中華民國第55屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

040405

洗「排」遊戲的數學模式

學校名稱：苗栗縣立興華高級中學

作者：	指導老師：
高二 邱文均 高二 黃莉芸	蘇柏奇 陳鑫達

關鍵詞：洗牌、重排(*permutation*)、圈(*cycle*)

摘要

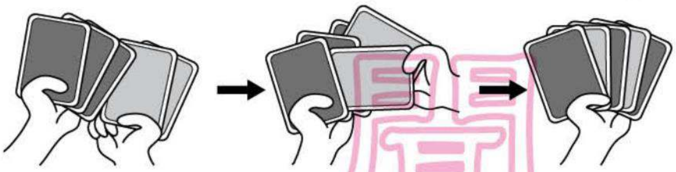
本文利用重排 (permutation) 、圈 (cycle) 及階數 (order) 等工具來探討 102 學年度國中基本學力測驗之中一個有關洗牌次數的問題。在研究過程中，我們定義了記錄撲克牌之排列的符號、洗牌操作 σ_{n_1,n_2} 的重牌符號、重排的圈形式及洗牌次數 $\mathrm{ord}(\sigma)$ ，並探討其相關性質。

壹、研究動機：

在 102 學年度基本學力測驗數學科試題的第 28 題，提到了一個有關日常生活的撲克牌問題如下：

28. 圖（十六）為雅婷左手拿著 **3** 張深灰色與 **2** 張淺灰色的牌疊在一起的情形。以下是她每次洗牌的三個步驟：
步驟一：用右手拿出疊在最下面的 **2** 張牌，如圖（十七）。
步驟二：將右手拿的 **2** 張牌依序交錯插入左手拿的 **3** 張牌之間，如圖（十八）。
步驟三：用左手拿著顏色順序已改變的 **5** 張牌，如圖（十九）。

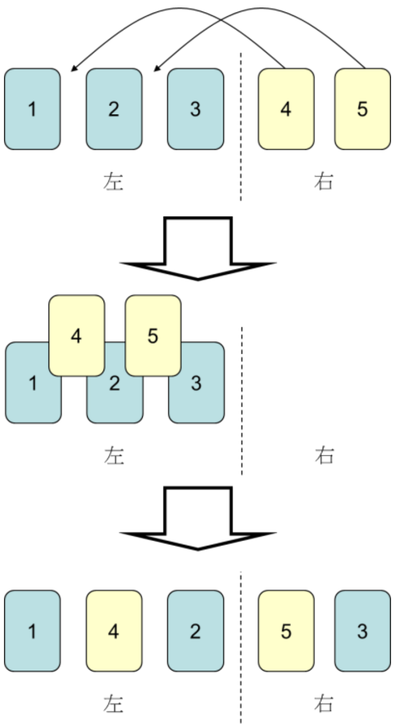

圖(十六)


圖(十七)　圖(十八)　圖(十九)

若依上述三個步驟洗牌，從圖（十六）的情形開始洗牌若干次後，其顏色順序會再次與圖（十六）相同，則洗牌次數可能為下列何者？

(A) **18**
(B) **20**
(C) **25**
(D) **27**

用數學語言重新敘述為「如下圖，先在左邊放 3 張紙牌(由左至右編號為 1~3)，右邊放 2 張紙牌(由左至右編號為 4~5)，將右邊紙牌依序插入左邊紙牌的**空隙**中形成新的牌組，然後由左至右取前 3 張牌放在左邊，剩下 2 張牌放在右邊，這樣的動作稱為 1 次洗牌。重複這個洗牌動作，直到牌組恢復原來的排列，需要重複此動作幾次？」



我們實際操作，得到洗牌 4 次就能恢復原來的排列。洗牌過程用表格呈現如下：

過程＼位置	左 1	左 2	左 3	右 1	右 2
原始	1	2	3	4	5
1	1	4	2	5	3
2	1	5	4	3	2
3	1	3	5	2	4
4	1	2	3	4	5

接著，仿照此問題的形式，改變兩堆紙牌數量，開始了這一連串的試驗，發現其中的規律及其原因。

貳、研究目的：

1. 當有兩堆牌時，最少需多少次洗牌才能回到原來的排序？
2. 兩堆牌的張數相同時，最少需多少次的洗牌才能回到原來的排序？

叄、研究設備及器材：電腦、Word。

肆、研究過程或方法結果：

第一部分：文獻探討

關於此問題，目前找到 2 篇相關資料，分別是林建維等人[2]的科展作品（此作品刊登於科學教育月刊第 372 期[3]）及游盛傑[4]之中學生網站之小論文。這 2 篇報告的結果簡要說明如後。首先，林建維等人[2, 3]是用表格的方式找出洗牌排序變化的數列，再看出回到原始牌組的最少洗牌次數，從下面列出的結果可知道只討論出「左手有 x 張牌，右手有 y 張牌 **(x > 2y)**」的情形。

【結果 1】林建維等人[2, 3]

左手有 x 張牌，右手有 y 張牌（**x > 2y**）的洗牌次數的計算方法，以 x=100, y=11 說明如下：

1. 將位置分段，每段的第一個數分別為左 2a (a=1,2,...,11).
2. 列出各段的位置至等差數列之首項停止，並改以依首項大小排列。

   甲、若 b≦11, 則左 b 的下一個位置為左 2b-1。

   乙、若 11 <b≦22, 則左 b 的為此段等差數列的首項。
3. 列出右 1～右 11。根據右 T ➔ 左 2T 的規律來合併。
4. 由合併後的各群個數得到洗牌次數。

如下，游盛傑[4]是利用費馬小定理及同餘方程式，算出回到原始牌組的最少洗牌次數，但只有討論相當「左邊有 26 張牌，右手有 26 張牌」的情形。

> 【結果 2】游盛傑[4]第 4 頁
>
> 根據費馬的一個小定理 $a^{p-1}\equiv 1 \pmod p$ 可以導出將一副 n 張牌的牌組，經完美洗牌後，且能回歸原位的最少次數 x 後所適用的公式
>
> $\rightarrow\ 2^x \equiv 1 \pmod{n+1}$　　(引註 1)
>
> 註 1、陳品秀(譯) (2009)。數學可以拯救羅馬?!。臺北市：臉譜，城邦文化出版社。P.143~153。

顯而易見，這 2 篇資料討論的情形都不夠完整。

第二部分：定義符號與問題轉化

經過實際操作，我們發現使用下面的符號表示「牌的排列」最方便。

> 【定義 1】牌的排列符號
>
> 若左邊放 3 張牌(由左至右編號為 1~3)，右邊放 2 張牌(由左至右依序編號為 4~5)，則兩邊所有牌的排列以符號(123,45)表示。

因此第一次洗牌的結果；即將右邊牌依序插入左邊牌的空隙中(4 插至 1、2 之間；5 插至 2、3 之間)，可得新的左右兩邊所有牌的排列可記為(142,53)。接下來所有洗牌的過程都是依上面的符號表示。

可以發現「洗牌前後的左右兩邊所有牌的排列，都是數字 1~5 的某種排列」。因此，洗牌的操作，可以用抽象代數的「重排(permutation)」表示。定義一次洗牌操作如下：

> 【定義 2】一次洗牌操作
>
> 已知 牌組$(123,45)\xrightarrow{\text{洗牌}}(142,53)$，這樣的洗牌操作以重排 $\sigma_{3,2}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3, & 4 & 5\\ 1 & 4 & 2, & 5 & 3\end{pmatrix}$
>
> 表示。

根據上述定義，則第一次洗牌可表示為$(123,45)\xrightarrow{\sigma_{3,2}}(142,53)$。

在抽象代數中，重排 $\sigma_{3,2}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3, & 4 & 5\\ 1 & 4 & 2, & 5 & 3\end{pmatrix}$ 代表 1→1、2→4、3→2、4→5、5→3、也可以「圈(cycle)」的形式來表示(參考李華介[5]第 48 頁)，即 $\sigma_{3,2}=(1)(2,4,5,3)$，或可簡記為 $\sigma_{3,2}=(2,4,5,3)$或(2453)。後續，我們將大量使用「圈(cycle)」的形式來進行運算。

至此，原始問題的洗牌過程可表示如下：

$$(123,45)\xrightarrow{\sigma_{3,2}}(142,53)\xrightarrow{\sigma_{3,2}}(154,32)\xrightarrow{\sigma_{3,2}}(135,24)\xrightarrow{\sigma_{3,2}}(123,45)$$

因此，原始問題需 4 次洗牌才會恢復原來的排列。這問題可轉化如下：

【問題 1】

在原始問題中，「求最小的正整數 n，使重排$\sigma_{3,2}{}^{n}$＝恆等變換(identity)？」

註：在抽象代數中，恆等變換(identity)有人用「I」表示。

其中，「最小的正整數 n」在抽象代數中的定義，就是稱為「重排(permutation)$\sigma_{3,2}$的階數(order)」。定義如下：

【定義 3】重排σ的階數(order)

給定一個重排σ，若 n 為滿足σ^{n}＝I 的最小正整數，則稱 n 為σ的階數(order)，以符號ord(σ)表示。

在原始問題中，我們得到：ord($\sigma_{3,2}$)＝4。

至此，我們給出一般性的定義如下：

【定義 4-1】洗牌操作σ_{n_1,n_2}

設有兩堆牌，第 1 堆牌有 n_1 張，由左至右編號為 1~ n_1，第 2 堆牌有 n_2 張，由左至右編號為 n_1＋1~ n_1＋n_2。規定 n_1>n_2 時，洗牌操作σ_{n_1,n_2}為第 2 堆的第 1 張牌 n_1＋1 插入第 1 堆的第 1 張牌 1 之後，依此類推，第 2 張牌 n_1＋2 插入第 1 堆的第 2 張牌 2 之後，…，直到第 2 堆牌所有的牌都插完。則洗牌 1 次的過程可表示如下：

$$(1\ 2\ldots\ n_1,\ldots,(n_1+n_2)) \xrightarrow{\sigma_{n_1,n_2}} (1\ n_1+1\ 2\ (n_1+2)\ldots,\ldots,\ n_1)$$

上面的定義限定「n_1>n_2」，但是可以擴充到「n_1≦n_2」的情形。先看下面例子：

在上面的定義中，取 n_1＝2、n_2＝4，則此洗牌操作$\sigma_{2,4}$可記為

$(12,3456) \xrightarrow{\sigma_{2,4}} (13,2456)$，或$\sigma_{2,4}=\begin{pmatrix}1 & 2, & 3 & 4 & 5 & 6\\ 1 & 3, & 2 & 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$。

也就是說，當第 2 堆的第 1 張牌 3 插入第 1 堆的第 1 張牌 1 之後，接著第 2 堆的第 2 ~ 4 張牌(即 4 ~ 6)都插入第 1 堆的第 2 張牌 2 之後，再重新分出第 1 堆的 2 張牌是 1、3；第 2 堆的 4 張牌是 2、4、5、6。給出下面 的定義：

