中華民國第55屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

佳作

040407

過定角內定點之直線所圍三角形之六心軌跡性質研究

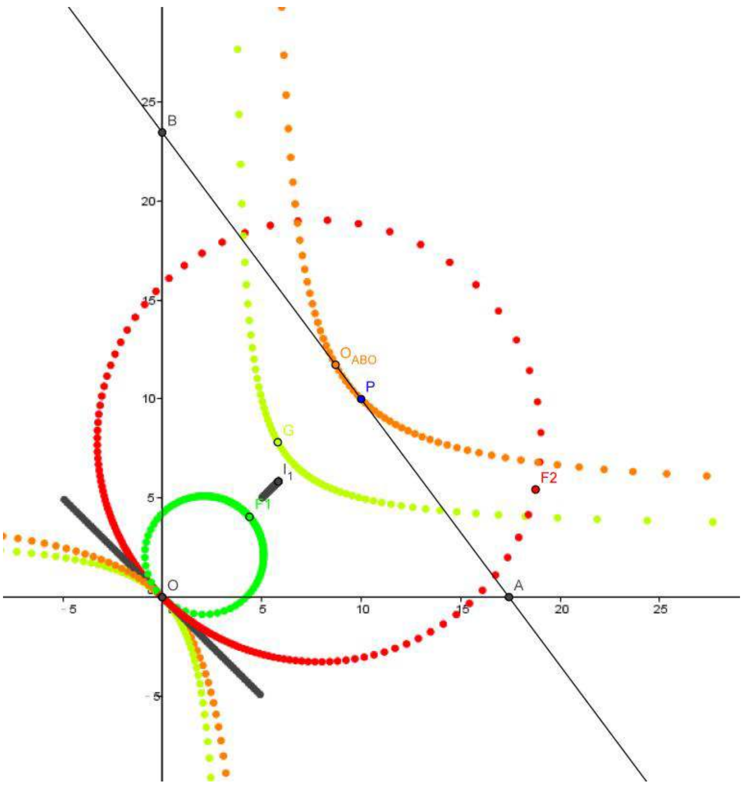
學校名稱：高雄市立高雄高級中學

作者：	指導老師：
高一　李柄賢 高一　邱于賓	黃仁杰 江國宏

關鍵詞：軌跡、解析幾何、等值曲線

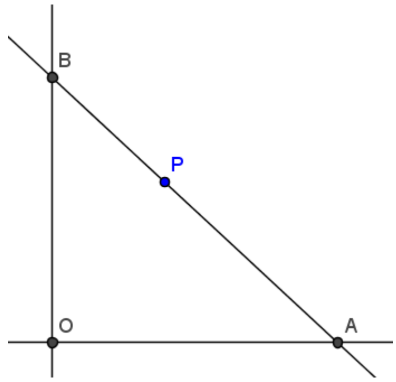
摘要

本篇研究主題為給一定角$\angle XOY$，在定角內某一定點P，則任意通過P之直線L分別交直線$\overleftrightarrow{OX},\overleftrightarrow{OY}$於$A,B$兩點，我們想研究當通過$P$直線$L$開始變動，則三角形$\Delta OAB$外心$O_{OAB}$、內心$I$、重心$G$、垂心$H$、第一費馬點$F_1$、第二費馬點$F_2$軌跡圖形為何？特別當$\angle XOY=\dfrac{\pi}{2}$時可利用解析幾何的方法，證明外心$O_{ABO}$、重心$G$軌跡均是雙曲線，內心$I$軌跡是一條在$x-y=0$及$x+y=0$上的線段，垂心$H$就是頂點$O$，第一、二費馬點$F_1$、$F_2$軌跡分別為圓。即六心在此情形下均屬於圓錐曲線，事實上當$\angle XOY$為一般角度時，利用純幾何證明發現，重心G、垂心H、外心O_{ABO}軌跡均為雙曲線，第一、二費馬點F_1、F_2軌跡也均為圓，之後將問題推廣到三維空間四面體$O-ABC$，若考慮給定空間中四面$O-ABC$，且平面ABC恆通過定點P，研究此四面體$O-ABC$外接球心O_1、重心G、內切球心I軌跡圖形為何，發現與平面狀況類似結果。



壹、研究動機

在直線與斜率的課程時，有一個題目是說「平面上有一定點，過這個點的任意直線與 X 軸 Y 軸所圍成三角形的面積最小值為何？」因此，我們便將此線與 X 軸 Y 軸所圍成三角形，進一步計算其斜邊最小值，即在 X 軸上取一點 $A(a,0)$ ，在 Y 軸上取一點 $B(0,b)$ ，在 $\overleftrightarrow{AB}$ 上取一固定點 $P\left(x_0,y_0\right)$ ，而直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 繞點 $P\left(x_0,y_0\right)$ 旋轉，(如圖一所示)則



(圖一)

斜邊 $\overline{AB}$ 最小值為 $\sqrt{(x_0^{\frac{2}{3}}+y_0^{\frac{2}{3}})^3}$ ，等號成立條件為

$$a=\sqrt[3]{x_0}\left(\frac{x_0}{\sqrt[3]{x_0}}+\frac{y_0}{\sqrt[3]{y_0}}\right);\ b=\sqrt[3]{y_0}\left(\frac{x_0}{\sqrt[3]{x_0}}+\frac{y_0}{\sqrt[3]{y_0}}\right).$$

計算:在 ΔOAB 中，斜邊 $\overline{AB}=\sqrt{a^2+b^2}$ ，

$\overleftrightarrow{AB}$ 的截距式為 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 又因 $P\left(x_0,y_0\right)\in\overleftrightarrow{AB}$ 有 $\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}=1$ ---(*)的關係

利用廣義柯西不等式

$$\left(a^2+b^2\right)\left(\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}\right)\left(\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}\right)=\left[(a^{\frac{2}{3}})^3+(b^{\frac{2}{3}})^3\right]\left[((\frac{x_0}{a})^{\frac{1}{3}})^3+((\frac{y_0}{b})^{\frac{1}{3}})^3\right]\left[((\frac{x_0}{a})^{\frac{1}{3}})^3+((\frac{y_0}{b})^{\frac{1}{3}})^3\right].$$

$$\geq(x_0^{\frac{2}{3}}+y_0^{\frac{2}{3}})^3\Rightarrow a^2+b^2\geq(x_0^{\frac{2}{3}}+y_0^{\frac{2}{3}})^3\Rightarrow\overline{AB}\geq\sqrt{(x_0^{\frac{2}{3}}+y_0^{\frac{2}{3}})^3}$$

等號成立的條件為： $\frac{a^3}{b^3}=\frac{x_0}{y_0}\Rightarrow$ 令 $\begin{cases}a=\sqrt[3]{x_0}\,t----(1)\\ b=\sqrt[3]{y_0}\,t----(2)\end{cases}$ 其中 t 為常數

將 (1)(2) 代入 $\overleftrightarrow{AB}$ 的(*)得 $\frac{x_0}{\sqrt[3]{x_0}}+\frac{y_0}{\sqrt[3]{y_0}}=t$ ，因此 $a=\sqrt[3]{x_0}\left(\frac{x_0}{\sqrt[3]{x_0}}+\frac{y_0}{\sqrt[3]{y_0}}\right);\ b=\sqrt[3]{y_0}\left(\frac{x_0}{\sqrt[3]{x_0}}+\frac{y_0}{\sqrt[3]{y_0}}\right)$ 。

此時讓我們好奇若當 $\overleftrightarrow{AB}$ 恆過定點 $P\left(x_0,y_0\right)$ 時，則 ΔOAB 六個心(外心 O 、內心 I 、重心 G 、垂心 H 、費馬點 F_1 、第二費馬點 F_2)的軌跡方程式為何?因此進行了我們本篇研究。

貳、研究目的

給定一定角 $\angle XOY$，在定角內給一定點 P，則任意通過 P 之直線 L 分別交直線 $\overleftrightarrow{OX},\overleftrightarrow{OY}$ 於 A,B 兩點，我們想研究當通過 P 直線 L 開始變動，則三角形 ΔOAB 外心 O_{ABO}、內心 I、重心 G、垂心 H、第一費馬點 F_1、第二費馬點 F_2 的軌跡圖形為何？

問題一:當 $\angle XOY=\frac{\pi}{2}$，其三角形 ΔOAB 各心軌跡圖形為何?

問題二:當 $\angle XOY$ 為任意角時，其三角形 ΔOAB 各心軌跡圖形為何?

若給定空間中四面體 $O-ABC$，且平面 ABC 恆通過定點 $P\left(x_0,y_0,z_0\right)$，我們想研究此四面體 $O-ABC$ 外接球心 O_1、重心 G、內切球心 I 軌跡圖形為何?

問題三:當 $\angle AOB=\angle AOC=\angle BOC=\frac{\pi}{2}$，其四面體 $O-ABC$ 外接球心 O_1、重心 G、內切球心 I 軌跡圖形為何?

問題四:當 $\angle AOB,\angle AOC,\angle BOC$ 為任意角時，其四面體 $O-ABC$ 重心 G 軌跡方程式為何?

參、研究設備及器材

紙、筆、電腦、GeoGebra 繪圖軟體，Microsoft Office Word，Mathtype。

肆、名詞定義與預備定理

一、第一費馬點 F_1

定義：

第一費馬點是位於三角形內的一個點，而此點到三頂點的距離和為最小。例如給定一個三角形 ΔABC 的話，從這個三角形的費馬點 F 到三角形的三個頂點 A、B、C 的距離之和比從其它點算起的都要小。

做法：

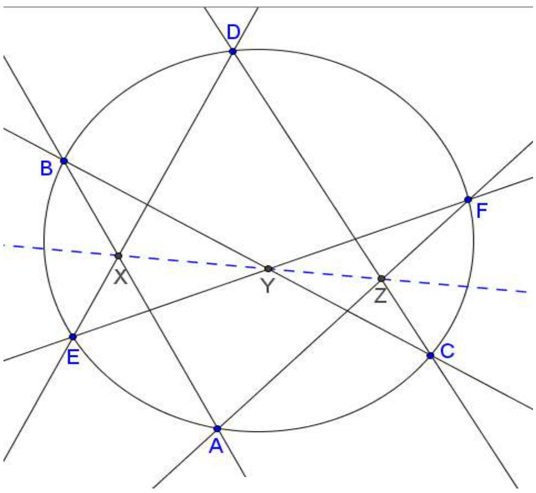
當三角形 ΔABC 的內角都小於 120° 時以三角形的每一邊為底邊，向外做三個正三角形 $\Delta ABC'$，$\Delta BCA'$，$\Delta CAB'$。連接 $\overline{CC'}$、$\overline{BB'}$、$\overline{AA'}$，則三條線段的交點就是所求的點。

二、第二費馬點 F_2

因此，我們將第一費馬點的做法改變為以三角形的每一邊為底邊，向內做三個正三角形 $\Delta ABC'$，$\Delta BCA'$，$\Delta CAB'$。連接 $\overline{CC'}$、$\overline{BB'}$、$\overline{AA'}$，則三條線段的交點就是所求的點。

三、帕斯卡(逆)定理

圓錐曲線上六點 A,B,C,D,E,F，$\overleftrightarrow{AB}$ 與 $\overleftrightarrow{DE}$ 的交點 X，$\overleftrightarrow{BC}$ 與 $\overleftrightarrow{EF}$ 的交點 Y，$\overleftrightarrow{CD}$ 與 $\overleftrightarrow{FA}$ 的交點 Z，則 X,Y,Z 共線(反之,若任六點 A,B,C,D,E,F，$\overleftrightarrow{AB}$ 與 $\overleftrightarrow{DE}$ 的交點 X，$\overleftrightarrow{BC}$ 與 $\overleftrightarrow{EF}$ 的交點 Y，$\overleftrightarrow{CD}$ 與 $\overleftrightarrow{FA}$ 的交點 Z，滿足 X,Y,Z 共線,則有 A,B,C,D,E,F 共圓錐曲線)，如圖二所示。



圖(二)

伍、研究過程

為了將問題簡化，我們首先考慮將 $\angle XOY$ 設為直角，因此我們將 $\overrightarrow{OX}$ 視為 X 軸，$\overrightarrow{OY}$ 視為 Y 軸，則如問題一。

問題一:當 $\angle XOY=\dfrac{\pi}{2}$ 時，直角三角形 ΔOAB 斜邊 $\overline{AB}$ 過定點之六心軌跡討論

我們做進一步的思考，既然是三角形，就一定會有各種“心”，那我們就想要找出在直線 $\overleftrightarrow{AB}$ (斜邊)繞點 P 轉時六個心外心 O 、內心 I 、重心 G 、垂心 H 、第一費馬點 F_1 、第二費馬點 F_2)的軌跡的方程式及性質。

(一)直角三角形 ΔOAB 中，在斜邊 $\overline{AB}$ 上過定點 P 時旋轉的重心 G 軌跡為雙曲線。

證明: 如圖三所示，建立座標系令 $O(0,0)$ ， $A(a,0)$ ， $B(0,b)$ ，

定點 $P(x_0,y_0)$ ，則重心座標 $G\left(\dfrac{a}{3},\dfrac{b}{3}\right)$ ，

令 $x=\dfrac{a}{3}, y=\dfrac{b}{3}\Rightarrow a=3x, b=3y$.

