中華民國第55屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組　數學科

第三名

040408

平面中路徑糾纏狀況之探討

學校名稱：新北市立板橋高級中學

作者：	指導老師：
高二 黃柏倫 高二 葉宇聖 高二 崔期翔	李國弘

關鍵詞：捷徑、路徑相交、排列組合

摘要：

一開始，我們想求出兩人走捷徑且不相交的捷徑總數，並利用終點交換的方式求出其解。之後我們想求出三人走捷徑且不相交的捷徑總數，我們採用分析的方法，將其分類並逐步討論其解答，之後利用人數格數的變化關係製造出其他的等價問題，並以矩陣的方式推出遞迴式，我們閱讀其他的科展作品後，發現我們的可以轉換成其地磚問題，並順便解決之。

壹、 研究動機

在一年級下學期，當我們學到了排列組合時，老師剛好講到走捷徑問題，在閒暇之餘，我們無意間興起了一個想法，如果是在一個方格中，兩個人走捷徑如果不相交的狀況又是如何呢，於是我們便開始研究這個問題。

貳、 研究目的

一、 探討平面上矩形方格圖中，k 人走捷徑且路線不相交總數。 ($k\in N$)

二、 探討六組對邊互相平行之六邊形擺入菱形地磚的方法數。

參、 研究設備及器材

筆、紙、電腦、C++

肆、 研究過程或方式

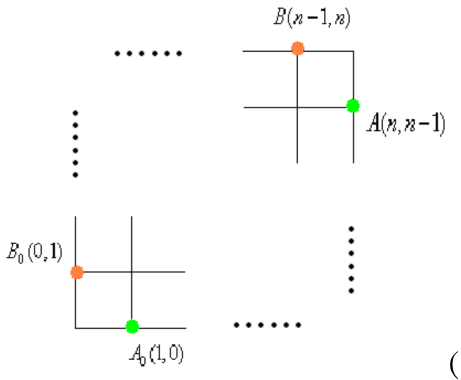
【定義】

1. 在 x, y 軸與第一象限的整數點訂為方格紙中以格子點為一頂點，取長寬均為 n 的正方形，則此種內部被分割為數個單位正方格，我們稱為 $n \times n$ 的正方格圖。
2. 由起點開始，在方格上鉛直往上與水平往右移動至終點的路徑，我們稱之為捷徑。
3. k 人走捷徑起點在 n x n 方格與 $x+y=k-1$ 的格子點上，終點在 n x n 方格與 $x+y=2n-k+1$ 的格子點上。
4. 定義路線符號有三人走捷徑，起點分別為 A_0 ， B_0 ， C_0 終點分別為 A,B,C
5. 定義 A_0A 為 A_0 走到 A 的捷徑，以此類推。
6. $A_0A\sim B_0B$ 為 A_0A 與 B_0B 有相交。
   A_0A*B_0B 為 A_0A 與 B_0B 沒有相交。
7. W_i 表 A_0A 、 B_0B 、 C_0C 三條捷徑的相對關係之所有捷徑集合，(i=1,2,3,⋯)。
8. A_0A 且 B_0B 的不合走法為 W(x)，全部方法為 U(x)。
9. 當路線當中由(e,f)到(e,f+1)時，我們稱之為”箭頭數為 e ”
10. 令矩陣 V_{ku} 、 B_{ku} 、 E_{ku} 、 D_j 分別為 k 人走捷徑且每人上升 u 格之開始矩陣、過程矩陣、結束矩陣、刪除矩陣

一、兩人走捷徑

在 A、B 兩人走 n x n 的正方格圖中，起點分別在 x+y=k-1 與 x+y=n-k+1 的格子點上，我們分析 A_0 走到 A 與 B_0 走到 B 的捷徑我們將其稱為 A_0A與 B_0B

性質一:n x n 方格中兩人走捷徑的全部總數為$(C_{n-1}^{2n-2})^2$ 。

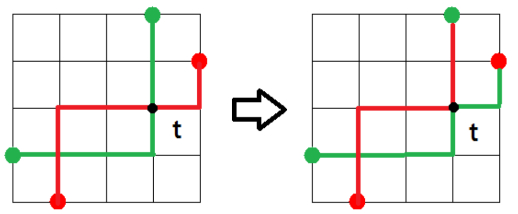


(圖一)

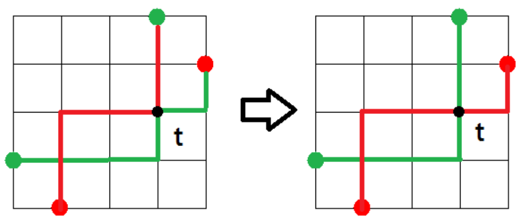
從圖(一)我們發現 A_0A可能的捷徑方法數為C_{n-1}^{2n-2}，而 B_0B總可能的捷徑方法數也是C_{n-1}^{2n-2}，所以**兩人同時走的捷徑方法總數為**$C_{n-1}^{2n-2} \times C_{n-1}^{2n-2}=(C_{n-1}^{2n-2})^2$ **種**，我們稱**全部捷徑總數為 S(x)**。

性質二:n x n 方格中兩人走捷徑的不合總數為$(C_{n-2}^{2n-2})^2$ 。

從圖(二)、圖(三)發現若我們將終點交換即 A_0B ，**B_0A的所有捷徑路線與 A_0A，B_0B的不合走法一一對應**



(圖二)



(圖三)

對應方式如下:

因為 A_0B ， B_0A兩路線必相交

設 A_0B和 B_0A**最後一個相交點**為 t

將 A_0B分解成為 A_0 走到 t 和 t 走到 B, B_0A分解成為 B_0 走到 t 和 t 走到 A

經重組之後

我們將 A_0 走到 t 和 t 走到 A 組合成 A_0A, B_0 走到 t 和 t 走到 B 組合成 B_0B

由圖二、圖三得知 A_0B ， B_0A的所有捷徑走法一一轉換成 A_0A， B_0B的不合捷徑走法。

又從 A_0B的總可能數為C_{n-2}^{2n-2} ，而 B_0A的總可能數為C_{n-2}^{2n-2}得知，總可能的不合路徑總數為$C_{n-2}^{2n-2} \times C_{n-2}^{2n-2}=(C_{n-2}^{2n-2})^2$ 種，並恰等於 A_0B ， B_0A的不合捷徑路線總數，我們稱**不合捷徑總數為 Q(x)**。

定理一:n x n 方格兩人走捷徑不相交的捷徑方法數

$$(C^{2n-2}_{n-1})^2-(C^{2n-2}_{n-2})^2=\frac{C^{2n-1}_{n-1}C^{2n-2}_{n-1}}{C^{n-1}_{n-1}C^{n}_{n-1}}$$

證明:

我們**利用排容原理將全部捷徑總數扣掉不合捷徑總數**的情況，又由**性質一、性質二**得知全部捷徑總數 S(x)與不合捷徑總數 Q(x)分別為 $(C^{2n-2}_{n-1})^2$ 、$(C^{2n-2}_{n-2})^2$ ，又

$$(C^{2n-2}_{n-1})^2-(C^{2n-2}_{n-2})^2=(C^{2n-2}_{n-1}+C^{2n-2}_{n-2})(C^{2n-2}_{n-1}-C^{2n-2}_{n-2})$$

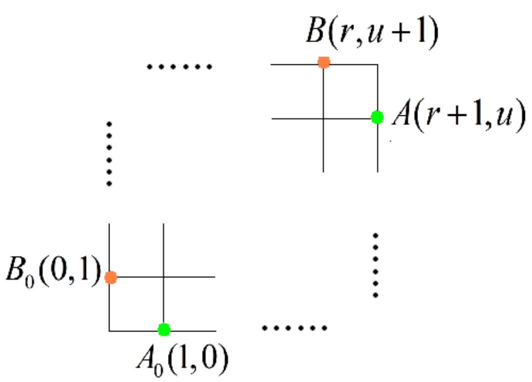
$$=C^{2n-1}_{n-1}(C^{2n-2}_{n-1}-C^{2n-2}_{n-2})=C^{2n-1}_{n-1}C^{2n-2}_{n-1}(1-\frac{n-1}{n-1+1})$$

$$=C^{2n-1}_{n-1}C^{2n-2}_{n-1}(\frac{1}{n})=\frac{C^{2n-1}_{n-1}C^{2n-2}_{n-1}}{C^{n-1}_{n-1}C^{n}_{n-1}}$$

故得證 $\frac{C^{2n-1}_{n-1}C^{2n-2}_{n-1}}{C^{n-1}_{n-1}C^{n}_{n-1}}$ **為 n x n 方格中兩人走捷徑且不相交的總可能路徑數**。

在 2 人且走正方格(向上格數=向右格數)之後，我們想把變數提升成三個,將 k 定為人數,u 為向上格數,r 為向右格數，又當 u=r 時，令 m=u=r。

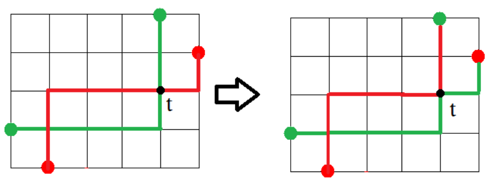
性質三:k=2 全部總數為 $(C^{u+r}_{r})^2$ 。



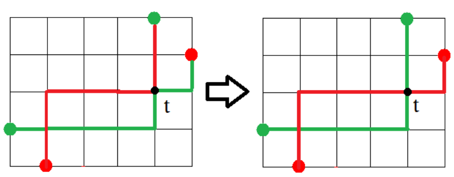
(圖四)

從圖四我們發現 A_0A 總可能的捷徑方法數為 C^{u+r}_{r} ，而 B_0B 總可能的捷徑方法數也是 C^{u+r}_{r} ，所以**兩人同時走的捷徑方法總數為** $C^{u+r}_{r} \text{ x } C^{u+r}_{r}=(C^{u+r}_{r})^2$ **種**，我們稱**全部捷徑總數為** $S_2(x)$。

性質四: k=2 不合總數為 $C^{u+r}_{u-1}\times C^{u+r}_{r-1}$ 。



(圖五)



(圖六)

