中華民國第55屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組　數學科

最佳創意獎

040409

移「形」換「位」－多邊形移動邊數關係之探討

學校名稱：國立彰化高級中學

作者：	指導老師：
高一　林泳霖 高一　陳囿良 高一　潘家宏	王鴻翔

關鍵詞：算數形、排列組合、分支圖

摘要

本作品主要在討論給定一個 n 邊形，在移動一個邊或是兩個邊後可形成的幾何圖形，並設法找出其一般式。在此研究中的圖形經翻轉、旋轉或撓折後相同的圖形視為同一個，在此定義此種圖形稱為一幾何算數形，簡稱「算數形」。

我們觀察圖形之規律，進而發現經定義移動邊數後的幾何圖形內部必只會出現一個封閉多邊形，以此特殊性質為基礎推導公式的形式。得知 n 邊形中移動 1 個邊後，當 n 為奇數情況下，算數形總數的公式為 $\frac{(n-3)(n+1)}{4}$；n 為偶數情況下，算數形總數的公式為 $\frac{n(n-2)-4}{4}$。在研究移動兩邊時發現規律過於繁雜，因此將其分類為 3 種情況來討論，分別為在封閉多邊形上有 (1) 二分支 (2) 三分支 (3) 四分支，並加以分別討論，推導出上述情形之公式。

壹、研究動機

在化學課中曾經提到多個碳原子能以多邊形的形式組成環烷，如六個碳可組成環己烷，而其鍵結經過適當的移動，可形成其他環烷類 (甲基環戊烷、乙基環丁烷等)，我們因此獲得一個靈感，當在不同多邊形情況下，移動的邊數不同，所組合成的圖形是否存在有趣的規則？若存在其規則為何？所以我們就在好奇心的驅使下決定將其深入研究，並使用所學的數學知識來嘗試解決此幾何問題，以了解其中的奧妙之處。

貳、研究目的

此研究目的如下：

一、利用定義似幾何化過程—幾何算數形，進而討論移動邊數後之圖形情況。

二、找出多邊形移動一邊後可形成之所有幾何算數形的種類。

三、以排列組合方法找出在 n 邊形中移動一邊後，所形成之算數形分支圖總數，是否存在特殊規則，並找出一般形式。

四、找出多邊形移動二邊後可形成之所有幾何算數形的種類。

五、考慮在 n 邊形中移動二邊後所形成之算數形分支圖總數，在不同分支情況下是否仍存在特殊規則，並推導出其一般式。

參、研究設備及器材

紙、筆、C++程式、電腦 word、繪圖軟體 Geogebra。

肆、研究過程及方法

一、幾何算數形

定義 1：設多邊形的邊數為 n，移動之邊數為 m (本作品所述的移動邊數 m 均需解釋為至少需移動 m 個邊才可形成該圖形)，並且在此研究中的圖形並無方向性。在圖形經旋轉、翻轉或撓折後相同的多邊形視為同一個，即定義此為幾何算數形，簡稱「算數形」。

定義 2：每一個點皆須與邊相鄰。

定義 3：該圖形的點數與邊數需相同。

由定義 1 可知，在移動邊數後的圖形旋轉、翻轉或撓折之後相同的這個過程，我們稱之為似幾何化。並推論在不同多邊形的邊數 n，移動邊數 m 為一邊、二邊公式的形式。如圖一所示，A、B 所顯示為 $n=8$ ，$m=2$ 之算數形圖，C、D 所顯示為 $n=14$ ，$m=0$ 之算數形圖，因定義 1，此圖形在處理時我們將其視為相同的情況。

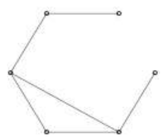
A　　B　　C　　D

圖一、不同邊數下相同之算數形圖

此外，我們可觀察到移動一邊($m=1$)之圖形有兩個特殊的性質如下：

性質 1：若 $m=1$ 時，則圖形在移動一邊後必只形成一個封閉多邊形與分支。

性質 2：若 $m=1$ 時，產生性質 1 所述之封閉多邊形上的分支必在該封閉多邊形相鄰的點上，如圖二所示。

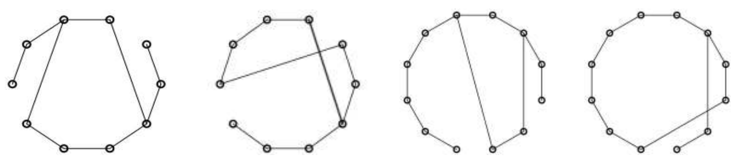


圖二、性質 1、2 的表徵

證明：

性質 1：若將多邊形做一條對角線，可發現該多邊形會被分成兩個封閉多邊形，但在此我們僅需移動一邊，故只能在這兩個封閉多邊形的其中一個去掉一邊，因此必只剩下唯一一個封閉多邊形。

性質 2：拿掉一個邊後，剩下的分支一定位在唯一的對角線上，故得知二分支必定相鄰。若非相鄰兩邊，如圖三，此需移動兩邊才會形成一封閉多邊形，若只移動一邊，圖形無法成為完整的封閉多邊形 (即無分支之多邊形)。



圖三、 $m=1$ 時不相鄰二分支無法還原為封閉多邊形

接下來，我們將利用以上二種特殊性質規則，推導出在 n 邊形下，移動一邊以及二邊的算數形分支圖總數的公式。

二、n 邊形移動邊數後之算數形討論

利用性質 1、2，我們可以開始推導當移動邊數為 $m=1$ 與 $m=2$ 情況下之公式。此外每個封閉多邊形皆由三角形開始逐漸增加邊數，因此利用圖形規則，找出其特殊規律。

(一) 考慮 n 邊形，移動一邊($m=1$)情況下之算數形總數

首先從討論封閉多邊形為三角形開始，當該多邊形邊數為 n 時，則分支共有 $n-3$ 個點。在此我們分別討論邊數 n 為奇、偶情況下的差異。

1. 多邊形邊數 n 為奇數

若在 n 多邊形中，封閉圖形為三角形時，則分支共有 $n-3$ 個點。考慮 n 為奇數，則 $n-3$ 必為偶數，故在此情況下的算數形之分支圖共有 $\frac{H_{n-3}^2-1}{2}+1=\frac{n-3}{2}+1$ 個。

若封閉圖形為四邊形時，則分支共有 $n-4$ 個點。考慮 n 為奇數，則 $n-4$ 必為奇數，故在此情況下的算數形之分支圖共有 $\frac{H_{n-4}^2}{2}=\frac{n-5}{2}+1$ 個。以此類推，如表一，可以推得以下定理。

定理一：在 n 邊形中移動 $m=1$ 邊，當 n 為奇數情況下，則算數形的分支圖總數的公式為

$$\frac{(n-3)(n+1)}{4}\text{。}$$

證明：

在 n 邊形中移動 $m=1$ 邊後，可得不同封閉多邊形下算數形之分支圖總數為

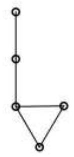
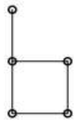
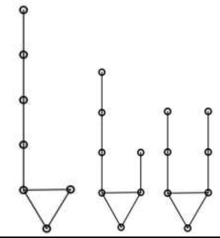
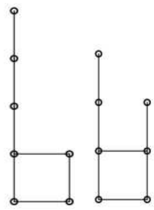
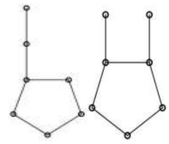
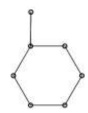
$$\frac{n-3}{2}+1+\frac{n-5}{2}+1+\frac{n-5}{2}+1+\frac{n-7}{2}+1+\frac{n-7}{2}+1+......+\frac{n-(n-1)-1}{2}+1+1-1$$

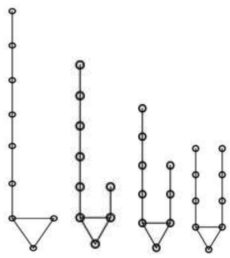
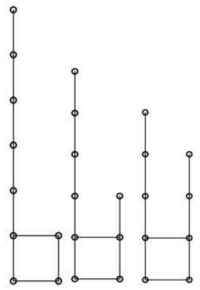
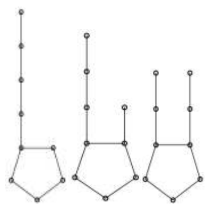
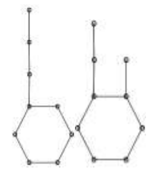
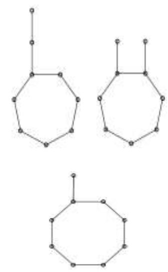
$$=\frac{n-3}{2}+\frac{n-5}{2}+\frac{n-5}{2}+\frac{n-7}{2}+\frac{n-7}{2}+......+\frac{n-n}{2}+n-3+1-1$$

$$=\frac{n-3}{2}+n\times\frac{n-3}{2}-(5+7+......+n)+n-2-1=\frac{(n-3)(n+1)}{4}$$

故得證當多邊形 n 為奇數時，移動一邊後之算數形的分支圖總數之公式為 $\frac{(n-3)(n+1)}{4}$ 。

表一、當邊數 n 為奇數時移動一邊算數形分支圖的情形

	$n=5$		$n=7$			
算數形分支圖						
總數	3		8			

	$n=9$				
算數形分支圖					
總數	15				

2. 多邊形邊數 n 為偶數

考慮在不同封閉多邊形下，當 n 為偶數，移動邊數為一邊時，算數形分支圖個數可整理如下表二。因此亦可推論得知以下定理。

表二、當 n 為偶數邊，移動 $m=1$ 邊之算數形之分支圖總數

	多邊形邊數 (n)			
封閉圖形	4	6	8	10
三角形	1	2	3	4
四邊形		2	3	4
五邊形		1	2	3
六邊形			2	3
七邊形			1	2
八邊形				2
九邊形				1
十邊形				
分支總數	1	5	11	19