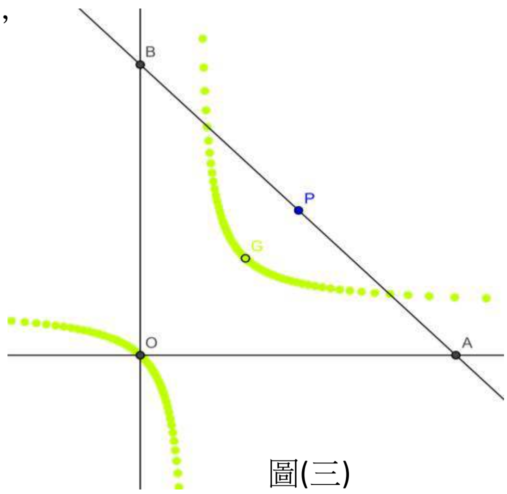
將 a 、 b 代入 $\overleftrightarrow{AB}$ 的截距式得 $\dfrac{x_0}{3x}+\dfrac{y_0}{3y}=1$

經整理後得到重心 G 的軌跡方程式為 $3xy-yx_0-xy_0=0$.

$\Rightarrow xy-\dfrac{x_0}{3}y-\dfrac{y_0}{3}x=0$.

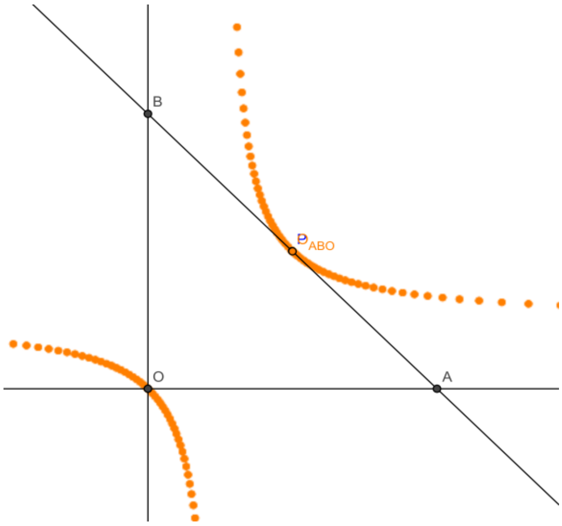
得到 $\Rightarrow\left(x-\dfrac{x_0}{3}\right)\left(y-\dfrac{y_0}{3}\right)=\dfrac{x_0y_0}{9}$.

因此，重心 G 的軌跡為等軸雙曲線，雙曲線中心為 $\left(\dfrac{x_0}{3},\dfrac{y_0}{3}\right)$.



圖(三)

(二)直角三角形 ΔOAB 中，在斜邊 $\overline{AB}$ 過定點 P 時旋轉時的外心 O_{ABO} 軌跡為雙曲線。



圖(四)

證明: 如圖四所示，建立座標系令 $O(0,0)$ ， $A(a,0)$ ， $B(0,b)$

定點 $P(x_0, y_0)$，則重心座標 $O_{ABO} = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$，

令 $x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2} \Rightarrow a = 2x, b = 2y.$

將 a 、 b 代入 $\overleftrightarrow{AB}$ 的截距式 $\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} = 1$ 得 $\frac{x_0}{2x} + \frac{y_0}{2y} = 1.$

外心 O_{ABO} 的軌跡方程式為 $2xy - yx_0 - xy_0 = 0$.

$$\Rightarrow xy - \frac{x_0}{3} y - \frac{y_0}{3} x = 0.$$

$$\left(x - \frac{x_0}{2}\right)\left(y - \frac{y_0}{2}\right) = \frac{x_0 y}{4}.$$

因此，外心 O_{ABO} 的軌跡為等軸雙曲線，雙曲線中心為 $\left(\frac{x_0}{2}, \frac{y_0}{2}\right)$.

(三)直角三角形 ΔOAB 中，在斜邊 $\overline{AB}$ 過定點 P 時旋轉時的內心 I 軌跡為線段。

證明: 如圖五所示，建立座標系令 $O(0,0)$ ， $A(a,0)$ ， $B(0,b)$，定點 $P(x_0, y_0)$，則 $\overleftrightarrow{AB}$ 的截距式 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 且 $\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} = 1$.設內心座標 $I(r, r)$，則 I 到直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 的距離為 r .(其中 r 為內切球半徑)

$$\therefore \frac{\left|\frac{r}{a} + \frac{r}{a} - 1\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}} = r \Rightarrow r = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}} \left(\because \frac{r}{a} + \frac{r}{a} - 1 < 0\right)$$

令 $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b} \Rightarrow r = \frac{1}{x + y + \sqrt{x^2 + y^2}}$.

得出內切球心 I 的軌跡為**平面上線段其參數式為** (r, r)，我們想計算 $r = \frac{1}{x + y + \sqrt{x^2 + y^2}}$ 範圍為何，其中 $x_0 x + y_0 y = 1$.

以下計算在限制條件為 $g(x, y) = x_0 x + y_0 y - 1 = 0$ ， $f(x, y) = x + y + \sqrt{x^2 + y^2}$ 之極值為何？此時我們利用多變數微積分中拉格朗日乘數定理來幫助我們計算，

$$\begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_x = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lambda x_0 \\ f_y = 1 - \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lambda y_0 \end{cases} \text{且 } x_0 x + y_0 y = 1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

我們利用極座標

$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$，且 $x^2+y^2=\rho^2$ 將其帶入上式 $(*)$ 得到

$$\begin{cases} x_0\rho\cos\theta + y_0\rho\sin\theta = 1 \\ 1-\cos\theta = \lambda x_0 \\ 1-\sin\theta = \lambda y_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0\rho\cos\theta + y_0\rho\sin\theta = 1 \ldots\ldots\ldots(1) \\ \cos\theta = 1-\lambda x_0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2) \\ \sin\theta = 1-\lambda y_0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3) \end{cases}$$

(2)式與(3)式平方相加得到

$$(1-\lambda x_0)^2 + (1-\lambda y_0)^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda^2(x_0^2+y_0^2) - \lambda(2x_0+2y_0) + 1 = 0 .$$

$$\lambda = \frac{(x_0+y_0)\pm\sqrt{2x_0y_0}}{x_0^2+y_0^2}$$

由(1)式得

$$\therefore \rho = \frac{1}{x_0\cos\theta + y_0\sin\theta} = \frac{1}{\left[x_0(1-\lambda x_0) + y_0(1-\lambda y_0)\right]} .$$

$$\begin{aligned} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) &= \rho(\cos\theta+\sin\theta+1) \\ &= \rho(1-\lambda x_0 + 1 - \lambda y_0 + 1) \\ &= \rho\left[3-\lambda(x_0+y_0)\right] \\ &= \frac{3-\lambda(x_0+y_0)}{(x_0+y_0)-\lambda(x_0^2+y_0^2)} \ldots\ldots\ldots(4) \end{aligned}$$

將 $\lambda = \dfrac{(x_0+y_0)\pm\sqrt{2x_0y_0}}{x_0^2+y_0^2}$ 代入(4)式有以下討論

若 $\lambda_1 = \dfrac{(x_0+y_0)+\sqrt{2x_0y_0}}{x_0^2+y_0^2}$ 則 $f(x,y) = \dfrac{-3+\lambda_1(x_0+y_0)}{\sqrt{2x_0y_0}}$.

若 $\lambda_2 = \dfrac{(x_0+y_0)-\sqrt{2x_0y_0}}{x_0^2+y_0^2}$ 則 $f(x,y,z) = \dfrac{3-\lambda_2(x_0+y_0)}{\sqrt{2x_0y_0}}$.

此時我們需判別上面兩式何者為極大值何者為極小值，我們發現

$$\frac{3-\lambda_2\left(x_0+y_0\right)}{\sqrt{2x_0y_0}} > \frac{-3+\lambda_1\left(x_0+y_0\right)}{\sqrt{2x_0y_0}}.$$

因為 $3-\lambda_2\left(x_0+y_0\right) > -3+\lambda_1\left(x_0+y_0\right) \Leftrightarrow 6 > \left(\lambda_1+\lambda_2\right)\left(x_0+y_0\right) \Leftrightarrow 3 > \frac{(x_0+y_0)^2}{x_0^2+y_0^2}$

$$\Leftrightarrow 3(x_0^2+y_0^2) > (x_0+y_0)^2 \Leftrightarrow x_0^2+y_0^2 > x$$

$$\Leftrightarrow (x_0-\frac{1}{2}y_0)^2+\frac{3}{4}y_0^2 > 0$$ 恆成立。

因此 $\frac{-3+\lambda_1\left(x_0+y_0\right)}{\sqrt{2x_0y_0}} \le f(x,y,z) \le \frac{3-\lambda_2\left(x_0+y_0\right)}{\sqrt{2x_0y_0}}$.

所以

$\frac{\sqrt{2x_0y_0}}{3-\lambda_2\left(x_0+y_0\right)} \le r \le \frac{\sqrt{2x_0y_0}}{-3+\lambda_1\left(x_0+y_0\right)}$，其中 $\lambda_1 = \frac{(x_0+y_0)+\sqrt{2x_0y_0}}{x_0^2+y_0^2}, \lambda_2 = \frac{(x_0+y_0)-\sqrt{2x_0y_0}}{x_0^2+y_0^2}$.

，如圖十五所示。

事實上我們又發現以下結論，

1.若 $x_0 > y_0$，則

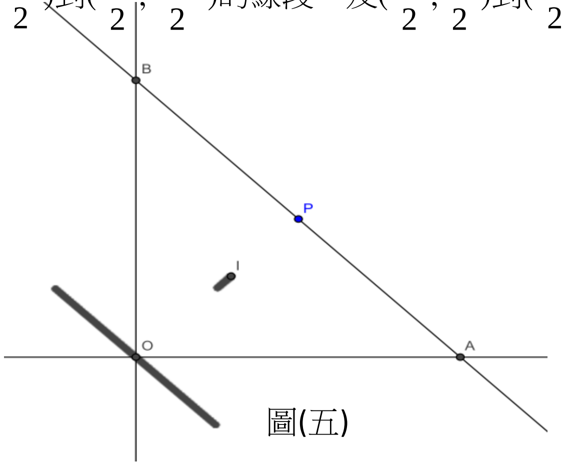
(1) $\frac{x_0}{2} < y_0$ 軌跡為 $(\frac{-y_0}{2},\frac{y_0}{2})$ 到 $(\frac{x_0}{2},\frac{-x_0}{2})$ 的線段，及在 $x=y$ 上的線段最小值為 $(\frac{x_0}{2},\frac{x_0}{2})$，最大值在 $\overline{IP} \perp \overline{AB}$ 時發生。

(2) $\frac{x_0}{2} > y_0$ 軌跡為 $(\frac{-y_0}{2},\frac{y_0}{2})$ 到 $(\frac{x_0}{2},\frac{-x_0}{2})$ 的線段，及 $(\frac{x_0}{2},\frac{x_0}{2})$ 到 $(\frac{y_0}{2},\frac{y_0}{2})$ 的線段。

2.若 $x_0 < y_0$，則

(1) $\frac{x_0}{2} < y_0$ 軌跡為 $(\frac{-y_0}{2},\frac{y_0}{2})$ 到 $(\frac{x_0}{2},\frac{-x_0}{2})$ 的線段，及在 $x=y$ 上的線段最小值為 $(\frac{y_0}{2},\frac{y_0}{2})$，最大值在 $\overline{IP} \perp \overline{AB}$ 時發生。

(2) $\frac{x_0}{2} > y_0$ 軌跡為 $(\frac{-y_0}{2},\frac{y_0}{2})$ 到 $(\frac{x_0}{2},\frac{-x_0}{2})$ 的線段，及 $(\frac{x_0}{2},\frac{x_0}{2})$ 到 $(\frac{y_0}{2},\frac{y_0}{2})$ 的線段。



圖(五)