從圖五、圖六發現 A_0B ， B_0A **的所有捷徑路線與** A_0A ， B_0B **的不合走法一一對應**，

其證明如下
對應方式:
因為 A_0B ， B_0A兩路線必相交
設 A_0B和 B_0A最後一個相交點為 t

將 A_0B 分解成為 A_0 走到 t 和 t 走到 B, B_0A分解成為 B_0 走到 t 和 t 走到 A
經重組之後
我們將 A_0 走到 t 和 t 走到 A 組合成 A_0A, B_0 走到 t 和 t 走到 B 組合成 B_0B

故 A_0B ， B_0A的所有捷徑走法一一轉換成 A_0A ， B_0B 的不合捷徑走法，必有交點。
又 B_0A的總可能數為 C_{u-1}^{u+r} ， A_0B的總可能數為 C_{r-1}^{u+r} ，總可能的不合路徑總數為 $C_{u-1}^{u+r}\times C_{r-1}^{u+r}$ 種，並恰等於 A_0A ， B_0B 的不合捷徑路線總數，我們稱**不合捷徑總數為 $Q_2(x)$**。

定理二:k=2 不相交的捷徑方法數 $(C_r^{u+r})^2 - C_{u-1}^{u+r}\times C_{r-1}^{u+r} = \dfrac{C_u^{u+r}C_u^{u+r+1}}{C_u^uC_u^{u+1}}$ 。

證明:
我們**利用排容原理將全部捷徑總數扣掉不合捷徑總數**的情況，又由**性質三、性質四**得知全部捷徑總數 $S_2(x)$與不合捷徑總數 $Q_2(x)$分別為 $(C_r^{u+r})^2$ 、 $C_{r-1}^{u+r}\times C_{u-1}^{u+r}$ ，
全部扣掉不合即為

$$(C_r^{u+r})^2 - C_{r-1}^{u+r}\times C_{u-1}^{u+r} = \frac{(u+r)!}{u!r!}\times C_u^{u+r} - \frac{(u+r)!}{(u-1)!r!}\times\frac{(u+r)!}{(u+1)!(r-1)!}$$

$$=\frac{(u+r)!}{u!r!}\left[C_r^{u+r} - \frac{(u+r)!}{(u-1)!(r-1)!(r+1)(u+1)}\right] = C_u^{u+r}\left[\frac{(u+r)!}{u!r!} - \frac{(u+r)!}{(u-1)!(r-1)!(r+1)(u+1)}\right]$$

故

$$=C_u^{u+r}\frac{(u+r)!}{(u-1)!(r-1)!}\left[\frac{1}{ur}-\frac{1}{(r+1)(u+1)}\right] = C_u^{u+r}\frac{(u+r)!}{(u-1)!(r-1)!}\left[\frac{ur+u+r+1-ur}{ur(r+1)(u+1)}\right]$$

$$=C_u^{u+r}\frac{(u+r)!}{(u-1)!(r-1)!}\left[\frac{u+r+1}{ur(r+1)(u+1)}\right] = C_u^{u+r}\frac{(u+r+1)!}{u!(r+1)!}\left[\frac{1}{(u+1)}\right] = \frac{C_u^{u+r}C_u^{u+r+1}}{C_u^uC_u^{u+1}}$$

$\dfrac{C_u^{u+r}C_u^{u+r+1}}{C_u^uC_u^{u+1}}$ 為當 k=2 時**不相交的總可能路徑數**。

二、参人走捷徑

我們將 A_0A, B_0B, C_0C 三條捷徑的互相關係做分類，並進行分析，分析如下表(一)、表(二)，並發現其中的一個子集合 W_4 恰為我們所求的答案，所以我們使用排容原理求其答案。
【定義】
1. $A_0A\sim B_0B$ 表 A 的捷徑與 B 的捷徑沒有相交，.
 A_0A*B_0B 表 A 的捷徑與 B 的捷徑有相交。
2. W_x 表 A_0A 、 B_0B 、 C_0C 三條捷徑的相對關係之所有捷徑數集合，($x\in N$)。
 $n(W_x)$ 表 A_0A 、 B_0B 、 C_0C 三條捷徑的相對關係之所有捷徑數目，($x\in N$)。
3. k 為人數,u 為向上格數,r 為向右格數，又當 u=r 時，令 m=u=r。

於是我們先將當 B_0B 捷徑與 C_0C 捷徑不相交時的情況一一列出，分別為 A_0A 捷徑與 C_0C 捷徑不相交或相交，以及 A_0A 捷徑與 B_0B 捷徑不相交或相交，
如下表(一)。

表(一)

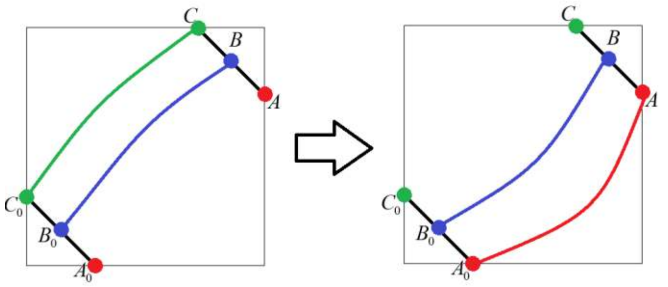
$B_0B \sim C_0C$ ， $A_0A * C_0C$ ， $A_0A * B_0B$ --W_1
$B_0B \sim C_0C$ ， $A_0A \sim C_0C$ ， $A_0A * B_0B$ --W_2
$B_0B \sim C_0C$ ， $A_0A * C_0C$ ， $A_0A \sim B_0B$ --W_3
$B_0B \sim C_0C$ ， $A_0A \sim C_0C$ ， $A_0A \sim B_0B$ --W_4

接著我們再將 A_0A 捷徑與 B_0B 捷徑不相交的情況一一列出，如下表(二)。

表(二)

$A_0A \sim B_0B$, $A_0A * C_0C$, $B_0B * C_0C$ --W_5
$A_0A \sim B_0B$, $A_0A \sim C_0C$, $B_0B * C_0C$ --W_6
$A_0A \sim B_0B$, $A_0A * C_0C$, $B_0B \sim C_0C$ --W_3
$A_0A \sim B_0B$, $A_0A \sim C_0C$, $B_0B \sim C_0C$ --W_4

將表(一)和表(二)相互分析之後，發現表(一)和表(二)之捷徑總數相等，其原因為表(一)和表(二)在捷徑圖形中相互對稱，如下圖。



然後我們發現當 A_0A 捷徑與 C_0C 捷徑相交的所有情況和當 A_0A 捷徑與 C_0C 捷徑
不相交的所有情況相加時，即為全部捷徑的相對關係總數，可拿來當作我們求出 W_4 的工具，即為下表(四)。
令集合 $T_1(x)$ 為表(三)之所有情況捷徑數，集合 $T_2(x)$ 為表(四)之所有情況捷徑數

表(三)

$B_0B \sim C_0C$, $A_0A * C_0C$, $A_0A * B_0B$ --W_1	$A_0A \sim B_0B$, $A_0A * C_0C$, $B_0B * C_0C$ --W_5
$B_0B \sim C_0C$, $A_0A \sim C_0C$, $A_0A * B_0B$ --W_2	$A_0A \sim B_0B$, $A_0A \sim C_0C$, $B_0B * C_0C$ --W_6
$B_0B \sim C_0C$, $A_0A * C_0C$, $A_0A \sim B_0B$ --W_3	$A_0A \sim B_0B$, $A_0A * C_0C$, $B_0B \sim C_0C$ --W_3
$B_0B \sim C_0C$, $A_0A \sim C_0C$, $A_0A \sim B_0B$ --W_4	$A_0A \sim B_0B$, $A_0A \sim C_0C$, $B_0B \sim C_0C$ --W_4

表(四)

$A_0A*C_0C\,,B_0B*A_0A,B_0B*C_0C$ --W_7	$A_0A\sim C_0C\,,B_0B*A_0A,B_0B*C_0C$ --W_8
$A_0A*C_0C\,,B_0B\sim A_0A,B_0B*C_0C$ --W_5	$A_0A\sim C_0C\,,B_0B\sim A_0A,B_0B*C_0C$ --W_6
$A_0A*C_0C\,,B_0B*A_0A,B_0B\sim C_0C$ --W_1	$A_0A\sim C_0C\,,B_0B*A_0A,B_0B\sim C_0C$ --W_2
$A_0A*C_0C\,,B_0B\sim A_0A,B_0B\sim C_0C$ --W_3	$A_0A\sim C_0C\,,B_0B\sim A_0A,B_0B\sim C_0C$ --W_4

我們發現將$T_2(x)$扣掉W_7、W_8兩種狀況且加上W_3之總個數，再用$T_1(x)$減之即得到我們要求的情況W_4，即$A_0A\sim C_0C$，$B_0B\sim A_0A$，$B_0B\sim C_0C$

$T_1(x)-[T_2(x)-W_7-W_8+W_3]$

$=(W_1+W_2+W_3+W_4+W_5+W_6+W_3+W_4)-[(W_1+W_2+W_3+W_4+W_5+W_6+W_7+W_8)-W_7-W_8+W_3]$

$=W_4\Rightarrow(A_0A\sim C_0C\,,\,B_0B\sim A_0A\,,\,B_0B\sim C_0C\,)$

性質五: $T_1(x)$為$2C^{2m}_m\left[(C^{2m}_m)^2-(C^{2m}_{m+1})^2\right]$種

證明: B_0B捷徑、C_0C捷徑不相交且A_0A捷徑不受限制的捷徑總數為$C^{2m}_m\left[(C^{2m}_m)^2-(C^{2m}_{m+1})^2\right]$，$A_0A$捷徑、$B_0B$捷徑不相交且$C_0C$捷徑不受限制的捷徑總數亦為$C^{2m}_m\left[(C^{2m}_m)^2-(C^{2m}_{m+1})^2\right]$