定理二：在 n 邊形中移動 $m=1$ 邊， 當 n 為偶數情況下，則算數形的分支圖總數的公式為

$$\frac{n(n-2)-4}{4}$$ 。

證明：在 n 邊形中移動 $m=1$ 邊，可得不同封閉多邊形下算數形之分支圖總數為

$$\frac{n-4}{2}+1+\frac{n-4}{2}+1+\frac{n-6}{2}+1+\frac{n-6}{2}+1+\ldots\ldots+\frac{n-(n-1)-1}{2}+1+\frac{n-n}{2}+1-1$$

$$=\underbrace{\frac{n-4}{2}+\frac{n-4}{2}+\frac{n-6}{2}+\frac{n-6}{2}+\ldots\ldots+\frac{n-n}{2}+\frac{n-n}{2}}_{n-2\text{個}}+n-2-1$$

$$=n\times\frac{n-2}{2}-\frac{(4+n)(\frac{n-2}{2})}{2}+n-2-1=\frac{n(n-2)-4}{4}$$

故得證當多邊形 n 為偶數時，移動一邊後算數形之分支圖總數之公式為 $\frac{n(n-2)-4}{4}$ 。

(二) 考慮 n 邊形，移動二邊($m=2$)情況下之算數形圖

接著探討移動二邊($m=2$)後算數形分支圖之情況，並嘗試推導出其公式形式。我們利用移動一邊的想法加以推導公式，進而觀察移動兩邊會出現的特殊情形，此外我們對多邊形移動兩邊做以下定義，定義如下：

定義 4：多邊形若移動一個邊就可形成之情形，當以移動兩邊來完成時，則不屬於移動兩邊，且同一邊不可以移動二次。

因此需要滿足以下的情況：

(a) 一定只會出現一個封閉多邊形。

(b) 若有二個分支則彼此不相鄰(無分支中分支)。如圖四左一所示。

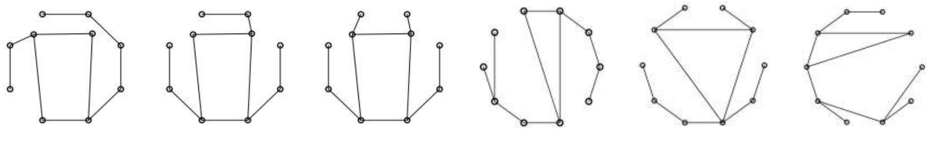
(c) 若有三個分支(無分支中分支)，其中的二分支必相鄰。如圖四左二所示。

(d) 若有四個分支則必有兩分支兩分支相鄰。如圖四左三所示。

(e) 若有二分支則其中一個分支上必定多一個分支，且所有分支必相鄰。如圖四右三所示。

(f) 若有三分支則中間的分支必多一個接在底部的分支，且三分支均相鄰，如圖四右二所示。

(g) 若有二分支則其中一分支上必有分支中分支，而且二分支必均相鄰。如圖四右一所示。



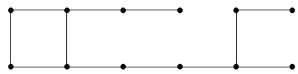
圖四、移動二邊所形成的所有情形

接著我們開始證明上述情況為移動兩邊之所有情況。移動兩邊就可形成封閉多邊形之算

數形，若在適當位置加入兩個邊，則必可形成三個相鄰的封閉圖形，就如同在一個封閉多邊形中任意加入兩條線，與我們證明移動一邊定僅能形成一封閉圖形的做法類似。因此我們得出兩性質：

性質 3：所有的點可挪移成上下的兩平行線，如圖五。

性質 4：因必出現一封閉圖形，故在三封閉圖形中固定一個，且另外兩個封閉圖形中只能各取走一邊，以圖五來講就是固定左邊的封閉多邊形。



圖五、解釋必須邊不移動

我們可以依照下面敘述的方法來找出所有移動兩邊的條件。若移動一邊的圖形可用移動兩邊來完成，則為移動一邊；但事實上移動一邊的圖形可用移動兩邊來完成，故可知此圖形之所有情形必定有所有移動兩邊之情形，也會有移動一邊之情形，但絕對不會有移動三邊以上之情形；因為我們只是還原移動兩邊這個條件，而不是最少移動兩邊這個條件，之後我們只要歸類整理出的所有情況，再去掉之前所證明的移動一邊的所有情況，即可找出所有最少移動兩邊的情形。

接著利用以下定義證明為何至少需要上、下各 6 個點才可形成移動兩邊的所有移動情形。

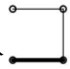
定義 5：必須移動此邊才可形成封閉多邊形之邊，稱為必須邊。

圖六、粗黑線為必須邊，實線可為任意邊數，虛線為可拿取之位置

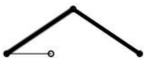
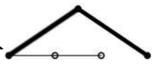
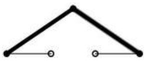
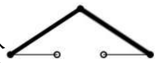
我們得知兩個必須邊必可以把一個多邊形分為三個封閉多邊形，依性質 4 可知每個封閉多邊形只能去掉一個邊，然而最左邊之封閉圖形必只有一個必須邊，依定義 5 來說必須邊不可去掉，因為其為必須移動的。而非必須邊的邊則可以以增加點的方式來處理增加邊的情況(必須邊不可以加點，因其為我們必移動的一個邊，並非型式)，故一個非必須邊因可加點的關係，可將其視為代表 n 個邊之型式。經上述討論，我們加以定義：當非必須邊可以以增加一個點在型式上來取代增加一個邊在非必須邊上，稱為「型式」。

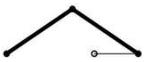
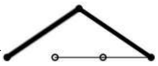
我們分別討論此三個封閉圖形。首先討論最左邊的，我們將其分為封閉和未封閉這兩種情形，因為其可為取走邊的圖形或如定義所述的封閉圖形，我們將其型式化，可知共有下列

三種情形：

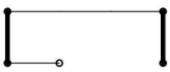
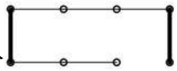
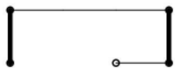
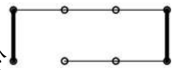
因型式化而等價於，因型式化而等價於，因型式化而等價於，故可將此封閉多邊形轉化成此四邊形，因為此圖形為型式化過後的圖形，故可知封閉多邊形可以用四邊形來呈現。另外當其為封閉圖形時，可代表邊數為 3 以上的封閉多邊形，因其為前所定義的型式，最右邊的封閉多邊形亦然，也就是說，只要該封閉多邊形的邊數 (已型式化) 只要等於 4 即可討論出所有情況。

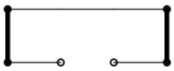
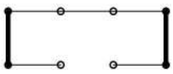
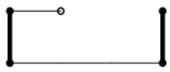
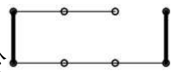
接者討論中間的封閉圖形，由定義可知其邊上必有 2 個必須邊，我們分成兩個情況來討論，情況(1)二個必須邊的其中一個點互相接壤；情況(2)二個必須邊的各其中一點互相不接壤。我們先討論情況(1)，以下的邊皆為型式化，可知其所有情況有三種：

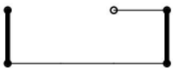
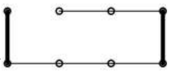
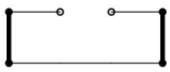
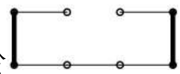
因型式化而等價於，因型式化而等價於，

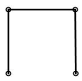
因型式化而等價於，另外還有我們將其作為特例討論。

我們由此證明得知其需要上 1 下 4 (因性質 3 我們可將所有的點重整為上、下平行，故上 1 為上一個點，下 4 為下四個點) 即可做出所有情況(1)之情形，接著討論情況(2)。因型式化得到六種等價情形，以下是我們所有的情況：

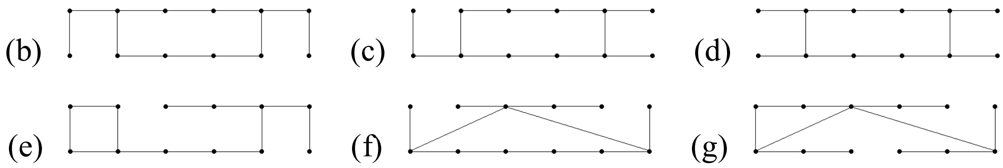
因型式化而等價於，因型式化而等價於，

因型式化而等價於，因型式化而等價於，

因型式化而等價於，因型式化而等價於，

此外這一個我們將其作為特例討論，如圖所示。

由此可知最少須上 4 下 4 才可能擺出所有情況。綜合以上所述之所有情形，除兩個特例外皆可使用上 6 下 6 之情形來分類，因為中間的封閉圖形最少必須以上 4 下 4 來討論其所有情形，再將其搭配最左邊與最右邊的型式化封閉圖形，前面已經證明過最左邊與最右邊的型式化封閉圖形只要是四邊形就可做出所有情形，圖七表示為我們將上 6 下 6 的所有情形歸類出的(b)~(g)之情況。



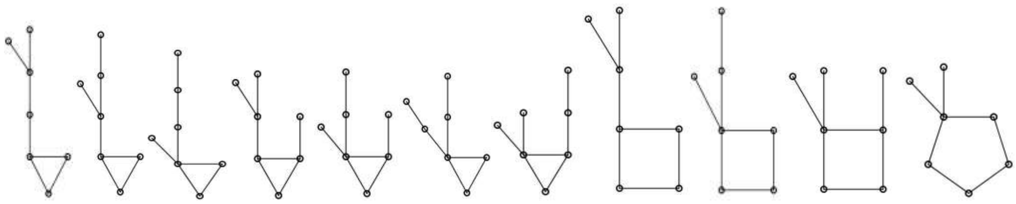
圖七、所有還原移動兩邊之種類（$n=12$）

接著討論上述的例外情形，我們可知其最少須上 4 下 4 即可做出所有情形，而其所有情況皆可歸類至(b)~(g)。

1. 二分支

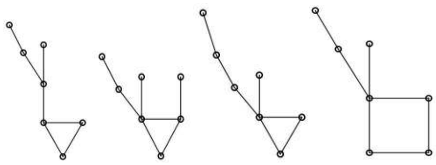
(1) 分支中分支

首先討論分支中分支，如圖七(e)。利用定義 4，討論移動二邊後所形成之算數形分支圖的圖形關係，我們可觀察到一個規律，以七邊形為例，封閉圖形為三角形時有 7 種，四邊形時有 3 種，五邊形時有 1 種，因此算數形總數共有 11 種。



