

中華民國第 55 屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組 數學科

佳作

040406

環「徑」變遷

學校名稱：國立彰化高級中學

作者： 高二 辛佳亮 高二 柯亞承	指導老師： 鄭經獻 龔詩尹
-------------------------	---------------------

關鍵詞：外接圓半徑和

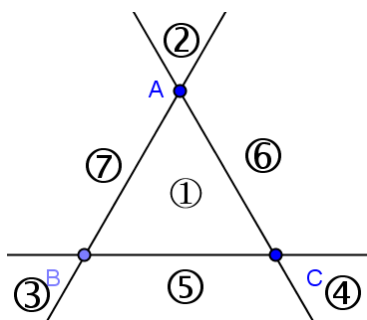
摘要

本研究主要探討平面上給定三角形 ABC 及一點 P ，所連出三個三角形 PAB 、 PBC 、 PCA 與 ABC 的外接圓半徑之關聯性。

首先， P 為 ABC 外接圓上異於頂點之點或垂心時，三個連出的三角形的外接圓半徑與 ABC 的外接圓半徑相等。

接著，延長 ABC 的三邊分平面為七區，討論三個半徑和的最小值及此時 P 點的位置，並證明出：

1. 非正三角形三徑和的最小值僅會發生在兩區。
2. 若 ABC 為非正三角形的銳角或直角三角形時，在 ABC 的內、外部各有一點 P ，使得三徑和最小。
3. 若 ABC 是以 A 為頂角的等腰三角形，當 $A < 113$ 度時，在 ABC 的內、外部各有一點 P ，使得三徑和最小；當 $A > 114$ 度，使得三徑和有最小值的兩個 P 點皆在 ABC 的外部。

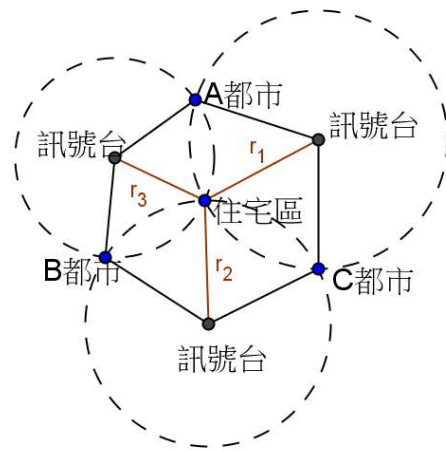


壹、研究動機

無線通信的使用日益普及，生活中 3C 產品幾乎無所不在，甚至已到人手多機的地步，然而電磁波的影響卻又令人有所疑懼；因此，無線訊號台的設置就顯得格外令人注目。

考慮有三座現代化都市 A、B、C，今欲在郊區建設一住宅區。為使住宅區接收到的訊號強度和品質與鄰近都市相同，我們藉由調整周圍三個訊號台的位置，使訊號台到相鄰都市與住宅區的距離相等。又為使傳訊時能量損失最少，我們調整住宅區的設置地點以達到節能的目的。

設兩相鄰都市和住宅區所形成的三角形之外接圓半徑分別為 r_1, r_2, r_3 ；為降低傳訊能量損失，我們考慮藉由調整住宅區地點，當 $r_1 + r_2 + r_3$ 有最小值時，即為住宅區的最佳設置地點。



貳、研究目的

已知平面上一 $\triangle ABC$ 及一動點 P ，連接 \overline{PA} 、 \overline{PB} 、 \overline{PC} ，連出三個三角形；

設 $\triangle ABC$ 、 $\triangle PAB$ 、 $\triangle PBC$ 、 $\triangle PCA$ 的外接圓半徑依序為 $R_{\triangle ABC}$ 、 $R_{\triangle PAB}$ 、 $R_{\triangle PBC}$ 、 $R_{\triangle PCA}$ 。

一、找出滿足 $R_{\triangle PAB} = R_{\triangle PBC} = R_{\triangle PCA}$ 時， P 點的位置。

二、當 $\triangle ABC$ 為正三角形時，求出 $R_{\triangle PAB} + R_{\triangle PBC} + R_{\triangle PCA}$ 的最小值，並找出 P 點的位置。

三、當 $\triangle ABC$ 為等腰三角形時，求出 $R_{\triangle PAB} + R_{\triangle PBC} + R_{\triangle PCA}$ 的最小值，並找出 P 點的位置。

四、當 $\triangle ABC$ 為任意三角形時，求出 $R_{\triangle PAB} + R_{\triangle PBC} + R_{\triangle PCA}$ 的最小值，並找出 P 點的位置。

五、當 $\triangle ABC$ 為任意三角形時，求出 $\frac{R_{\triangle PAB} + R_{\triangle PBC} + R_{\triangle PCA}}{R_{\triangle ABC}}$ 的範圍。

參、研究器材及設備

筆、紙、Geogebra、Word2007、Microsoft Visual Basic 6.0

肆、名詞定義

已知平面上一 $\triangle ABC$ 及一動點 P ，連接 \overline{PA} 、 \overline{PB} 、 \overline{PC} ，我們定義符號如下：

一、以 $R_{\triangle ABC}$ 表 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑

二、用函數 $f(\triangle ABC, P)$ 表 $\triangle PAB$ 、 $\triangle PBC$ 、 $\triangle PCA$ 的外接圓半徑和。