【定義 4-2】擴充情形

假設及洗牌操作σ_{n_1,n_2}同定義 4，當 n_1≦n_2時，第 2 堆的第 n_1 ~ n_2張牌 n_1＋n_1 ~ n_1＋n_2都插入第 1 堆的第 n_1張牌 n_1之後。則此情形洗牌 1 次的過程可表示如下：

$$\begin{array}{l}(1\quad 2\quad 3\quad 4\quad \ldots\quad n_1,\quad n_1+1\quad \ldots\quad n_1+n_1-1\quad n_1+n_1\quad \ldots\quad n_1+n_2) \xrightarrow{\sigma_{n_1,n_2}}\\ (1\quad n_1+1\quad 2\quad n_1+2\quad \ldots\quad \ldots\ldots,\quad \ldots\quad \ldots\quad n_1\quad n_1+n_1\quad \ldots\quad n_1+n_2)\end{array}$$

由上可以看出：

【定理 1】當 $n_1 \leqq n_2$ 時，$\sigma_{n_1,n_2} = \sigma_{n_1,n_1-1}$。

根據上面的討論，原來洗牌的問題只需考慮下列情形：

【問題 2】問題轉化
「當兩堆牌洗若干次回到原來的排序，求洗牌的最少次數？」就是相當於
「在 $n_1 > n_2$ 的情形下，求 $\mathrm{ord}(\sigma_{n_1,n_2}) = ?$」

要計算 $\mathrm{ord}(\sigma_{n_1,n_2})$，先說明一些性質。根據李華介[4]第 53 頁的 Lemma 3.4.7 可得

【定理 2】$\mathrm{ord}(C) = n(C)$
一個圈(cycle) C 的階數(order)就是這個圈的元素個數。

例如：已知 $\sigma_{3,2} = \begin{pmatrix} 123,45 \\ 142,53 \end{pmatrix} = (2453)$，所以 $\mathrm{ord}(\sigma_{3,2}) = \mathrm{ord}\ ((2453)) = 4$。有時為了簡化符號，把 ord ((2453))寫成 ord (2453)表示。

接下來說明「兩個圈(cycle)的合成」，設兩個圈(cycle)為 $\sigma = (2534)$、$\tau = (63142)$，則 σ 和 τ 的合成記為 $\sigma \circ \tau$，$\boxed{\text{注意 } \sigma \circ \tau \text{ 是先算 } \tau \text{ 再算 } \sigma}$，則 $\sigma \circ \tau = (2534)(63142)$計算方式如下：

由 1 開始，先看 τ 把 1 對應到 4, 記為 $1 \to 4$; 再看 σ 把 4 對應到 2, 記為 $4 \to 2$。最後得 $1 \to 2$。

接著看 2，在 τ 中有 $2 \to 6$；在 σ 中沒有 6 略過。最後得 $2 \to 6$。

接著看 6，在 τ 中有 $6 \to 3$；在 σ 中有 $3 \to 4$。最後得 $6 \to 4$。

接著看 4，在 τ 中有 $4 \to 2$；在 σ 中有 $2 \to 5$。最後得 $4 \to 5$。

接著看 5，在 τ 中沒有 5 略過；在 σ 中有 $5 \to 3$。最後得 $5 \to 3$。

接著看 3，在 τ 中有 $3 \to 1$；在 σ 中沒有 1 略過。最後得 $3 \to 1$。

這樣 1 ~ 6 的數字重排都計算完成，得到 $\sigma \circ \tau = (2534)(63142) = (126453)$。

參考李華介[5]第 48 ~ 50 頁，可知「兩個圈(cycle)的合成」的定義及定理：

【定義 5】圈(cycle)的合成
若 σ、τ 是兩個圈(cycle)，則 σ 和 τ 的合成記為 $\sigma \circ \tau$，有時為了方便會寫成 $\sigma \cdot \tau$ 或 $\sigma\tau$。再次提醒 $\sigma \circ \tau$ 是先算 τ 再算 σ。

根據李華介[5]第 50 頁的 Lemma 3.4.4 可得

【定理 3】圈(cycle)的交換性
(1)一個圈(cycle)的數字順序，不論由哪一個數字開始寫，都視為同一個圈。若以最

小數字開始寫的圈(cycle)作為代表，則一個圈(cycle)的表示法會只有一種。之後，我們都採用此種寫法表示一個圈(cycle)。

例如：(123)＝(231)＝(312)，以(123)表示。

(2)若σ、τ是「不相交」的兩個圈(cycle)，則$\sigma\cdot\tau=\tau\cdot\sigma$。其中「不相交」是指兩個圈(cycle)沒有共同元素。換言之，不相交的兩個圈，其合成的運算有交換性。

參考李華介[5]第 52 頁，可知

【定理 4】圈(cycle)的唯一分解

一個圈(cycle)都可「唯一分解」為若干個「不相交」的圈的合成。

參考李華介[5]第 54 頁 Proposition，可知將重排σ寫成若干個「不相交」的圈(cycle)的合成後，會有下面計算重排$\mathrm{ord}(\sigma)$的方法。

【定理 5】$\mathrm{ord}(\sigma)$的算法

設重排$\sigma=C_1\circ C_2\ldots\circ C_r$，其中 C_1、C_2、…、C_r 都是不相交的圈(cycle)，且$\mathrm{ord}(C_i)$ ＝d_i (其中 $i=1$、2、...、r)，則$\mathrm{ord}(\sigma)=[d_1，d_2，\ldots，d_r]$。

第三部分：兩堆牌的最少洗牌次數

再經過多次洗牌的試驗後，我們發現第一堆的第一張牌從未變換位置，並且為了後續的探究，以下將第一堆的第一張牌編為 0 號。設第 1 堆牌有 n_1 張，由左至右編號為 0~ n_1-1，第 2 堆牌有 n_2 張，由左至右編號為 n_1~ n_1+n_2-1。根據【問題 2】就是要「在 $n_1>n_2$ 的情形下，求 $\mathrm{ord}(\sigma_{n_1,n_2})$ =？」，下面依 n_2 的值討論。

1.當 n_2＝1

因 $\sigma_{n_1,1}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & \ldots & n_1-1, & n_1\\ 0 & n_1 & 1 & \ldots & n_1-2, & n_1-1\end{pmatrix}=(1,n_1,\ n_1-1,\ n_1-2,\ldots,2)$，

得 $\mathrm{ord}\,(\sigma_{n_1,1})=\mathrm{ord}\,(1,n_1,\ n_1-1,\ n_1-2,\ldots,2)=n_1$。

2.當 n_2＝2

因 $\sigma_{n_1,2}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots & n_1-2 & n_1-1, & n_1 & n_1+1\\ 0 & n_1 & 1 & n_1+1 & 2 & 3 & \ldots. & n_1-4 & n_1-3, & n_1-2 & n_1-1\end{pmatrix}$

其中，$1\to n_1,\ 2\to 1,\ 3\to n_1+1$,當 $4\leqq i\leqq n_1+1$時，$i\to i-2$。

$\sigma_{n_1,2}$ 的 cycle 表示$(1,n_1,n_1-2,\ n_1-4,\ldots,?,\ldots)$出現公差為－2 的等差數列：$n_1,n_1-2$，$n_1-4,\ \ldots,$ 此數列由n_1的奇偶性來決定此等差數列為遞減的連續偶數或連續奇數，進而決定著$\sigma_{n_1,2}$圈(cycle)的形式。我們就n_1為偶數或奇數分別討論如下。

(1) 若n_1是偶數，設n_1=2k (其中 k 為自然數)

數列 $1,n_1,n_1-2,\ n_1-4,\ldots$的末項為 2，再因 $2\to 1$，得$(1,n_1,n_1-2,\ n_1-4,\ldots,2)$。

因 3 為奇數，不屬於上述的圈，考慮 3 形成的圈，得$(3,n_1+1,n_1-1,\ n_1-3,\ldots,5)$。

至此，$1\sim n_1+1$皆屬於上述兩個圈之一，

得 $\sigma_{2k,2}=(1,n_1,n_1-2,\ n_1-4,\ldots,2)\,(3,n_1+1,n_1-1,\ n_1-3,\ldots,5)$。

因 $\mathrm{ord}\,(1,n_1,n_1-2,\ n_1-4,\ldots,2)$＝k＋1 且 $\mathrm{ord}\,(3,n_1+1,n_1-1,\ n_1-3,\ldots,5)$＝k。

得 $\mathrm{ord}\,(\sigma_{2k,2})$＝[k＋1，k]。

(2) 若n_1是奇數，設n_1=2k＋1 (其中 k 為自然數)

數列 $1,n_1,n_1-2,\ n_1-4,\ldots$遞減至 3，

又 $3\to n_1+1$, 接續$n_1+1,n_1-1,\ n_1-3,\ldots,4,2$,

又 $2\to 1$, 得數列 $1,n_1,n_1-2,\ \ldots,3,n_1+1,n_1-1,\ n_1-3,\ldots,4,2$。

得$\sigma_{2k+1,2}=(1,n_1,n_1-2,\ \ldots,3,n_1+1,n_1-1,\ n_1-3,\ldots,4,2)$。

至此，$1\sim n_1+1$皆屬於此圈，得 $\mathrm{ord}\,(\sigma_{2k+1,2})$＝2k＋2。

上述過程顯示，當n_1是偶數，$\sigma_{2k,2}$為 $(1,n_1,n_1-2,\ \ldots,2)$、$(3,n_1+1,n_1-1,\ \ldots,5)$ 兩個圈的合成；若n_1是奇數，$\sigma_{2k+1,2}=(1,n_1,n_1-2,\ \ldots,3,n_1+1,n_1-1,\ n_1-3,\ldots,4,2)$。

3.當 $n_2=3$

因 $\sigma_{n_1,3}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \ldots & n_1-3 & n_1-2 & n_1-1, & n_1 & n_1+1 & n_1+2 \\ 0 & n_1 & 1 & n_1+1 & 2 & n_1+2 & 3 & 4 & 5 & \ldots & n_1-6 & n_1-5 & n_1-4, & n_1-3 & n_1-2 & n_1-1 \end{pmatrix}$

其中，$1\to n_1$, $3\to n_1+1$, $5\to n_1+2$, $4\to 2\to 1$, 且當 $6\leqq i\leqq n_1+2$ 時， $i\to i-3$。

$\sigma_{n_1,3}$的 cycle 為：$(1, n_1, n_1-3,\ n_1-6,\ldots,?,\ldots)$, 出現公差為－3 的等差數列 n_1, n_1-3, $n_1-6,\ldots$, 因為公差為－3, 故必定遞減至三個連續整數之一，我們考慮 6、7 或 8 這三個連續整數，與 $n_2=2$ 時相似，$\sigma_{n_1,3}$ 圈(cycle)的形式跟此數列遞減至 6、7 或 8 的哪一個有關。分三種情況討論：