圖八、當邊數$n=7$時滿足二分支有分支中分支的情形

但其中有 4 個算數形是視為相同的，因此不重複計算，如下圖



定理三、在 n 邊形中移動 $m=2$ 邊後，不同封閉多邊形所形成分支中分支的算數形分支圖總數公式，當 n 為奇數時 $\dfrac{(n-1)(n-3)(n^2-4n+1)}{48}$，當 n 為偶數時 $\dfrac{n(n-2)^2(n-4)}{48}$。

證明：

考慮 n 邊形，在針對不同封閉多邊形所形成的算數形之分支圖總數，有一規律如下：

$$
\begin{aligned}
&(n-4)+2(n-5)+3(n-6)+4(n-7)+5(n-8)+\ldots\ldots+(n-3)(n-n)\\
&+\ (n-5)+2(n-6)+3(n-7)+4(n-8)+\ldots\ldots+(n-4)(n-n)\\
&+\ (n-6)+2(n-7)+3(n-8)+\ldots\ldots+(n-5)(n-n)\\
&\vdots\\
&+\ (n-n)
\end{aligned}
$$

整理後可得知，移動二邊後分支中分支的算數形分支圖總數為 $\sum_{k=4}^{n}\frac{(1+k-3)(k-3)(n-k)}{2}$ ，令 $k=x+3$，因此得知公式化簡為

$$\sum_{x=1}^{n-3}\frac{(x+1)x(n-x-3)}{2}=\frac{1}{2}\sum_{x=1}^{n-3}(x^2+x)(n-x-3)=\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{24}$$

但相同算數形圖需扣除，以下為扣除的方法。

我們將分支中接上另一個分支的點上的地方稱為 V 型，我們由圖形可得知 V 型下的圖形極似於移動一邊的圖形，唯一的差別在於其對稱性被破壞 (無奇偶之情形)，而會出現重複的情況則出現在 V 型，其重複的情形極似於移動一邊的對稱情形，故我們先以減掉 V 型的兩分支均相同時的情況，再除以 2，以扣掉其他對稱的重複情況，再把被扣掉 V 型的兩分支均相同的情形加回來，即可完成所有情況。

首先我們必須先知道破壞對稱後的移動一邊公式為 $(x-1)(x-2)/2$，其中 x 為 V 型下的點數。接著討論 n 為奇數時，則在不同封閉多邊形下重複計算總數為

$$\frac{(n-3)\times(n-4)}{2}+\frac{(n-5)\times(n-6)}{2}+......+\frac{2\times1}{2}=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\frac{n-2}{2}}[(n-2m-1)(n-2m-2)]=\frac{(n-1)(n-3)(2n-7)}{24}$$

整理後可得知當 n 為奇數，分支中分支的算數形總數為

$$\frac{\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{24}-\frac{(n-1)(n-3)(2n-7)}{24}}{2}+\frac{(n-1)(n-3)(2n-7)}{24}=\frac{(n-1)(n-3)(n^2-4n+1)}{48}$$

我們以 $n=7$ 代入驗證，得知結果為 11，與圖八相符。

此外當 n 為偶數時，則在不同封閉多邊形下重複計算總數為

$$\frac{(n-3)\times(n-4)}{2}+\frac{(n-5)\times(n-6)}{2}+......+\frac{3\times2}{2}$$

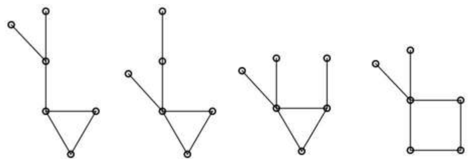
$$=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\frac{n-4}{2}}(n-2m-1)(n-2m-2)=2\sum_{m=1}^{\frac{n-4}{2}}m^2+(3-2n)\sum_{m=1}^{\frac{n-4}{2}}m+(n-1)(n-2)(\frac{n-4}{4})$$

$$=\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{12}+\frac{(3-2n)(n-2)(n-4)}{8}+\frac{(n-1)(n-2)(n-4)}{4}=\frac{(n-2)(n-4)(2n-9)}{24}$$

整理後可得知當 n 為偶數時，分支中分支的算數形總數為

$$\frac{\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{24}-\frac{(n-2)(n-4)(2n-9)}{24}}{2}+\frac{(n-2)(n-4)(2n-9)}{24}=\frac{n(n-2)^2(n-4)}{48}$$

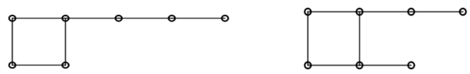
我們帶 $n=6$ 去驗證，所得結果為 4，與圖九相符。



圖九、當邊數$n=6$時滿足二分支有分支中分支的情形

(2) 二分支但不相鄰

我們接著討論二分支但不相鄰之情況，如圖七(b)，我們發現此情況與$m=1$的公式推導情形很像，我們知道封閉三角形必定兩分支必相鄰，所以我們從四邊形開始討論。



圖十、當多邊形數$n=7$，在封閉四邊形下二分支且相鄰的情形

首先討論 n 為奇數，我們知道圖十必為不可能發生的事，因此四邊形公式改為$\frac{H_{n-4}^{2}}{2}-1=\frac{n-5}{2}$。然而我們從這些圖的情況得知公式可以改寫成

$$\underbrace{\frac{n-5}{2}+\frac{n-5}{2}+2\frac{n-7}{2}+2\frac{n-7}{2}+......+\frac{n-n}{2}(\frac{n-3}{2})+\frac{n-n}{2}(\frac{n-3}{2})}_{n-3\text{個}}$$

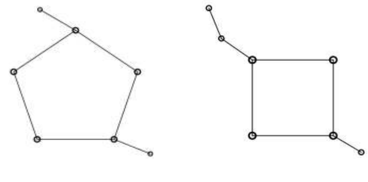
$$=\underbrace{n-5+2(n-7)+3(n-9)+......+(\frac{n-3}{2})(n-n)}_{\frac{n-3}{2}\text{個}}$$

$$=\sum_{k=1}^{\frac{n-3}{2}}k[n-(2k+3)]=n\sum_{k=1}^{\frac{n-3}{2}}k-2\sum_{k=1}^{\frac{n-3}{2}}k^{2}-3\sum_{k=1}^{\frac{n-3}{2}}k$$

$$=\frac{(1+\frac{n-3}{2})\frac{n-3}{2}}{2}n-2\frac{\frac{n-3}{2}(\frac{n-3}{2}+1)(n-3+1)}{6}-3\frac{(1+\frac{n-3}{2})\frac{n-3}{2}}{2}$$

$$=\frac{(n-1)(n-3)(n-5)}{24}$$

我們帶$n=7$去驗證，結果為 2，如圖十一所示之情況，這是當 n 為奇數時的公式。



圖十一、當多邊形數$n=7$，在封閉四邊形下二分支且不相鄰的情形

接著推導 n 為偶數

表三、當 n 為偶數邊，移動 $m=2$ 邊且二分支但不相鄰之分支圖總數

	邊數 (n)				
封閉圖形	4	6	8	10	12
四邊形		1	2	3	4
五邊形			1	2	3
六邊形			2	4	6
七邊形				2	4
八邊形				3	6
九邊形					3
十邊形					4
分支總數	0	1	5	14	30

由表三得知，一樣在封閉三角形不成立，我們開始著手推導二分支但不相鄰公式，結果如下：

$$\underbrace{\frac{n-4}{2}+\frac{n-6}{2}+2\frac{n-6}{2}+2\frac{n-8}{2}+......+\frac{n-n}{2}(\frac{n-2}{2})}_{n-3\text{個}}=\underbrace{\frac{n-4}{2}+3\frac{n-6}{2}+5\frac{n-8}{2}+......+(n-3)\frac{n-n}{2}}_{\frac{n-2}{2}\text{個}}$$

$$=\sum_{k=1}^{\frac{n-2}{2}}(2k-1)(\frac{n-2(k+1)}{2})=\sum_{k=1}^{\frac{n-2}{2}}\frac{2nk-4k^2-4k-n+2k+2}{2}$$

$$=\frac{n^2(n-2)}{8}-\frac{n(n-1)(n-2)}{12}-\frac{n(n-2)}{4}-\frac{n(n-2)}{4}+\frac{n(n-2)}{8}+\frac{n-2}{2}=\frac{(n-4)(n-3)(n-2)}{24}$$

我們以 $n=8$ 代入驗證，結果為 5，與圖形相同。

(3) 分支中分支中分支

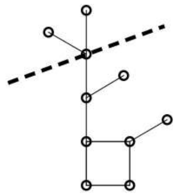
接者推導分支中分支中分支(如圖七(g))的公式。由於末端的分支會出現對稱的情形，因此我們分為 V 型及剩餘排列部份兩個的結合，如左下圖所示，而 V 型的部分會因為奇偶而有不同的情形，故我們分為總邊數 n 為奇數及 n 為偶數來討論。

首先先導剩餘排列部份的規則，因其不受奇偶情形影響，所以皆可通用。剩餘排列部份由封閉多邊形、一個邊數可為零的單獨分支、一個邊數必為一的連接邊、最接近封閉圖形的分支以及最接近封閉圖形的分支連接封閉圖形的邊所構成，且至少五邊，如右下圖所示。令此剩餘排列部份邊數為 x，封閉多邊形邊數為 a，一個邊數可為零的單獨分支邊數為 b，則最接近封閉圖形的分支以與最接近封閉圖形的分支連接封閉圖形的邊之邊數和為 $x-a-b-1$。

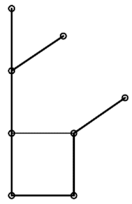
我們發現因為最接近封閉圖形的分支不可為零但最接近封閉圖形的分支連接封閉圖形的邊可為零，所以組合情形總數為 $x-a-b-1+1-1=x-a-b-1$，與邊數和相同，故可開始推導剩餘排列部份的一般式。其中 a 必須大於等於 3，小於等於 $x-2$；b 大於等於 0 且小於等於

$x-a-2$，有此上、下限後可推導出下列式子。

$$\sum_{a=3}^{x-2}\sum_{b=0}^{x-a-2}(x-a-b-1)=\sum_{a=3}^{x-2}\sum_{b=1}^{x-a-1}(x-a)-b=\sum_{a=3}^{x-2}\frac{(x-a)(x-a-1)}{2}$$
$$=\sum_{a=1}^{x-4}\frac{(x-a-2)(x-a-3)}{2}=\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{x-4}(a^2+(5-2x)a+x^2-5x+6)=\frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{6}$$