(四)直角三角形 ΔOAB 中，在斜邊 $\overline{AB}$ 過定點 P 時旋轉時的垂心 H 軌跡為原點。

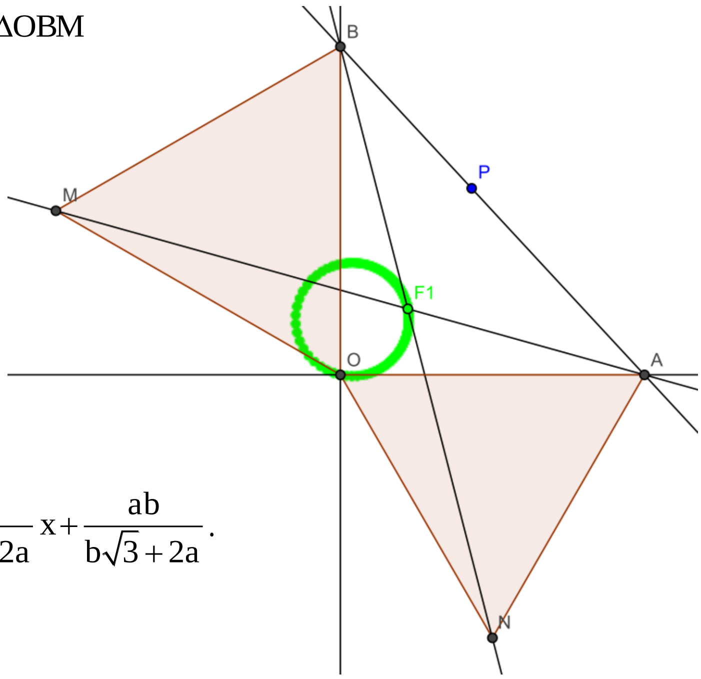
(五)直角三角形 ΔOAB 中，在斜邊 $\overline{AB}$ 過定點 P 時旋轉時的第一費馬點 F_1 軌跡為圓。

證明：

如圖六所示，建立座標系令 $O(0,0)$ ， $A(a,0)$ ， $B(0,b)$ 則

以 $\overline{OA}$ 、 $\overline{OB}$ 為底，向外作正三角形 ΔOAN 、 ΔOBM

$\because \Delta OBM, \Delta OAN$ 為正三角形，



圖(六)

先求出 $\overleftrightarrow{AM}$ ：

$$\Rightarrow M(\frac{-b\sqrt{3}}{2},\frac{b}{2}),\ A(a,0)$$

$$\Rightarrow \text{令}\ \overleftrightarrow{AM}: y=nx+m \Rightarrow \begin{cases} \frac{b}{2}=-n\times\frac{b\sqrt{3}}{2}+m \\ 0=an+m \end{cases}$$

$$\Rightarrow n=\frac{-b}{b\sqrt{3}+2a},\ m=\frac{ab}{b\sqrt{3}+2a} \Rightarrow \overleftrightarrow{AM}: y=\frac{-b}{b\sqrt{3}+2a}x+\frac{ab}{b\sqrt{3}+2a}.$$

再求直線 $\overleftrightarrow{BN}$ ： $\Rightarrow N(\frac{a}{2},\frac{-a\sqrt{3}}{2}),\ B(0,b)$

$$\text{斜率}\ m=\frac{\frac{-\sqrt{3}a}{2}-b}{\frac{a}{2}}=\frac{-a\sqrt{3}-2b}{a}.$$

$$\text{直線}\ \overleftrightarrow{BN}: y=\frac{-a\sqrt{3}-2b}{a}x+b$$

$$\text{接著將}\ \overleftrightarrow{AM}\ \text{與}\ \overleftrightarrow{BN}\ \text{解聯立} \begin{cases} y=\frac{-b}{\sqrt{3}b+2a}x+\frac{ab}{\sqrt{3}b+2a} \\ y=\frac{-\sqrt{3}a-2b}{a}x+b \end{cases} \Rightarrow x=\frac{ab^2\sqrt{3}+a^2b}{6ab+2\sqrt{3}(a^2+b^2)}.$$

$$\Rightarrow y=\frac{-a\sqrt{3}-2b}{a}\cdot\frac{ab^2\sqrt{3}+a^2b}{6ab+2\sqrt{3}(a^2+b^2)}+b=\frac{a^2b\sqrt{3}+ab^2}{6ab+2\sqrt{3}(a^2+b^2)}.$$

$$\text{因此，交點}\ F_1\ \text{為}\ (x,y)=(\frac{ab^2\sqrt{3}+a^2b}{6ab+2\sqrt{3}(a^2+b^2)},\frac{a^2b\sqrt{3}+ab^2}{6ab+2\sqrt{3}(a^2+b^2)})$$

以 x 除 y 得 $\dfrac{y}{x}=\dfrac{\dfrac{a^2b\sqrt{3}+ab^2}{6ab+2\sqrt{3}(a^2+b^2)}}{\dfrac{ab^2\sqrt{3}+a^2b}{6ab+2\sqrt{3}(a^2+b^2)}}=\dfrac{a\sqrt{3}+b}{b\sqrt{3}+a}=\dfrac{\sqrt{3}+\dfrac{b}{a}}{[1+\sqrt{3}(\dfrac{b}{a})]}$

再整理得 $\Rightarrow \dfrac{y}{x}+\sqrt{3}(\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{y}{x})=\sqrt{3}+\dfrac{b}{a}\Rightarrow\dfrac{b}{a}=\dfrac{y-\sqrt{3}x}{x-\sqrt{3}y}$

$$y=\frac{a^2b\sqrt{3}+ab^2}{6ab+2\sqrt{3}(a^2+b^2)}=\frac{b(\sqrt{3}+\frac{b}{a})}{6(\frac{b}{a})+2\sqrt{3}[1+(\frac{b}{a})^2]}=\frac{(\frac{b}{a}x_0+y_0)(\sqrt{3}+\frac{b}{a})}{6(\frac{b}{a})+2\sqrt{3}[1+(\frac{b}{a})^2]}$$

由 $\overleftrightarrow{AB}$ 的截距式整理得到 $\left(\because \dfrac{x_0}{a}+\dfrac{y_0}{b}=1\Rightarrow\dfrac{b}{a}x_0+y_0=b\right)$

以下將 $\dfrac{b}{a}$ 帶入 y 並將 y 分為分子與分母計算

分子化簡為

$$(\frac{b}{a}x_0+y_0)(\sqrt{3}+\frac{b}{a})=(\frac{b}{a})\sqrt{3}x_0+(\frac{b}{a})^2x_0+\sqrt{3}y_0+(\frac{b}{a})y_0$$

$$=(\frac{y-\sqrt{3}x}{x-\sqrt{3}y})\sqrt{3}x_0+(\frac{y-\sqrt{3}x}{x-\sqrt{3}y})^2x_0+\sqrt{3}y_0+(\frac{y-\sqrt{3}x}{x-\sqrt{3}y})y_0=\frac{[2\sqrt{3}xy-2y^2]x_0+[-2xy+2\sqrt{3}y^2]y_0}{x^2-2\sqrt{3}xy+3y^2}$$

分母化簡為

$$6(\frac{b}{a})+2\sqrt{3}[1+(\frac{b}{a})^2]=6(\frac{y-\sqrt{3}x}{x-\sqrt{3}y})+2\sqrt{3}[1+(\frac{y-\sqrt{3}x}{x-\sqrt{3}y})^2]=\frac{2\sqrt{3}x^2+2\sqrt{3}y^2}{x^2-2\sqrt{3}xy+3y^2}$$

接著將分子與分母合併 $y=\dfrac{[2\sqrt{3}xy-2y^2]x_0+[-2xy+2\sqrt{3}y^2]y_0}{2\sqrt{3}x^2+2\sqrt{3}y^2}$

第一費馬點 F_1 的軌跡為一個圓： $\sqrt{3}x^2+\sqrt{3}y^2=[\sqrt{3}x-y]x_0+[\sqrt{3}y-x]y_0$

$$\Rightarrow[x-\frac{1}{2}(x_0-\frac{y_0}{\sqrt{3}})]^2+[y-\frac{1}{2}(y_0-\frac{x_0}{\sqrt{3}})]^2=\frac{1}{4}[(x_0-\frac{y_0}{\sqrt{3}})^2+(y_0-\frac{x_0}{\sqrt{3}})^2]$$

因此圓心位於 $\left(\dfrac{1}{2}(x_0-\dfrac{y_0}{\sqrt{3}}),\dfrac{1}{2}(y_0-\dfrac{x_0}{\sqrt{3}})\right)$ 半徑為 $\sqrt{\dfrac{1}{4}[(x_0-\dfrac{y_0}{\sqrt{3}})^2+(y_0-\dfrac{x_0}{\sqrt{3}})^2]}$.

接著我們就想既然有向外作正三角形的，那麼向內作正三角形會不會交於一點呢？

(六)直角三角形ΔOAB中，在斜邊$\overline{AB}$過定點P時旋轉時的第二費馬點F_2軌跡為圓。

證明：

如圖七所示，建立座標系令$O(0,0)$ ， $A(a,0)$ ， $B(0,b)$則

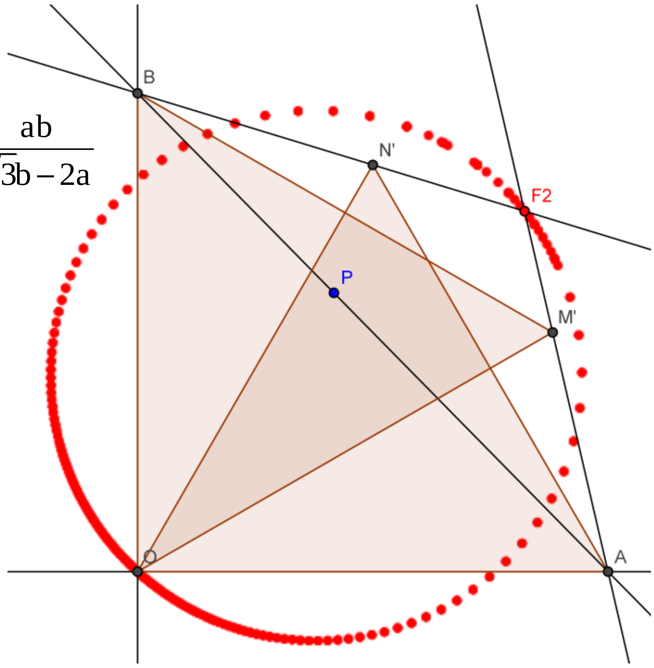
以$\overline{OA}$、$\overline{OB}$為底，向內作正三角形$\Delta OAN'$、$\Delta OBM'$

$\overleftrightarrow{AM'}$過$(a,0),(\frac{\sqrt{3}b}{2},\frac{b}{2})$ $\Rightarrow \overleftrightarrow{AM'}$ ： $y=\frac{b}{\sqrt{3}b-2a}x-\frac{ab}{\sqrt{3}b-2a}$

$\overleftrightarrow{BN'}$過$(0,b),(\frac{a}{2},\frac{\sqrt{3}a}{2})$ $\Rightarrow \overleftrightarrow{BN'}$ ： $y=\frac{\sqrt{3}a-2b}{a}x+b$

$$\Rightarrow x=\frac{\sqrt{3}ab^2-a^2b}{2\sqrt{3}a^2-6ab+2\sqrt{3}b^2}$$

$$y=\frac{\sqrt{3}a^2b-ab^2}{2\sqrt{3}a^2-6ab+2\sqrt{3}b^2}$$



圖(七)

以x除y得$\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{3}ab^2-a^2b}{\sqrt{3}a^2b-ab^2}=\frac{\sqrt{3}b-a}{\sqrt{3}a-b}=\frac{\sqrt{3}-\frac{b}{a}}{\sqrt{3}\left(\frac{b}{a}\right)-1}$.

整理後得$\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}x+y}{\sqrt{3}y+x}$.

