m=1 時, $\begin{cases} a_4 = 4, a_5 = 30, a_6 = 96 \\ a_{n+1} = a_n + 9n^2 - 41n + 46, n \geq 4 \end{cases}$

m=2 時, $\begin{cases} a_2 = 1, a_3 = 7, a_4 = 28 \\ a_{n+1} = a_n + 15n - 24, n \geq 2 \end{cases}$

m=3 時, $\begin{cases} a_3 = 2, a_4 = 4, a_5 = 6 \\ a_{n+1} = a_n + 2, n \geq 3 \end{cases}$

(四) 利用遞迴式與級數公式求得一般項如下：

m=0 時, $a_n = \dfrac{n^4 - 14n^3 + 71n^2 - 154n + 120}{4}$

m=1 時, $a_n = 3n^3 - 25n^2 + 68n - 60$

m=2 時, $a_n = \dfrac{15n^2 - 63n + 68}{2}$

m=3 時, $a_n = 2n - 4$

註: 4(n-2)!(n-2)!乘以 a_n，才是實際的方法數

(五) 另外發現 m=0 成四階等差數列、m=1 成三階等差數列、m=2 成二階等差數列、m=3 成等差數列。

(六) 從樹狀圖中，我們發現當排法符合某些條件時, 可確定出 m 的值；

m=0：須有 4 個點位在除了最上及最下層的其他層的「邊」位置 。

m=1：1. 1 個點位在任一層的「點」上, 且有 2 個點位在除了最上及最下層的任一層的「邊」上

2. 2 個點分別位於最上及最下層的「邊」､「面」上, 但不得有點位在任一層的「點」上

m=2：1. 2 個點分別位在任一層的「點」上

2.只有 1 個點位在最上或最下層的「邊」上, 另一個點位在任一層的「點」 上

3. 2 個點位在最上及最下層的「邊」上, 但不得有點位在任一層的「點」上

m=3：2 個點位在上層及最下層的「邊」上, 及 1 個點位在剩下的任一層中的「點」上。

陸、討論

一、在解決文獻的問題之後, 我們以回推的方式來驗證其公式是否正確, 我們將各 m 方法數的公式相加, 得到其總方法數。

$2(n-2)!+4(n-2)(n-2)!+(n-2)(n-3)(n-2)!=n(n-1)(n-2)=n!$, 故得驗證。

二、延伸至三維空間時, 我們以相同的方法驗證, 先找到總和公式的遞迴關係式,

列出 $a_{n+1}=a_n+\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2+\left[\frac{n(n-1)}{2}\right]^2$ ，簡化得 $a_{n+1}=a_n+n^3$, 將各 m 的遞迴關係式後面的數值相加。$n^3-9n^2+26n-24+9n^2-41n+46+15n-24+2=n^3$, 故得驗證。

三、由一開始的文獻問題, 到後來的三維空間推廣, 我們用了不同的方式, 從 n=2 一個一個找出它們個別的 m 的方法數, 再觀察其中的規律, 最後得出各公式。更高維空間推廣的部份, 還在努力研究當中。

柒、結論

我們利用一一列出和排列組合的方式, 找出在平面上, 不同數目的點在其邊上方法數的公式,

全部方法數共有 n!種

m=2 時的方法數 2(n-2)!, 且 n≧2

m=3 時的方法數 4(n-2)(n-2)!,且 n≧3

m=4 時的方法數 (n-2)(n-3)(n-2)!, 且 n≧4

並且利用樹狀圖和排列組合,找出在三維空間時, 點在邊上可能出現的情形, 而且找出了各情形所產生的排列方法, 將方法數除以 4(n-2)!(n-2)!可得知各個 m 所對應的遞迴式:

m=0 時 $\begin{cases} a_6 = 6, a_7 = 30, a_8 = 90 \\ a_{n+1} = a_n + n^3 - 9n^2 + 26n - 24, n \geq 6 \end{cases}$

m=1 時 $\begin{cases} a_4 = 4, a_5 = 30, a_6 = 96 \\ a_{n+1} = a_n + 9n^2 - 41n + 46, n \geq 4 \end{cases}$

m=2 時 $\begin{cases} a_2 = 1, a_3 = 7, a_4 = 28, \\ a_{n+1} = a_n + 15n - 24, n \geq 2 \end{cases}$

m=3 時 $\begin{cases} a_3 = 2, a_4 = 4, a_5 = 6 \\ a_{n+1} = a_n + 2, n \geq 3 \end{cases}$

我們經由運算後得到一般項如下

m=0 時 $a_n = \dfrac{n^4 - 14n^3 + 71n^2 - 154n + 120}{4}$

m=1 時 $a_n = 3n^3 - 25n^2 + 68n - 60$

m=2 時 $a_n = \dfrac{15n^2 - 63n + 68}{2}$

m=3 時 $a_n = 2n - 4$

註: 4(n-2)!(n-2)!乘以 a_n, 才是實際的方法數

捌、參考資料及其他

一、Walter Stromquist(2011,February). Mathematics Magazine,Vol. 84 , No.1,68

二、高中數學 第二冊課本 李虎雄 主編 康熙文化出版社

【評語】040410

這個研究是在探討一個排列對影在平面上格子點的方法數，在文獻上就是所謂的排列矩陣。研究的內容依據落在周圍邊界上的點數加以分類，並求出對應情況的方法數；最後並引申正立方體的研究，內容大致正確，但是創新的部分比較不夠。