V 型及剩餘排列部份



剩餘排列部份

接著觀察 V 型的情形，由於定義翻轉後圖形相同，故由下表可知，其規則每隔兩個才增加一種情況。

邊數和	2	3	4	5	6	7	8	9
種數	1	1	2	2	3	3	4	4

(a) n 為偶數

定義種數為 t，當 V 型邊數和為偶數 $2t$ 時，剩餘排列部份為 $n-2t$，x 用 $n-2t$ 帶入，且情形總數為 $(n-6)/2$，故可推得部分公式

$$\sum_{t=1}^{\frac{n-6}{2}} t\frac{(n-2t-2)(n-2t-3)(n-2t-4)}{6}$$

$$=\frac{1}{6}\sum_{t=1}^{\frac{n-6}{2}}(-8t^4+(12n-36)t^3+(-6n^2+36n-52)t^2+(n^3-9n^2+26n-24)t)$$

$$=\frac{1}{480}(n^5-15n^4+80n^3-180n^2+144n)=\frac{n(n-6)(n-4)(n-3)(n-2)}{480}$$

定義種數為 t，當 V 型邊數和為奇數 $2t+1$ 時，剩餘排列部份為 $n-2t-1$，x 用 $n-2t-1$ 帶入，而情形總數仍為 $(n-6)/2$，故可推得部分公式

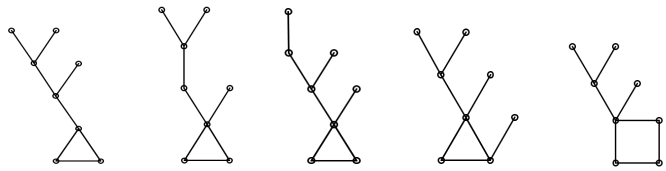
$$\sum_{t=1}^{\frac{n-6}{2}} t\frac{(n-2t-3)(n-2t-4)(n-2t-5)}{6}$$

$$=\frac{1}{6}\sum_{t=1}^{\frac{n-6}{2}}(-8t^4+(12n-48)t^3+(-6n^2+48n-94)t^2+(n^3-12n^2+47n-60)t)$$

$$=\frac{1}{480}(5n^5-20n^4+150n^3-520n^2+824n-480)=\frac{(n-2)(n-4)(n-6)(n^2-8n+10)}{480}$$

因此，當 n 為偶數時，合併後得分支中分支中分支的公式為 $\dfrac{(n-2)(n-4)(n-6)(2n^2-11n+10)}{480}$ 。

我們以 $n=8$ 帶入驗證，可得結果為 5，與圖十二相符。



圖十二、當多邊形數 $n=8$ ，滿足分支中分支中分支的情形

(*b*) n 為奇數

定義種數為 t，當 V 型邊數和為偶數 $2t$ 時，剩餘排列部份為 $n-2t$ ，x 用 $n-2t$ 帶入，且情形總數為 $(n-5)/2$ ，故可推得部分公式

$$\sum_{t=1}^{\frac{n-5}{2}} t\,\frac{(n-2t-2)(n-2t-3)(n-2t-4)}{6}$$

$$=\frac{1}{6}\sum_{t=1}^{\frac{n-5}{2}}(-8t^4+(12n-36)t^3+(-6n^2+36n-52)t^2+(n^3-9n^2+26n-24)t)$$

$$=\frac{1}{480}(n^5-15n^4+80n^3-180n^2+159n-45)=\frac{(n-5)(n-3)(n-1)(n^2-6n+3)}{480}$$

定義種數為 t，當 V 型邊數和為奇數 $2t+1$ 時，剩餘排列部份為 $n-2t-1$ ，x 用 $n-2t-1$ 帶入，且情形總數為 $(n-7)/2$ ，故可推得部分公式

$$\sum_{t=1}^{\frac{n-7}{2}} t\,\frac{(n-2t-3)(n-2t-4)(n-2t-5)}{6}$$

$$=\frac{1}{6}\sum_{t=1}^{\frac{n-7}{2}}(-8t^4+(12n-48)t^3+(-6n^2+48n-94)t^2+(n^3-12n^2+47n-60)t)$$

$$=\frac{1}{480}(5n^5-20n^4+150n^3-520n^2+809n-420)=\frac{(n-7)(n-5)(n-4)(n-3)(n-1)}{480}$$

因此，當 n 為奇數時，合併後得分支中分支中分支的公式為 $\dfrac{(n-1)(n-3)(n-5)(2n^2-17n+31)}{480}$ 。

我們以 $n=7$ 帶入驗證，可得結果為 1，與圖十三相符。

圖十三、當多邊形數 $n=7$ ，滿足分支中分支中分支的情形

2. 三分支

(1) 三分支而其中二分支相鄰

我們先討論三分支而其中二分支相鄰情況，如圖七(c)。但要先思考一個問題，若當 $a+b+c=k$，a、b、c 互異且 $a,\ b,\ c\geq 1$ 之情形，因此我們利用重複組合加以討論。

首先若 k 為奇數，$k-3$ 為偶數，則 $a'+b'+c'=k-3$，故

$$H_{k-3}^{3}-\text{兩個 0 情況}-\text{兩個 1 情況}-\text{兩個 2 情況}-......-\text{兩個}\frac{k-3}{2}\text{情況}$$

等於

$$H_{k-3}^{3}-\underbrace{3-3-3-\cdots\cdots-3}_{\frac{k-3}{2}+1\text{個}}=C_{k-3}^{k-3+3-1}-3\times(\frac{k-3}{2}+1)=C_{k-3}^{k-1}-\frac{3\times(k-1)}{2}=\frac{(k-1)(k-5)}{2}$$

但是我們注意到當 $k-3$ 為 3 的倍數，則 $\frac{(k-1)(k-5)}{2}$ 必須再加 2，是因為我們將兩個 $\frac{k-3}{3}$ 情況視為 3 個，但實際只有一個，故需再加 2，因此一般式即為 $\frac{(k-1)(k-5)}{2}+\sigma$，其中定義 σ 為 $k-3$ 為 3 的倍數時加上 2。

接著推論當 k 為偶數之情形，則 $k-3$ 為奇數，因此 $a'+b'+c'=k-3$，故

$$H_{k-3}^{3}-\text{兩個 0 情況}-\text{兩個 1 情況}-\text{兩個 2 情況}-\cdots\cdots-\text{兩個}\frac{k-3-1}{2}\text{情況}$$

等於

$$H_{k-3}^{3}-\underbrace{3-3-3-\cdots\cdots-3}_{\frac{k-4}{2}+1\text{個}}=C_{k-3}^{k-3+3-1}-3\times(\frac{k-4+2}{2})=C_{k-3}^{k-1}-\frac{3\times(k-2)}{2}=\frac{(k-2)(k-4)}{2}$$

且當 $k-3$ 為 3 的倍數，則 $\frac{(k-2)(k-4)}{2}$ 必須再加 2，是因為我們將兩個 $\frac{k-3}{3}$ 情況視為 3 個，但實際只有一個，故需再加上 2，故一般式為 $\frac{(k-2)(k-4)}{2}+\sigma$。

在此我們利用程式加以驗證結論，其結果整理如下表四：

表四、當 $a+b+c=k$，a、b、c 三異且 $a,\ b,\ c\geq 1$ 之結果

	k								
	7	8	9	10	11	12	13	14	15
(a, b, c) 之組數	6	12	18	24	30	42	48	60	72

其所得結果都符合所推得之公式形式。所以我們著手開始推導三分支的公式。

當 $a+b+c=n-3-k$，且 $a,\ b,\ c\geq 1$，則 $a'+b'+c'=n-6-k$，因此可推論結果如下

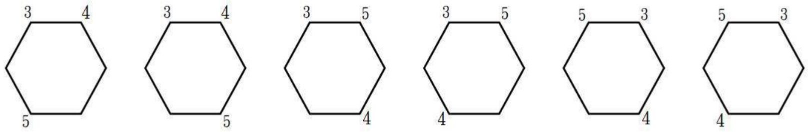
n 為奇數，k 為奇數，則公式為 $\dfrac{(n-3-k-5)(n-3-k-1)}{2}+\sigma$

n 為奇數，k 為偶數，則公式為 $\dfrac{(n-3-k-2)(n-3-k-4)}{2}+\sigma$

n 為偶數，k 為奇數，則公式為 $\dfrac{(n-3-k-2)(n-3-k-4)}{2}+\sigma$

n 為偶數，k 為偶數，則公式為 $\dfrac{(n-3-k-5)(n-3-k-1)}{2}+\sigma$

還有另外一點，除了內為封閉三角形外，其餘的分支數應有特別的排列方式，如下圖：



由圖形的規律我們可以得知 $\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{6}[2(k-1)]$，其中 $\dfrac{x}{2}$ 是除去會重複的排列數，此時還未談到多邊形的 3 個邊在多邊形上的組合情況，而由此我們可以得知 $\dfrac{x}{6}[2(k-1)]$ 是上述之排列情況。故當 n 為奇數時利用公式 $\dfrac{x(4m-1)}{6}$，n 為偶數時利用公式 $\dfrac{x(4p+1)}{6}$，合併後所得之型式。其中 x 是我們所求出的式子，此外考慮 $k+3$ 是封閉多邊形下，當 $n>9$ 才可形成該情況，故公式為

$$\sum_{m=1}^{\left[\frac{n-8}{2}\right]}\{\frac{[n-3-(2m-1)-5][n-3-(2m-1)-1]}{2}+\sigma\}(\frac{4m-1}{6})+\sum_{p=1}^{\left[\frac{n-9}{2}\right]}\{\frac{(n-3-2p-2)(n-3-2p-4)}{2}+\sigma\}(\frac{4p+1}{6})$$