由上表(三)得知，B_0B、C_0C捷徑不相交且A_0A捷徑不受限制的捷徑總數，再加上A_0A、B_0B捷徑不相交且C_0C捷徑不受限制的捷徑總數即為$T_1(x)$集合，而因為兩種之捷徑圖形單純只是對稱關係，所以兩種狀況的捷徑總數相等。而B_0B、C_0C捷徑不相交且A_0A捷徑不受限制的捷徑總數，我們將此情況分為B_0B、C_0C捷徑不相交和A_0A捷徑不受限制兩種，由之前的證明得知，B_0B、C_0C捷徑不相交的捷徑數為$(C^{2n-2}_{n-1})^2-(C^{2n-2}_{n-2})^2$種，我們將$(C^{2n-2}_{n-1})^2-(C^{2n-2}_{n-2})^2$改為$(C^{2m}_m)^2-(C^{2m}_{m+1})^2$，而$A_0A$捷徑不受限制的捷徑數即為$C^{2m}_m$，並將兩種狀況合併，得其解為兩數相乘，即為$C^{2m}_m\left[(C^{2m}_m)^2-(C^{2m}_{m+1})^2\right]$種。

故得知$T_1(x)$為$2C^{2m}_m\left[(C^{2m}_m)^2-(C^{2m}_{m+1})^2\right]$種。

性質六:$T_2(x)$為當三人全部捷徑方法數為$(C^{2m}_m)^3$種

證明:因$T_2(x)$為A_0A與C_0C相交時和當A_0A與C_0C沒有相交兩類的所有情況，即囊括了所有路徑的走法 $(C^{2m}_m)^3$種走法。

性質七:W_3的總捷徑數為 0 種

證明:我們討論子集合W_3的捷徑總數，當A_0A與C_0C捷徑相交的情況成立時，A_0A、C_0C捷徑必定會走到B_0B捷徑的捷徑總數的 m x m 方格，故得知B_0B捷徑必至少與A_0A或C_0C其中一條捷徑相交，則此假設矛盾，故此集合總數為 0。

性質八: W_7、W_8為B_0B捷徑與C_0C捷徑 相交、A_0A捷徑與B_0B捷徑相交且A_0A捷徑與C_0C捷徑不受相交限制的捷徑總數且相加總數 $2C^{2m}_{m+2}(C^{2m}_{m+1})^2-C^{2m}_m(C^{2m}_{m+2})^2$。

證明:我們由上表(四)得知 A_0A捷徑與C_0C 捷徑相交、 B_0B捷徑與C_0C 捷徑相交且 A_0A捷徑與 B_0B捷徑相交為子集合W_7， A_0A捷徑與C_0C 捷徑不相交、 B_0B捷徑與C_0C 捷徑相交且 A_0A捷徑、 B_0B捷徑相交為子集合W_8，並將W_7、W_8 合併為 G(x)集合，G(x)表 B_0B捷徑與C_0C 捷徑相交、 A_0A捷徑與 B_0B捷徑相交且 A_0A捷徑與C_0C 捷徑不受相交限制的捷徑總數。

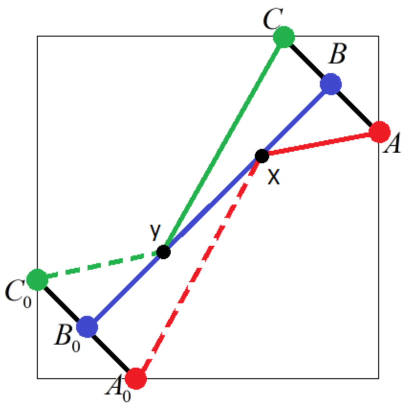
而 B_0B 、C_0C 捷徑相交、 A_0A、 B_0B捷徑相交且 A_0A、C_0C 捷徑不受相交限制的捷徑總數，我們使用類似於二人 n x n 的證明方式交換終點，證明如下:

【定義】

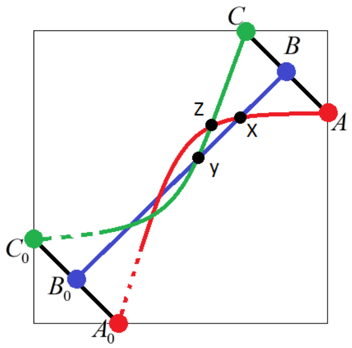
1. A_0B、 B_0C 、C_0A 的路徑方法總類為集合 C(x), B_0A、C_0B、 A_0C 與 A_0A、B_0B、C_0A的路徑方法數分別為 D(x) 與 E(x)
2. A_0A與 B_0B 相交且 B_0B與C_0C 相交的情況為 G(x)
3. A_0A與 B_0B的最後一個交點定為 x 、C_0C 與 B_0B的最後一個交點定為 y、 A_0A 與C_0C 的最後一個交點定為 z
4. n(C(x)) 表示集合的元素個數

為了要證明W_7 、W_8 我們要先證明 $n(G(x)) = n(C(x)) + n(D(x)) - n(E(x))$

$\boxed{\text{小性質 1：} C(x) \subset G(x) \text{ 且 } D(x) \subset G(x)}$

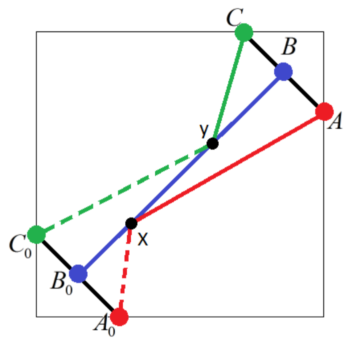


證明：為了證明$C(x) \subset G(x)$，我們將 C(x)分成兩類，其一為單純的 A_0A僅接觸到 B_0B ，產生出交點 x，而 C_0C 亦僅接觸到 B_0B產生出交點 y，則交點 x 必在交點 y 上方或右邊或同一橫軸上，如右圖。



而另一種是 A_0A與C_0C 有相交的情況產生出交點 z，示意圖如上圖。

由上兩類可知，C(x)必包含於 G(x)
至於 D(x)包含於 G(x)，我們亦將 D(x)分成兩類，其一為單純的 A_0A僅接觸到 B_0B ，產生出交點 x，而 C_0C 亦僅接觸到 B_0B產生出交點 y，則交點 x 必在交點 y 左方或下方或同一縱軸上，如下圖。



而另一種是 A_0A與C_0C 有相交的情況產生出交點 z。
由上兩類可知，亦可知 D(x)必包含於 G(x)。

小性質 2：$C(x)\cup D(x)\subset G(x)$ 且 $C(x)\cap D(x)=E(x)$

證明：而第三個所求的證明是 G(x) 包含於$C(x)\cup D(x)$，G(x)本身即為要求使 A_0A和C_0C 皆碰觸到 B_0B ，也就是說必定要有 x 和 y 的存在，而 C(x)和 D(x)中包含著所有 x 和 y 存在時的相對情形，故可證$C(x)\cup D(x)$ 。

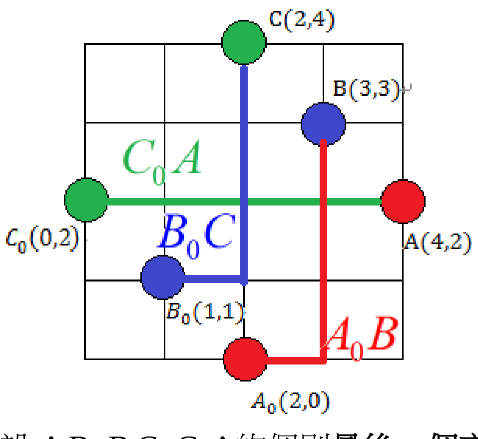
為求最後的證明 $C(x)\cap D(x)$ 為 E(x)，也就是說 C(x)和 D(x)有共同子集合 E(x)。E(x)，其意義就是指 A_0A與C_0C 有相交的意思，也就是說有交點 z 的產生，並且導致可讓 A_0A與C_0C 在交點 z 產生交換的情形，產生 A_0C 和C_0A，而 C(x)和 D(x)中除了有 E(x)這個交集外，他們的 x 和 y 皆為相反的組合情形，故得證 C(x)交集 D(x)為 E(x)。

由上我們可知$n(G(x))=n(C(x))+n(D(x))-n(E(x))$，故為求出 n(C(x))，n(D(x))和 n(E(x))，證明如下:

小性質 3: $n(C(x))$ 為 $(C^{2m}_{m+1})^2C^{2m}_{m+2}$

證明:

令 A_0B 、 B_0C 、 C_0A，我們稱其為 C(x)，如下圖。



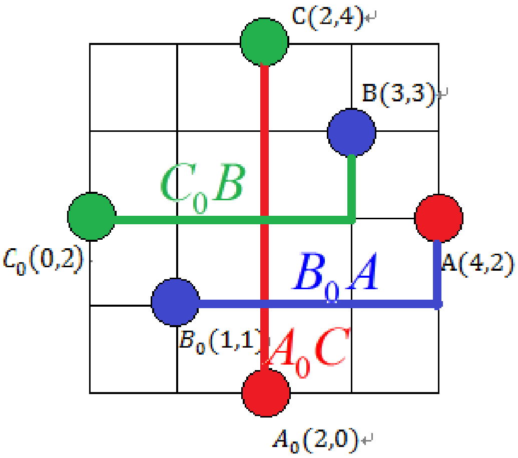
設 A_0B, B_0C, C_0A的個別**最後一個交點**為t_x
第一步驟是在每一種 A_0B, B_0C, C_0A的捷徑到達 A、B、C 之後，再以t_x 作為兩條捷徑的交點，即為我們所要的交換點，使 A_0 、 B_0 、 C_0 最後皆能走到 A、B、C。

而 A_0B, B_0C, C_0A 兩種捷徑走法總數分別為 C^{2m}_{m+1} 、C^{2m}_{m+1} 、C^{2m}_{m+2} ，將這三種走法一一的將其捷徑方法數以乘法運算出我們所希望得到的 n(C(x))。

小性質 4:n(D(x))為 $(C^{2m}_{m+1})^2C^{2m}_{m+2}$

證明:

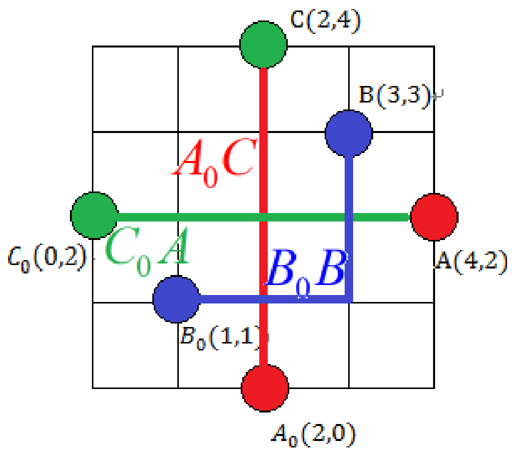
使 A_0C 、 B_0A 、 C_0B 為 D(x)，如下圖



而 C_0A, A_0C, B_0B 三種捷徑走法總數分別為 C^{2m}_{m+1} 、C^{2m}_{m+1} 、C^{2m}_{m+2} ，再將它們相乘便可得出 n(D(x))