$\overleftrightarrow{AB}$的截距式整理得到$\left(\because \frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}=1\Rightarrow\frac{b}{a}x_0+y_0=b\right)$將b代入

$$y=\frac{b\left(\sqrt{3}-\frac{b}{a}\right)}{2\sqrt{3}-6\times\frac{b}{a}+2\sqrt{3}\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\frac{\left(\frac{b}{a}x_0+y_0\right)\left(\sqrt{3}-\frac{b}{a}\right)}{2\sqrt{3}-6\times\frac{b}{a}+2\sqrt{3}\left(\frac{b}{a}\right)^2}.$$

以下將$\frac{b}{a}$帶入y並將y分為分子與分母計算$y=\frac{\left[\left(\frac{\sqrt{3}x+y}{\sqrt{3}y+x}\right)x_0+y_0\right]\left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}x+y}{\sqrt{3}y+x}\right)}{2\sqrt{3}-6\times\frac{\sqrt{3}x+y}{\sqrt{3}y+x}+2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}x+y}{\sqrt{3}y+x}\right)^2}$

分子化簡為$\left[\left(\frac{\sqrt{3}x+y}{\sqrt{3}y+x}\right)x_0+y_0\right]\left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}x+y}{\sqrt{3}y+x}\right)=\frac{2y(\sqrt{3}xx_0+yx_0+\sqrt{3}yx_0+xx_0)}{(\sqrt{3}y+x)^2}$

分母化簡為$2\sqrt{3}-6\times\frac{\sqrt{3}x+y}{\sqrt{3}y+x}+2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}x+y}{\sqrt{3}y+x}\right)^2=\frac{2\sqrt{3}x^2+2\sqrt{3}y^2}{(\sqrt{3}y+x)^2}$

因此第二費馬點 F_2 的軌跡為一個圓： $\sqrt{3}x^2+\sqrt{3}y^2=[\sqrt{3}x+y]x_0+[\sqrt{3}y+x]y_0$

配方後 $\left(x-\dfrac{\sqrt{3}x_0+y_0}{2\sqrt{3}}\right)^2+\left(y-\dfrac{\sqrt{3}y_0+x_0}{2\sqrt{3}}\right)^2=\dfrac{(\sqrt{3}x_0+y_0)^2}{12}+\dfrac{(\sqrt{3}y_0+x_0)^2}{12}$

圓心位於 $\left(\dfrac{\sqrt{3}x_0+y_0}{2\sqrt{3}},\dfrac{\sqrt{3}y_0+x_0}{2\sqrt{3}}\right)$ 半徑為 $\sqrt{\dfrac{(\sqrt{3}x_0+y_0)^2}{12}+\dfrac{(\sqrt{3}y_0+x_0)^2}{12}}$.

接著我們想要了解在 $\angle XOY$ 為任意角的情況下，會不會有類似的結果。但因為在 $\angle XOY$ 為的情況下，軌跡的解析計算對我們來說太過困難，因此我們開始思考有沒有純幾何的證法。

問題二:在一般三角形ΔABC中特定邊恆過定點P之六心軌跡討論:

> 定理 1. A,P為平面上兩定點,L_1,L_2為過A的兩相異定直線,B,C分別為L_1,L_2上的動點,滿足B,P,C共線,若三角形ABC的外心為O,則O位在雙曲線上。

證明:

如圖八所示，首先過P做L_3,L_4分別平行於L_1,L_2,D,E分別為L_1和L_4,L_2和L_3的交點

再做P對L_1,L_2的垂足分別為F,G,P_1,P_2分別為L_1和$\overleftrightarrow{PG}$,L_2和$\overleftrightarrow{PF}$的交點

M,N分別為$\overline{AP_1},\overline{AP_2}$的中點,$L_5,L_6$分別為$\overline{AD},\overline{AE}$的中垂線

則以L_5,L_6為漸近線,過A做雙曲線Γ,以下證明O在Γ上

首先,先證明M在Γ上,即要證明:$d(A,L_5)\cdot d(A,L_6)=d(M,L_5)\cdot d(M,L_6)$,又

$$d(A,L_5)=\frac{1}{2}\overline{AD},\ d(A,L_6)=\frac{1}{2}\overline{AE},\ d(M,L_5)=\overline{AM}-d(A,L_5)=\frac{1}{2}(\overline{AP_1}-\overline{AD})=\frac{1}{2}\overline{P_1D}$$

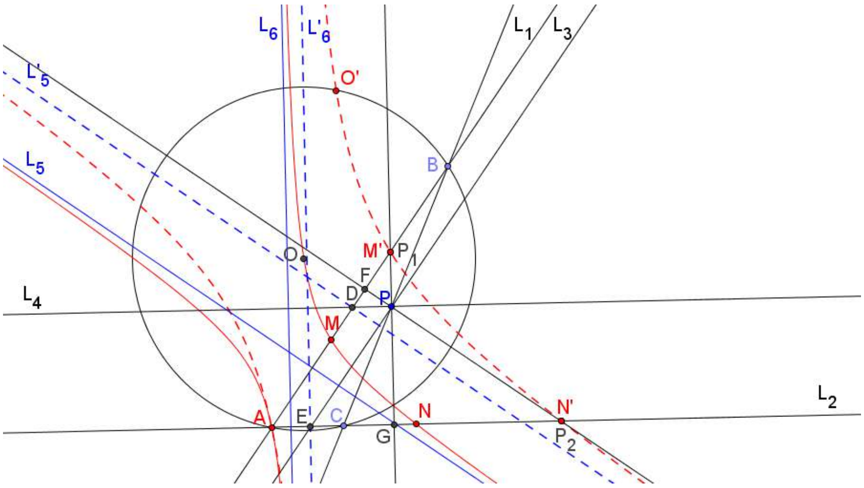
$$d(M,L_6)=d(\overleftrightarrow{P_1G},L_6)-d(M,\overleftrightarrow{P_1G})=(\overline{AG}-\frac{1}{2}\overline{AE})-\frac{1}{2}\overline{AG}=\frac{1}{2}\overline{GE}$$

則$d(A,L_5)\cdot d(A,L_6)=d(M,L_5)\cdot d(M,L_6)\Leftrightarrow \overline{AD}\cdot\overline{AE}=\overline{P_1D}\cdot\overline{GE}$

$\Leftrightarrow \overline{PE}\cdot\overline{PD}=\overline{P_1D}\cdot\overline{GE}$,此式由$\Delta PEG$與$\Delta P_1DP$相似知成立,所以$M$在$\Gamma$上

同理,由M,N的地位對稱性(L_1,L_2對調)知N在Γ上，最後,要證明O在Γ上,首先,將圖形以A為中心位似兩倍($\Gamma\to\Gamma'$, $L_5\to L_5'$, $L_6\to L_6'$, $M\to P_1$, $N\to P_2$, $O\to O'$)

設Γ'在L_5',L_6'的無窮遠點分別為∞_1,∞_2則考慮Γ'上的帕斯卡逆定理($\infty_1 O'\infty_2 P_1 A P_2$)及$B,P,C$共線即有$O'$在$\Gamma'$上,則$O$在$\Gamma$上，故得證。



圖(八)

定理 2. A,P 為平面上兩定點, L_1,L_2 為過 A 的兩相異定直線, B,C 分別為 L_1,L_2 上的動點,滿足 B,P,C 共線,若三角形 ABC 的垂心為 H ,則 H 位在雙曲線上。

證明:

如圖九所示，首先過 P 做 L_3,L_4 分別平行於 L_1,L_2 , D,E 分別為 L_1 和 L_4 , L_2 和 L_3 的交點

再分別過 D,E ,做 $\overleftrightarrow{DF}$ 垂直 L_2 於 F , $\overleftrightarrow{EG}$ 垂直 L_1 於 G

P 對 L_1,L_2 的垂足分別為 P_1,P_2 ，則以 $\overleftrightarrow{DF}$, $\overleftrightarrow{EG}$ 為漸近線

過 A 做雙曲線 Γ ，以下證明 H 在 Γ 上

首先，先證明 P_1 在 Γ 上，即要證明: $d(A,\overleftrightarrow{DF})\cdot d(A,\overleftrightarrow{EG})=d(P_1,\overleftrightarrow{DF})\cdot d(P_1,\overleftrightarrow{EG})$

$\Leftrightarrow\ \overline{AF}\cdot\overline{AG}=d(P_1,\overleftrightarrow{DF})\cdot\overline{P_1G}\cdots(1)$，我們做 L_5 過 G 垂直 L_2

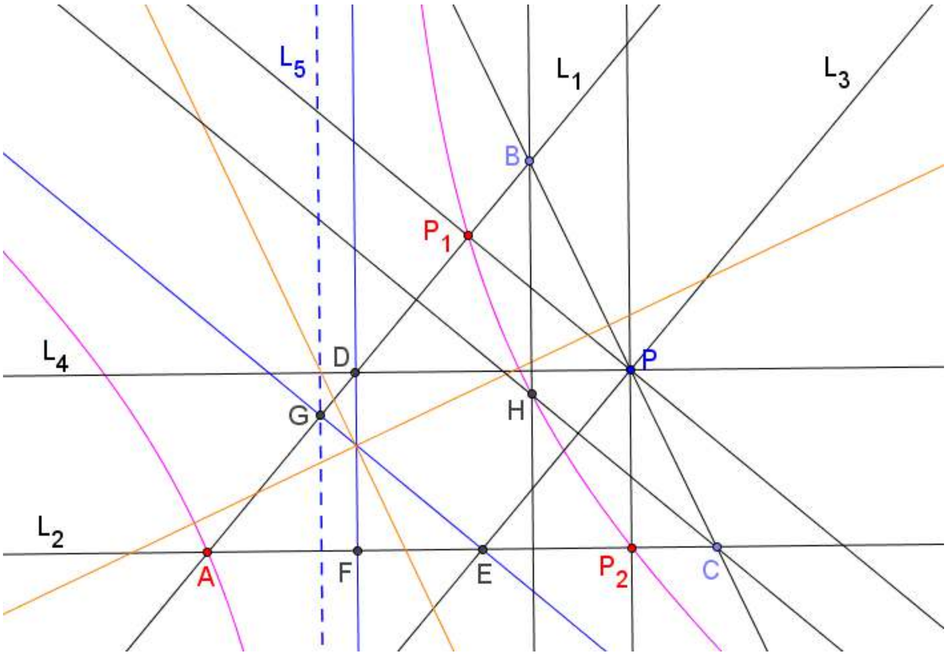
$\because\ \overline{P_1D}=\overline{P_1G}-\overline{DG}=\overline{PE}-\overline{DG}=\overline{AD}-\overline{DG}=\overline{AG}$

所以 $d(P_1,DF)=d(A,L_5)\to(1)$式 $\Leftrightarrow\ \overline{AF}\square\overline{AG}=d(A,L_5)\square\overline{AD}$ ，易知成立。

所以 P_1 在 Γ 上，又由 P_1,P_2 的地位對稱性(L_1,L_2 對調)知 P_2 在 Γ 上

最後，要證明 H 在 Γ 上,假設 Γ 在 $\overleftrightarrow{DF}$, $\overleftrightarrow{EG}$ 上的無窮遠點分別為 ∞_1,∞_2

考慮 Γ 上的帕斯卡逆定理($\infty_1H\infty_2P_1AP_2$)及 B,P,C 共線知 H 在 Γ 上，故得證。



圖(九)

定理 3. A, P 是平面上的兩定點, L_1, L_2 是過 A 的兩相異直線, B, C 分別為 L_1, L_2 上的動點,滿足 P 在 $\overline{BC}$ 上,若 ΔABC 的第一費馬點為 F_1,則 F_1 位在圓上。

證明:

如圖十所示，假設 $\overline{AB}$ 邊上向三角形外所作的正三角形為 $\Delta ABC'$,則過 P 做 $\overleftrightarrow{PS'}$ 平行 $\overleftrightarrow{BC'}$

$\overleftrightarrow{PS'}$ 交 $\overleftrightarrow{AB}$ 於 S,交 $\overleftrightarrow{CC'}$ 於 S',則 $\angle S'FA = \angle C'BA = \angle S'SA = 60°$.