此為 n 為奇數的情況。當 n 為偶數時其原理與奇數時一樣，故 n 為偶數的公式為

$$\sum_{m=1}^{\left[\frac{n-8}{2}\right]}\{\frac{[n-3-(2m-1)-2][n-3-(2m-1)-4]}{2}+\sigma\}(\frac{4m-1}{6})+\sum_{p=1}^{\left[\frac{n-9}{2}\right]}\{\frac{(n-3-2p-1)(n-3-2p-5)}{2}+\sigma\}(\frac{4p+1}{6})$$

其中 k 會伴隨公式中 $2m-1$、$2p$ 改變而改變。另外因 $k=0$ 時為封閉三角形，故無上述之特殊排列情況，因此

n 為奇數時的公式為 $[\dfrac{(n-7)(n-5)}{2}+\sigma]\times\dfrac{1}{6}$；$n$ 為偶數時的公式為 $[\dfrac{(n-8)(n-4)}{2}+\sigma]\times\dfrac{1}{6}$

故合併後得知分支圖總數的公式為

(a) 當邊數 n 為奇數時

$$\sum_{m=1}^{\left[\frac{n-8}{2}\right]}\{\frac{[n-3-(2m-1)-5][n-3-(2m-1)-1]}{2}+\sigma\}(\frac{4m-1}{6})+\sum_{p=1}^{\left[\frac{n-9}{2}\right]}\{\frac{(n-3-2p-2)(n-3-2p-4)}{2}+\sigma\}(\frac{4p+1}{6})$$

$$+[\frac{(n-7)(n-5)}{2}+\sigma]\times\frac{1}{6}$$

(b) 當邊數 n 為偶數時

$$\sum_{m=1}^{\left[\frac{n-8}{2}\right]}\{\frac{[n-3-(2m-1)-2][n-3-(2m-1)-4]}{2}+\sigma\}(\frac{4m-1}{6})+\sum_{p=1}^{\left[\frac{n-9}{2}\right]}\{\frac{(n-3-2p-1)(n-3-2p-5)}{2}+\sigma\}(\frac{4p+1}{6})$$

$$+[\frac{(n-8)(n-4)}{2}+\sigma]\times\frac{1}{6}$$

此為 3 異的情況。我們利用邊數 $n=11$ 去驗證，所得結果為 10，與所畫出之不同封閉多邊形下三相異分支的結果一致。

接著我們討論 2 同一異的公式。若 k 為奇數，$k-3$ 為偶數，則 $a'+b'+c'=k-3$，故

$$\text{兩個 0 情況+兩個 1 情況+兩個 2 情況+……+兩個}\frac{k-3}{2}\text{情況}$$

$$=\underbrace{3+3+3+\cdots\cdots+3}_{\frac{k-3}{2}+1\text{個}}-\delta=3(\frac{k-3}{2}+1)-\delta=\frac{3(k-1)}{2}-\delta$$

在此 δ 定義是當 k 為 3 的倍數時為 3，如此做的原因是若 k 為 3 的倍數，則一定會出現 a、b、c 三數相同的情況，而我們卻把其當作 +3，故須減回。

若 k 為偶數，$k-3$ 為奇數，則 $a'+b'+c'=k-3$，故

$$\text{兩個 0 情況+兩個 1 情況+兩個 2 情況+……+兩個}\frac{k-3-1}{2}\text{情況}$$

$$=\underbrace{3+3+3+\cdots\cdots+3}_{\frac{k-4}{2}+1\text{個}}-\delta=3(\frac{k-2}{2})-\delta$$

可以開始推導 2 同一異的公式，因此可推論結果如下：

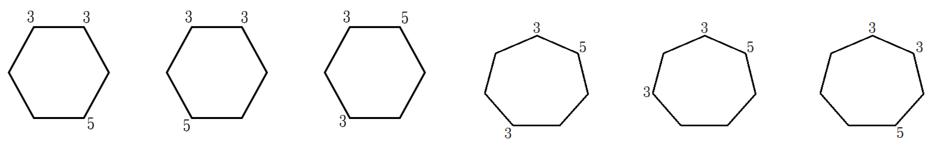
n 為奇數，k 為奇數，則公式為 $\frac{3(n-4-k)}{2}-\delta$

n 為奇數，k 為偶數，則公式為 $\frac{3(n-5-k)}{2}-\delta$

n 為偶數，k 為奇數，則公式為 $\frac{3(n-5-k)}{2}-\delta$

n 為偶數，k 為偶數，則公式為 $\frac{3(n-4-k)}{2}-\delta$

還有另外一點，除了內為封閉三角形外，其餘的分支數仍有特別的排列方式，如下圖為部份特殊規律之情形。



由圖形的規律我們可以得知 $\frac{2x}{3}+\frac{x}{3}[(2k-3)+\alpha]$，其中$\frac{2x}{3}$為除去會重複的排列數，此時還未談到多邊形的 3 個邊在多邊形上的組合情況，而$\frac{x}{3}[(2k-3)+\alpha]$為上述之排列情況，其中定義 $\alpha=\begin{cases}1 & k=1,\ 2\\ 0 & k\text{為其他數值}\end{cases}$，而$n-3-k$為 3 的倍數時則利用$\delta$定義加以處理。

當邊數 n 為奇數時，公式如下：

$$\sum_{m=1}^{\left[\frac{n-6}{2}\right]}\{\frac{3[n-4-(2m-1)]}{2}-\delta\}(\frac{4m-3+\alpha}{3})+\sum_{p=1}^{\left[\frac{n-7}{2}\right]}\{\frac{3(n-5-2p)}{2}-\delta\}(\frac{4p-1+\alpha}{3})$$

當邊數 n 為偶數時，原理跟奇數時一樣，公式如下：

$$\sum_{m=1}^{\left[\frac{n-6}{2}\right]}\{\frac{3[n-5-(2m-1)]}{2}-\delta\}(\frac{4m-3+\alpha}{3})+\sum_{p=1}^{\left[\frac{n-7}{2}\right]}\{\frac{3(n-4-2p)}{2}-\delta\}(\frac{4p-1+\alpha}{3})$$

其中 k 會伴隨公式中 $2m-1$、$2p$ 改變而改變。此外因$k=0$時為封閉三角形，亦無上述之特殊排列情況，故

n 為奇數時的公式為$[\frac{3(n-5)}{2}-\delta]\times\frac{1}{3}$；$n$ 為偶數時的公式為$[\frac{3(n-4)}{2}-\delta]\times\frac{1}{3}$

故合併後得知分支圖總數的公式為

(a) 當邊數 n 為奇數時

$$\sum_{m=1}^{\left[\frac{n-6}{2}\right]}\{\frac{3[n-4-(2m-1)]}{2}-\delta\}(\frac{4m-3+\alpha}{3})+\sum_{p=1}^{\left[\frac{n-7}{2}\right]}\{\frac{3(n-5-2p)}{2}-\delta\}(\frac{4p-1+\alpha}{3})+[\frac{3(n-5)}{2}-\delta]\times\frac{1}{3}$$

(b) 當邊數 n 為偶數時

$$\sum_{m=1}^{\left[\frac{n-6}{2}\right]}\{\frac{3[n-5-(2m-1)]}{2}-\delta\}(\frac{4m-3+\alpha}{3})+\sum_{p=1}^{\left[\frac{n-7}{2}\right]}\{\frac{3(n-4-2p)}{2}-\delta\}(\frac{4p-1+\alpha}{3})+[\frac{3(n-4)}{2}-\delta]\times\frac{1}{3}$$

此為 2 同一異的情況。我們利用邊數$n=9$去驗證，所得結果為 9，與所畫出之不同封閉多邊形下 2 同一異分支的結果一致。

最後接著再討論 3 同的情形，公式為：

$$\omega+\sum_{p=1}^{\left[\frac{n-6}{2}\right]}\lambda(p+1)+\sum_{m=1}^{\left[\frac{n-5}{2}\right]}\phi m$$

其中定義符號λ是當$n-3-2p$為 3 的倍數時等於 1，定義符號ϕ是當$n-3-(2m-1)$為 3 的倍

數時等於 1，定義ω當n為 3 的倍數時+1。我們以$n=9$帶入驗證，其結果為 3，與圖形相符。

(2) 三分支且其中一分支有分支中分支

接著來到三分支且其中一分支有分支中分支之情況，如圖七(f)。因三分支均相鄰，且接到中間的另一個分支必在其底部，所以先讓分支中分支的另外兩個只有一個分支的其中一個分支，由 1 開始增加，而其中k為此分支外的另一分支；然而分支中分支的排列情形因必發生在其底部，故可用類似於移動一邊的做法來推導，所以可得出下列之情形。

(a) 當邊數n為奇數

$$\frac{(n-3-k-k)}{2}+\frac{(n-3-k-(k+1)-1)}{2}+\frac{(n-3-k-(k+2))}{2}+\ldots\ldots$$
$$+\frac{(n-4-k-k-1)}{2}+\ldots\ldots$$
$$\vdots$$
$$=(\frac{n-2k-3}{2})+5(\frac{n-2k-5}{2})+9(\frac{n-2k-7}{2})\ldots\ldots+(2n-9)(\frac{n-n}{2})$$
$$=\sum_{k=1}^{\frac{n-5}{2}}\sum_{m=1}^{\frac{n-2k-1}{2}}(4m-3)(\frac{n-2m-2k-1}{2}) \quad \text{，以 } p \text{ 代 } 2k+1$$
$$=\sum_{k=1}^{\frac{n-5}{2}}(2n\sum_{m=1}^{\frac{n-p}{2}}m)-(4\sum_{m=1}^{\frac{n-p}{2}}m^2)-(2p\sum_{m=1}^{\frac{n-p}{2}}m)-(\frac{3n}{2})(\frac{n-p}{2})+(3\sum_{m=1}^{\frac{n-p}{2}}m)+(\frac{3p}{2})(\frac{n-p}{2})$$
$$=\sum_{k=1}^{\frac{n-5}{2}}\frac{(n-2k-1)(2n-4k-7)(n-2k-3)}{24}=\frac{(n-1)(n-3)(n-5)^2}{96}$$