小性質 5: n(E(x))為 $(C^{2m}_{m+2})^2C^{2m}_{m+1}$

證明:



其 A_0B, B_0C, C_0A捷徑總數分別為 C^{2m}_{m+2} 、C^{2m}_{m+2} 、C^{2m}_{m} ，相乘後得出 $C^{2m}_{m}(C^{2m}_{m+2})^2$ ，

再將前面算出的數據統整起來，即可得出 W_7 、W_8 為 $2C^{2m}_{m+2}(C^{2m}_{m+1})^2-C^{2m}_{m}(C^{2m}_{m+2})^2$ 。

定理三:三人每人走 m x m 公式為 $\dfrac{C^{2m}_{m}C^{2m+1}_{m}C^{2m+2}_{m}}{C^{m}_{m}C^{m+1}_{m}C^{m+2}_{m}}$

我們以下整理

證明:

1°

$$C^{2m}_{m}-C^{2m}_{m+2}=\frac{2m!}{m!m!}-\frac{2m!}{(m+2)!(m-2)!}=\frac{2m!}{m!m!}[1-\frac{m(m-1)}{(m+2)(m+1)}]=\frac{2m!}{m!m!}[\frac{2(2m+1)}{(m+2)(m+1)}]\frac{(m+1)}{(m+1)}$$

$$=\frac{2m!(2m+1)(2m+2)}{(m+2)!m!(m+1)}=\frac{(2m+2)!}{(m+2)!m!}\frac{1}{m+1}=\frac{1}{m+1}C^{2m+2}_{m}$$

2°

$$(C_m^{2m})^2-(C_{m+1}^{2m})^2$$
$$=(C_m^{2m}+C_{m+1}^{2m})(C_m^{2m}-C_{m+1}^{2m})$$
$$=(\frac{2m!}{m!m!}+\frac{2m!}{(m-1)!(m+1)!})(\frac{2m!}{m!m!}-\frac{2m!}{(m-1)!(m+1)!})$$
$$=\frac{2m!}{m!m!}\times(1+\frac{m}{m+1})\times\frac{2m!}{m!m!}\times(1-\frac{m}{m+1})$$
$$=\frac{2m!}{m!m!}\times\frac{2m+1}{m+1}\times\frac{2m!}{m!m!}\times\frac{1}{m+1}$$
$$=\frac{(2m+1)!}{(m+1)!m!}C_m^{2m}\frac{1}{m+1}$$
$$=\frac{1}{m+1}C_m^{2m}C_m^{2m+1}$$

3°

$$C_{m+1}^{2m}=\frac{2m!}{(m+1!)(m-1!)}=\frac{m}{m+1}\frac{2m!}{m!m!}=\frac{m}{m+1}C_m^{2m}$$
$$\Rightarrow C_{m+1}^{2m}=\frac{2m!}{(m+1)!(m-1)!}=\frac{2m!}{(m+2)!(m-2)!}\frac{(m+2)}{(m-1)}=\frac{(m+2)}{(m-1)}C_{m+2}^{2m}$$
$$\Rightarrow (C_{m+1}^{2m})^2=\frac{m(m+2)}{(m+1)(m-1)}C_m^{2m}C_{m+2}^{2m}=\frac{m^2+2m}{m^2-1}C_m^{2m}C_{m+2}^{2m}$$

4°

$$T_1(x)-[T_2(x)-W_7-W_8+W_3]$$
$$=2C_m^{2m}\left[(C_m^{2m})^2-(C_{m+1}^{2m})^2\right]-\left[(C_m^{2m})^3-2(C_{m+1}^{2m})^2C_{m+2}^{2m}+C_m^{2m}(C_{m+2}^{2m})^2\right]$$
$$=(C_m^{2m})^3-2(C_{m+1}^{2m})^2(C_m^{2m}-C_{m+2}^{2m})-(C_{m+2}^{2m})^2C_m^{2m}$$
$$=C_m^{2m}[(C_m^{2m})^2-(C_{m+2}^{2m})]-2(C_{m+1}^{2m})^2(C_m^{2m}-C_{m+2}^{2m})$$
$$=(C_m^{2m}-C_{m+2}^{2m})[C_m^{2m}(C_m^{2m}+C_{m+2}^{2m})-2(C_{m+1}^{2m})]$$
$$=\frac{1}{m+1}C_m^{2m+2}[(C_m^{2m})^2+C_m^{2m}C_{m+2}^{2m}-2(C_{m+1}^{2m})^2]$$
$$=\frac{1}{m+1}C_m^{2m+2}[(C_m^{2m})^2-(C_{m+1}^{2m})^2+C_m^{2m}C_{m+2}^{2m}-2(C_{m+1}^{2m})^2](\text{由}2^{\circ})$$
$$=\frac{1}{m+1}C_m^{2m+2}[\frac{1}{m+1}C_m^{2m}C_m^{2m+1}+C_m^{2m}C_{m+2}^{2m}-\frac{m^2+2m}{m^2-1}C_m^{2m}C_{m+2}^{2m}](\text{由}3^{\circ})$$
$$=\frac{1}{m+1}C_m^{2m+2}[\frac{1}{m+1}C_m^{2m}C_m^{2m+1}+\frac{2m+1}{(m-1)(m+1)}C_m^{2m}C_{m+2}^{2m}]$$
$$=\frac{1}{m+1}C_m^{2m+2}\frac{1}{m+1}C_m^{2m}[C_m^{2m+1}+\frac{2m+1}{m-1}C_{m+2}^{2m}]$$
$$=\frac{1}{m+1}C_m^{2m+2}\frac{1}{m+1}C_m^{2m}[\frac{(2m+1)!}{m!(m+1)!}-\frac{2m+1}{m-1}\frac{2m!}{(m-2)!(m+2)!}]$$
$$=\frac{1}{m+1}C_m^{2m+2}\frac{1}{m+1}C_m^{2m}\frac{(2m+1)!}{m!(m+1)!}[1-\frac{1\times m}{m+2}]$$
$$=\frac{1}{m+1}C_m^{2m+2}\frac{1}{m+1}C_m^{2m}\frac{2}{m+2}C_m^{2m+1}$$
$$=\frac{C_m^{2m}C_m^{2m+1}C_m^{2m+2}}{C_m^mC_m^{m+1}C_m^{m+2}}$$

推論出這個式子之後發現其與兩人公式有極類似的部分，於是我們想進而探討 4 人，但因過於複雜，無法由交換終點的方式找出規則找出統一的規則，我們又想出了兩種方式來進行討論，一種是固定上升格數改變人數製作成另一個等價問題，發現人數與走的格數可以互相轉換，即可利用已知捷徑圖形求出答案。另一種是利用類似轉移矩陣的方式將所有情況以遞迴式表現出來。

三.、固定上升格數改變人數

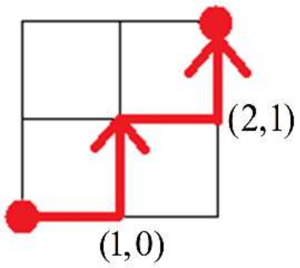
原本我們是藉由固定上升格數改變人數的方式觀察其現象，但從 4 人之後，因過於複雜，無法找出統一的規則，所以我們換一種看法觀察每人的向上走法整理為表格，再將題目轉換成已知的捷徑圖形後求出答案。

我們首先先介紹箭頭數

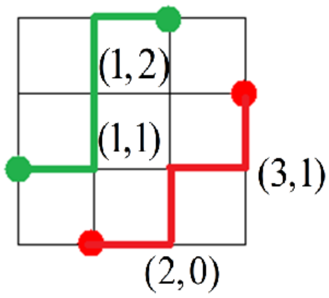
【定義】

1. 當路線當中由(e,f)上升到(e,f+1)時，我們稱之為箭頭數為 e

以下我們先說明如何將方格圖轉換成為箭頭數的表格，
首先，我們將每個人所走的箭頭數列出，將其箭頭數所表示的位置依起點位置由左上到右下，再由左到右放入表格中的相對位置，例如下圖



2
1

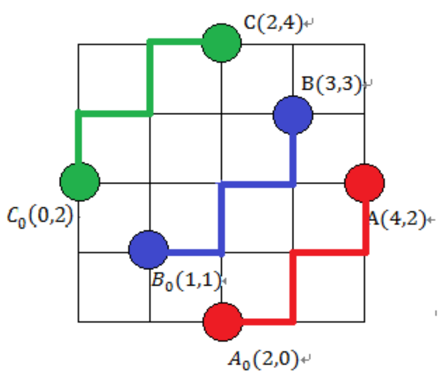


1	3
1	2

介紹完箭頭數後，接下來我們想繼續討論固定 u，並經由箭頭數將原圖形轉換成表格的規律

性質九:k 人表格左排的數必小於右排的數

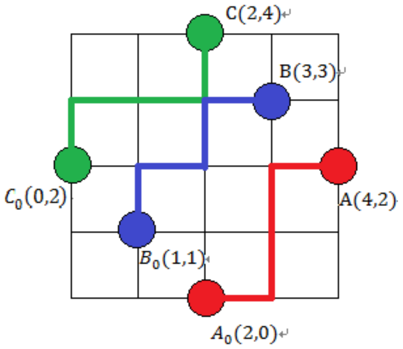
我們固定 u，討論每人所所走的箭頭數，例如下圖



1	3	4
0	2	3

我們將其轉化成我們的表格(右上表)，發現左排的數必小於右排的數 ex:1<3<4,0<2<3。

因為若箭頭數在同步數時相等，代表同時在同一垂直線上升，則必相交。
ex:2=2<3 (如下圖和表)