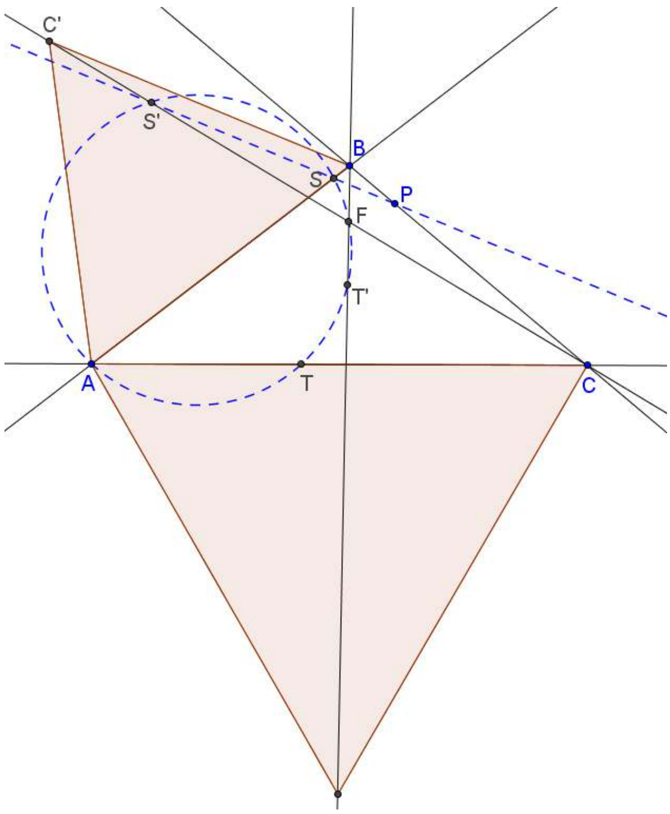
$\Rightarrow A, F, S, S'$ 共圓,設為圓 O ，

則設圓 O 交 $\overleftrightarrow{BF}$ 於 F, T',交 $\overleftrightarrow{AC}$ 於 A, T,則考慮圓 O 上的帕斯卡定理($ASS'FT'T$)

有 $\overleftrightarrow{SS'}, \overleftrightarrow{TT'}, \overleftrightarrow{BC}$ 共點,即 T, T', P 共線。

$\Rightarrow \angle PTA = \angle T'TA = \angle T'FA = 120^0 \Rightarrow$ T 是定點。

同理 S 也為定點 $\Rightarrow$ F 位於定圓(AST)上，故得證。



圖(十)

定理 4. A, P 是平面上的兩定點, L_1, L_2 是過 A 的兩相異直線, B, C 分別為 L_1, L_2 上的動點,滿足 P 在 $\overline{BC}$ 上,若 ΔABC 的第二費馬點為 F_2,則 F_2 位在圓上。

證明：

如圖十一所示，假設 $\overline{AB}, \overline{AC}$ 邊上向三角形內所作的正三角形為 $\Delta ABB_1, \Delta ACC_1$

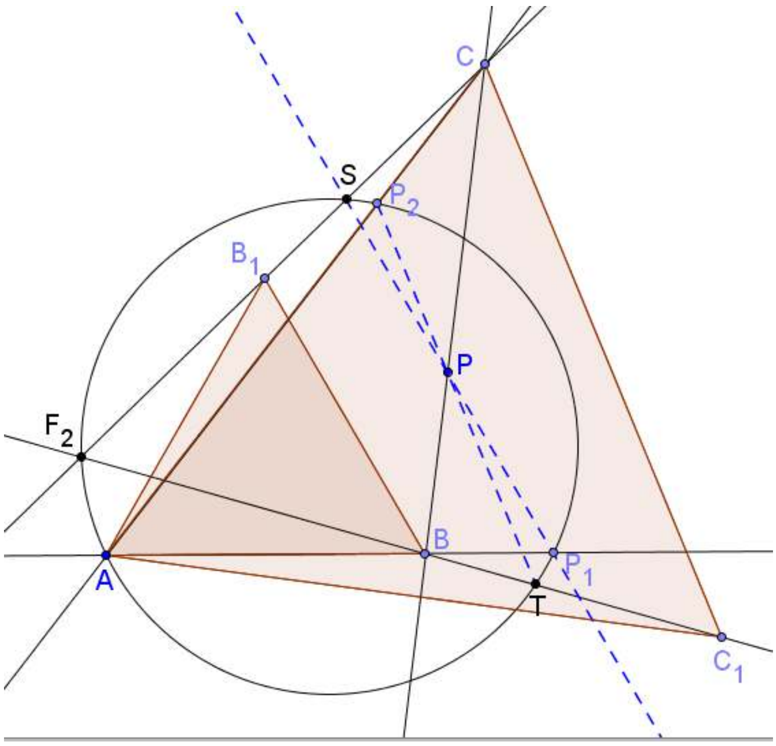
過 P 作 $\overleftrightarrow{PP_1}$ 平行 $\overleftrightarrow{BB_1}$,且交 $\overleftrightarrow{AB}$ 於 P_1,交 $\overleftrightarrow{CF_2}$ 於 S

則 $\angle SP_1A + \angle AF_2S = \angle B_1BA + \angle AF_2B_1 = 180°$,所以 A, P_1, S, F_2 共圓

假設此圓交 $\overleftrightarrow{AC}$ 於 P_2,交 $\overleftrightarrow{BF_2}$ 於 T ,則考慮此圓上的帕斯卡定理($P_1AP_2TF_2S$)：

有 $\overleftrightarrow{P_2T}, \overleftrightarrow{P_1S}, \overleftrightarrow{BC}$ 共點 $\Rightarrow P_2, P, T$ 共線 $\Rightarrow \angle AP_2P = \angle AP_2T = \angle AF_2T = 60°$

所以 $\overleftrightarrow{PP_2}$ 平行 $\overleftrightarrow{CC_1} \Rightarrow P_2$ 是定點,且 P_1 也是定點,所以 F_2 位在一定圓(□ AP_1P_2)上



圖(十一)

定理 5. A, P 是平面上的兩定點, L_1, L_2 是過 A 的兩相異直線, B, C 分別為 L_1, L_2 上的動點,滿足 B, P, C 共線,若三角形 ABC 的重心為 G ,則 G 位在雙曲線上。

證明：

如圖十二所示，設 $\overline{AC}$ 中點為 M , $\overline{AB}$ 中點為 N ,又過 P 分別做 $\overleftrightarrow{PP_1}$ 平行 L_2 , $\overleftrightarrow{PP_2}$ 平行 L_1

設 $\overleftrightarrow{PP_1}$ 交 L_1 於 P_1 , $\overleftrightarrow{PP_2}$ 交 L_2 於 P_2 , $\overleftrightarrow{BM}$ 交 $\overleftrightarrow{PP_1}$ 於 X , $\overleftrightarrow{CN}$ 交 $\overleftrightarrow{PP_2}$ 於 Y

以 A 為位似中心,將 $\overleftrightarrow{PP_1}$, $\overleftrightarrow{PP_2}$ 位似 $\frac{1}{3}$ 倍為 l_1, l_2

則以 l_1, l_2 為漸近線,過 A 作雙曲線 Γ ,以下證明 G 在 Γ 上

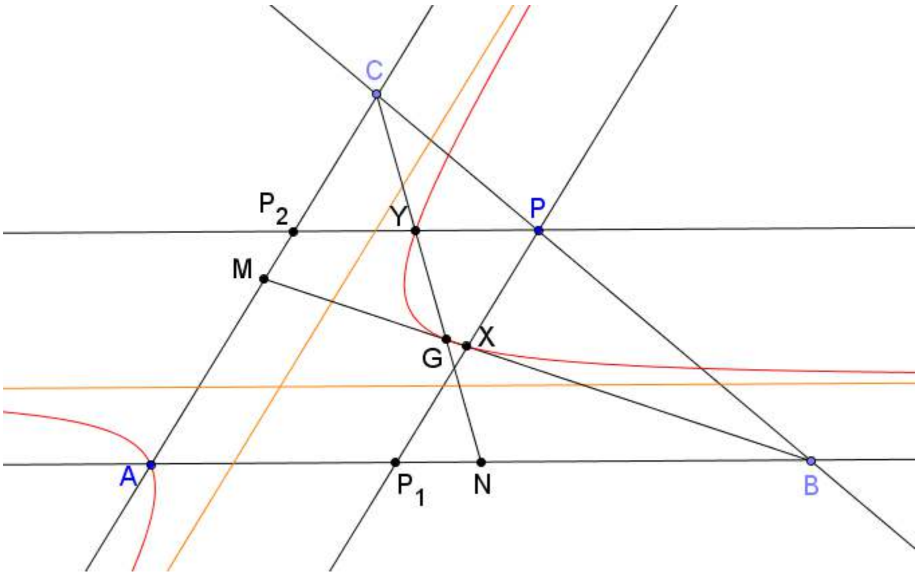
先證明 X , Y 在 Γ 上,因為 X , Y 地位是對稱的(L_1, L_2 互換)

所以只須證明 X 在 Γ 上,即 $d(A,l_1)\cdot d(A,l_2) = d(X,l_1)\cdot d(X,l_2)$ ---(1)

又易知 $\frac{d(A,l_1)}{d(X,l_1)} = \frac{1}{2}, \frac{d(A,l_2)}{d(X,l_2)} = \frac{2}{1}$,所以(1)成立,即 X 在 Γ 上,同理 Y 在 Γ 上

最後要證明 G 在 Γ 上,假設 Γ 在 l_1, l_2 上的無窮遠點分別為 ∞_1, ∞_2

則考慮 Γ 上的帕斯卡逆定理($\infty_2 A \infty_1 XGY$)及 B, P, C 共線有 G 在 Γ 上, Q.E.D.



圖(十二)

問題三.當我們考慮立體情況時，若給定空間中四面體 $O-ABC$ ，且平面 ABC 恆通過定點 $P(x_0, y_0, z_0)$，我們想知道此四面體 $O-ABC$ 外接球心 O_1 、重心 G 、內切球心 I 軌跡為何。

以下我們考慮當 $\angle AOB = \angle AOC = \angle BOC = \frac{\pi}{2}$.

(一)四面體 $O-ABC$ 外接球心 O_1 軌跡討論:

首先建立座標系令 $O(0,0,0)$， $A(a,0,0)$， $B(0,b,0)$， $C(0,0,c)$ 則過定點 $P(x_0, y_0, z_0)$ 平面截距式 $\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}+\frac{z_0}{c}=1$，四面體 $O-ABC$ 外接球心 O_1 座標為 $(\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{c}{2})$，令 $\begin{cases} a=2x \\ b=2y \\ c=2z \end{cases}$。

將 a 、 b 、 c 代入截距式 $\frac{x_0}{2x}+\frac{y_0}{2y}+\frac{z_0}{2z}=1$。

移項後得外接球心 O_1 軌跡方程式為 $x_0yz+xy_0z+xyz_0=2xyz$.

整理為函數形式為 $z=\dfrac{z_0xy}{2xy-x_0y-y_0x}$.

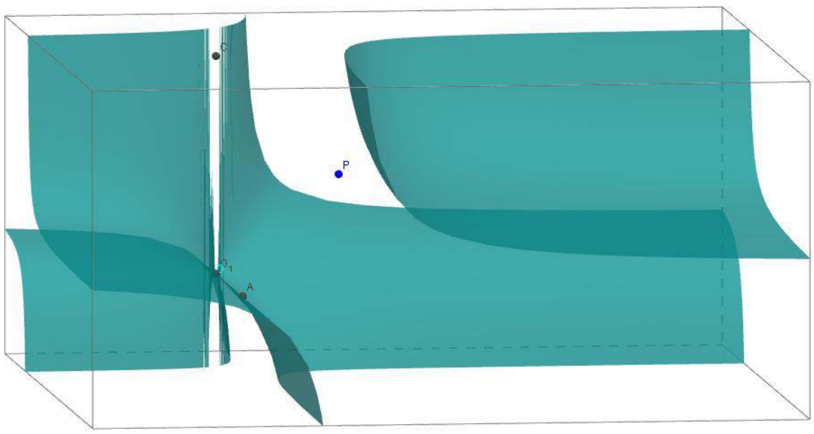
若將變數 z 固定時，令 $z=z_1 \Rightarrow \frac{x_0}{2x}+\frac{y_0}{2y}=1-\frac{z_0}{2z_1}$.

若 $z_1 \neq \frac{z_0}{2}$ ，則令 $k=1-\frac{z_0}{2z_1}\neq 0$， $\frac{x_0}{2x}+\frac{y_0}{2y}=k \Rightarrow (x-\frac{x_0}{2k})(y-\frac{y_0}{2k})=\frac{x_0y_0}{4k^2}$ 為雙曲線軌跡。

若 $z_1=\frac{z_0}{2}$ ，則 $\frac{x_0}{2x}+\frac{y_0}{2y}=0 \Rightarrow \frac{y_0}{2}x+\frac{x_0}{2}y=0, (x,y)\neq(0,0)$ 為直線軌跡。

換言之此函數 $z=\dfrac{z_0xy}{2xy-x_0y-y_0x}$ 等值曲面均為雙曲線或是直線軌跡。

由於軌跡方程式中 x, y, z 為對稱，故曲面 $x_0yz+xy_0z+xyz_0=2xyz$ 平行座標平面的截痕之等值曲面均為雙曲線或是直線軌跡，如圖十三所示。



圖(十三)

(二)四面體 $O-ABC$ 重心 G 軌跡討論:

首先建立座標系令 $O(0,0,0)$，$A(a,0,0)$，$B(0,b,0)$，$C(0,0,c)$ 則過定點 $P(x_0,y_0,z_0)$

平面截距式 $\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}+\frac{z_0}{c}=1$，四面體 $O-ABC$ 重心 G 座標為 $(\frac{a}{4},\frac{b}{4},\frac{c}{4})$，令 $\begin{cases} a=4x \\ b=4y \\ c=4z \end{cases}$.

將 a、b、c 帶入截距式 $\frac{x_0}{4x}+\frac{y_0}{4y}+\frac{z_0}{4z}=1$.

移項後得重心軌跡方程式為 $x_0yz+xy_0z+xyz_0=4xyz$.