(1)若遞減至 6, 則表示 n_1 是 3 的倍數，設 $n_1=3k$(k 為自然數), 因 $6\to 3$, $3\to n_1+1$, $n_1+1\to n_1-2$, …, 則此圈變成

$(1,\ n_1, n_1-3,\ n_1-6,\ldots, 6, 3,\ n_1+1, n_1-2,\ldots,?,\ldots)$，

又 $n_1=3k$, 等差數列 $n_1+1, n_1-2,\ n_1-5$ 遞減至 4, 又 $4\to 2\to 1$, 可得此圈為

$(1,\ n_1, n_1-3,\ n_1-6,\ldots, 6, 3,\ n_1+1, n_1-2,\ldots,4,2)$

再考慮不在上述圈的最小奇數，此例為 5, 考慮 5 形成的圈，得

$(5,\ n_1+2,\ n_1-1,\ldots, 8)$

至此，得 $1\sim n_1+2$ 皆屬上述這 2 圈，得

$\sigma_{3k,3}=(1,\ n_1, n_1-3,\ n_1-6,\ldots, 6, 3,\ n_1+1, n_1-2,\ldots,4,2)\ (5,\ n_1+2,\ n_1-1,\ldots, 8)$

因為 $\mathrm{ord}(1,\ n_1, n_1-3,\ n_1-6,\ldots, 6, 3,\ n_1+1, n_1-2,\ldots,4,2)= 2k+2$

$\mathrm{ord}(5,\ n_1+2,\ n_1-1,\ldots, 8) = k$

得 $\mathrm{ord}(\sigma_{3k,3})=[2k+2, k]$。

(2)若遞減至 7, 則表示 n_1 是 3 的倍數加 1, 設 $n_1=3k+1$ (k 為自然數), 再仿(1)討論，可得 $\mathrm{ord}(\sigma_{3k+1,3})=[k+2, 2k+1]$ 。

(3)若遞減至 8, 則表示 n_1 是 3 的倍數加 2, 設 $n_1=3k+2$ (k 為自然數), , 再仿(1)討論，可得 $\mathrm{ord}(\sigma_{3k+2,3})=[2k+3, k+1]$ 。

由此可見，$n_1=3k$、$n_1=3k+1$ 或 $n_1=3k+2$ 將影響等差數列 $n_1,\ n_1-3,\ n_1-6,\ \ldots$, 遞減至 6、7 或 8，並進而決定 $\sigma_{n_1,3}$ 圈(cycle)的形式。

為方便討論，我們根據 $\sigma_{n_1,3}$ 的對應關係，將 $1\sim n_1+2$ 分類，區分成三個分別以 1、3、5 為首項的數列，稱為「圈數列(cycle sequence)」，分別記為 <$C_{3,1}$>、<$C_{3,3}$>、<$C_{3,5}$>。因為這些圈數列有可能會與其它圈數列接續成一個圈，因此，我們在末項之後，以「括號」註明末項對應到哪一個首項，以方便後續的運算。

$<C_{3,1}>$=1, 13, 10, 7, 4, 2, (1)

$<C_{3,3}>$=3, 14, 11, 8, (5)

$<C_{3,5}>$=5, 15, 12, 9, 6, (3)

為了方便利用圈數列來求圈，我們僅紀錄圈數列的首項及末項所對應的數，並寫成重排的樣式，例如：上例中，$\sigma_{13,3}$的三個圈數列的首項分別為 1, 3, 5，末項所對應的數分別為 1, 5, 3，我們記為$\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 1 & 5 & 3\end{pmatrix}$=(1)(35)。由此符號不難得$\sigma_{13,3}$為兩個圈的合成，其中：$<C_{3,1}>$為一個圈(1, 13, 10, 7, 4, 2)，$<C_{3,3}>$和$<C_{3,5}>$兩個圈數列接續成一個圈(3, 14, 11, 8, 5, 15, 12, 9, 6)，即$\sigma_{13,3}$=(1, 13, 10, 7, 4, 2) (3, 14, 11, 8, 5, 15, 12, 9, 6)。

定義$\sigma_{n_1,3}$的圈數列如下：

【定義 6-1】$\sigma_{n_1,3}$的圈數列及圈數列的首末項重排

$$\sigma_{n_1,3}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \ldots & n_1-3 & n_1-2 & n_1-1, & n_1 & n_1+1 & n_1+2\\ 0 & n_1 & 1 & n_1+1 & 2 & n_1+2 & 3 & 4 & 5 & \ldots & n_1-6 & n_1-5 & n_1-4, & n_1-3 & n_1-2 & n_1-1\end{pmatrix}$$

分別以 1、3、5 為首項，根據$\sigma_{n_1,3}$的對應關係，定義 3 個圈數列如下，其中 b_1, b_2, b_3 分別為三個圈數列末項所對應的數。

$<C_{3,1}>=1,\ n_1,\ n_1-3, n_1-6, n_1-9,\ldots, (b_1)$

$<C_{3,3}>=3, n_1+1, n_1-2, n_1-5, n_1-8,\ldots, (b_2)$

$<C_{3,5}>=5, n_1+2, n_1-1, n_1-4, n_1-7,\ldots, (b_3)$

再定義圈數列的首末項重排$b\sigma_{n_1,3}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ b_1 & b_2 & b_3\end{pmatrix}$。

這樣的圈數列定義是否能將 $1\sim n_1+2$ 不重複且完全的分配到三個圈數列中？檢視如下：

(1) 我們分別以 1, 3, 5 為三個圈數列的首項，三個連續整數 n_1, n_1+1, n_1+2 分別為第二項，每個圈數列自第二項起，皆為公差－3 的等差數列，直至遞減為三個連續整數 6、7、8 後，此時，我們可知 1、3、5 以及大於或等於 6 的各數皆不重複的完全分配到三個圈數列之中。

(2) 6、7、8 三數各減 3，對應到 3、4、5，其中 3、5 為首項，故以括號註記於圈數列末項之後，即 $6\rightarrow(3)$, $8\rightarrow(5)$，而因為 $4\rightarrow2$, $2\rightarrow1$, 故將 1 以括號註記於末項，即 $7\rightarrow4\rightarrow2\rightarrow(1)$（此時，2 和 4 也分配到三個圈數列之中）。

$$\begin{cases}6\rightarrow(3)\\ 7\rightarrow4\rightarrow2\rightarrow(1)\\ 8\rightarrow(5)\end{cases}$$

因此，由(1)和(2), 我們將 $1\sim n_1+2$ 不重複且完全的分配到三個圈數列中。

以下利用圈數列，分別就 n_1=3k、n_1=3k +1 或 n_1=3k +2 討論等差數列 n_1, n_1-3, n_1-6, … , 遞減至 6、7 或 8，並進而求出 $\sigma_{n_1,3}$。

$$\sigma_{n_1,3}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \cdots & n_1-3 & n_1-2 & n_1-1, & n_1 & n_1+1 & n_1+2 \\ 0 & n_1 & 1 & n_1+1 & 2 & n_1+2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n_1-6 & n_1-5 & n_1-4, & n_1-3 & n_1-2 & n_1-1 \end{pmatrix}$$

(1) 若 n_1=3k, 圈數列如下：

$\langle C_{3,1}\rangle$＝1, 3k , 3k－3, 3k－6, 3k－9,…, 6, (3)

$\langle C_{3,3}\rangle$＝3, 3k+1, 3k－2, 3k－5, 3k－8,…, 7,4 2, (1)

$\langle C_{3,5}\rangle$＝5, 3k+2, 3k－1, 3k－4, 3k－7,…, 8, (5)

算得此三個圈數列分別有 k, k+2, k 個元素。

圈數列首末項重排 b$\sigma_{3k,3}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 3 & 1 & 5\end{pmatrix}$=(13)(5)。

即 $\sigma_{3k,3}$ 為兩個圈(1, 3k,…, $\underline{6}$, 3, 3k+1, …, $\underline{7}$,4 2)及(5, 3k+2,…, $\underline{8}$)的合成。

(2) 若 n_1=3k+1, 圈數列如下：

$\langle C_{3,1}\rangle$＝1, 3k+1, 3k－2, 3k－5, 3k－8,…, 7,4 $\underline{2}$, (1)

$\langle C_{3,3}\rangle$＝3, 3k+2, 3k－1, 3k－4, 3k－7,…, $\underline{8}$, (5)

$\langle C_{3,5}\rangle$＝5, 3k+3, 3k , 3k－3, 3k－6, 3k－9,…, $\underline{6}$, (3)

此三個圈數列分別有 k+2, k, k+1 個元素。

圈數列首末項重排 b$\sigma_{3k+1,3}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 1 & 5 & 3\end{pmatrix}$=(1)(35)。

即 $\sigma_{3k+1,3}$ 為兩個圈(1, 3k, 3k－3, …, $\underline{7}$,4 2) 及 (3, 3k+1, …, $\underline{8}$, 5, 3k+2, …, $\underline{6}$)的合成。

(3) 若 n_1=3k+2, 圈數列如下：

$\langle C_{3,1}\rangle$＝1, 3k+2, 3k－1, 3k－4, 3k－7,…, $\underline{8}$, (5)

$\langle C_{3,3}\rangle$＝3, 3k+3, 3k , 3k－3, 3k－6, 3k－9,…, $\underline{6}$, (3)

$\langle C_{3,5}\rangle$＝5, 3k+4, 3k+1, 3k－2, 3k－5, 3k－8,…, 7,4 $\underline{2}$, (1)

此三個圈數列分別有 k, k+1, k+3 個元素。

圈數列首末項重排 b$\sigma_{3k+2,3}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 5 & 3 & 1\end{pmatrix}$=(15)(3)

即 $\sigma_{3k+2,3}$ 為兩個圈(1, 3k+2,…, $\underline{8}$, 5, 3k+4,…, $\underline{7}$,4 2)及(3, 3k+3,…, $\underline{6}$)的合成。

列表觀察上述結果，我們發現圈數列項數及首末項重排部分存在規律，其關聯註明如下：

n_1	$<C_{3,i}>$ 項數			圈數列首末項重排 $b\sigma_{n_1,3}$	$\sigma_{n_1,3}$ 分解的圈數	$ord(\sigma_{n_1,3})$
	$i=1$	$i=3$	$i=5$			
$3k$	k	$k+2$	k	$\begin{pmatrix}1&3&5\\3&1&5\end{pmatrix}=(13)(5)$	2	$[2k+2, k]$
$3k+1$	$k+2$	k	$k+1$	$\begin{pmatrix}1&3&5\\1&5&3\end{pmatrix}=(1)(35)$	2	$[k+2, 2k+1]$
$3k+2$	k	$k+1$	$k+3$	$\begin{pmatrix}1&3&5\\5&3&1\end{pmatrix}=(15)(3)$	2	$[2k+3, k+1]$