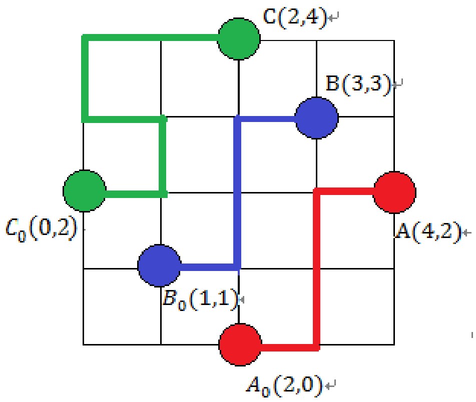


2	2	3
0	1	3

故表格左排的數必小於右排的數。

性質十:表格下列的數必小於等於上列的數

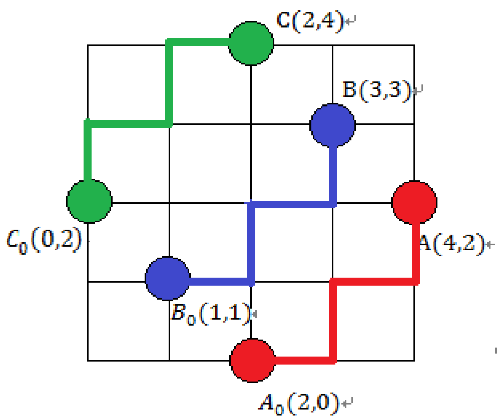
因為下數大於上數，因為這樣會導致反向，所以路徑必不為捷徑，不合我們的所求 ex:1>0 (如下圖和表)



0	2	3
1	2	3

故表格下列的數必小於等於上列的數。

性質十一:表格填入的數字範圍



1	3	4
0	2	3

綜合性質九、十我們可以將 k 人每人往右 r 格往上 u 格走捷徑不相交可轉換成表格(如下)

p_{r1}	p_{r2}	$\cdots$	p_{rk}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
p_{21}	p_{22}	$\ddots$	p_{2k}
p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1k}

將箭頭數填入時並滿足條件

$p_{i1} < p_{i2} < \dots < p_{ik}; i = 1, 2, \dots, k$ 且 $p_{1j} \le p_{2j} \le \dots \le p_{rj}; j = 1, 2, \dots, u$ 因為每人僅能向右 r 格，而新第一個人箭頭數所能到的範圍從 k-1 到 k+r-1，而新第二人的箭頭數所能到的範圍從 k-2~k+r-2，以此類推後，我們可以推出下列的不等式

$k - i \le p_{i1} < p_{i2} < \dots < p_{ik} \le k + r - i; i = 1, 2, \dots, k$

且也要符合 $p_{1j} \le p_{2j} \le \dots \le p_{rj}; j = 1, 2, \dots, u$

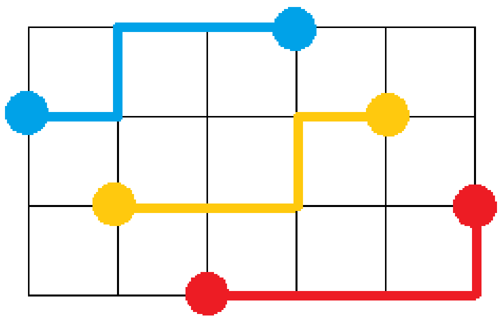
故得知我們可將題目轉換成將數字填入表格，且符合上述兩不等式，則與我們 k 人每人往右 r 格往上 u 格走捷徑不相交等價

性質十二:k 人向上 u 格之表格一一對應至模型

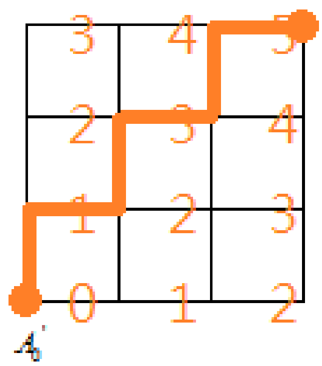
因為轉換過後的題目還是有些複雜，所以我們將變化後的數據與條件放入一給定數字的新方格模型中，想將它在轉換為我們之前所熟知的路徑不相交的方法數

先介紹 u=1 時的圖形轉換

下圖是 k=3,u=1,r=3 的狀況，將其轉利用箭頭數轉換為表格後如下



1	3	5



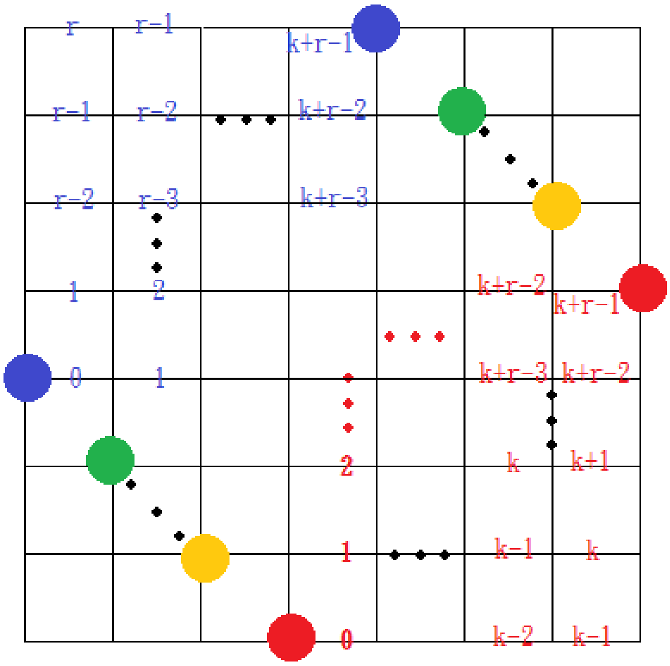
接下來，我們將表格轉換成模型，同先前定義捷徑的起點，起點 A_0' 為往右一格由 0 開始給一個數值到 k

給定橫線正上方橫線遞增+1，到+u 為止。

性質十一找出的規則，可製造一模型使新的每一列皆形成新的路徑，且因為原本左數必小於右數，所以畫入模型後就會形成捷徑。於是可將 u=1 的表格利用轉換模型轉換為一人走捷徑。

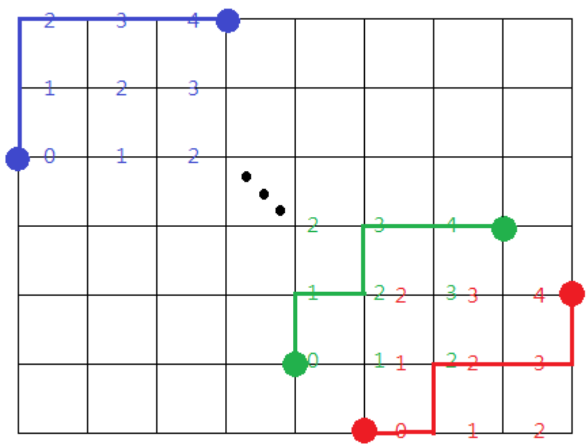
討論完 u=1 之後，我們將其推廣，推出我們轉換模型的長相使每一表格轉皆可利用轉換模型轉換

當向上 u 格時，將第一人的轉換模型往向量（-1,1）平移 u-1 次後複製，如下圖



接下來將我們原本的表格依序畫入新的模型中，由右下往左上分別為第一人第二人…至第 u 人，表格內由下到上依序為第一列第二列…第 u 列，將第一列畫成第一人捷徑，第二列畫成第二人捷徑，以此類推，則變成下圖

2	3	4
…	…	…
1	3	4
0	2	3
第 1 人	第 2 人	第 3 人



我們發現按照那些轉換過後的表格畫入模型之後，
均符合模型內捷徑不相交。

因為原本左數必小於右數，所以畫入模型後每一列都會各自形成捷徑。
又因下列必小於等於上列，而且是採用向量推移的方式，可使兩兩路徑在畫入模型後不相交。

故 k 人向上 u 格之表格可一一對應至模型

性質十三:k 人每人往右 r 格往上 u 格走捷徑不相交可轉換成
u 人每人往右 k 格往上 r 格走捷徑不相交

我們想推廣將不限人數與格數時皆利用轉換模型轉換成我們已知的部分，就可解出答案。

於是我們要證明 k 人每人往右 r 格往上 u 格走捷徑不相交與 u 人每人往右 k 格往上 r 格走捷徑不相交一一對應

由性質十一我們得知以 k 人向上 u 格轉換表格的方式將原本 k 人每人往右 r 格往上 u 格走捷徑不相交的圖形皆可利用箭頭數轉換成表格且要填入符合條件

由性質十二以利用轉換模型再搭配上由箭頭數所寫出的表格填入之後

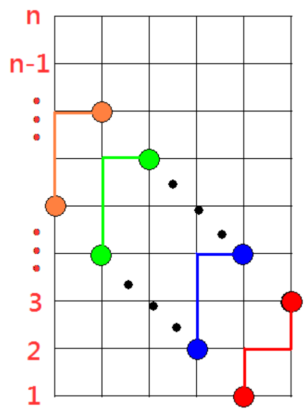
故可將 k 人每人右 r 格往上 u 格走捷徑不相交可轉換成 u 人每人往右 k 格往上 r 格走捷徑不相交。

四、矩陣應用遞迴式

經由上述的說明，我們可以討論出兩人、三人及 k 人每人往右 r 格往上 u 格走捷徑不相交，我們想一次將所有的情況表示出來，剛好學校的課程學到了轉移矩陣，我們想利用矩陣來求得我們要的答案，列出類似轉移矩陣後，我們發現了一些規律，可以用遞迴方式表示所有的情況。

令一矩陣 V_{ku} 、B_{ku} 、E_{ku} 、D_j 分別為 k 人走捷徑且每人上升 u 格之開始矩陣、過程矩陣、結束矩陣、刪除矩陣。

一開始我們先模仿轉移矩陣方式定義我們的過程矩陣，矩陣過程的轉移方式如下,我們先固定人數 k 與上升數 u,以每人所在的高度(y 座標)標示舊的狀態，由右下到左上順序以 $(q_1, q_2, ..., q_k)$ 表示,新的狀態則代表路徑向右移一格後最底的高度(y 座標)如下圖，表示從舊狀態 $(12q_3 \cdots q_k)$ 走到新狀態 $(24q_3 \cdots q_k)$，