整理為函數形式為 $z=\frac{z_0xy}{4xy-x_0y-y_0x}$.

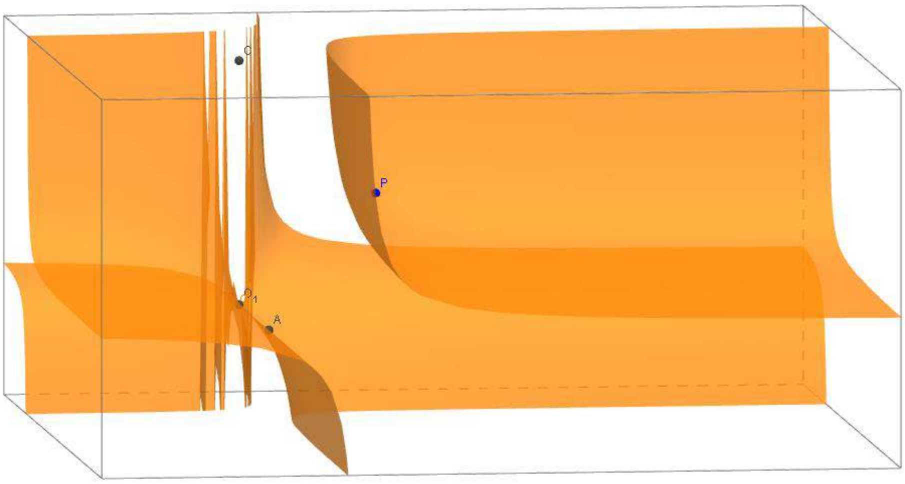
若將變數 z 固定時，令 $z=z_1 \Rightarrow \frac{x_0}{4x}+\frac{y_0}{4y}=1-\frac{z_0}{4z_1}$

若 $z_1 \neq \frac{z_0}{4}$，則令 $k=1-\frac{z_0}{4z_1}\neq 0$，$\frac{x_0}{4x}+\frac{y_0}{4y}=k \Rightarrow (x-\frac{x_0}{4k})(y-\frac{y_0}{4k})=\frac{x_0y_0}{16k^2}$ 為雙曲線軌跡。

若 $z_1=\frac{z_0}{4}$，則 $\frac{x_0}{4x}+\frac{y_0}{4y}=0 \Rightarrow \frac{y_0}{4}x+\frac{x_0}{4}y=0,(x,y)\neq(0,0)$ 為直線軌跡。

換言之此函數 $z=\frac{z_0xy}{4xy-x_0y-y_0x}$ 等值曲面均為雙曲線或是直線軌跡。

由於軌跡方程式中 x,y,z 為對稱，故曲面 $x_0yz+xy_0z+xyz_0=4xyz$ 平行座標平面的截痕之等值曲面均為雙曲線或是直線軌跡，如圖十四所示。



圖(十四)

(三)四面體 $O-ABC$ 內切球心 I 軌跡討論:

建立座標系令 $O(0,0,0)$， $A(a,0,0)$， $B(0,b,0)$， $C(0,0,c)$ 則

截距式 $\dfrac{x_0}{a}+\dfrac{y_0}{b}+\dfrac{z_0}{c}=1$，令內切球心 I 座標為 (r,r,r) 其中 r 為內切球半徑，

再令 $I(r,r,r)$ 與平面 ABC 的距離為 r ，則可得到：

$$\frac{\left|\frac{r}{a}+\frac{r}{b}+\frac{r}{c}-1\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}=r\Rightarrow r\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-1=-r\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}\ (\text{其中}\frac{r}{a}+\frac{r}{b}+\frac{r}{c}-1<0)$$

$$\Rightarrow r\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}\right)=1\Rightarrow r=\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}$$

令 $x=\dfrac{1}{a},y=\dfrac{1}{b},z=\dfrac{1}{c}\Rightarrow r=\dfrac{1}{x+y+z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

得出內切球心 I 的軌跡為**空間中線段其參數式為** (r,r,r) ，我們想計算

$r=\dfrac{1}{x+y+z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 範圍為何，其中 $x_0x+y_0y+z_0z=1.$

以下計算在限制條件為 $g(x,y,z)=x_0x+y_0y+z_0z-1=0$ ， $f(x,y,z)=x+y+z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 之

極值為何？此時我們利用多變數微積分中拉格朗日乘數定理來幫助我們計算，

$$\begin{cases} f_x=\lambda g_x \\ f_y=\lambda g_y \\ f_z=\lambda g_z \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} f_x=1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\lambda x_0 \\ f_y=1-\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\lambda y_0 \text{ 且 } x_0x+y_0y+z_0z=1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*) \\ f_z=1-\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\lambda x_0 \end{cases}$$

我們利用球面座標

$\begin{cases} x=\rho\sin\theta\cos\phi \\ y=\rho\sin\theta\sin\phi \\ z=\rho\cos\theta \end{cases}$ ，且 $x^2+y^2+z^2=\rho^2$ 將其帶入上式 $(*)$ 得到

$$\begin{cases} x_0\rho\sin\theta\cos\phi+y_0\rho\sin\theta\sin\phi+z_0\rho\cos\theta=1 \\ 1-\sin\theta\cos\phi=\lambda x_0 \\ 1-\sin\theta\sin\phi=\lambda y_0 \\ 1-\cos\theta=\lambda z_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\phi=\dfrac{1-\lambda x_0}{\sin\theta}\text{.......(1)} \\ \sin\phi=\dfrac{1-\lambda y_0}{\sin\theta}\text{........(2)} \\ \cos\theta=1-\lambda z_0\text{.........(3)} \end{cases}$$

(1)式與(2)式平方相加得到

$$(\sin\phi)^2+(\cos\phi)^2=(\frac{1-\lambda x_0}{\sin\theta})^2+(\frac{1-\lambda y_0}{\sin\theta})^2 \Leftrightarrow \sin^2\theta=(1-\lambda x_0)^2+(1-\lambda y_0)^2\text{.......(4)}$$

(3)式平方加(4)式得到

$$(1-\lambda z_0)^2+(1-\lambda x_0)^2+(1-\lambda y_0)^2=1 \Leftrightarrow \lambda^2(x_0^2+y_0^2+z_0^2)-\lambda(2x_0+2y_0+2z_0)+2=0.$$

.

$\because \rho\left(x_0\sin\theta\cos\phi+y_0\sin\theta\sin\phi+z_0\cos\theta\right)=1$，

$$\begin{aligned}\therefore \rho&=\frac{1}{\left(x_0\sin\theta\cos\phi+y_0\sin\theta\sin\phi+z_0\cos\theta\right)} \\ &=\frac{1}{\left[x_0\left(1-\lambda x_0\right)+y_0\left(1-\lambda y_0\right)+z_0\left(1-\lambda z_0\right)\right]}\end{aligned}.$$

$$\begin{aligned} f(\rho\sin\theta\cos\phi,\rho\sin\theta\sin\phi,\rho\cos\theta)&=\rho\left(\sin\theta\cos\phi+\sin\theta\sin\phi+\cos\theta+1\right) \\ &=\rho\left(1-\lambda x_0+1-\lambda y_0+1-\lambda z_0+1\right) \\ &=\rho\left[4-\lambda\left(x_0+y_0+z_0\right)\right] \\ &=\frac{4-\lambda\left(x_0+y_0+z_0\right)}{\left(x_0+y_0+z_0\right)-\lambda\left(x_0^2+y_0^2+z_0^2\right)}\text{...........(5)}\end{aligned}$$

將$\lambda=\dfrac{(x_0+y_0+z_0)\pm\sqrt{(x_0+y_0+z_0)^2-2(x_0^2+y_0^2+z_0^2)}}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)}$代入(5)式有以下討論

若$\lambda_1=\dfrac{(x_0+y_0+z_0)+\sqrt{(x_0+y_0+z_0)^2-2(x_0^2+y_0^2+z_0^2)}}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)}$ 則

$$f(x,y,z)=\frac{-4+\lambda_1\left(x_0+y_0+z_0\right)}{\sqrt{(x_0+y_0+z_0)^2-2(x_0^2+y_0^2+z_0^2)}}.$$

若$\lambda_2=\dfrac{(x_0+y_0+z_0)-\sqrt{(x_0+y_0+z_0)^2-2(x_0^2+y_0^2+z_0^2)}}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)}$則

$$f(x,y,z)=\frac{4-\lambda_2\left(x_0+y_0+z_0\right)}{\sqrt{(x_0+y_0+z_0)^2-2(x_0^2+y_0^2+z_0^2)}}.$$

此時我們需判別上面兩式何者為極大值何者為極小值，我們發現

$$\frac{4-\lambda_2\left(x_0+y_0+z_0\right)}{\sqrt{(x_0+y_0+z_0)^2-2(x_0^2+y_0^2+z_0^2)}}>\frac{-4+\lambda_1\left(x_0+y_0+z_0\right)}{\sqrt{(x_0+y_0+z_0)^2-2(x_0^2+y_0^2+z_0^2)}}.$$

因為 $4-\lambda_2\left(x_0+y_0+z_0\right)>-4+\lambda_1\left(x_0+y_0+z_0\right)\Leftrightarrow 8>\left(\lambda_1+\lambda_2\right)\left(x_0+y_0+z_0\right)\Leftrightarrow 8>\dfrac{2(x_0+y_0+z_0)^2}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)}$

$$\Leftrightarrow 4(x_0^2+y_0^2+z_0^2)>(x_0+y_0+z_0)^2 \Leftrightarrow 3(x_0^2+y_0^2+z_0^2)>2(x_0y_0+y_0z_0+$$

$\Leftrightarrow x_0^2+y_0^2+z_0^2+(x_0-y_0)^2+(y_0-z_0)^2+(z_0-x_0)^2$ 恆成立。

因此 $\dfrac{-4+\lambda_1\left(x_0+y_0+z_0\right)}{\sqrt{(x_0+y_0+z_0)^2-2(x_0^2+y_0^2+z_0^2)}}\le f(x,y,z)\le\dfrac{4-\lambda_2\left(x_0+y_0+z_0\right)}{\sqrt{(x_0+y_0+z_0)^2-2(x_0^2+y_0^2+z_0^2)}}.$

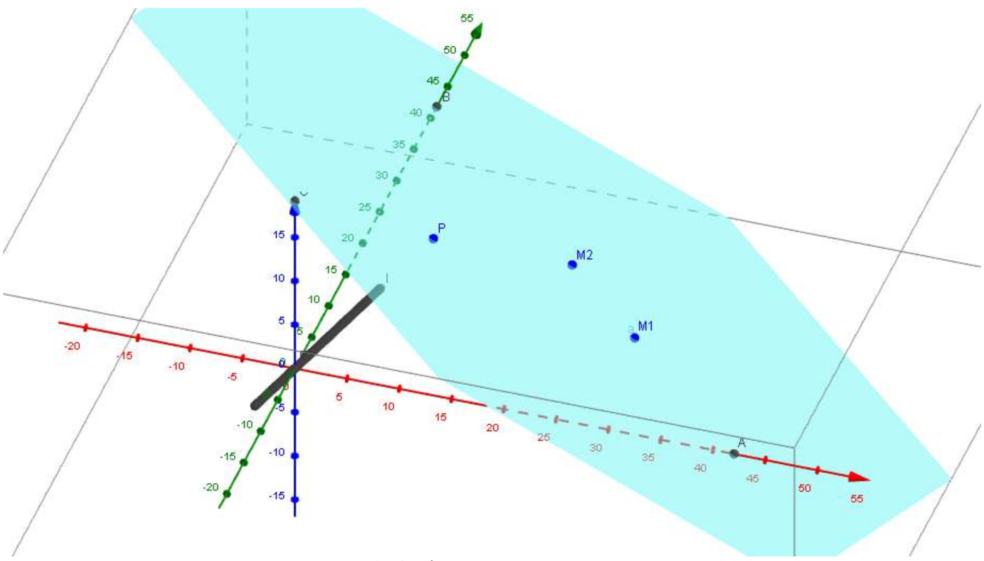
所以

$$\frac{\sqrt{(x_0+y_0+z_0)^2-2(x_0^2+y_0^2+z_0^2)}}{4-\lambda_2\left(x_0+y_0+z_0\right)}\le r\le\frac{\sqrt{(x_0+y_0+z_0)^2-2(x_0^2+y_0^2+z_0^2)}}{-4+\lambda_1\left(x_0+y_0+z_0\right)}$$

其中

$$\lambda_1=\frac{(x_0+y_0+z_0)+\sqrt{(x_0+y_0+z_0)^2-2(x_0^2+y_0^2+z_0^2)}}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)},\lambda_2=\frac{(x_0+y_0+z_0)-\sqrt{(x_0+y_0+z_0)^2-2(x_0^2+y_0^2+z_0^2)}}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)}.$$

，如圖十五所示。



圖(十五)

問題四.若給定空間中一般四面體$O-ABC$，且平面ABC恆通過定點$P(x_0,y_0,z_0)$，我們想知道四面體$O-ABC$重心G軌跡為何。

一般四面體$O-ABC$重心G軌跡討論:

建立座標系令$O(0,0,0)$，給定$\overrightarrow{OA}$方向向量為$\vec{l_1}=(a_1,b_1,c_1)$，參數式為$\overrightarrow{OA}:\begin{cases}x=a_1t_1\\y=b_1t_1,t_1\in R\\z=c_1t_1\end{cases}$，

$\overrightarrow{OB}$方向向量為$\vec{l_2}=(a_2,b_2,c_2)$，參數式為$\overrightarrow{OB}:\begin{cases}x=a_2t_2\\y=b_2t_2,t_2\in R\\z=c_2t_2\end{cases}$，

$\overrightarrow{OC}$方向為$\vec{l_3}=(a_3,b_3,c_3)$，參數式為$\overrightarrow{OC}:\begin{cases}x=a_3t_3\\y=b_3t_3,t_3\in R\\z=c_3t_3\end{cases}$，其中$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$不共面，即

$$\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}\neq 0.$$

若平面$E:\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$恆過定點$P(x_0,y_0,z_0)$，故$\dfrac{x_0}{a}+\dfrac{y_0}{b}+\dfrac{z_0}{c}=1$.............(1).