(b) 當邊數n為偶數

$$\frac{(n-3-k-k-1)}{2}+\frac{(n-3-k-(k+1))}{2}+\frac{(n-3-k-(k+2)-1)}{2}+\ldots\ldots$$
$$+\frac{(n-4-k-k)}{2}+\ldots\ldots.$$
$$\vdots$$
$$=3(\frac{n-2k-4}{2})+7(\frac{n-2k-6}{2})+11(\frac{n-2k-8}{2})+\ldots\ldots.+(2n-9)(\frac{n-n}{2}) \text{，其中 } p \text{ 為 } k+1$$
$$=\sum_{k=1}^{\frac{n-6}{2}}\{((2n-4p+1)\sum_{m=1}^{\frac{n-2p}{2}}m)+(-4\sum_{m=1}^{\frac{n-2p}{2}}m^2)+(\frac{2p-n}{2})(\frac{n-2p}{2})\}$$
$$=\sum_{k=1}^{\frac{n-6}{2}}\frac{(n-2k-2)(2n-4k-3)(n-2k-4)}{24}=\frac{(n-4)(n-6)(n-2)^2}{96}$$

此為三分支且其中一分支有分支中分支之情況，以 $n=9$ 代入驗證，其結果為 8，與圖形相符。

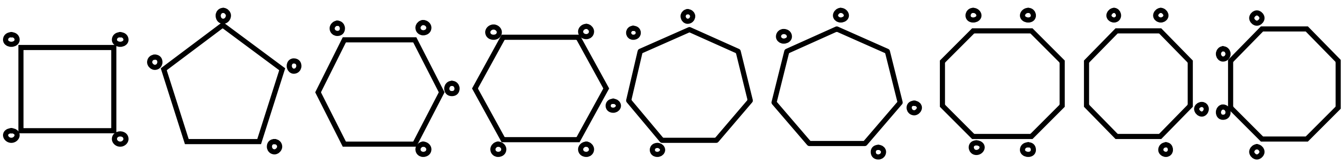
3. 四個分支且分支兩個兩個相鄰

接著我們討論移動邊數為二的四分支情形，如圖七(d)。因其必有一個封閉的多邊形作為基本的構造(意即為在一個封閉多邊形上，任四點有四條分支延伸出去)，兩個兩個分支互相相鄰，也可以四個分支皆相鄰(符合定義)，且四個分支至少要放在邊數為四邊以上的封閉四邊形上延伸，故在討論四個分支的排列組合情形時，先將總邊數減四進行討論，再於公式修正，並將構成四個分支的組合情況分為四異、二同二異、二同二同、三同、四同。

先討論四個分支在封閉多邊形之上兩個兩個相鄰的排列方式，定義經旋轉或翻轉後相同的情況視為相同的情形。由四邊形為基準開始，先以觀察法討論五種分支組合情況的排列情形，如下表所示。

封閉多邊形的邊數	四分支的組合情形				
	四異	二同二異	二同二同	三同	四同
四	3	2	2	1	1
五	12	6	4	2	1
六	18	9	7	3	2
七	24	12	8	4	2
八	30	15	11	5	3
九	36	18	12	6	3
十	42	21	15	7	4
十一	48	24	16	8	4

在計算可能的種類時，先討論分支所在位置的可能情形。如下圖所示，因限制兩兩分支一定相鄰，故可能的情形有特殊規則，在此圓圈代表可放的位置。討論在四邊形中，滿足條件者共有一種，在五邊形中滿足條件者共有一種，在六邊形滿足條件者共有二種。七邊形滿足條件者共有二種。八邊形滿足條件者共有三種，依此類推。



如上圖所示，我們發現其種數遵循著 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, ……的規則，又因為四分支四同當組合固定時排列數為 1，故四分支相同的排列情況因此導出。而將可能情形的對稱軸數量進行分類，分為一條對稱軸或兩條對稱軸。

然後推導四異的情形，若只有一條對稱軸，僅需除以對稱的情形，故可能種數為$\frac{4!}{2}=12$，若有兩條對稱軸，則需除以對稱兩次的情形，故可能種數為$\frac{4!}{2\times 2}=6$，又觀察發現從五邊開始，每增加一邊而變成偶數邊形時，會增加一種兩條對稱軸的情形，每增加一邊而變成奇數邊形時，則會使一個兩條對稱軸的情形變為一條對稱軸的情形，原因為分支兩兩相鄰時，僅有在偶數邊時存在唯一一種僅有一條對稱軸的情形，故發現四異的情況除了四邊時僅有 3 種，每增加一邊時，可能情形就增加 6 種。

再來導二同二異的情形，若只有一條對稱軸，僅需除以對稱的情形和二同造成的重複，故可能種數為$\frac{4!}{2\times 2}=6$，若有兩條對稱軸，則需除以對稱兩次的情形和二同造成的重複，則可能種數為$\frac{4!}{2\times 2\times 2}=3$，同理可知，二同二異的情況除了四邊時僅有 2 種，每增加一邊時，可能情形就增加 3 種。

接者導三同的情形，若只有一條對稱軸，僅需除以對稱的情形和三同造成的重複，故可能種數為$\frac{4!}{3!\times 2}=2$，若有兩條對稱軸，則需除以對稱兩次的情形和三同造成的重複，則可能種數為$\frac{4!}{3!\times 2\times 2}=1$，因此，三同的情形每增加一邊時，可能情形就增加 1 種。

最後導二同二同的情況，若只有一條對稱軸，則除以對稱的情形和重複兩次的情形，但因特殊情況(12、21)的排列方式時會因為同時除以對稱和二同二同的兩次重複而多扣，故共有$\frac{4!}{2\times 2\times 2}+1=4$種，若有二條對稱軸，則除以對稱的情形和重複兩次的情形，故共有$\frac{4!}{2\times 2\times 2}=3$種，因此，二同二同的情形除了四邊為 2 種，總數呈現 4, 7, 8, 11, 12, 15, 16 的特殊規則。

因為我們要求的是所有的可能情形，故先導出只要輸入四分支邊數和(n-4)就能輸出組合情形的公式，再乘以相對應的排列情況，最後再加總。要注意的重點是只要增加多邊形的邊數，能構成分支的總數就會減少，封閉多邊形的邊數要大於等於 4，分支總數要大於等於每個的限制範圍，因此需導出五種分支構成情況下的限制和項數，故我們的核心概念公式如下

$$\sum_{t=1}^{\text{種數}}(\text{排列的公式}\pm t\text{ 的修正})\times(\text{組合的公式}\pm t\text{ 的修正})=\left(\sum_{t=1}^{\text{種數}}P(t\text{修正})C(t\text{修正})\right)\pm\text{修正}$$

其中排列通式為$P(x)$，組合通式為$C(x)$。

(1) 四同

首先推導四同的公式，組合數恆為一，四同每增加四個邊才有符合的情況。

(a) 令一個n邊形其排列為$P(x)$，組合為$C(x)$，且n為 4 的倍數。

計算參數 t	封閉多邊形邊數	剩餘可供四分支排列的邊數	排列數	組合數	(修正)
1	$n-4$	4	$P(n-4)$	1	否
2	$n-8$	8	$P(n-8)$	1	否
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
t	$n-4t$	$4t$	$P(n-4t)$	1	否
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(n-4)/4$	4	$n-4$	$P(4)$	1	否

由此可知，因為封閉多邊形邊數至少為 4，$n-4\geq 4 \Leftrightarrow n\geq 8$，所以 n 要大於等於 8 才適用，且發現排列公式遵守著 1、3、5、7……的規則，故推得$P(t)=\dfrac{n-4}{4}\times 2-1+2-2t=\dfrac{n}{2}-1-2t$，

因此可寫成公式$\displaystyle\sum_{t=1}^{\frac{n-4}{4}}\left(\frac{n}{2}-1-2t\right)=\frac{n-4}{4}\times\frac{n}{2}-\frac{n-4}{4}-\frac{n-4}{4}\times\frac{n}{4}=\frac{n^2-8n+16}{16}=\left(\frac{n-4}{4}\right)^2$。

(b) 令一個n邊形其排列為$P(x)$，組合為$C(x)$，且n為 4 的倍數加 1。

同理，因為封閉多邊形邊數至少為 5，$n-4\geq 5 \Leftrightarrow n\geq 9$，所以 n 要大於等於 9 才適用，且發現排列公式遵守著 1、3、5、7……的規則，故推得$P(t)=\dfrac{n-5}{4}\times 2-1+2-2t=\dfrac{n}{2}-\dfrac{3}{2}-2t$，

因此可寫成公式$\displaystyle\sum_{t=1}^{\frac{n-5}{4}}\left(\frac{n}{2}-\frac{3}{2}-2t\right)=\frac{n-5}{4}\times\frac{n}{2}-\frac{3}{8}(n-5)-\frac{n-5}{4}\times\frac{n-1}{4}=\frac{n^2-10n+25}{16}=\left(\frac{n-5}{4}\right)^2$。

(c) 令一個n邊形其排列為$P(x)$，組合為$C(x)$，且n為 4 的倍數加 2。

同理，因為封閉多邊形邊數至少為 6，$n-4\geq 6 \Leftrightarrow n\geq 10$，所以 n 要大於等於 10 才適用，且發現排列公式遵守著 2、4、6、8……的規則，故推得$P(t)$=$\dfrac{n-6}{4}\times 2+2-2t=\dfrac{n}{2}-1-2t$，因此可寫成公式$\displaystyle\sum_{t=1}^{\frac{n-6}{4}}\left(\frac{n}{2}-1-2t\right)=\frac{n-6}{4}\times\frac{n}{2}-\frac{n-6}{4}-\frac{n-6}{4}\times\frac{n-2}{4}=\frac{n^2-8n+12}{16}=\frac{(n-6)(n-2)}{16}$。

(d) 令一個n邊形其排列為$P(x)$，組合為$C(x)$，且n為 4 的倍數加 3。

同理，因為封閉多邊形邊數至少為 7，$n-4\geq 7 \Leftrightarrow n\geq 11$，所以 n 要大於等於 11 才適用，且發現排列公式遵守著 2、4、6、8……的規則，故推得$P(t)$=$\dfrac{n-7}{4}\times 2+2-2t=\dfrac{n}{2}-\dfrac{3}{2}-2t$，因