每個轉移狀態 $(q_1, q_2, ..., q_k)$ 其中 $i \le q_i \le i+u$，接下來我們定義轉移矩陣順序，我們依序由最後一項+1，加到上限則進位，而最後一項為 $(1+u)(2+u)\cdots(k+u)$，所以 k 人每人上升 u 格有 $(u+1)^k$ 種狀態，如下圖所示。

$$
\begin{array}{c|c}
 & 12\cdots k \quad 12\cdots(k+1) \quad \cdots\cdots \quad (1+u)(2+u)\cdots(k+u) \\
\hline
12\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots k & \\
12\cdots\cdots\cdots(k+1) & \\
\vdots & \\
\vdots & \\
(1+u)(2+u)\cdots(k+u) &
\end{array}
$$

其中轉移的過程如果不合法(非捷徑或路徑相交)，則為 0,若合法則為 1
下例為 1 人上升 u 格的過程矩陣

$$
B_{1u} = \begin{array}{c|cccccc}
 & 1 & 2 & 3 & \cdots & \cdots & u+1 \\
\hline
1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
2 & 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
3 & 1 & \cdots & 1 & \ddots & & \vdots \\
\vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & 0 \\
u+1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1
\end{array}
$$

開始矩陣 V_{ku} 為一 $(u+1)^k \times 1$ 矩陣，因為在起點時為最低的點，故第一項為 1 表起點，而其他項均為 0，因此其表示方法為 $V_{ku} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ 。

過程矩陣 B_{ku} 為一 $(u+1)^k \times (u+1)^k$ 矩陣其中 k 為人數，而 u 為每人上升格數，而往右 r 格代表轉移 r 次，則每人往右格數以過程矩陣 B^r 表示。

結束矩陣 E_{ku} 為一 1 x u 矩陣，其作用為將所有可能狀況相加，故此矩陣每項皆為 1，其表示方法為 E_{ku} =[1 1 .... 1 1] 。

接下來我們定義刪除矩陣 D_j ，其中 D_j 隨被刪除矩陣的大小改變，我們會將過程矩陣表示為分塊方陣， D_j 目的是要將分塊後第 1 列到第 j 列的分塊方陣換成同樣大小的 0 矩陣，舉例如下

$$B_{ku}=\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & \cdots & M_{1(k+1)^2} \\ M_{21} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & M_{(k+1)^2 k^2} \\ M_{n1} & \cdots & \cdots & M_{k^2(k+1)^2} & M_{(k+1)^2(k+1)^2} \end{bmatrix}$$

其中 M_{ij} 為一個 $(u+1)^k\times(u+1)^k$ 分塊方陣，則 D_jB_{ku}

將 M_{1p} 到 M_{jp} ，其中 p 為任意值，均換成對應大小的零矩陣，所以 D_j 定義如下

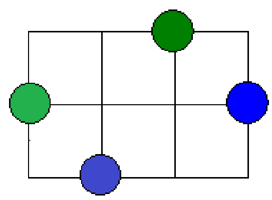
$$D_j=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D_j=\left[d_{pq}\right] \text{，} \begin{cases} d_{pq}=1 p=q\geq j(k+1) \\ d_{pq}=0 & \text{其他} \end{cases}$$

根據我們的定義所有情況數為 $E_{ku}B_{ku}^{r}V_{ku}$ ，其中 EV 都確定，可以利用遞迴方式推導出過程矩陣，也就是說我們可以寫出所有我們想要計算的型態。

我們以 2 人每人上升 1 格往右 2 格為例，即可算出答案

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&0&0&0\\1&1&1&1\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\0&0&0&0\\3&2&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}6&3&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\end{bmatrix}$$

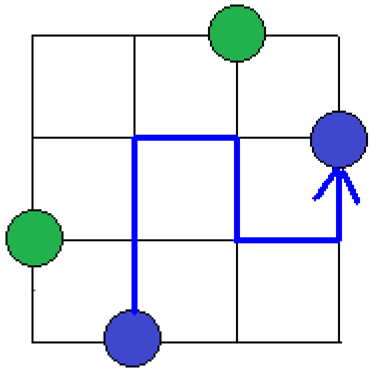


性質十四:過程矩陣的大小

依照上述排序方法，寫出過程矩陣，其中我們分塊的方式為當 q_1 改變位置時我們就將其分割，故第 M_{ij} 時為 q_1 從 j 位置走到 i 位置。

	$j2\cdots k$	$j2\cdots(k+1)$	$\cdots\cdots$	$(j+u)(2+u)\cdots(k+u)$
$i2\cdots k$				
$i2\cdots(k+1)$				
$\vdots$				
$(i+u)(2+u)\cdots(k+u)$				

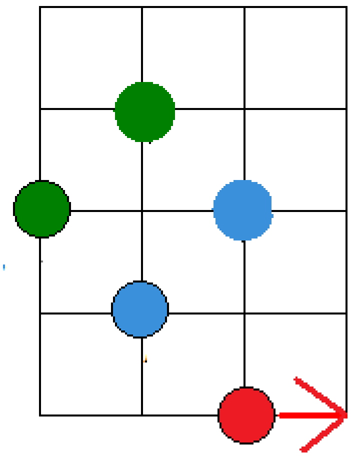
性質十五:分塊方陣 M_{ij} 當 j>i 時，$M_{ij}=[0]$



有一分塊方陣 M_{ij} 當 j>i 時，如下圖 q_1 的路徑往下走，則其不符合我們走捷徑的規定，故 $M_{ij}=[0]$

性質十六: $M_{11}=B_{ku}$

我們發現在 $B_{k+1,u}$ 中的分塊方陣 M_{ij} 有一些規律，以下討論



在 $B_{n+1,k}$ 中，其中分塊方陣 M_{11} 為 B_{ku}

即為 k 人的路徑情況，所以我們可以利用 k+1 人的狀態

$(1,q_2,q_3,....,q_{k+1})$ 到新狀態 $\left(1,q_2',q_3',....,q_{k+1}'\right)$，改為 k 人的狀態

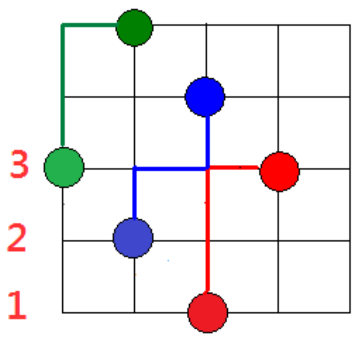
$(q_2\text{-}1,q_3\text{-}1,....,q_{k+1}\text{-}1)$ 到新狀態 $\left(q_2'\text{-}1,q_3'\text{-}1,....,q_{k+1}'\text{-}1\right)$，即為 B_{ku} 的過程矩陣。

我們發現新的 q_1 走到 1 的位置時(因為 M_{11}，q_1 從 1 走到 1)，不會影響到上面的路徑相交情況，故 $B_{n+1,k}$ 中的分塊方陣 M_{11} 與 B_{ku} 相同。

性質十七: $M_{11}=B_{ku}$

我們討論 M_{11} 和 M_{a1}，發現其不同處在舊狀態，以 $(q_1,q_2,....,q_k)$ 中 q_1 上升 a 格時，會阻擋到 q_2，如下圖，故我們將阻擋到的部分以刪除矩陣 D_1 刪除，如圖所示，我們可知當 q_1 上升時，所阻擋到 q_2 的部分為 $q_2 \le a$ 的情況，所以所有 M_{a1} 中，新狀態的 $q_2 \le a$ 均要改為 0，滿足刪除矩陣的定義。

$M_{11}=B_{ku}$
$M_{21}=D_1B_{ku}$
$M_{31}=D_2B_{ku}$
$\vdots$ $\ddots$
$\vdots$
$M_{(k+1)^2 1}=D_kB_{ku}$



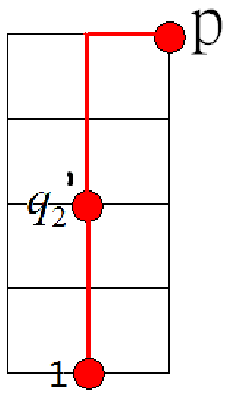
性質十八:$M_{11}=B_{ku}$ $M_{p1}=M_{p2}=\cdots=M_{pp}$ 即 $M_{p1}=M_{pj}$ ，其中 $1<p<j$

在一分塊矩陣 M_{p1} 中舊狀態 $(1,q_2,....,q_k)$ 到新狀態 $\left(p,q_2',....,q_k'\right)$ 對應到 M_{pj} 的 $(1,q_2,....,q_k)$ 到 $\left(p,q_2',....,q_k'\right)$ 兩者除了第一項外其他皆相同。

M_{p1} 中舊狀態 $(1,q_2,....,q_k)$ 到新狀態 $\left(p,q_2',....,q_k'\right)$ 為 0 的項可能是 $(1,q_2)$ 到 $\left(p,q_2'\right)$ ，或者是 $(q_2,....,q_k)$ 到 $\left(q_2',....,q_k'\right)$ 至少一個路徑不合法。

若 M_{p1} 中 $(q_2,....,q_k)$ 到 $\left(q_2',....,q_k'\right)$ 不合法，在 M_{pj} 中 $(j,q_2,....,q_k)$ 到 $\left(p,q_2',....,q_k'\right)$ 的除了第一項外其他走法相同，則必也不合法

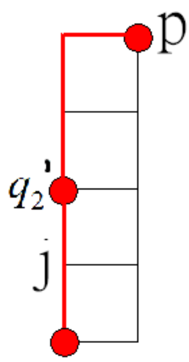
若是 M_{p1} 中 $(1,q_2)$ 到 $\left(p,q_2'\right)$ 不合法



因為不合法，故我們知道 $q_2' \le p$ 如右圖

因為 M_{pj} 中 $q_2 \le q_2'$ 且 $j \le q_2 \le q_2' \Rightarrow j \le q_2'$

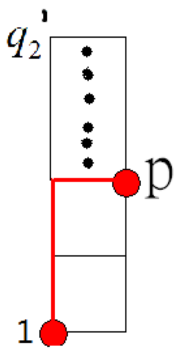
得知 $j \le q_2' \le p$



所以 j 走到 p 必通過 q_2' ，如右圖

則在 M_{pj} 中 (j,q_2) 到 $\left(p,q_2'\right)$ 也不合法,

故 $(j,q_2,....,q_k)$ 到 $\left(p,q_2',....,q_k'\right)$ 也不合法,，故該項也為 0



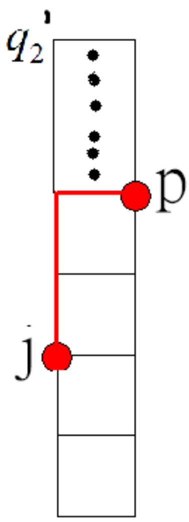
M_{pj} 中為 1 的項，即 $(1,q_2)$ 到 $\left(j,q_2'\right)$