分別求出平面E與直線$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$交點$A(a_1t_1,b_1t_1,c_1t_1)$、$B(a_2t_2,b_2t_2,c_2t_2)$、$C(a_3t_3,b_3t_3,c_3t_3)$，

其中$t_1=\dfrac{1}{\left(\dfrac{a_1}{a}+\dfrac{b_1}{b}+\dfrac{c_1}{c}\right)}$、$t_2=\dfrac{1}{\left(\dfrac{a_2}{a}+\dfrac{b_2}{b}+\dfrac{c_2}{c}\right)}$、$t_3=\dfrac{1}{\left(\dfrac{a_3}{a}+\dfrac{b_3}{b}+\dfrac{c_3}{c}\right)}$.

則四面體$O-ABC$重心$G=\dfrac{1}{4}(A+B+C+O)=(\dfrac{a_1t_1+a_2t_2+a_3t_3}{4},\dfrac{b_1t_1+b_2t_2+b_3t_3}{4},\dfrac{c_1t_1+c_2t_2+c_3t_3}{4})$

令$G=(x',y',z')=(\dfrac{a_1t_1+a_2t_2+a_3t_3}{4},\dfrac{b_1t_1+b_2t_2+b_3t_3}{4},\dfrac{c_1t_1+c_2t_2+c_3t_3}{4})$

$\therefore x'=\dfrac{a_1t_1+a_2t_2+a_3t_3}{4},\quad y'=\dfrac{b_1t_1+b_2t_2+b_3t_3}{4},\quad z'=\dfrac{c_1t_1+c_2t_2+c_3t_3}{4}$

$\begin{cases}4x'=a_1t_1+a_2t_2+a_3t_3\\4y'=b_1t_1+b_2t_2+b_3t_3\\4z'=c_1t_1+c_2t_2+c_3t_3\end{cases}$利用克拉瑪公式得$\begin{cases}t_1=\dfrac{\Delta_{t_1}}{\Delta}\\t_2=\dfrac{\Delta_{t_2}}{\Delta}\\t_3=\dfrac{\Delta_{t_3}}{\Delta}\end{cases}$，其中$\Delta=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}\neq 0$、$\Delta_{t_1}=\begin{vmatrix}4x'&b_1&c_1\\4y'&b_2&c_2\\4z'&b_3&c_3\end{vmatrix}$

$$\Delta_{t_2}=\begin{vmatrix}a_1 & 4x' & c_1\\ a_2 & 4y' & c_2\\ a_3 & 4z' & c_3\end{vmatrix}、\Delta_{t_3}=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & 4x'\\ a_2 & b_2 & 4y'\\ a_3 & b_3 & 4z'\end{vmatrix}.$$

$$\because\ \frac{1}{t_1}=\frac{a_1}{a}+\frac{b_1}{b}+\frac{c_1}{c},\ \frac{1}{t_2}=\frac{a_2}{a}+\frac{b_2}{b}+\frac{c_2}{c},\ \frac{1}{t_3}=\frac{a_3}{a}+\frac{b_3}{b}+\frac{c_3}{c},$$

$$\frac{1}{a}=\frac{\begin{vmatrix}1/t_1 & b_1 & c_1\\ 1/t_2 & b_2 & c_2\\ 1/t_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}}{\Delta}=\begin{vmatrix}1/\Delta_{t_1} & b_1 & c_1\\ 1/\Delta_{t_2} & b_2 & c_2\\ 1/\Delta_{t_3} & b_3 & c_3\end{vmatrix},\ \frac{1}{b}=\frac{\begin{vmatrix}a_1 & 1/t_1 & c_1\\ a_2 & 1/t_2 & c_2\\ a_3 & 1/t_3 & c_3\end{vmatrix}}{\Delta}=\begin{vmatrix}a_1 & 1/\Delta_{t_1} & c_1\\ a_2 & 1/\Delta_{t_2} & c_2\\ a_3 & 1/\Delta_{t_3} & c_3\end{vmatrix},$$

$$\frac{1}{c}=\frac{\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & 1/t_1\\ a_2 & b_2 & 1/t_2\\ a_3 & b_3 & 1/t_3\end{vmatrix}}{\Delta}=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & 1/\Delta_{t_1}\\ a_2 & b_2 & 1/\Delta_{t_2}\\ a_3 & b_3 & 1/\Delta_{t_3}\end{vmatrix}$$ 代入(1)式得到

$$x_0\begin{vmatrix}\frac{1}{\Delta_{t_1}} & b_1 & c_1\\ \frac{1}{\Delta_{t_2}} & b_2 & c_2\\ \frac{1}{\Delta_{t_3}} & b_3 & c_3\end{vmatrix}+y_0\begin{vmatrix}a_1 & \frac{1}{\Delta_{t_1}} & c_1\\ a_2 & \frac{1}{\Delta_{t_2}} & c_2\\ a_3 & \frac{1}{\Delta_{t_3}} & c_3\end{vmatrix}+z_0\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & \frac{1}{\Delta_{t_1}}\\ a_2 & b_2 & \frac{1}{\Delta_{t_2}}\\ a_3 & b_3 & \frac{1}{\Delta_{t_3}}\end{vmatrix}=1\text{..............(2)}$$

其中 $\Delta_{t_1}=\begin{vmatrix}4x' & a_2 & a_3\\ 4y' & b_2 & b_3\\ 4z' & c_2 & c_3\end{vmatrix}$ $\Delta_{t_2}=\begin{vmatrix}a_1 & 4x' & a_3\\ b_1 & 4y' & b_3\\ c_1 & 4z' & c_3\end{vmatrix}$ $\Delta_{t_3}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & 4x'\\ b_1 & b_2 & 4y'\\ c_1 & c_2 & 4z'\end{vmatrix}$ 代入(2)式化簡其重心軌跡軌跡方程式為

$$\frac{x_0(b_2c_3-b_3c_2)-y_0(a_1c_3-a_3c_1)+z_0(a_2b_3-a_3b_2)}{4x'(b_2c_3-b_3c_2)-4y'(a_2c_3-a_3c_2)+4z'(a_2b_3-a_3b_2)}+\frac{-x_0(b_1c_3-b_3c_1)+y_0(a_1c_3-a_3c_1)-z_0(a_1b_3-a_3b_1)}{-4x'(b_1c_3-b_3c_1)+4y'(a_1c_3-a_3c_1)-4z'(a_1b_3-a_3b_1)}+\frac{x_0(b_1c_2-b_2c_1)-y_0(a_2c_1-a_1c_2)+z_0(a_2b_1-a_1b_2)}{4x'(b_1c_2-b_2c_1)-4y'(a_2c_1-a_1c_2)+4z'(a_2b_1-a_1b_2)}=1$$

陸、結論

由以上討論過程中我們得出，在給一定角 $\angle XOY$，在定角內某一定點 P，則任意通過 P 之直線 L 分別交直線 $\overleftrightarrow{OX},\overleftrightarrow{OY}$ 於 A, B 兩點，當通過 P 直線 L 開始變動，則三角形 ΔOAB 外心 O_{ABO}、內心 I、重心 G、垂心 H、第一費馬點 F_1、第二費馬點 F_2 的軌跡為以下結果:

(一)當 $\angle XOY = \dfrac{\pi}{2}$ 時，利用解析幾何設通過定點為 $P\left(x_0, y_0\right)$ 則

(1)三角形 ΔOAB 重心 $G(x,y)$ 軌跡為雙曲線，軌跡方程式 $\left(x-\dfrac{x_0}{3}\right)\left(y-\dfrac{y_0}{3}\right)=\dfrac{x_0y_0}{9}$.

(2)三角形 ΔOAB 外心 $O_{ABO}(x,y)$ 軌跡為雙曲線，軌跡方程式 $\left(x-\dfrac{x_0}{2}\right)\left(y-\dfrac{y_0}{2}\right)=\dfrac{x_0y_0}{4}$.

(3)三角形 ΔOAB 垂心 $H(x,y)$ 軌跡為原點。

(4)三角形 ΔOAB 內心 $I(t,t)$ 軌跡為線段，軌跡參數式為

$$\left\{(t,t)\in R^2 \middle| \frac{\sqrt{2x_0y_0}}{3-\lambda_2\left(x_0+y_0\right)} \le t \le \frac{\sqrt{2x_0y_0}}{-3+\lambda_1\left(x_0+y_0\right)}\right\}，其中 \lambda_1=\frac{(x_0+y_0)+\sqrt{2x_0y_0}}{x_0^2+y_0^2}, \lambda_2=\frac{(x_0+y_0)-\sqrt{2x_0y_0}}{x_0^2+y_0^2}.$$

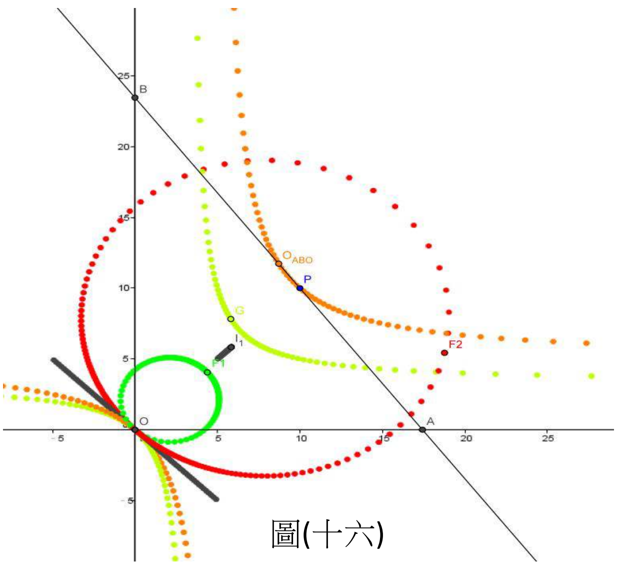
(5)三角形 ΔOAB 第一費馬點 $F_1(x,y)$ 軌跡為圓，軌跡方程式為

$$(x-\frac{\sqrt{3}x_0-y_0}{2\sqrt{3}})^2+(y-\frac{\sqrt{3}y_0-x_0}{2\sqrt{3}})^2=\frac{(\sqrt{3}x_0-y_0)^2+(\sqrt{3}y_0-x_0)^2}{12}.$$

(6)三角形 ΔOAB 第二費馬點 $F_2(x,y)$ 軌跡為圓，軌跡方程式為

$$(x-\frac{\sqrt{3}x_0+y_0}{2\sqrt{3}})^2+(y-\frac{\sqrt{3}y_0+x_0}{2\sqrt{3}})^2=\frac{(\sqrt{3}x_0+y_0)^2+(\sqrt{3}y_0+x_0)^2}{12}$$

因此，在直角情況下，除內心 I 之外六個心皆為圓錐曲線，如圖十六所示。



圖(十六)

(二)當 $\angle XOY$ 為一般角度時，發現以下純幾何定理:

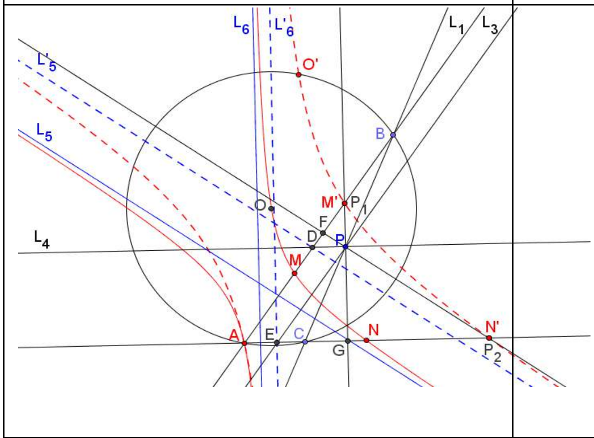
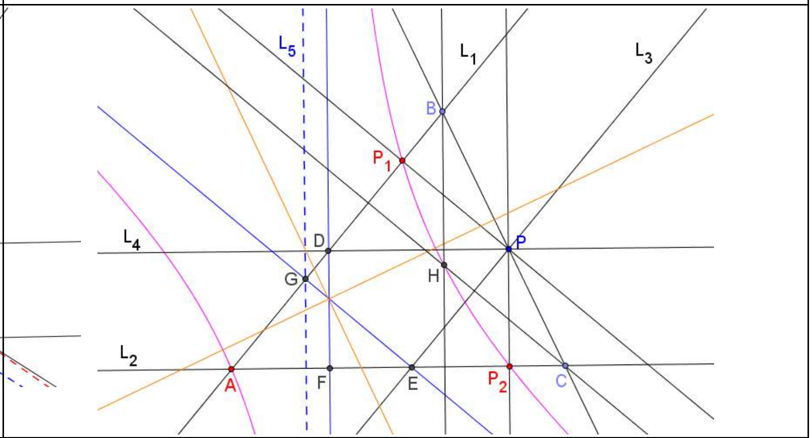
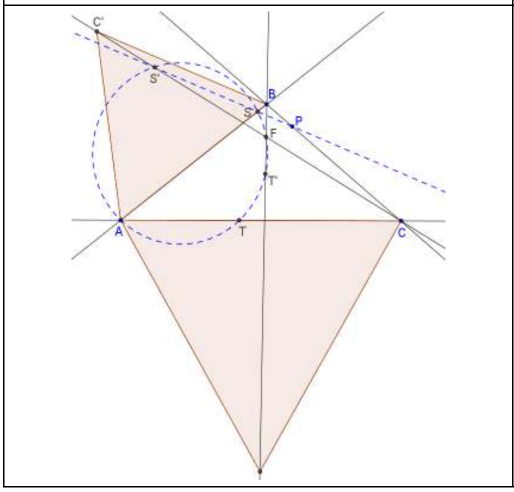
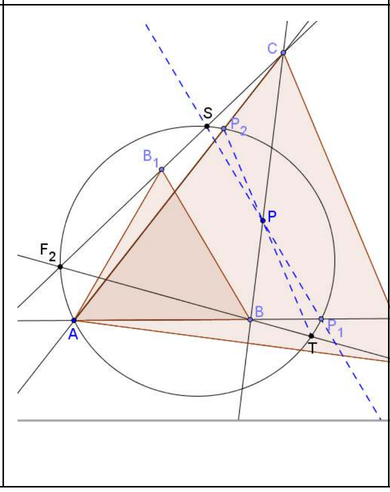
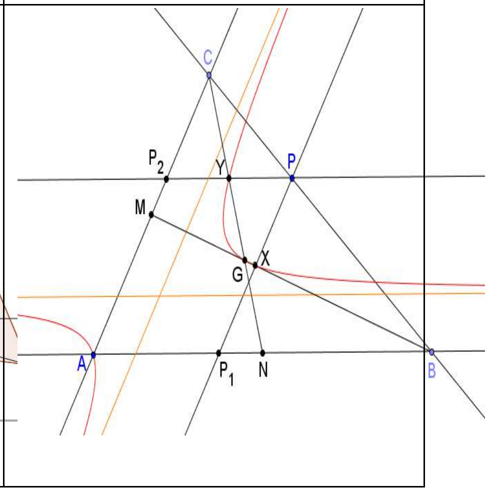
定理 1. A, P 為平面上兩定點, L_1, L_2 為過 A 的兩相異定直線, B, C 分別為 L_1, L_2 上的動點,滿足 B, P, C 共線,若三角形 ABC 的外心為 O ,則 O 位在雙曲線上。

定理 2. A, P 為平面上兩定點, L_1, L_2 為過 A 的兩相異定直線, B, C 分別為 L_1, L_2 上的動點,滿足 B, P, C 共線,若三角形 ABC 的垂心為 H ,則 H 位在雙曲線上。

定理 3. A, P 是平面上的兩定點, L_1, L_2 是過 A 的兩相異直線, B, C 分別為 L_1, L_2 上的動點,滿足 P 在 $\overline{BC}$ 上,若 ΔABC 的第一費馬點為 F_1 ,則 F_1 位在圓上。

定理 4. A, P 是平面上的兩定點, L_1, L_2 是過 A 的兩相異直線, B, C 分別為 L_1, L_2 上的動點,滿足 P 在 $\overline{BC}$ 上,若 ΔABC 的第二費馬點為 F_2 ,則 F_2 位在圓上。

定理 5. A, P 是平面上的兩定點, L_1, L_2 是過 A 的兩相異直線, B, C 分別為 L_1, L_2 上的動點,滿足 B, P, C 共線,若三角形 ABC 的重心為 G ,則 G 位在雙曲線上。

<table>
<tr><td>定理 1.</td><td colspan="2">定理 2.</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>定理 3.</td><td>定理 4.</td><td>定理 5</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

(三)若給定空間中四面體 $O-ABC$，其中 $\angle AOB=\angle AOC=\angle BOC=\dfrac{\pi}{2}$ 且平面 ABC 恆通過定點 $P(x_0,y_0,z_0)$，當平面 ABC 變動時，此四面體 $O-ABC$ 之外接球心 O_1、重心 G、內切球心 I 軌跡方程式為以下結果:

(1)四面體 $O-ABC$ 外接球心 $O_1(x,y,z)$ 軌跡方程式為 $z=\dfrac{z_0xy}{2xy-x_0y-y_0x}$，如圖十七所示。

(2)四面體 $O-ABC$ 重心 $G(x,y,z)$ 軌跡方程式為 $z=\dfrac{z_0xy}{4xy-x_0y-y_0x}$，如圖十八所示。

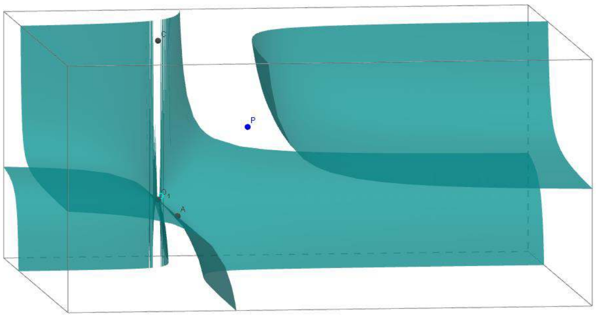
以上兩曲面方程式之等值曲面均為雙曲線或直線。

(3)四面體 $O-ABC$ 內切球心 $I(t,t,t)$ 軌跡參數式為

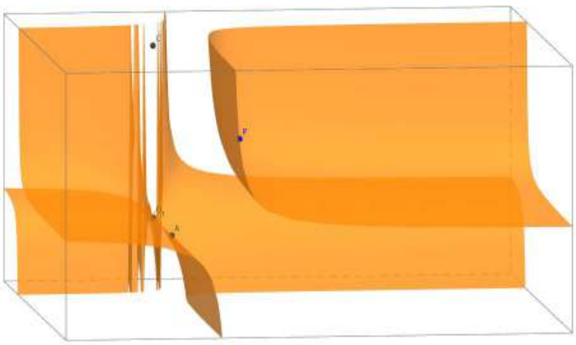
$$\left\{(t,t,t)\in R^3\,\middle|\,\frac{\sqrt{(x_0+y_0+z_0)^2-2(x_0^2+y_0^2+z_0^2)}}{4-\lambda_2(x_0+y_0+z_0)}\le t\le\frac{\sqrt{(x_0+y_0+z_0)^2-2(x_0^2+y_0^2+z_0^2)}}{-4+\lambda_1(x_0+y_0+z_0)}\right\}$$，其中

$$\lambda_1=\frac{(x_0+y_0+z_0)+\sqrt{(x_0+y_0+z_0)^2-2(x_0^2+y_0^2+z_0^2)}}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)},\ \lambda_2=\frac{(x_0+y_0+z_0)-\sqrt{(x_0+y_0+z_0)^2-2(x_0^2+y_0^2+z_0^2)}}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)},$$

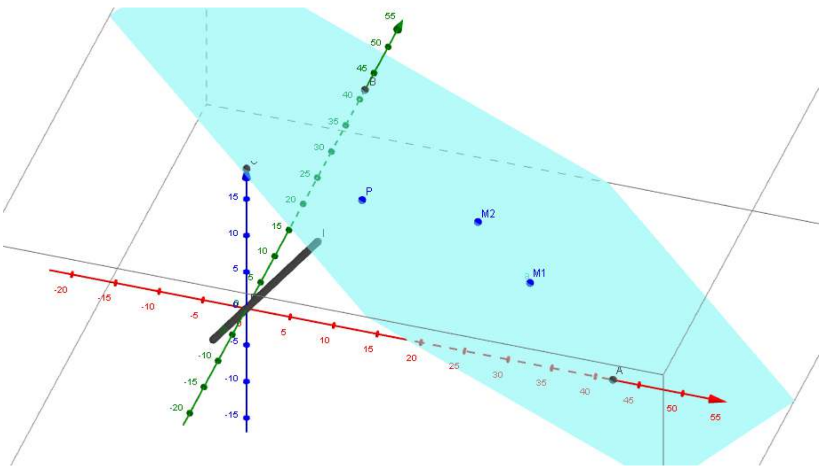
其圖形為空間中線段，如圖十九所示。



圖(十七)



圖(十八)



圖(十九)

(四)若給定空間中四面體$O-ABC$，且平面ABC恆通過定點$P(x_0,y_0,z_0)$，$\overrightarrow{OA}$方向向量為

$\vec{l_1}=(a_1,b_1,c_1)$、$\overrightarrow{OB}$方向向量為$\vec{l_2}=(a_2,b_2,c_2)$、$\overrightarrow{OC}$方向為$\vec{l_3}=(a_3,b_3,c_3)$，則當平面ABC變動

時，此四面體$O-ABC$重心$G(x,y,z)$軌跡方程式為

$$\frac{x_0(b_2c_3-b_3c_2)-y_0(a_1c_3-a_3c_1)+z_0(a_2b_3-a_3b_2)}{4x(b_2c_3-b_3c_2)-4y(a_2c_3-a_3c_2)+4z(a_2b_3-a_3b_2)}+\frac{-x_0(b_1c_3-b_3c_1)+y_0(a_1c_3-a_3c_1)-z_0(a_1b_3-a_3b_1)}{-4x(b_1c_3-b_3c_1)+4y(a_1c_3-a_3c_1)-4z(a_1b_3-a_3b_1)}+\frac{x_0(b_1c_2-b_2c_1)-y_0(a_2c_1-a_1c_2)+z_0(a_2b_1-a_1b_2)}{4x(b_1c_2-b_2c_1)-4y(a_2c_1-a_1c_2)+4z(a_2b_1-a_1b_2)}=1$$

.

柒、未來展望

希望未來能將考慮一般四面體$O-ABC$，當其中一平面恆通過某定點時其外接球心O_1、內切球心I之軌跡曲面為何並且考慮一般多面體滿足某面恆過某定點之重心G軌跡曲面為何?

捌、參考資料

一、高中普通數學第一冊，南一書局出版社。

二、黃家禮（89），幾何明珠，九章出版社。

三、趙文敏（82），幾何學概論，九章出版社。

【評語】040407

給定一∠XOY與角內一點P,過P點做直線L交∠XOY於A、B兩點，本論文主要在討論，當L變動時，△OAB外心、內心、重心、垂心、第一費馬點、第二費馬點的軌跡圖形。

本論文先用解析幾何的方法，研究∠XOY為直角的情況；再用幾何的方法研究∠XOY唯一般角的情況；最後並將結果推廣到三維空間的四面體。

整體來說，∠XOY是直角的情況，只是特例，似乎有了一般角的解,就不必有特殊角再解一次的需要。而且,解析幾何的方法，比較不容易洞見幾何的直觀。推廣到四面體也是利用解析幾何的手段，雖然能夠證明這些心都在圓錐曲線上，但總是比較缺乏幾何直觀，未能清晰刻畫出幾何特徵，這部分值得思考是否能用純幾何方法的推導。

在未來欲發展的方向中，建議改成過空間中四面體內部一點的平面所造成相關幾何中心性質之探討。