如下表，列出 n_1=3k、n_1=3k＋1 的圈數列，可以看到 3k＋1, 3k－2, 3k－5, 3k－8,…, 7,4 這個等差數列出現在 n_1=3k 的 $<C_{3,3}>$ 和 n_1=3k＋1 的 $<C_{3,1}>$；同樣的，3k＋2, 3k－1, 3k－4, 3k－7,…, 8, 這個等差數列出現在 n_1=3k 的 $<C_{3,5}>$ 和 n_1=3k＋1 的 $<C_{3,3}>$。較特別的是，3k, 3k－3, 3k－6, 3k－9,…, 6,這個等差數列出現在 n_1=3k 的 $<C_{3,1}>$ 和 n_1=3k＋1 的 $<C_{3,5}>$，而且 n_1=3k＋1 的 $<C_{3,5}>$ 多出了 3k＋3 這一項。這些等差數列位置的變化，直接影響到圈數列的項數及首末項重排。

圈數列	$n_1=3k$	$n_1=3k+1$
$<C_{3,1}>$	1, $3k$, …, $\underline{6}$, (3)	1, $3k+1$, …, $\underline{7}$,4 ,2, (1)
$<C_{3,3}>$	3, $3k+1$,…, $\underline{7}$,4 ,2, (1)	3, $3k+2$, …, $\underline{8}$, (5)
$<C_{3,5}>$	5, $3k+2$,…, $\underline{8}$, (5)	5, $3k+3$, $3k$, …, $\underline{6}$, (3)

新增

而且，上述變化的規則也出現在 n_1=3k＋1、n_1=3k＋2 的圈數列。

圈數列	$n_1=3k+1$	$n_1=3k+2$
$<C_{3,1}>$	1, $3k+1$, …, $\underline{7}$,4 ,2, (1)	1, $3k+2$, …, $\underline{8}$, (5)
$<C_{3,3}>$	3, $3k+2$, …, $\underline{8}$, (5)	3, $3k+3$, $3k$, …, $\underline{6}$, (3)
$<C_{3,5}>$	5, $3k+3$, $3k$, …, $\underline{6}$, (3)	5, $3k+4$, $3k+1$, …, $\underline{7}$,4 ,2, (1)

新增

上述討論結果歸納如下：

圈數列	首項	$n_1=3k$		$n_1=3k+1$		$n_1=3k+2$	
		末項	末項對應數	末項	末項對應數	末項	末項對應數
$\langle C_{3,1}\rangle$	1	6	(3)	2	(1)	8	(5)
$\langle C_{3,3}\rangle$	3	2	(1)	8	(5)	6	(3)
$\langle C_{3,5}\rangle$	5	8	(5)	6	(3)	2	(1)

圈數列	$n_1=3k$	$n_1=3k+1$	$n_1=3k+2$
$\langle C_{3,1}\rangle$	k 個	$k+2$ 個	k 個
$\langle C_{3,3}\rangle$	$k+2$ 個	k 個	$k+1$ 個
$\langle C_{3,5}\rangle$	k 個	$k+1$ 個	$k+2+1$ 個
		新增	新增

根據上述發現，使得我們可以藉由 $n_1=kn_2$ 的圈數列求得 $n_1=kn_2+d$ (其中 $d=1,2,\ldots,n_2-1$) 的圈數列，因此後續只需針對 $n_1=kn_2$ 進行討論。

4.當 $n_2=4$

我們利用圈數列來求 $\sigma_{n_1,4}$，已知

$$\sigma_{n_1,4}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & \ldots & n_1-1, & n_1 & n_1+1 & n_1+2 & n_1+3 \\ 0 & n_1 & 1 & n_1+1 & 2 & n_1+2 & 3 & n_1+3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \ldots & n_1-5, & n_1-4 & n_1-3 & n_1-2 & n_1-1 \end{pmatrix}$$

的對應關係可表示為
$$\begin{cases} i \to n_1+\dfrac{i-1}{2}, (i=1,3,5,7) \\ i \to \dfrac{i}{2}, (i=2,4,6) \\ i \to i-4, (i=8,9,\ldots,n_1+3) \end{cases}$$

當 $n_1=4k$ 時，定義 4 個圈數列如下：

$\langle C_{4,1}\rangle=1,\ 4k\ ,4k-4, 4k-8, 4k-12,\ldots, 8, 4, 2, (1)$

$\langle C_{4,3}\rangle=3, 4k+1, 4k-3, 4k-7, 4k-11,\ldots, 9, (5)$

$\langle C_{4,5}\rangle=5, 4k+2, 4k-2, 4k-6, 4k-10,\ldots, 10, 6, (3)$

$\langle C_{4,7}\rangle=7, 4k+3, 4k-1, 4k-5, 4k-9,\ldots\ldots, 11, (7)$

根據與前段相同的方法，我們檢驗得 1~4k+3 皆不重複的分配到各個圈數列，過程省略。

算得此四個圈數列分別有 k+2, k, k+1, k 項。圈數列重排為：$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 5 & 3 & 7 \end{pmatrix}$=(1)(35)(7)。

即 $\sigma_{4k,4}$ 為三個圈的合成。

利用圈數列中等差數列位置的變動，我們得到下表：

n_1	$<C_{4,i}>$ 個數				圈數列首末項重排 $b\sigma_{n_1,4}$	$\sigma_{n_1,4}$ 分解的圈數	$\mathrm{ord}(\sigma_{n_1,4})$
	i =1	i =3	i =5	i =7			
4k	k+2	k	k+1	k	$\begin{pmatrix}1&3&5&7\\1&5&3&7\end{pmatrix}=(1)(35)(7)$	3	[k+2,2k+1, k]
4k＋1	k	k+1	k	k+3	$\begin{pmatrix}1&3&5&7\\5&3&7&1\end{pmatrix}=(157)(3)$	2	[3k+3, k+1]
4k＋2	k+1	k	k+3	k+1	$\begin{pmatrix}1&3&5&7\\3&7&1&5\end{pmatrix}=(1375)$	1	4k+5
4k＋3	k	k+3	k+1	k+2	$\begin{pmatrix}1&3&5&7\\7&1&5&3\end{pmatrix}=(173)(5)$	2	[3k+5, k+1]

我們思考不列出圈數列，而能求得圈數列的項數及重排的方法。我們想法如下：

(1) 觀察 n_1=4k 時，$\sigma_{n_1,4}$ 的 4 個圈數列，不難得知各個圈數列從第二項 4k、4k＋1、4k＋2、4k＋3 遞減至 8、9、10、11 為止，各有 k－1 項，再加上首項，故有 k 項。

(2) 接下來各圈數列再遞減為 4、5、6、7，其中，5、7 為圈數列的首項，不再列入圈數列中，因此遞減為奇數 5、7 的圈數列恰有 k 項。

(3) 因為 4、6 兩數皆為小於 8 的偶數，依照 $i\rightarrow\frac{i}{2},(i=2,4,6)$ 的對應關係，將 4 和 6 分別除以 2，但若除完後仍為偶數，則會再除以 2，直至變成小於 8 的奇數，即為某一個圈數列的首項。根據這項觀察，將 4 和 6 寫成 $c\times2^{\alpha}$ (c 為奇數)的形式：$4=1\times2^{2}$、$6=3\times2^{1}$，即得 4 對應到 1，且此圈數列有 k+2 項；6 對應到 3，且此圈數列有 k+1 項。

我們得 4 個圈數列分別遞減至 4、5、6、7，寫出 4 個圈數列之首項及第 k+1 項重排：

$$\begin{pmatrix}1&3&5&7\\4&5&6&7\end{pmatrix},$$

將偶數 4、6 表為 $c\times2^{\alpha}$ (c 為奇數)的形式，得：

$$\begin{pmatrix}1&3&5&7\\1\times2^{2}&5&3\times2^{1}&7\end{pmatrix},$$

故得圈數列的首末項重排：

$$b\sigma_{4k,4}=\begin{pmatrix}1&3&5&7\\1&5&3&7\end{pmatrix},$$

並得 4 個圈數列依序有 k+2、k、k+1、k 項。

是否能直接求的 4k＋d (其中 d=1,2,3) 的圈數列首末項重排，由之前所觀察到圈數列中等差數列的位置，可以直接得到圈數列重排如下：

n_1=4k＋1 時，圈數列之首項及第 k＋1 項重排為：$\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & 7\\ 5 & 6 & 7 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & 7\\ 5 & 3\times 2^1 & 7 & 1\times 2^2\end{pmatrix}$

對應的首末項重排 $b\sigma_{4k+1,4}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & 7\\ 5 & 3 & 7 & 1\end{pmatrix}$

圈數列項數依序為：k, k+1, k, k+3 (最後 1 個圈數列項數要再加 1) 。

n_1=4k＋2 時，圈數列之首項及第 k＋1 項重排為：$\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & 7\\ 6 & 7 & 4 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & 7\\ 3\times 2^1 & 7 & 1\times 2^2 & 5\end{pmatrix}$

對應的首末項重排 $b\sigma_{4k+2,4}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & 7\\ 3 & 7 & 1 & 5\end{pmatrix}$

圈數列項數依序為： k+1, k, k+3, k＋1 (最後 2 個圈數列項數要再加 1) 。

n_1=4k＋3 時，圈數列之首項及第 k＋1 項重排為：$\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & 7\\ 7 & 4 & 5 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & 7\\ 7 & 1\times 2^2 & 5 & 3\times 2^1\end{pmatrix}$

對應的首末項重排 $b\sigma_{4k+3,4}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & 7\\ 7 & 1 & 5 & 3\end{pmatrix}$

圈數列項數依序為： k, k+3, k＋1, k+2 (最後 3 個圈數列項數要再加 1) 。

5. 一般性討論

至此，我們給出一般性的定義如下：

【定義 6-2】σ_{n_1,n_2} 的圈數列

$$\sigma_{n_1,n_2}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \ldots\ldots & 2i-1 & 2i & 2i+1 & \ldots\ldots \\ 0 & n_1 & 1 & n_1+1 & 2 & n_1+2 & 3 & n_1+3 & 4 & n_1+4 & 5 & \ldots\ldots & n_1+i-1 & i & n_1+i & \ldots\ldots\end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix}2n_2-1 & 2n_2 & 2n_2+1 & 2n_2+2 & \ldots\ldots & n_1-1, & n_1 & \ldots & n_1+n_2-1 \\ n_1+n_2-1 & n_2 & n_2+1 & n_2+2 & \ldots\ldots & n_1-n_2-1, & n_1-n_2 & \ldots & n_1-1\end{matrix}\Bigg)$$

分別以 2i－1 (其中 i =1~ n_2)為首項，定義 n_2 個圈數列如下。末項所對應的數 b_i (i =1~ n_2)以括號列於末項之後。

$<C_{n_2,2i-1}>$＝2i－1, n_1＋i－1, n_1＋i－1－n_2, n_1＋i－1－2n_2, …, (b_i) (i =1~ n_2)