$(q_2,....,q_k)$ 到 $\left(q_2',....,q_k'\right)$ 均合法

所以 $q_2'>p$ ，如右圖

在 M_{pj} 中 (j,q_2) 到 $\left(p,q_2'\right)$ 亦合法，因為 $q_2'>p>j$ 如右圖

且 $(q_2,....,q_k)$ 到 $\left(q_2',....,q_k'\right)$ 與 M_{p1} 相同必合法



則$\left(j,q_2,....,q_k\right)$到$\left(p,q_2',....,q_k'\right)$此項也合法，所以$M_{p1}=M_{pj}$，當$1<p<j$

即

$$
\begin{aligned}
&M_{11}=B_{1k}\\
&M_{21}=M_{22}\\
&M_{31}=M_{32}=M_{33}\\
&\vdots \qquad\qquad \ddots\\
&\vdots\\
&M_{(k+1)^2 1}=M_{(k+1)^2 2}=\cdots\cdots=M_{(k+1)^2 (k+1)^2}
\end{aligned}
$$

以兩人 1 格為例

2 人 1 格時的過程矩陣 B_{21} 為 $\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&0&0&0\\1&1&1&1\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c|c}B_{11}&0\\\hline D_1B_{11}&D_1B_{11}\end{array}\right]$

定理四:為矩陣遞迴式 $E_{ku}B_{ku}^{r}V_{ku}$

綜合以上 $B_{k+1,u}$ 的長相如下圖

$$
B_{k+1,u}=\begin{bmatrix}
B_{ku}&0&0&\cdots&0\\
D_1B_{ku}&D_1B_{ku}&0&\vdots&\vdots\\
D_2B_{ku}&\vdots&D_2B_{ku}&0&\vdots\\
\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&0\\
D_{k-1}B_{ku}&\cdots&\cdots&D_{k-1}B_{ku}&D_{k-1}B_{ku}
\end{bmatrix}
$$

，其中 $B_{k+1,u}$ 可由 $B_{k,u}$ 產生。

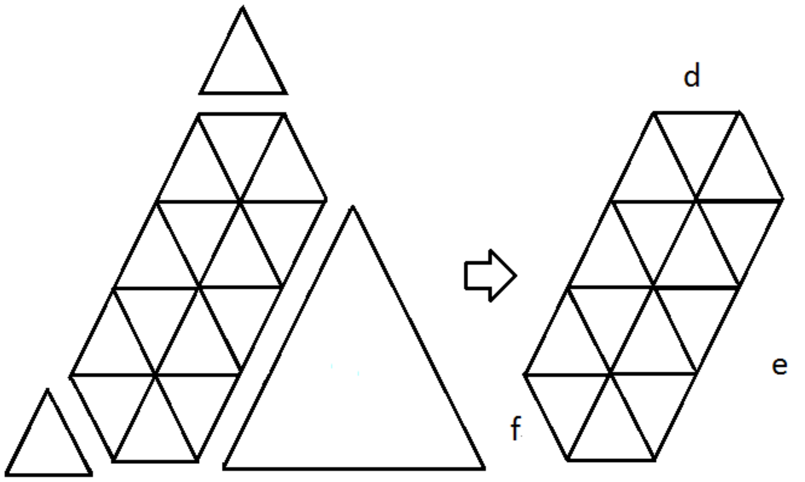
故可以利用 $E_{ku}B_{ku}^{r}V_{ku}$ ，求出 k 人向右 r 格向上 u 格捷徑不相交的答案。

其中 E、V 已知。我們可以以 $B_{1,k}$ 遞迴的方式，求出 B_{ku}

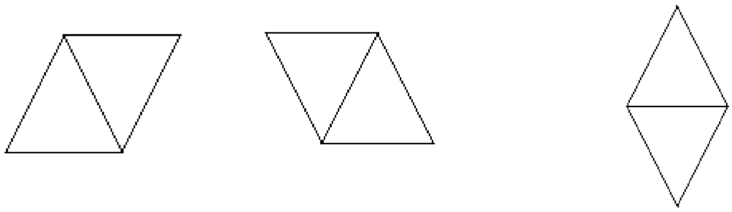
五、應用推廣

首先我們先敘述他們所相求的題目

我們將一個大三角形切成三組對邊平形的六邊形以邊長為 1 的正三角形切割，如下。



接下來，他們希望以下列三種圖形填滿此六邊形，如下三個圖。



以上是原始的他們原始問題，而他們僅求出部分的解答，所以我們發現他們的問題與我們的為等價問題，接下來我們先定義，並說明物轉換方式

【定義】

1. 設三邊長分別為 d、e、f 的三組對邊平形的六邊形，邊長以(d、e、f)表示之。
2. 下面 d 邊的每個正立三角形為起點
3. 上面 d 邊的每個倒立三角形為終點
4. 由左而右訂每個起點正立三角形為 s_i ……(i=1,2,3…)
5. 由左而右訂每個終點倒立三角形為 e_i ……(i=1,2,3…)

性質十九:d,e,f 之六邊形擺放菱形後的起點正立三角形必接至終點的倒立三角形

因為每個地磚皆為偶數個，所以每一個正立三角形地磚必接一個倒立三角形地磚，故若以正立三角形地磚為起點，則終點必為倒立三角形地磚。

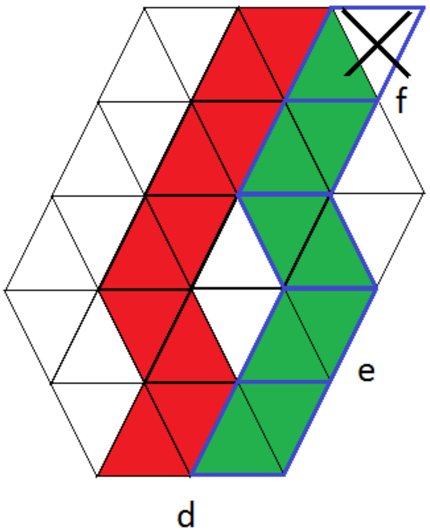
性質二十:d,e,f 之六邊形擺放菱形後所形成的路徑不相交

因為原題目中所鋪菱形地磚是以不重疊的方式進行排列，所以我們可以得知轉換過後的路徑圖必不會相交

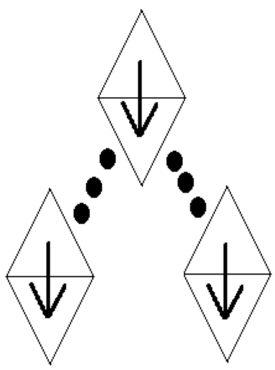
性質二十一: 起點三角形與終點三角形一一對應

由性質十六邊長為 d 的對邊中每一個起點三角形必有一終點三角形與其對應

我們假設第一個起點三角形 s_1 所連接的終點三角形非 e_1，則 $s_2 \sim s_n$ 必至少有一個起點三角形無法對應至終點三角形(如下圖)
故起點三角形與終點三角形一一對應