此可寫成公式$\sum_{t=1}^{\frac{n-7}{4}}\left(\frac{n}{2}-\frac{3}{2}-2t\right)=\frac{n-7}{4}\times\frac{n}{2}-\frac{3}{8}(n-7)-\frac{n-7}{4}\times\frac{n-3}{4}=\frac{n^2-10n+21}{16}=\frac{(n-7)(n-3)}{16}$。

四同的公式分為$n=4p$，$4p+1$，$4p+2$，$4p+3$其中$p\in N$，整理如下表。

n的情形	$n=4p$	$n=4p+1$	$n=4p+2$	$n=4p+3$
公式	$\left(\frac{n-4}{4}\right)^2$	$\left(\frac{n-5}{4}\right)^2$	$\frac{(n-6)(n-2)}{16}$	$\frac{(n-7)(n-3)}{16}$

(2) 三同

接著導三同的公式，首先先觀察排列數規則，如表所示，提出三同，剩下一個數再去組合，然而會多算四同的情形，所以推導組合數要扣掉四同的情形。

不同的組合邊數下，四分支三同之組合情況

可組合邊數	列舉	列舉	列舉
4	四個 1(不合)		
5	1、1、1、2		
6	1、1、1、3		
7	1、1、1、4	2、2、2、1	
8	1、1、1、5	四個 2(不合)	
9	1、1、1、6	2、2、2、3	
10	1、1、1、7	2、2、2、4	3、3、3、1
11	1、1、1、8	2、2、2、5	3、3、3、2
12	1、1、1、9	2、2、2、6	四個 3(不合)

若忽略四同的情形，可發現其組合的公式滿足$C'(x)=\left[\frac{x-1}{3}\right]$，然而當$x$為四的倍數時，會有一個不合，故定義函數$f(x)=\begin{cases}1, & x\in 4p\\ 0, & x\notin 4p\end{cases}$ $(p\in N)$來修正，因此得到修正後公式$C(x)=\left[\frac{x-1}{3}\right]-f(x)$。

計算參數 t	封閉多邊形邊數	剩餘可供四分支排列的邊數	排列數	組合數	(修正)
1	$n-4$	4	$P(n-4)$	$C(4)$	否
2	$n-5$	5	$P(n-5)$	$C(5)$	否
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
t	$n-t-3$	$t+3$	$P(n-t-3)$	$C(t+3)$	否
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$n-7$	4	$n-4$	$P(4)$	$C(n-4)$	否

由此可知，因為封閉多邊形邊數至少為 4，$n-4\geq 4\Leftrightarrow n\geq 8$，所以$n$要大於等於 8 才適用，

且排列公式遵守著 1、2、3、4……的規則，故推得 $P(t)=n-6-t$ ，且組合數公式中的 x 要用 t+3 代替，因此公式為

$$\sum_{t=1}^{n-7}\left(\left[\frac{t+2}{3}\right]-f\left(t+3\right)\right)\left(n-6-t\right)$$

(3) 二同二同

再來導二同二同的公式，首先觀察組合數的情形，除以 2 再分割成兩個相異的數，如下表所示。因為二同二同的分支總合一定為偶數，所以分成奇數和偶數來討論，可推得組合公式 $C(x)=\left[\dfrac{x-2}{4}\right]$。

不同的可組合邊數下，四分支二同二同之組合情況

可組合邊數	可組合邊數除以二	組合數
6	3	1
8	4	1
10	5	2
12	6	2
14	7	3
16	8	3

(a) n 為奇數

計算參數 t	封閉多邊形邊數	剩餘可供四分支排列的邊數	排列數	組合數	(修正)
1	$n-6$	6	$P(n-6)$	$C(6)$	否
2	$n-8$	8	$P(n-8)$	$C(8)$	否
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
t	$n-2t-4$	$2t+4$	$P(n-2t-4)$	$C(2t+4)$	否
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$(n-9)/2$	5	$n-5$	$P(5)$	$C(n-5)$	否

由此可知，因為封閉多邊形邊數至少為 5，可組合邊數至少為 6，所以 n 要大於等於 11 才適用，且排列公式遵守著 4、8、12、16……的規則，故推得 $P(t)=2n-14-4t$ ，且組合數公式中的 x 要用 2t+4 代替，因此公式為

$$2\sum_{t=1}^{\frac{n-9}{2}}\left(n-7-2t\right)\left(\left[\frac{t+1}{2}\right]\right)$$

(b) n 為偶數

同理，因為封閉多邊形邊數至少為 4，可組合邊數至少為 6，所以 n 要大於等於 10 才適

用，且排列公式遵守著 3、7、11、15……的規則，故推得 $P(t)=2n-13-4t$ ，且組合數公式中的 x 要用 $2t+4$ 代替，然而四邊形的排列數為 2，比預測值少 1，要扣掉多算的 $C(n-4)=\left[\dfrac{n-6}{4}\right]$，因此公式為

$$\left(\sum_{t=1}^{\frac{n-8}{2}}(2n-13-4t)\left(\left[\frac{t+1}{2}\right]\right)\right)-\left[\frac{n-6}{4}\right]$$

(4) 二同二異

接著推導二同二異公式，觀察組合情形，如下表，即為提出二同，剩下分割成相異的數。

不同的可組合邊數下，二同二異之組合情況

可組合邊數	提出(a, a)	剩餘組合總數	公式	不符合情形
5	(1,1)	1	$[1\times(1+1)]/2$	三同
6	(1,1)	1	$[1\times(1+1)]/2$	三同
7	(1,1)~(2,2)	1+2	$[2\times(2+1)]/2$	三同
8	(1,1)~(2,2)	1+2	$[2\times(2+1)]/2$	三同
9	(1,1)~(3,3)	1+2+3	$[3\times(3+1)]/2$	三同
10	(1,1)~(3,3)	1+2+3	$[3\times(3+1)]/2$	三同

若不考慮不符合的情形，則組合公式為 $C'(x)=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{x-3}{2}\right]\left[\dfrac{x-1}{2}\right]$，然而需扣掉三同的情形 $C''(x)=\left[\dfrac{x-1}{3}\right]-f(x)$ ，故修正後可得組合數公式為

$$C'(x)-C''(x)=C(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{x-3}{2}\right]\left[\frac{x-1}{2}\right]-\left[\frac{x-1}{3}\right]+f(x)$$

計算參數 t	封閉多邊形邊數	剩餘可供四分支排列的邊數	排列數	組合數	(修正)
1	$n-5$	5	$P(n-5)$	$C(5)$	否
2	$n-6$	6	$P(n-6)$	$C(6)$	否
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
t	$n-t-4$	$t+4$	$P(n-t-4)$	$C(t+4)$	否
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$n-8$	4	$n-4$	$P(4)$	$C(n-4)$	排列數

由此可知，因為封閉多邊形邊數至少為 4，可組合邊數至少為 5，所以 n 要大於等於 9 才適用，且排列公式遵守著 3、6、9、12……的規則，故推得 $P(t)=3n-21-3t$ ，且組合數公式中的 x 要用 $t+4$ 代替，然而四邊形的排列數為 2，比預測值少 1，要扣掉多算的

$$C\left(n-4\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{n-7}{2}\right]\left[\frac{n-5}{2}\right]-\left[\frac{n-5}{3}\right]+f\left(n-4\right)$$ ，因此公式為

$$3\left(\sum_{t=1}^{n-8}\left(n-7-t\right)\left(\frac{1}{2}\left[\frac{t+1}{2}\right]\left[\frac{t+3}{2}\right]-\left[\frac{t+3}{3}\right]+f\left(t+4\right)\right)\right)-\frac{1}{2}\left[\frac{n-7}{2}\right]\left[\frac{n-5}{2}\right]+\left[\frac{n-5}{3}\right]-f\left(n-4\right)$$

(5) 四異

最後推導四異的公式，由於無法以有系統的方式找規則，因此採用重複組合的方式來做。

$$\text{四異組合數}=\frac{H_{x-4}^{4}-\text{二同二異組合數}\times 12-\text{二同二同組合數}\times 6-\text{三同組合數}\times 4-\text{四同組合數}\times 1}{24}$$

然而二同二同只會出現在 x 為偶數時，因此定義函數 $g(x)=\begin{cases}1, & x=2m\\ 0, & x\neq 2m\end{cases}$ $(m\in N)$ 來修正，並使用前述的組合公式導出四異的組合數公式為

$$C\left(x\right)=\frac{H_{x-4}^{4}-12\left(\frac{1}{2}\left[\frac{x-3}{2}\right]\left[\frac{x-1}{2}\right]-\left[\frac{x-1}{3}\right]+f(x)\right)-6g(x)\left[\frac{x-2}{4}\right]-4\left(\left[\frac{x-1}{3}\right]-f(x)\right)-f(x)}{24}$$

$$=\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{144}-\frac{\left[\frac{x-3}{2}\right]\left[\frac{x-1}{2}\right]}{4}+\frac{\left[\frac{x-1}{3}\right]}{3}-\frac{1}{4}g(x)\left[\frac{x-2}{4}\right]-\frac{3}{8}f(x)$$

計算參數 t	封閉多邊形邊數	剩餘可供四分支排列的邊數	排列數	組合數	(修正)
1	$n-10$	10	$P(n-10)$	$C(10)$	否
2	$n-11$	11	$P(n-11)$	$C(11)$	否
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
t	$n-t-9$	$t+9$	$P(n-t-9)$	$C(t+9)$	否
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$n-13$	4	$n-4$	$P(4)$	$C(n-4)$	排列數

由此可知，因為封閉多邊形邊數至少為 4，可組合邊數至少為 10，所以 n 要大於等於 14 才適用，且排列公式遵守著 6、12、18、24……的規則，故推得 $P(t)=6n-72-6t$ ，且組合數公式中的 x 要用 $t+9$ 代替，然而四邊形的排列數為 3，比預測值少 3，要扣掉多算的

$$3C\left(n-4\right)=\frac{\left(n-5\right)\left(n-6\right)\left(n-7\right)}{48}-\frac{3\left[\frac{n-7}{2}\right]\left[\frac{n-5}{2}\right]}{4}+\left[\frac{n-5}{3}\right]-\frac{3}{4}g\left(n-4\right)\left[\frac{n-6}{4}\right]-\frac{9}{8}f\left(n-4\right)$$ ，因此公式為

$$\left(\sum_{t=1}^{n-13}(n-12-t)\left(\frac{(t+8)(t+7)(t+6)}{24}-\frac{3\left[\frac{t+6}{2}\right]\left[\frac{t+8}{2}\right]}{2}+2\left[\frac{t+8}{3}\right]-\frac{3}{2}g(t+9)\left[\frac{t+7}{4}\right]-\frac{9}{4}f(t+9)\right)\right)$$

$$-\frac{(n-5)(n-6)(n-7)}{48}+\frac{3\left[\frac{n-7}{2}\right]\left[\frac{n-5}{2}\right]}{4}-\left[\frac{n-5}{3}\right]+\frac{3}{4}g(n-4)\left[\frac{n-6}{4}\right]+\frac{9}{8}f(n-4)$$