再定義圈數列的首末項重排為：$b\sigma_{n_1,n_2}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & \ldots & 2i-1 & \ldots & 2n_2-1\\ b_1 & b_2 & b_3 & \ldots & b_i & \ldots & b_{n_2}\end{pmatrix}$。

σ_{n_1,n_2} 重排的對應關係可表示為$\begin{cases} i \to n_1 + \dfrac{i-1}{2}, (i = 1,3,...,2n_2 - 1) \\ i \to \dfrac{i}{2}, (i = 2,4,...,2n_2 - 2) \\ i \to i - n_2, (2n_2 \le i \le n_1 + n_2 - 1) \end{cases}$，據此，我們定義 n_2 個圈數列分別以 $1,3,..., 2n_2 - 1$ 為首項，分別以連續整數 $n_1,n_1+1,..., n_1 + n_2 - 1$ 為第二項，並自第二項起為公差 $-n_2$ 的等差數列，遞減直至分別出現 $2n_2$，$2n_2 + 1$，$2n_2 + 2$,..., $2n_2 + (n_2 - 1)$，根據對應的關係，各項再對應到 n_2，$n_2 + 1$，$n_2 + 2$,..., $2n_2 - 1$（註：其中幾個奇數為圈數列首項）此時，可得介於 n_2~ $n_1 + n_2 - 1$ 間的整數皆已分配到圈數列之中。小於 n_2 的奇數為圈數列的首項，小於 n_2 的偶數則依照 $i \to \dfrac{i}{2}, (i = 2,4,...,2n_2 - 2)$ 的對應關係分配到各圈數列之中，因此，1~ $n_1 + n_2 - 1$ 皆不重複的分配到各圈數列中。

另外，以 $n_1 = kn_2$ 時為例，檢驗諸 b_i (i =1~ n_2)互異，恰為奇數 1, 3, 5,..., $2n_2$－1。

根據前節的討論，得圈數列之首項及第 k＋1 項重排為：

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & ... & 2i-1 & ... & 2n_2 - 1 \\ n_2 & n_2 + 1 & n_2 + 2 & ... & n_2 + i - 1 & ... & 2n_2 - 1 \end{pmatrix},$$

在 n_2 個連續整數 n_2, n_2＋1, n_2＋2,..., $2n_2$－1 之中，分成奇數與偶數討論如下：

(1) 介於 n_2~ $2n_2$－1 的奇數，即為圈數列的首項。

(2) 介於 n_2~ $2n_2$－1 的偶數，依照 $i \to \dfrac{i}{2}, (i = 2,4,...,2n_2 - 2)$ 的對應關係，一直除以 2，直至變為奇數，顯然這些奇數皆小於 n_2。任取兩相異偶數 m, n 滿足 $n_2 \leqq m<n<2n_2-1$, 令 $m = p \times 2^{\alpha}$, $n = q \times 2^{\beta}$ (p,q 為奇數且 $\alpha, \beta \ge 1$), 利用反證法證明 $p \ne q$ 如下：假設 $p = q$, 得 $\dfrac{n}{m} = \dfrac{q \times 2^{\beta}}{p \times 2^{\alpha}} = \dfrac{2^{\beta}}{2^{\alpha}}$，但 $\dfrac{n}{m} < 2$, 因此得 $\dfrac{n}{m}=1$，矛盾，因此得證 $p \ne q$。得介於 n_2~ $2n_2$－1 的偶數都對應到小於 n_2 的相異奇數 b_i。

根據前節的討論，得當 $n_1 = kn_2$ 時，σ_{n_1,n_2} 的圈數列之首項及第 k＋1 項重排為：

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & ... & 2i-1 & ... & 2n_2 - 1 \\ n_2 & n_2 + 1 & n_2 + 2 & ... & n_2 + i - 1 & ... & 2n_2 - 1 \end{pmatrix},$$

若進一步假設 $n_i + i - 1 = c_i \times 2^{\alpha_i}$，則可將首末項重排 $b\sigma_{n_2k,n_2}$ 表為：

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & ... & 2i-1 & ... & 2n_2 - 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & ... & c_i & ... & c_{n_2} \end{pmatrix},$$

並得到<$C_{n_2,2i-1}$> 有 $k + \alpha_i$ 項。列為定理如下：

【定理 6】$n_1 = kn_2$ 時，σ_{n_1,n_2} 的圈數列項數及重排

當 $n_1 = kn_2$ 時，令 $n_2 + i - 1 = c_i \times 2^{\alpha_i}$，則 σ_{n_1,n_2} 之圈數列首末項重排為

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & \dots & 2i-1 & \dots & 2n_2-1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_i & \dots & c_{n_2} \end{pmatrix},$$

且 $<C_{n_2,2i-1}>$ 有 $k+\alpha_i$ 項。

運用上述結果，計算 $\sigma_{6k,6}$ 的圈數列之首末項重排 $b\sigma_{6k,6}$：

$\sigma_{6k,6}$ 的圈數列之首項及第 k+1 項重排為 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 3\times 2 & 7 & 1\times 2^3 & 9 & 5\times 2 & 11 \end{pmatrix}$

則 $b\sigma_{6k,6} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 3 & 7 & 1 & 9 & 5 & 11 \end{pmatrix}$

並且六個圈數列依序有：k+1, k, k+3, k, k+1, k 項。

再由 n_1=6k 和 n_1=6k+d (其中 d =1,2,3,4,5)在圈數列項數及首末項重排的關聯得下表：

n_1	$<C_{6,i}>$個數						圈數列首末項重排 $b\sigma_{n_1,6}$	$ord(\sigma_{n_1,6})$
	i =1	i =3	i =5	i =7	i =9	i =11		
6k	k+1	k	k+3	k	k+1	k	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 3 & 7 & 1 & 9 & 5 & 11 \end{pmatrix}$ =(1,3,7,9,5)(11)	[5k+5,k]
6k+1	k	k+3	k	k+1	k	k+2	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 7 & 1 & 9 & 5 & 11 & 3 \end{pmatrix}$ =(1,7,5,9,11,3)	6k+6
6k+2	k+3	k	k+1	k	k+2	k+1	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 1 & 9 & 5 & 11 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ =(1)(3,9)(5)(7,11)	[k+3,2k+2,k+1,2k+1]
6k+3	k	k+1	k	k+2	k+1	k+4	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 9 & 5 & 11 & 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ =(1,9,7,3,5,11)	6k+8
6k+4	k+1	k	k+2	k+1	k+4	k+1	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 5 & 11 & 3 & 7 & 1 & 9 \end{pmatrix}$ =(1,5,3,11,9)(7)	[5k+8,k+1]
6k+5	k	k+2	k+1	k+4	k+1	k+2	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 11 & 3 & 7 & 1 & 9 & 5 \end{pmatrix}$ =(1,11,5,7)(3)(9)	[4k+7,k+2,k+1]

我們進一步觀察 n_1=6k 和 n_1=6k＋d (d =1,2,3,4,5)在圈數列重排及個數上的關聯，得定理 7：

【定理 7】$n_1 = kn_2 + d$ 時，σ_{n_1,n_2} 的圈數列個數及重排

當 $n_1 = kn_2 + d$ (其中 d=0~ $n_2 - 1$)時，當令 $\begin{cases} n_2 + d + i - 1 = c_i \times 2^{\alpha_i} \text{(其中} 1 \le i < n_2 - d + 1) \\ i + d - 1 = c_i \times 2^{\alpha_i} \text{(其中} n_2 - d + 1 \le i \le n_2) \end{cases}$,

則：

(1) σ_{n_1,n_2} 之圈數列首末項重排 $b\sigma_{n_1,n_2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & \dots & 2i-1 & \dots & 2n_2-1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_i & \dots & c_{n_2} \end{pmatrix}$。

(2) $< C_{n_2,2i-1} >$ 項數為 $\begin{cases} k + \alpha_i \text{(其中} 1 \le i < n_2 - d + 1) \\ k + \alpha_i + 1 \text{(其中} n_2 - d + 1 \le i \le n_2) \end{cases}$。

運用上述結果，計算 $\mathrm{ord}(\sigma_{7k+3,7})$ 如下：

$n_1 = 7k + 3$, n_2=7, d=3, 令 $\begin{cases} i + 9 = c_i \times 2^{\alpha_i} \text{(其中} 1 \le i < 5) \\ i + 2 = c_i \times 2^{\alpha_i} \text{(其中} 5 \le i \le 7) \end{cases}$,

當 $1 \le i < 5$ 時，得 $10 = 5 \times 2 = c_1 \times 2^{\alpha_1}, 11 = c_2 \times 2^{\alpha_2}, 12 = 3 \times 2^2 = c_3 \times 2^{\alpha_3}, 13 = c_4 \times 2^{\alpha_4}$

當 $5 \le i \le 7$ 時，得 $7 = c_5 \times 2^{\alpha_5}, 8 = 1 \times 2^3 = c_6 \times 2^{\alpha_6}, 9 = c_7 \times 2^{\alpha_7}$

即得 $\sigma_{7k+3,7}$ 之圈數列首項及第 k+1 項重排為：$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 \\ 5 \times 2 & 11 \times 2^0 & 3 \times 2^2 & 13 \times 2^0 & 7 \times 2^0 & 1 \times 2^3 & 9 \times 2^0 \end{pmatrix}$$

對應的首末項重排 $b\sigma_{7k+3,7} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 \\ 5 & 11 & 3 & 13 & 7 & 1 & 9 \end{pmatrix}$=(1,5,3,11)(7,13,9)。

七個圈數列依序有：k+1, k, k+2, k, k+1, k+4, k +1 項，得 $\mathrm{ord}(\sigma_{7k+3,7}) = [4k+7,3k+2]$。

第四部分：兩堆相同數量的牌之最少洗牌次數

為了得出游聖傑[4]的式子，本部分討論兩堆數量相同的洗牌次數，問題即為「當 $n_1=n_2$ 時，求 $\mathrm{ord}(\sigma_{n_1,n_2})=?$」

進一步而言，若令 $n_1=n_2k+d$，則本文討論的問題即為 k=1, d=0 的特例，將之代入前節利用圈數列所得的式子：$\begin{cases}\mathrm{ord}(\sigma_{3k,3})=[2k+2,k]\\ \mathrm{ord}(\sigma_{4k,4})=[k+2,2k+1,k]\\ \mathrm{ord}(\sigma_{6k,6})=[5k+5,k]\end{cases}$，即得 $\begin{cases}\mathrm{ord}(\sigma_{3,3})=[4,1]=4\\ \mathrm{ord}(\sigma_{4,4})=[3,3,1]=3\\ \mathrm{ord}(\sigma_{6,6})=[10,1]=10\end{cases}$。