性質二十二:d,e,f 之六邊形擺放菱形後所剩下的地方僅有一種地磚擺法

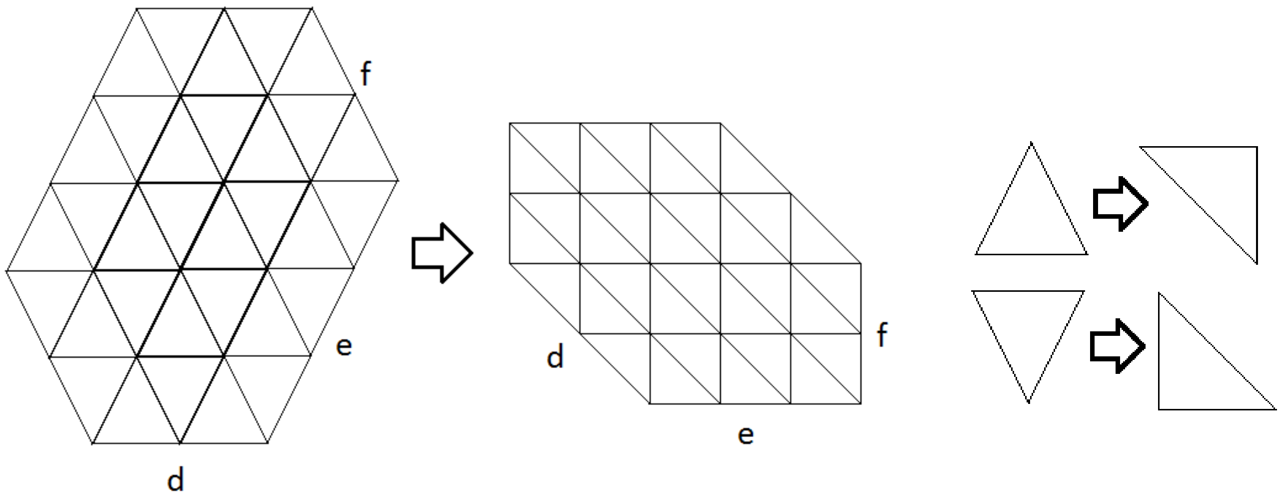


剩下的地磚只有一種因為

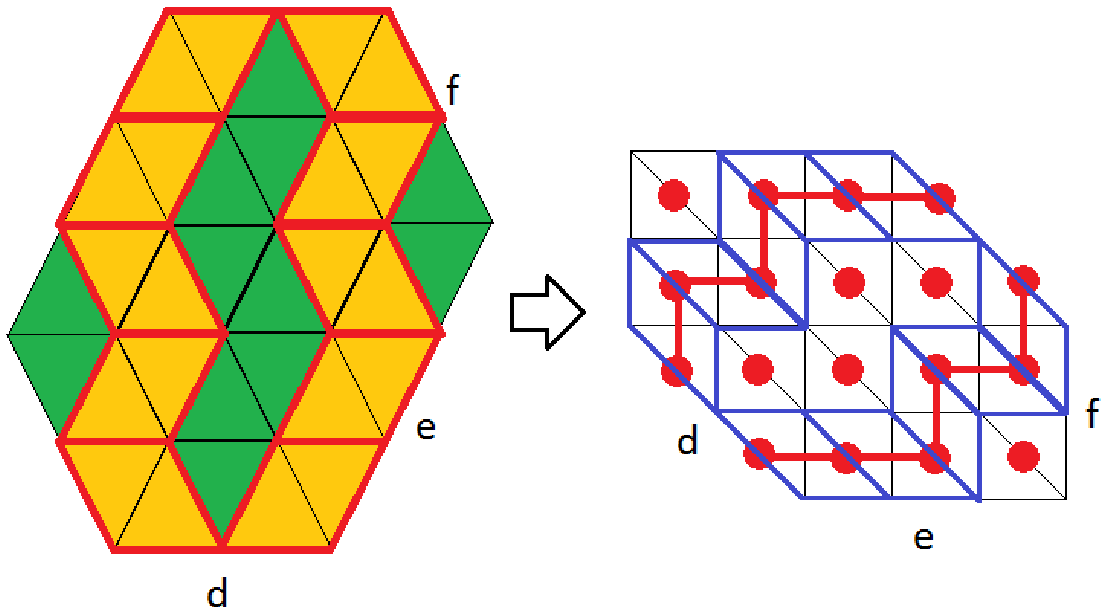
我們發現當畫出其中一條路徑之後，剩下未填滿的地方在轉換為原圖時，恰好只有一種拼法，因為起終點以路徑相連後，其他的圖形則只有上下相接的方法(如左圖)

性質二十三:d,e,f 之六邊形擺放菱形的方法數與 d 人向右 e 格向上 f 格一一對應

證明：
我們先將原本的六邊形以右下圖的方式轉為垂直(如左下圖)

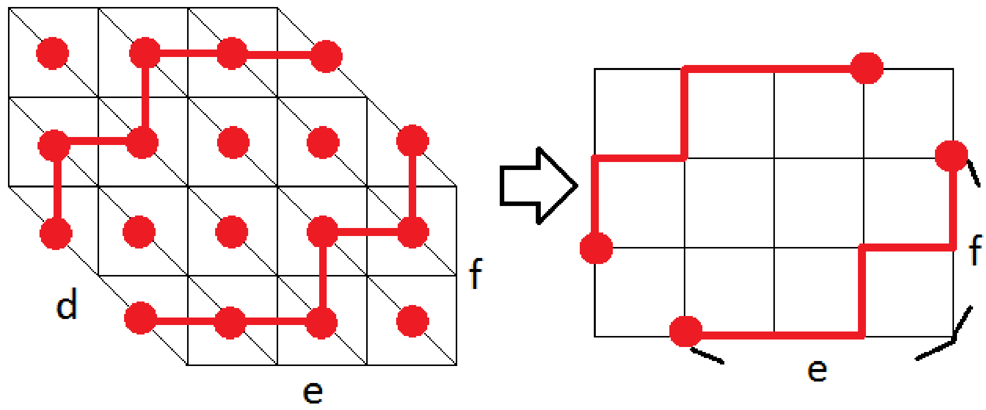


可由下面 d 邊的每個三角形取出 d 個起點，並與上面 d 邊的每個三角形取出 d 個終點，並擺放菱形地磚，再將右圖畫出路徑變為下圖

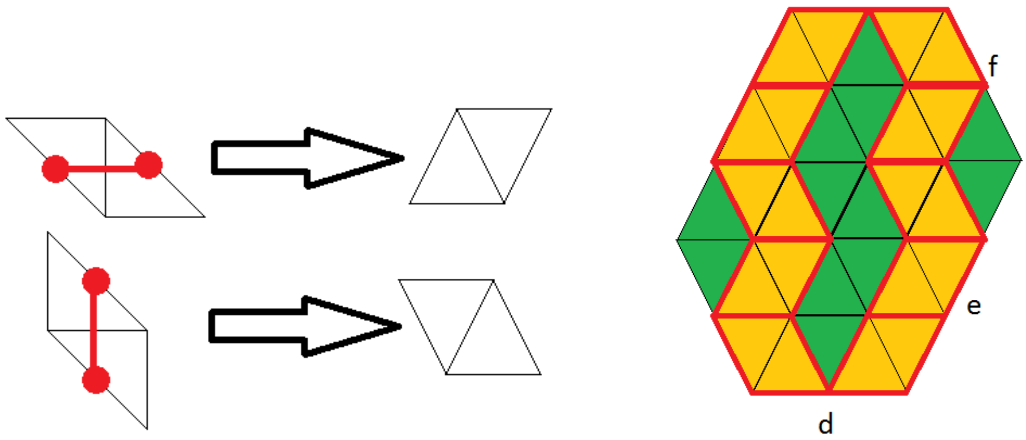


(上圖黃色表路徑，綠色為剩下未選的菱形地磚)

轉換過後 e 會變成每人向右的格數，f 會變成每人向上的格數，所以我們能將所有 d,e,f 之六邊形擺放菱形的方法轉換成 d 人向右 e 格向上 f 格。(如下圖)



換句換說，若有 k 每人向右 e 格向上 f 格不相交的的情形，我們能以左下圖將其狀況轉換成員原本六邊形鋪地磚的情形(如右下圖)



故 d,e,f 之六邊形擺放菱形的方法數與 d 人向右 e 格向上 f 格一一對應

將其變數 d 人改回 k 人, 向右 e 格向上 f 格改回向右 r 格向上 u 格，則可使其成為我們的等價問題，並利用我們的結果求出他們尚未完成的部分。

伍、 研究結果

一、探討平面上 k=2 不相交的捷徑方法數 $\dfrac{C_u^{u+r}C_u^{u+r+1}}{C_u^{u}C_u^{u+1}}$ (u,r∈N)

二、探討平面上 k=3 且 m=u=r 不相交的捷徑方法數為 $\dfrac{C_m^{2m}C_m^{2m+1}C_m^{2m+2}}{C_0^{m}C_1^{m+1}C_2^{m+2}}$ (m∈N)

三、k 人每人往右 r 格往上 u 格走捷徑不相交可轉換成 u 人每人往右 k 格往上 r 格走捷徑不相交(k,u,r∈N)

四、發現過程矩陣的遞迴式

五、d,e,f 之六邊形擺放菱形的方法數與 d 人向右 e 格向上 f 格一一對應

陸、 討論

經過我們從高一勤奮不懈的努力，從一開始的懵懂無知，慢慢摸索及尋找我們的題目，在我們學完排列組合的捷徑數之後，變成討論挖洞之後的捷徑數，但總是覺得還不夠複雜，所以我們利用程式嘗試兩人同時一起走捷徑討論出我們的兩人走捷徑的結論。接下來，我們再一次利用程式試算三人一起的捷徑數，也成功的證明出其公式。但，因為 4 人的太過複雜，就算用電腦算出其值，也無法分析關係，於是我們使用兩種方式，第一是利用轉換的關係，並利用它和我們已知的部分求出可轉換出的答案，第二是利用矩陣遞迴式可算出所有問題的解答。最後我們將之前其他人科展的鋪地磚問題化為我們的其中一個等價問題，並使用我們的結果解決之。而未來我們有三個方向繼續探討我們題目，第一，研究轉換模型的降階性質，未來希望能以降階的方式求出我們的所求。第二，因為過程矩陣的長相非常特殊，我們希望未來可以探討其高次方的計算法。第三，依照我們兩人和三人的公式，我們猜測 $\dfrac{C_u^{u+r}C_u^{u+r+1}\cdots C_u^{u+r+k-1}}{C_u^{u}C_u^{u+1}\cdots C_u^{u+k-1}}$ 為我們的一般式，且 4 人以上有部分已利用我們轉移的方法或矩陣遞迴式的方式算出，發現其解皆正確，且分母與 r 無關，非常的神奇，我們希望未來可以成功證明出其一般式。

柒、 結論

在我們研究這個專題的同時，我們學習到了三種方法解決我們的問題，首先是我們終點交換的方式，雖然到 k 的值太大之後，會使狀況過於複雜，不利繼續討論。但在 k=2 時卻是很棒的解決方法。接下來，我們學習到利用箭頭數加上轉換模型的方式，可以學著將題目中的變數做變換，製造出等價的問題，就可利用已知的結果得到更多我們所想求出的答案。最後是矩陣遞迴的表示，找尋出我們的矩陣遞迴關係時，我們才發現其實矩陣是可以依所求而改變的，可以依不同的定義，不同的擺放位置，會有不同的結果，而我們需要的是創造力，想出一個最適合計算的矩陣，於是我們利用我們所想出的矩陣推出了我們解答的矩陣遞迴式，用其表示所有的答案。在這次的科展學習當中，我們了解到解決一件事的方法不只有一種兩種，而是有無限多種方式，條條大路通羅馬，我們利用不同的方式只想求出同一個答案。而途中也遇到了一些其他的問題，我們相信以問題衍伸問題也是學習科學很重要的部分，總而言之，過程是追尋結果的必經之路，而結果總是讓我們擁有更多的過程，我們沉醉在這種遞迴關係，就像是科技不斷的進步，於是我們希望之後可以不斷的研究下去……

捌、 參考資料及其他

一、參考資料

1.高中數學課本第二冊排列組合

2 高中數學課本第四冊轉移矩陣

2.國立武陵高級中學:拼出詭譎--變幻莫測的地磚 www.cdjh.hc.edu.tw/SC2008/senior/040403.pdf

【評語】040408

本作品在一人、二人和三人時得到肯定的結果，有些不錯的數學技巧，特別時性質 12 和 13 的處理手法及結論相當有趣，可惜有錯誤及沒有好好利用這些結果去推出一般性的結果。對於一般 K，作者似乎想以矩陣來處理,卻有些定義沒有寫清楚,有些陳述錯誤。但不管如何,矩陣的使用確實是一個特點,應該較深入研究其性質，用來嘗試證明其已歸納出的數學公式。