伍、研究結果

在本文中，我們討論 n 多邊形，移動一邊或二邊的情況下，所形成的算數形分支圖總數的情況，並嘗試找出其一般式，所得結果如下：

一、在 n 邊形中移動 $m=1$ 邊

當 n 為奇數情況下，則算數形的分支圖總數公式為 $\frac{(n-3)(n+1)}{4}$；

當 n 為偶數情況下，則算數形的分支圖總數公式為 $\frac{n(n-2)-4}{4}$。

二、在 n 邊形中移動 $m=2$ 邊

(一) 二分支

1. 分支中分支

當 n 為奇數時的公式為 $\frac{(n-1)(n-3)(n^2-4n+1)}{48}$，當 n 為偶數時的公式為 $\frac{n(n-2)^2(n-4)}{48}$。

2. 二分支但不相鄰

當 n 為奇數時的公式為 $\frac{(n-1)(n-3)(n-5)}{24}$，當 n 為偶數時的公式為 $\frac{(n-4)(n-3)(n-2)}{24}$。

3. 分支中有分支中分支

當 n 為奇數時 $\frac{(n-1)(n-3)(n-5)(2n^2-17n+31)}{480}$；

當 n 為偶數時 $\frac{(n-2)(n-4)(n-6)(2n^2-11n+10)}{480}$。

(二) 三分支

1. 三分支而其中二分支相鄰

(1) 3 異的情況

當 n 為奇數時

$$\sum_{m=1}^{[\frac{n-8}{2}]}\{\frac{[n-3-(2m-1)-5][n-3-(2m-1)-1]}{2}+\sigma\}(\frac{4m-1}{6})+\sum_{p=1}^{[\frac{n-9}{2}]}\{\frac{(n-3-2p-2)(n-3-2p-4)}{2}+\sigma\}(\frac{4p+1}{6})$$

$$+[\frac{(n-7)(n-5)}{2}+\sigma]\times\frac{1}{6}$$

當 n 為偶數時

$$\sum_{m=1}^{[\frac{n-8}{2}]}\{\frac{[n-3-(2m-1)-2][n-3-(2m-1)-4]}{2}+\sigma\}(\frac{4m-1}{6})+\sum_{p=1}^{[\frac{n-9}{2}]}\{\frac{(n-3-2p-1)(n-3-2p-5)}{2}+\sigma\}(\frac{4p+1}{6})$$

$+[\frac{(n-8)(n-4)}{2}+\sigma]\times\frac{1}{6}$，其中定義 σ 為 $k-3$ 為 3 的倍數時加上 2。

(2) 2 同一異的情況

當邊數 n 為奇數時

$$\sum_{m=1}^{[\frac{n-6}{2}]}\{\frac{3[n-4-(2m-1)]}{2}-\delta\}(\frac{4m-3+\alpha}{3})+\sum_{p=1}^{[\frac{n-7}{2}]}\{\frac{3(n-5-2p)}{2}-\delta\}(\frac{4p-1+\alpha}{3})+[\frac{3(n-5)}{2}-\delta]\times\frac{1}{3}$$

當邊數 n 為偶數時

$$\sum_{m=1}^{[\frac{n-6}{2}]}\{\frac{3[n-5-(2m-1)]}{2}-\delta\}(\frac{4m-3+\alpha}{3})+\sum_{p=1}^{[\frac{n-7}{2}]}\{\frac{3(n-4-2p)}{2}-\delta\}(\frac{4p-1+\alpha}{3})+[\frac{3(n-4)}{2}-\delta]\times\frac{1}{3}$$

其中定義 $\alpha=\begin{cases}1 & k=1,\ 2\\ 0 & k\text{為其他數值}\end{cases}$，而 $n-3-k$ 為 3 的倍數時則利用 δ 定義加以處理，且 k 會伴隨公式中 $2m-1$ 、 $2p$ 改變而改變。

(3) 3 同的情況公式為 $\omega+\sum_{p=1}^{[\frac{n-6}{2}]}\lambda(p+1)+\sum_{m=1}^{[\frac{n-5}{2}]}\phi m$ ，其中定義符號 λ 是當 $n-3-2p$ 為 3 的倍數

時等於 1，定義符號 ϕ 是當 $n-3-(2m-1)$ 為 3 的倍數時等於 1，定義 ω 當 n 為 3 的倍數時 $+1$。

2. 三分支且其中一分支有分支中分支

當邊數 n 為奇數時公式為 $\frac{(n-1)(n-3)(n-5)^2}{96}$ ；

當邊數 n 為偶數時公式為 $\frac{(n-4)(n-6)(n-2)^2}{96}$ 。

(三) 四個分支

1. 四同

當 $n=4p$ 時，公式為 $(\frac{n-4}{4})^2$ ；當 $n=4p+1$ 時，公式為 $(\frac{n-5}{4})^2$ ；

當 $n=4p+2$ 時，公式為 $\dfrac{(n-6)(n-2)}{16}$ ；當 $n=4p+3$ 時，公式為 $\dfrac{(n-7)(n-3)}{16}$ 。

2. 三同

$$\sum_{t=1}^{n-7}\left(\left[\frac{t+2}{3}\right]-f\left(t+3\right)\right)\left(n-6-t\right)$$ ，其中定義 $f(x)=\begin{cases}1, & x\in 4p\\ 0, & x\notin 4p\end{cases}\ (p\in N)$ 。

3. 二同二同

當多邊形 n 為奇數時，公式為 $2\sum_{t=1}^{\frac{n-9}{2}}\left(n-7-2t\right)\left(\left[\frac{t+1}{2}\right]\right)$ ；

當多邊形 n 為偶數時，公式為 $\left(\sum_{t=1}^{\frac{n-8}{2}}\left(2n-13-4t\right)(\left[\frac{t+1}{2}\right])\right)-\left[\frac{n-6}{4}\right]$ 。

4. 二同二異

$$3\left(\sum_{t=1}^{n-8}\left(n-7-t\right)\left(\frac{1}{2}\left[\frac{t+1}{2}\right]\left[\frac{t+3}{2}\right]-\left[\frac{t+3}{3}\right]+f\left(t+4\right)\right)\right)-\frac{1}{2}\left[\frac{n-7}{2}\right]\left[\frac{n-5}{2}\right]+\left[\frac{n-5}{3}\right]-f\left(n-4\right)$$ 。

5. 四異

$$\left(\sum_{t=1}^{n-13}\left(n-12-t\right)\left(\frac{\left(t+8\right)\left(t+7\right)\left(t+6\right)}{24}-\frac{3\left[\frac{t+6}{2}\right]\left[\frac{t+8}{2}\right]}{2}+2\left[\frac{t+8}{3}\right]-\frac{3}{2}g\left(t+9\right)\left[\frac{t+7}{4}\right]-\frac{9}{4}f\left(t+9\right)\right)\right)$$

$$-\frac{\left(n-5\right)\left(n-6\right)\left(n-7\right)}{48}+\frac{3\left[\frac{n-7}{2}\right]\left[\frac{n-5}{2}\right]}{4}-\left[\frac{n-5}{3}\right]+\frac{3}{4}g\left(n-4\right)\left[\frac{n-6}{4}\right]+\frac{9}{8}f\left(n-4\right)$$

其中定義函數 $g(x)=\begin{cases}1, & x=2m\\ 0, & x\neq 2m\end{cases}\ (m\in N)$ 。

陸、結論與後續研究

本文中我們在定義幾何算數形後，圖形經旋轉、翻轉或撓折後並無方向性，因此相同的多邊形視為同一個。接著在又定義多邊形若移動一個邊就可形成之情形，當以移動兩邊來完成時，則不屬於移動兩邊，且一個邊不可以同時移動 2 次的情況下，進而討論移動一邊以及二邊後，在不同封閉多邊形下的分支圖總數的情形，並找出其規律，加以推導其公式的型式。

再者移動一邊的情況下，在多邊形邊數 n 為奇、偶數時，有著不同的公式型式呈現。此外在考慮移動兩邊的情況下，並非如同移動一邊時如此容易，需考慮更多不同分支的情況，且我們仍有找到其規律，並利用排列組合的想法加以呈現出來。

然而我們也進一步發現，由本作品的定義延伸出來的移動 3 邊、4 邊、到 n 邊，必定只會出現一個封閉多邊形在算數形中，因此希望未來可依據此性質為基礎下推導出移動邊數後算數形的所有種類及其所對應的公式型式。我們將再嘗試其他的想法或方式，是否能再具備更多的經驗後，進一步可以推論出移動 3 邊、4 邊、到 n 邊形的更一般化型式，再加以利用延伸到其他相關地方，提供使用。

我們也期望可以把這份研究推廣到立體圖形，但存在一個問題就是尚不知如何較有效簡化在空間中該多邊形移動邊數後，所出現的眾多封閉多邊形圖形之關係。我們相信若能解決此問題，在立體多邊形中移動 1、2 邊的立體分支圖情形即能迎刃而解。

柒、參考資料及其他

[1] 游森棚 (2014)。高中數學第二冊。翰林出版社。

[2] 葉名倉等 (2014)。高中基礎化學第二冊。南一出版社。

【評語】040409

本作品研究移動一邊或兩邊後所構成同邊數及同頂點數的各種不同構造的圖形種類，相當完整，也很複雜。事實上，本作品書寫方式應該還可以再改進,定義應再精確一些,論證應再詳細一些。另外，本作品可以參考圖論裡的定義和性質，應可得到更豐碩的成果。