方便起見，以下令 $n_1=n_2=n$，問題即為：

【問題 3】兩堆相同張數之洗牌次數
「求 $\mathrm{ord}(\sigma_{n,n})=?$」

我們重新檢視重排 $\sigma_{n,n},(n=3,4,5)$ 的對應關係，希望能找出一個 $\sigma_{n,n}$ 對應式子。

$$\sigma_{4,4}=\begin{pmatrix}0&1&2&3,&4&5&6&7\\0&4&1&5&2&6&3&7\end{pmatrix}$$

$$\sigma_{5,5}=\begin{pmatrix}0&1&2&3&4,&5&6&7&8&9\\0&5&1&6&2,&7&3&8&4&9\end{pmatrix}$$

從以上重排，我們發現須就奇偶數來描述 $\sigma_{n,n}$ 的對應關係：$\begin{cases}i\to\dfrac{i}{2},(i=2,4,6,8......)\\ i\to n+\dfrac{i-1}{2},(i=1,3,5,7,....)\end{cases}$

我們依照這樣的對應關係，也可以直接計算 $\sigma_{6,6}$ 如下：

由 i=1 開始，得 $1\to 6+\dfrac{1-1}{2}=6\to\dfrac{6}{2}=3\to 6+\dfrac{3-1}{2}=7\to 6+\dfrac{7-1}{2}=9\to 6+\dfrac{9-1}{2}=10........$，得 $\sigma_{6,6}$=(1,6,3,7,9,10,5,8,4,2)(11)。

這樣的對應關係需每次去檢驗奇、偶性，在計算過程中產生困擾，我們想找一個不需考慮奇、偶性的對應關係。我們引入「反向圈」來解決此問題。

若重排 $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}=(1432)=(4321)$，考慮由第二列對應到第一列的反向重排 $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\\uparrow&\uparrow&\uparrow&\uparrow\\4&1&2&3\end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix}4&1&2&3\\1&2&3&4\end{pmatrix}$，可寫成圈(4123)=(1234), 這兩個圈所代表的對應關係分別為 1→4→3→2 和 2→3→4→1，恰好顛倒，我們將(2341)稱之為(1432)的反向圈。

一般性的定義如下：

【定義 7】重排圈形式的反向圈

設重排 $\sigma=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}$, 其圈形式為 $(a_1,a_2,a_3,\dots,a_{t-1},a_t)$。

若將 σ 的對應 $a_1\to b_1$, $a_2\to b_2,\dots$, $a_n\to b_n$,考慮反向對應的重排 τ,

即 $\tau=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$,

稱 τ 為 σ 的反向重排，而稱 τ 的圈形式為圈 σ 的反向圈。

不難得出反向圈 $\tau=(a_t,a_{t-1},a_{t-2},\dots,a_2,a_1)$ 且 $\sigma\tau=\tau\sigma=\mathrm{I}$ (恆等變換).

以下由重排的對應關係寫出反向圈 $(a_1,a_2,\dots,a_t)$ 之 a_k，其對應關係需區分成 $1\le i<n$ 和 $n<i\le 2n-1$ 兩種情況來討論：

(1) 觀察 $\sigma_{4,4}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3, & 4 & 5 & 6 & 7 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ 0 & 4 & 1 & 5, & 2 & 6 & 3 & 7 \end{pmatrix}$，$\sigma_{5,5}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4, & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ 0 & 5 & 1 & 6 & 2, & 7 & 3 & 8 & 4 & 9 \end{pmatrix}$

當 $1\le i<n$ 時，得 $i\to 2i$；(左例為 $1\le i<4$, 右例為 $1\le i<5$)

(2)觀察 $\sigma_{4,4}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3, & 4 & 5 & 6 & 7 \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & 4 & 1 & 5, & 2 & 6 & 3 & 7 \end{pmatrix}$，$\sigma_{5,5}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4, & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & 5 & 1 & 6 & 2, & 7 & 3 & 8 & 4 & 9 \end{pmatrix}$

當 $n\le i\le 2n-1$ 時，得 $i\to 2i-2n+1$；(左例為 $4\le i\le 7$, 右例為 $5\le i\le 9$)

綜合上述兩點，即得 $\sigma_{n,n}$ 的反向圈對應關係：$\begin{cases} i\to 2i, (\text{其中 } 1\le i\le n-1) \\ i\to 2i-2n+1, (\text{其中 } n\le i\le 2n-1) \end{cases}$。

利用上述對應關係求 $\sigma_{6,6}$ 的反向圈(a_1=1, a_2, a_3,…)：

由 1<6，得 1→2, 由 2<6，得 2→4, 由 4<6，得 4→8,

由 8≥6，得 8→2×8−2×6+1，得 8→5,

由 5<6，得 5→10,

由 10≥6，得 10→2×10−2×6+1，得 8→9,

由 9≥6，得 9→2×9−2×6+1，得 9→7,

由 7≥6，得 7→2×7−2×6+1，得 7→3,

由 3<6，得 3→6,

由 6≥6，得 6→2×6−2×6+1，得 6→1,

對應關係為：$1\to 2\to 4\to 8\to 5\to 10\to 9\to 7\to 3\to 6\to 1$

即得 $\sigma_{6,6}$ 的反向圈=(1,2,4,8,5,10,9,7,3,6)，再得 $\sigma_{6,6}$=(6,3,7,9,10,5,8,4,2,1)(11)

計算此對應關係時，可行成一個快速計算的法則:不論 $a_k = i$ 之值為何，先計算 2i, 若 $2i < n$, 則 $a_{k+1} = 2i$ ；但若 $n \le 2i \le 2n-1$, 則 $a_{k+1} = 2i-(2n-1)$ 。

以上將 i 的對應分成兩段來討論，並不比分奇偶性討論來得更好，但這樣的分類使我們可以利用同餘式 $a_k \equiv 2a_{k-1} (\mathrm{mod}\ 2n-1)$ 來簡化此式。說明如下：

(1) 當 $a_k = i$ 且 $1 \le i < n$ 時，得 $a_{k+1} = 2i$, 滿足 $a_{k+1} = 2a_k$ ；

(2) 當 $a_k = i$ 且 $n \le i \le 2n-1$ 時，得 $a_{k+1} = 2i-(2n-1)$, 滿足 $a_{k+1} = 2a_k-(2n-1)$ ；

(3) 上述兩種狀況皆滿足同餘式 $a_k \equiv 2a_{k-1} (\mathrm{mod}\ 2n-1)$.

下面以 $\sigma_{6,6}$ 為例，說明利用同於是求反向圈的方法：

例如：求 $\sigma_{6,6}$ 的反向圈(a_1=1, a_2, a_3,…)為何？

取 n=6, 則 $2n-1=11$,

得 $a_2 = 2a_1 = 2$ 、 $a_3 = 2a_2 = 4$ 、 $a_4 = 2a_3 = 8$ ，

得 $a_5 = 2a_4 = 16 > 11$, 則由 $16 \equiv 5 (\mathrm{mod} 11)$, 故 $a_5 = 5$ ，

得 $a_6 = 2a_5 = 10$

得 $a_7 = 2a_6 = 20 > 11$, 則由 $20 \equiv 9 (\mathrm{mod} 11)$, 故 $a_7 = 9$ ，

得 $a_8 = 2a_7 = 18 > 11$, 則由 $18 \equiv 7 (\mathrm{mod} 11)$, 故 $a_8 = 7$ ，

得 $a_9 = 2a_8 = 14 > 11$, 則由 $14 \equiv 3 (\mathrm{mod} 11)$, 故 $a_9 = 3$ ，

得 $a_{10} = 2a_9 = 6$

得 $a_{11} = 2a_{10} = 12 > 11$, 則由 $12 \equiv 1 (\mathrm{mod} 11)$, 故 $a_{11} = 1$ 。

對應順序為：$1 \to 2 \to 4 \to 8 \to 5 \to 10 \to 9 \to 7 \to 3 \to 6 \to 1$

即得 $\sigma_{6,6}$ 的反向圈 (1,2,4,8,5,10,9,7,3,6)

上例中由 $\sigma_{6,6}$ 的反向圈即得 $\sigma_{6,6}$ =(6,3,7,9,10,5,8,4,2,1)(11)。

另外，$\sigma_{6,6}$ 反向圈的對應關係為 $1 \to 2 \to 4 \to 8 \to 5 \to 10 \to 9 \to 7 \to 3 \to 6 \to 1$,

也可看成 $1 \to 2 \to 4 \to 8 \to 16 \equiv 5 (\mathrm{mod} 11) \to 32 \equiv 10 (\mathrm{mod} 11) \to 64 \equiv 9 (\mathrm{mod} 11) \to$

$128 \equiv 7 (\mathrm{mod} 11) \to 256 \equiv 3 (\mathrm{mod} 11) \to 512 \equiv 6 (\mathrm{mod} 11) \to 1024 \equiv 1 (\mathrm{mod} 11)$,

換句話說，就是把數列 $< 2^{n-1} >= 1, 2, 2^2, ..., 2^{10}$ 的每項除以 11 求餘數。因此，求 $\sigma_{n,n}$ 的一個反向圈 $(a_1, a_2, ..., a_k, ..., a_n)$ 時，不需逐一計算 $a_1, a_2, a_3, ...$ 而直接求出 a_k ，方法如下：令 $s_k = a_1 \times 2^{k-1}$, 若 $a_k \equiv s_k (\mathrm{mod}\, 2n-1)$ 且 $1 \le s_k \le 2n-1$ ，則 a_k 即為所求。我們以 $\sigma_{6,6}$ 的反向圈為例說明如下。

例如：$\sigma_{6,6}$ 的反向圈 $(a_1=1, a_2, a_3, ..., a_n)$ 之中，

$s_7= a_1\times 2^6=64$, 由 $64\equiv 9(\mathrm{mod}\,11)$ 得 $a_7=9$；$s_8= a_1\times 2^7=128$, 由 $128\equiv 7(\mathrm{mod}\,11)$ 得 $a_9=7$；

$s_9= a_1\times 2^8=256$, 由 $256\equiv 3(\mathrm{mod}\,11)$ 得 $a_9=3$；$s_{10}= a_1\times 2^9=512$, 由 $512\equiv 6(\mathrm{mod}\,11)$ 得 $a_{10}=6$。

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a_i	1	2	4	8	5	10	9	7	3	6	1
2^{i-1}	1 (2^0)	2 (2^1)	4 (2^2)	8 (2^3)	16 (2^4)	32 (2^5)	64 (2^6)	128 (2^7)	256 (2^8)	512 (2^9)	1024 (2^{10})

我們得到直接計算 a_k 的方法如下。

【定理 8】反向圈的 a_k

$\sigma_{n,n}$ 的一個反向圈 $(a_1, a_2, ..., a_k, ..., a_n)$，令 $s_k = a_1\times 2^{k-1}$，則 a_k 滿足 $a_k\equiv s_k(\mathrm{mod}\ 2n-1)$ 且 $1\le a_k\le 2n-1$。

顯然圈 $\sigma(a_t, a_{t-1}, a_{t-2}, ..., a_2, a_1)$ 與其反向圈 $\tau(a_1, a_2, a_3, ..., a_{t-1}, a_t)$ 的元素個數相同，即 $\mathrm{ord}(\sigma)=\mathrm{ord}(\tau)=t$。

【定理 9】

圈 $\sigma(a_t, a_{t-1}, a_{t-2}, ..., a_2, a_1)$ 的反向圈為 $\tau(a_1, a_2, a_3, ..., a_{t-1}, a_t)$，則 $\mathrm{ord}(\tau)=\mathrm{ord}(\sigma)=t$.