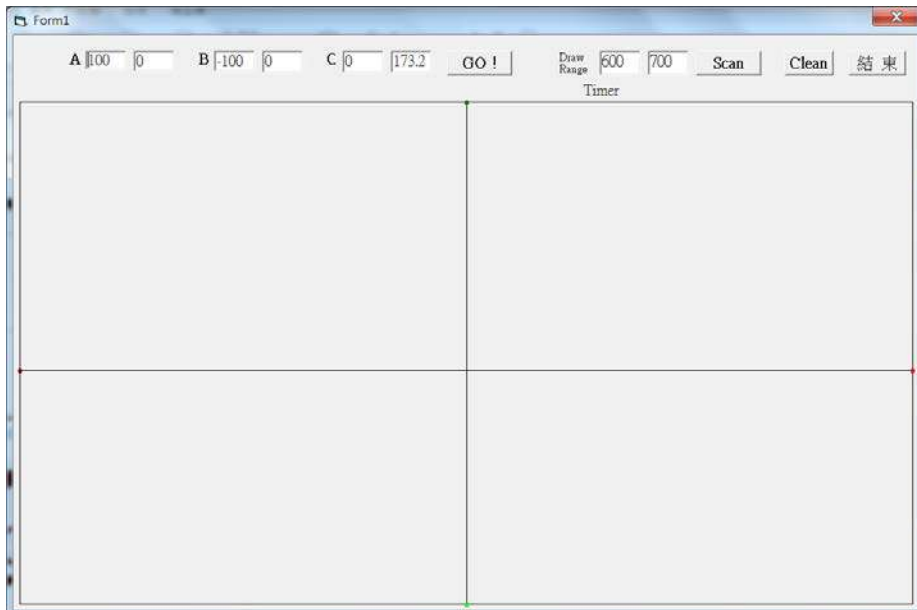
$$\text{即 } f(\triangle ABC, P) = R_{\triangle PAB} + R_{\triangle PBC} + R_{\triangle PCA}$$

三、用函數 $F(A, B, C)$ 表 $\frac{f(\triangle ABC, P)}{R_{\triangle ABC}}$ 之最小值，其中 A 、 B 、 C 為 $\triangle ABC$ 的三內角。

$$\text{即 } F(A, B, C) = \Delta \min \left\{ \frac{R_{\triangle PAB} + R_{\triangle PBC} + R_{\triangle PCA}}{R_{\triangle ABC}} \mid P \text{ 和 } \triangle ABC \text{ 共平} \right\}$$

伍、研究過程及方法

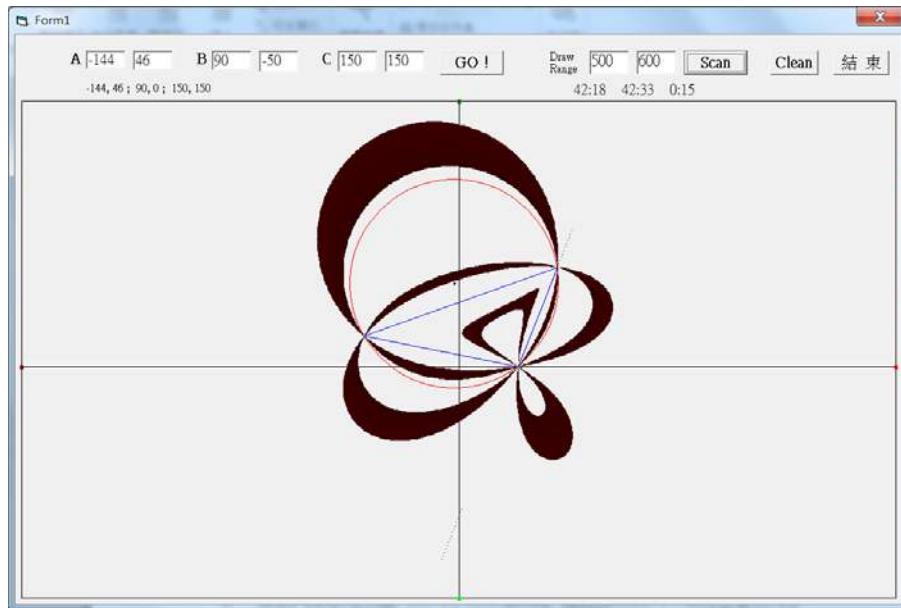
為了觀察 P 點的位置，我們開發了掃描三角形三外接圓半徑和的程式來觀察不同三角形所呈現的情形。



程式說明：

1. 欄位 (A,B,C)：用來輸入三角形的三個頂點，藉此構成我們所需的任意三角形。
(為了方便觀察，我們把座標放大 100 倍)
2. 按鈕 (Go!)：繪製所輸入的三角形。
3. 欄位 (Draw Range)：用來輸入上限及下限，若座標平面上的點與 A,B,C 三點連成的三個三角形的外接圓半徑和落在上、下限之間，則將該點以咖啡色顯示。

掃描範例如下：



我們利用這個軟體，觀察各種三角形的掃描結果，研究過程如下。

- 一、已知平面上一 $\triangle ABC$ 與一動點 P ，若 $\triangle PAB$ 、 $\triangle PBC$ 、 $\triangle PCA$ 的外接圓半徑等長 (即 $R_{\triangle PAB} = R_{\triangle PBC} = R_{\triangle PCA}$)，則 P 的位置為何？

我們將 $\triangle ABC$ 所在的平面分成 7 個區域討論