由定理 9, 當兩堆張數相同時，我們將由反向圈的個數來求圈的階數。問題轉變為：「如何求反向圈的個數？」。並進一步探討：「如何快速求得反向圈的個數？」

【問題 4】

「如何快速求得 $\sigma_{n,n}$ 的反向圈 $\tau(a_1, a_2, a_3, ..., a_{t-1}, a_t)$ 的項數？」

若 $\sigma_{n,n}$ 之反向圈 τ 的對應為 $a_1\to a_2\to ...$, 考慮當 $a_{t+1}=a_1$ 時，得 $a_1\to a_2\to ...\to a_t\to a_{t+1}(=a_1)$，則反向圈 $\tau(a_1, a_2, a_3, ..., a_{t-1}, a_t)$ 有 t 項。以下求 $t=$？

將 $a_{t+1}=a_1$, $s_{t+1}=2^t\times a_1$ 代入定理 8 之 $s_{t+1}\equiv a_{t+1}(\mathrm{mod}\ 2n-1)$, 得 $2^t a_1\equiv a_1(\mathrm{mod}\ 2n-1)$, 化簡得 $a_1(2^t-1)\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2n-1)$，亦即 t 滿足 $a_1(2^t-1)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2n-1)$。顯然，滿足上式的 t 值不唯一，我們要求的是其中的最小值，亦即 t 為滿足 $a_1(2^t-1)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2n-1)$ 的最小正整數。進一步得 $\mathrm{ord}(\tau)=t$。

進一步探討，因反向圈 $\tau=(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_{t-1},a_t)$ 的對應為 $a_1\to a_2\to\ldots\to a_i\to\ldots\to a_t\to a_1\to\ldots$，亦可表為 $\tau=(a_i,a_{i+1},\ldots,a_t,a_1,a_2,\ldots,a_{i-1})$，其對應關係為 $a_i\to a_{i+1}\to\ldots\to a_t\to a_1\to a_2\to\ldots\to a_{i-1}\to a_i$，不難得到：若 t 滿足 $a_1(2^t-1)\equiv 0(\text{mod } 2n-1)$，則 t 亦滿足 $a_i(2^t-1)\equiv 0(\text{mod } 2n-1)$，$i=2,\ldots,t$.換言之，由反向圈內任意項，皆會得到相同的 t。以 $\sigma_{6,6}$ 的反向圈為例，說明如下：

例如：已知 $\sigma_{6,6}$ 的一個反向圈為(1,2,4,8,5,10,9,7,3,6)，由此可見 1,2,4,8,5,10,9,7,3,6 皆為此反向圈的元素，令 a_1=1, a_2=2, a_3=4, a_4=8, a_5=5, a_6=10, a_7=9, a_8=7, a_9=3, a_{10}=6, 我們得 t=10 滿足 $a_i(2^t-1)\equiv 0(\text{mod } 11)$, i=1,2,…,10。

【定理 10】

若 $\sigma_{n,n}$ 為若干個圈的合成，若 S 為圈 σ 的元素，且 t 為滿足 $S(2^t-1)\equiv 0(\text{mod } 2n-1)$的最小整數，則 $\text{ord}(\sigma)=t$ 。

求 $\text{ord}(\sigma_{n,n})$ 時，由定理 5, 得 $\text{ord}(\sigma_{n,n})$ 等於 $\sigma_{n,n}$ 之圈的階數的最小公倍數。而由定理 10，將反向圈內的任一數 S 代入 $S(2^t-1)\equiv 0(\text{mod } 2n-1)$即可算得此反向圈的項數 t，進而得到圈的階數即為 t。然而，我們並未實際將 $\sigma_{n,n}$ 寫成圈的合成，因此，我們必須針對每個數，計算他所在的反向圈之項數，才能得到 $\text{ord}(\sigma_{n,n})$. 以求 $\text{ord}(\sigma_{5,5})$ 為例，說明如下：

例如：求 $\text{ord}(\sigma_{5,5})=$？

由 $1\times(2^{t_1}-1)\equiv 0(\text{mod } 9)$, 得 t_1=6,

由 $2\times(2^{t_2}-1)\equiv 0(\text{mod } 9)$, 得 t_2=6,

由 $3\times(2^{t_3}-1)\equiv 0(\text{mod } 9)$, 得 t_3=2,

由 $4\times(2^{t_4}-1)\equiv 0(\text{mod } 9)$, 得 t_4=6,

由 $5\times(2^{t_5}-1)\equiv 0(\text{mod } 9)$, 得 t_5=6,

由 $6\times(2^{t_6}-1)\equiv 0(\text{mod } 9)$, 得 t_6=2,

由 $7\times(2^{t_7}-1)\equiv 0(\text{mod } 9)$, 得 t_7=6,

由 $8\times(2^{t_8}-1)\equiv 0(\text{mod } 9)$, 得 t_8=6,

由 $9\times(2^{t_9}-1)\equiv 0(\text{mod } 9)$, 得 t_9=1,

則 $\text{ord}(\sigma_{5,5})=[6,6,2,6,6,2,6,6,1]=6$

若求出 $\sigma_{5,5}$ 的圈形式(157842)(36)(9)，我們只須從第一個圈內的任一數，即得第一個圈的階數為 6, 同理，在其他的圈內任取一數，即得另外兩個圈的階數分別為 2 和 1, 即得 $\text{ord}(\sigma_{5,5})=[6,2,1]=6$ 。然而，就是因為我們未實際將 $\sigma_{5,5}$ 表成圈形式，因此，上例中，我們算出 t_1~t_9，這樣的計算隨著 n 的增加而變得繁雜，是否能簡化計算？思考如下：

計算量最少的狀況為從每個圈中挑選一個數來求此圈的階數，但在不將$\sigma_{n,n}$表為圈形式的前提下，此目標無法達成。退而求其次，調整目標為：「在每個圈內，至少挑到一個數來求此圈的階數！」但是，如何確保每個圈內都至少挑到一數亦不容易，轉而思考：「哪些數可以排除？」，此想法可從圈數列得到解決方法。因為圈是由圈數列接續而成，因此，屬於同一圈數列的數必在同一個圈之中，故在一個圈數列中，只需保留一個數而排除其他的數！保留哪個數最為方便？顯然，保留各個圈數列的「首項」最為方便。因此，求$\mathrm{ord}(\sigma_{n,n})$時，只需計算各個圈數列首項 1, 3, 5,…, $2n-1$所在的反向圈項數。若將圈數列首項$2i-1$所在的圈之項數記為t_{2i-1}, 則$\mathrm{ord}(\sigma_{n,n})=[t_1,t_1,...t_{2n-1}]$. 以求$\mathrm{ord}(\sigma_{11,11})$為例，說明如下：

例如：求$\mathrm{ord}(\sigma_{11,11})=$？

由$1\times(2^6-1)\equiv0\,(\mathrm{mod}\ 21)$, 得 $t_1=6$,

由$3\times(2^3-1)\equiv0\,(\mathrm{mod}\ 21)$, 得 $t_3=3$,

由$5\times(2^6-1)\equiv0\,(\mathrm{mod}\ 21)$, 得 $t_5=6$,

由$7\times(2^2-1)\equiv0\,(\mathrm{mod}\ 21)$, 得 $t_7=2$,

由$9\times(2^3-1)\equiv0\,(\mathrm{mod}\ 21)$, 得 $t_9=3$,

由$11\times(2^6-1)\equiv0\,(\mathrm{mod}\ 21)$, 得 $t_{11}=6$,

由$13\times(2^6-1)\equiv0\,(\mathrm{mod}\ 21)$, 得 $t_{13}=6$,

由$15\times(2^3-1)\equiv0\,(\mathrm{mod}\ 21)$, 得 $t_{15}=3$,

由$17\times(2^6-1)\equiv0\,(\mathrm{mod}\ 21)$, 得 $t_{17}=6$,

由$19\times(2^6-1)\equiv0\,(\mathrm{mod}\ 21)$, 得 $t_{19}=6$,

由$21\times(2^3-1)\equiv0\,(\mathrm{mod}\ 21)$, 得 $t_{21}=3$,

得$\mathrm{ord}(\sigma_{11,11})=[6,3,6,2,3,6,6,3,6,6,3]=6$

【定理 11】以圈數列首項的階數求$\mathrm{ord}(\sigma_{n,n})$

若 t_i為滿足$(2i-1)(2^{t_i}-1)\equiv0\,(\mathrm{mod}\ 2n-1)$, i=1,3,5,…, $2n-1$的最小整數，則
$\mathrm{ord}(\sigma_{n,n})=[t_1,t_3,...t_{2n-1}]$。

定理 11 指出僅需計算每個圈數列首相所在的圈之階數即可求得$\mathrm{ord}(\sigma_{n,n})$，進一步再思考：「有無再簡化的可能性？」

上例計算過程中，發現諸 t_i不外乎 2、3 或 6，且若$(2i-1,2n-1)=d$，則 d 值決定了 t_i值。說明如下：

(1) 當 i=1,5,11,13,17,19 時，d=1，計算$2^x-1\equiv0\,(\mathrm{mod}\ 21)$, 得 x=6；

(2) 當 i=3,9,15,21 時，d=3，計算$2^x-1\equiv0\,(\mathrm{mod}\ 7)$, 得 x=3；

(3) 當 i=7 時，d=7，計算 $2^x-1\equiv 0 \pmod 3$, 得 x=2。

歸納為：

(1) 當 d=1 時，2^x-1 為 $2n-1$ 倍數；當 $d\neq 1$ 時，2^x-1 為 $\frac{2n-1}{d}$ 倍數；

(2) 由 d=1 時，滿足 2^x-1 為 $2n-1$ 倍數的 x 值，必定使得 $2n-1$ 為 $\frac{2n-1}{d}$ 倍數。

綜上所述歸納(1)~(2)可知，當 $(2i-1,2n-1)=1$ 時，若滿足 $(2i-1)(2^{t_{2i-1}}-1)\equiv 0 \pmod{2n-1}$ 的最小整數為 t_{2i-1}, 則 $\mathrm{ord}(\sigma_{n,n})=t_{2i-1}$。挑哪個首項最方便？顯然，在所有圈數列首項之中，不論 n 值為何，皆有 $(1,2n-1)=1$ 的結果，因此，僅需計算滿足 $1\times(2^{t_1}-1)\equiv 0 \pmod{2n-1}$ 的最小整數 t_1, 則 $\mathrm{ord}(\sigma_{n,n})=t_1$。以求 $\mathrm{ord}(\sigma_{11,11})$ 為例，說明如下：

例如：$\mathrm{ord}(\sigma_{11,11})=?$

由 $1\times(2^6-1)\equiv 0 \pmod{21}$, 得 $t_1=6$, 即得 $\mathrm{ord}(\sigma_{11,11})=6$。

【定理 12】由圈數列首項 1 求 $\mathrm{ord}(\sigma_{n,n})$

若 t 為滿足 $2^t-1\equiv 0 \pmod{2n-1}$ 的最小整數，則 $\mathrm{ord}(\sigma_{n,n})=t$。

定理 12 提供了最簡計算 $\mathrm{ord}(\sigma_{n,n})$ 的最簡方法。若考慮整副撲克牌 52 張的洗牌情形，將 52 張牌分成兩堆 26 張牌，令 n=26 代入 $2^t-1\equiv 0 \pmod{51}$, 得 t=8 滿足上式 $2^8-1\equiv 0 \pmod{51}$。因此，整副撲克牌經過 8 次洗牌即可回到原來排序。

以下利用定理 12 進行洗牌階數的探討，將 n=1~16 時的洗牌次數 $\mathrm{ord}(\sigma_{n,n})$ 如下表：

n	$\mathrm{ord}(\sigma_{n,n})$	n	$\mathrm{ord}(\sigma_{n,n})$	N	$\mathrm{ord}(\sigma_{n,n})$	n	$\mathrm{ord}(\sigma_{n,n})$
1	0	5	6	9	8	13	20
2	2	6	10	10	18	14	18
3	4	7	12	11	6	15	28
4	3	8	4	12	11	16	5

上表中，我們發現：若 $n=2^{\beta}$ 時，則 $\mathrm{ord}(\sigma_{n,n})=\beta+1$。例如：

$n=2^1=2$ 時，得 $\mathrm{ord}(\sigma_{2,2})=1+1=2$；
$n=2^2=4$ 時，得 $\mathrm{ord}(\sigma_{4,4})=2+1=3$；
$n=2^3=8$ 時，得 $\mathrm{ord}(\sigma_{8,8})=3+1=4$；
$n=2^4=16$ 時，得 $\mathrm{ord}(\sigma_{16,16})=4+1=5$；

我們再檢驗 $n=2^5=32$ 時，亦得 $\mathrm{ord}(\sigma_{32,32})=5+1=6$. 我們用定理 12 來檢驗上述發現，令 $n=2^\beta$, 則洗牌次數 t 滿足 $2^t-1\equiv 0 \pmod{2^{\beta+1}-1}$, 得 $2^t-1=A(2^{\beta+1}-1)$, 因左式為奇數，故 A 亦為奇數，令 A 為最小奇數 1 代入，得 $2^t-1=2^{\beta+1}-1$, 化簡得 $t=\beta+1$.

直觀上，令 A=1 所得的 $t=\beta+1$ 即為最小的洗牌次數，上述計算過程的數據如下表。

n	t	A	$2^t-1=A(2n-1)$
2	2	1	$2^2-1=1\times 3$
4	3	1	$2^3-1=1\times 7$
8	4	1	$2^4-1=1\times 17$
16	5	1	$2^5-1=1\times 31$

檢驗這個直觀的推測如下，令 A=1 時，洗牌次數為 t_1, 再令 A=2p+1 時，洗牌次數為 t_2, 我們將驗證 $t_1<t_2$。

由定理得 $\begin{cases}2^{t_1}-1=2^{\beta+1}-1\\ 2^{t_2}-1=(2p+a)(2^{\beta+1}-1)\end{cases}$, 由下式 $2^{t_2}-1=(2p+1)(2^{\beta+1}-1)=2p\times 2^{\beta+1}-2p+2^{\beta+1}-1$, 得 $2^{t_2}=2p\times 2^{\beta+1}-2p+2^{\beta+1}$, 將上式 $2^{t_1}=2^{\beta+1}$ 代入，得 $2^{t_2}=2p\times 2^{t_1}-2p+2^{t_1}$ ，顯然若 $t_1>0$, 得 $2p\times 2^{t_1}-2p=2p(2^{t_1}-1)>0$, 因此， $2^{t_2}=2p\times 2^{t_1}-2p+2^{t_1}>2^{t_1}$, 得 $t_2>t_1$ 。

【定理 13】

當兩堆紙牌各有 $n=2^\beta$ 張時，則洗牌次數 $\mathrm{ord}(\sigma_{n,n})=\beta+1$。

定理 13 顯示，當兩堆牌的張數以 2 為首項，以 2 為公比的等比數列之指數成長時，其階數的增長僅為公差 1 的等差數列。

當 $n\neq 2^\beta$ 時，由 $2^t-1=A(2n-1)$ 計算最小的洗牌次數 t 時，發現其 $A\neq 1$, 數據如下表：

n	t	A	$2^t-1=A(2n-1)$
3	4	3	$2^4-1=3\times 7$
5	6	7	$2^6-1=7\times 9$
6	10	93	$2^{10}-1=93\times 11$
7	12	315	$2^{12}-1=315\times 13$
9	8	15	$2^8-1=15\times 17$
10	18	13797	$2^{18}-1=13797\times 19$

上述觀察如定理 14：

【定理 14】

若 $n\neq 2^\beta$, $\mathrm{ord}(\sigma_{n,n})=t$ 且 $2^t-1=A(2n-1)$ ，則 $A\neq 1$ 。

證明：設 $A=1$, 則 $2^t-1=2n-1$, 得 $2^t=2n$, 即 $n=2^{t-1}$, 與 $n\neq 2^\beta$ 矛盾，故得 $A\neq 1$.　QED.

伍、研究結果：

我們利用重排 (permutation) 、圈 (cycle) 及階數 (order) 等工具來探討日常生活之洗牌問題，為洗牌提供一個數學模式。探究的過程及成果如下：

1. 我們定義了記錄撲克牌之排列的符號、洗牌操作 σ_{n_1,n_2} 的重牌符號、重排的圈形式及洗牌次數 $\mathrm{ord}(\sigma)$，並探討其相關性質。根據定理 1，將問題轉化為：

   「在 $n_1 > n_2$ 的情形下，求 $\mathrm{ord}(\sigma_{n_1,n_2}) = ?$」

2. 我們在依 n_2 之值來探討 $\mathrm{ord}(\sigma_{n_1,n_2})$ 的過程中，發現需將 n_1 區分為 $n_1 = kn_2 + d$ (其中 $d = 0,1,\ldots,n_2 - 1$)來討論，並進而定義「圈數列」：

   $<C_{n_2,2i-1}> = 2i-1,\ n_1+i-1,\ n_1+i-1-n_2,\ n_1+i-1-2n_2,\ \ldots,\ (b_i) \qquad (i = 1\sim n_2)$

   藉由圈數列之中的等差數列之位置的變化，我們進一步定義了圈數列首末項重排

   $$b\sigma_{n_1,n_2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & \ldots & 2i-1 & \ldots & 2n_2-1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & \ldots & b_i & \ldots & b_{n_2} \end{pmatrix},$$

   進而得到本文第一個重要的結果：

   當 $n_1 = kn_2 + d$ (其中 $d=0\sim n_2-1$)時，若令

   $$\begin{cases} n_2 + d + i - 1 = c_i \times 2^{\alpha_i} \ (\text{其中} 1 \le i < n_2 - d + 1) \\ i + d - 1 = c_i \times 2^{\alpha_i} \ (\text{其中} n_2 - d + 1 \le i \le n_2) \end{cases}，則：$$

   (1) σ_{n_1,n_2} 之圈數列首末項重排 $b\sigma_{n_1,n_2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & \ldots & 2i-1 & \ldots & 2n_2-1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & \ldots & c_i & \ldots & c_{n_2} \end{pmatrix}$；

   (2) $<C_{n_2,2i-1}>$ 項數為 $\begin{cases} k + \alpha_i \ (\text{其中} 1 \le i < n_2 - d + 1) \\ k + \alpha_i + 1 \ (\text{其中} n_2 - d + 1 \le i \le n_2) \end{cases}$。

3. 我們討論兩邊牌數相同情況，即求 $\mathrm{ord}(\sigma_{n,n})$。探討過程中，定義了「反向圈」，並利用反向圈的項數來求 $\mathrm{ord}(\sigma_{n,n})$。一開始我們需針對每個述去計算其所在反向圈的項數，藉著逐步簡化計算量，我們得到本文另一個重要的結果：

   「若 t 為滿足 $2^t - 1 \equiv 0 \pmod{2n-1}$ 的最小整數，則 $\mathrm{ord}(\sigma_{n,n}) = t$。」

   據此結果，我們也印證了：

   「當兩堆紙牌各有 $n = 2^\beta$ 張時，則洗牌次數 $\mathrm{ord}(\sigma_{n,n}) = \beta + 1$。」

陸、未來展望：

本文利用重排 (permutation) 、圈 (cycle) 及階數 (order) 等工具來探討日常生活之洗牌問題，為洗牌提供一個數學模式，後續可運用此模式來探討不同的插牌方式（例如：將右邊 i 張牌依序插入第 2,4,6,...2i 個空隙，其中，我們將編號 t-1 與 t 兩張牌之間的空隙稱為第 t 個空隙）或分成更多堆數時洗牌問題。

柒、參考資料：

1. 許志農等(2013)，普通高級中學數學第二冊。第 1 章數列與級數。臺北市：龍騰。

2. 林建維、陳奕均、吳彥澄，苗栗縣第 54 屆中小學科展國中組數學科作品。「牌」山倒海一洗「排」遊戲。

3. 林建維、陳奕均、吳彥澄、蘇柏奇、游淑媛。2014。一個關於洗牌次數之基測題目的延伸探討。科學教育月刊。372，13-25。

4. 游盛傑，小論文第 1030331 梯次。數學、魔術、撲克牌。

5. 李華介，大學基礎代數。http://math.ntnu.edu.tw/~li/algebra-html/algebra.pdf。

【評語】040405

本論文引入重排的方法，來研究洗牌的問題，算是相當自然的方法。

論文的前半花了許多篇幅做一般性群論的對應與介紹，以及理論上的說明，對於實際計算，使用最少洗牌的次數以回到原來開始的牌形，一直要到第 25 頁的定理 12 才有比較實際的計算公式：求最小正整數 t 使的 $2^t \equiv 1 \pmod{2n-1}$。這與第 4 頁提及的[結果 2]有點相近，感覺不出這篇文章的創新之處在哪裡。