中華民國第55屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

最佳(鄉土)教材獎

040404

斜向座標上皇后之研究

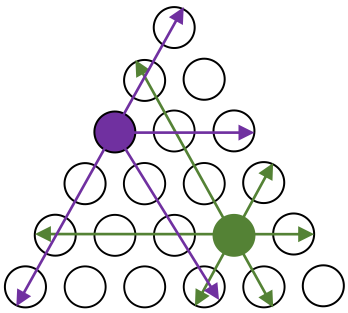
學校名稱：國立嘉義高級中學

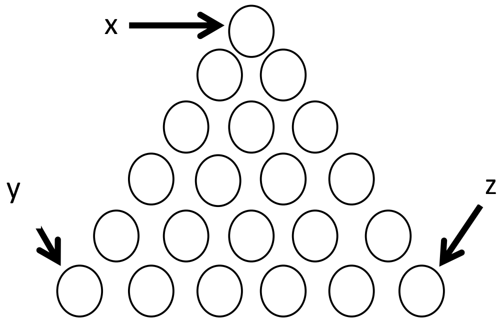
作者：	指導老師：
高二 李威締 高二 王執雋 高二 賴亮宇	吳博仁

關鍵詞：皇后、正三角形棋盤

摘要

如下圖所示，在一邊有 6 個圓圈的正三角形棋盤上，將某個圓圈擺上皇后，此圓圈是皇后的根據地，箭號所指的三個與邊平行的方向，是該皇后所能管轄的範圍，且兩個皇后不能互相管轄到對方的根據地，不是根據地的圓圈可以兩個皇后共管。我們的研究在討論一邊有 n 個圓圈的正三角形棋盤中使每個圓圈都被管轄到時，最多可放幾個皇后，此外也發現皇后在不同圓圈位置時所能管轄到的總圓圈數相同以及兩個皇后至少共同管轄 4 個

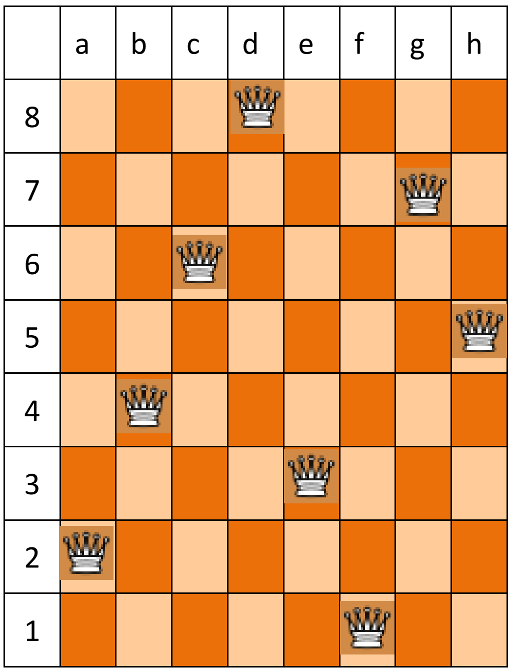




為了解出需要的皇后數，我們將三個方向（→、↖、↙）設為 x, y, z 座標，以座標方法證明，並嘗試透過電腦程式的驗證出更大邊圓圈數棋盤。再比較以一排排推論與使用座標法的差別。並將題目延伸至最少皇后數、正四面體及生活中的應用。

壹、研究動機

在一次偶然的機會下，在網路上看到一道八皇后問題(**最早是由西洋棋棋手馬克斯·貝瑟爾提出，其後就有許多的數學家爭相加入此問題的探討，就是如何在 8×8 的西洋棋棋盤上放置八個皇后，使得任何一個皇后都無法直接吃掉其他的皇后？為了達到此目的，任兩個皇后都不能處於同一條橫行、縱行或斜線上，雖說前前後後有許多人對於此問題提出許多種解答，但在經過一陣嚴格篩選(**不包括旋轉與對稱**)**，只留下了十二種)



八皇后範例

，此問題的結束，於是給予我們一個新的開端，我們將棋盤更改為正三角形棋盤，雖然僅需考慮到三個方向，但不限制其皇后數，就可以討論在一邊有 n 個圓圈且所有圓圈需被管轄到時，最多可擺放幾個皇后。研究過程中，我們也運用了數學二上的「向量」單元中的斜向座標來進行研究。

貳、研究目的

一、討論皇后在不同的圓圈位置時，所能管轄的總圓圈數的差異。

二、討論每個圓圈座標的差異

三、探討兩個皇后至少共同管轄幾個圓圈？最多共同管轄幾個圓圈？

四、盡可能在一邊有 n 個圓圈的棋盤上擺放皇后使得所有圓圈都被管轄到，最多可以擺幾個皇后？

五、以座標法與討論法分別證明

六、嘗試找出最少皇后數的規律

七、將問題延伸至正四面體，將其座標化

八、生活中的應用

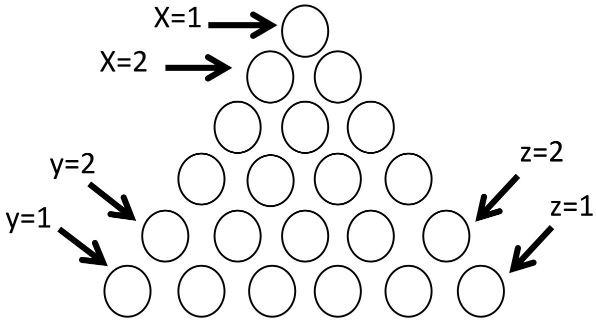
參、研究設備及器材

紙、筆、電腦程式 C++

肆、研究過程

一、不論皇后在哪一個位置

【定義座標】如圖所示



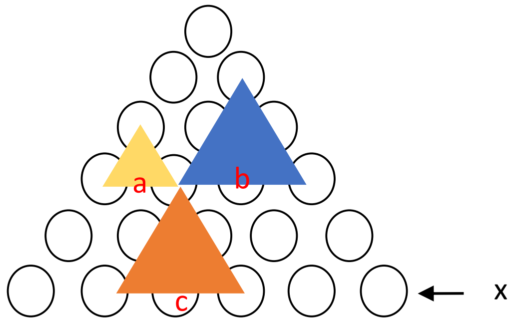
(一)x ,y ,z 三座標和相同

x+y+z=2n+1,其中 n 為邊數

【證明】觀看 x=n 上的圓圈,其上的圓圈 x 座標皆相同，每項右一個圓圈 y 座標加一，z 座標減一，因此 x+y+z 相同。同理以 y, z 方向看 x+y+z 亦相同，可推得每個圓圈的三座標和皆相同，且已任意點可知 x+y+z=2n+1

例: n=7 , x+y+z=15

(二)每個皇后所管轄的圓圈數皆相同



在一邊有 n 個圈的正三角形棋盤上任意一個圈擺上皇后，三個與邊平行的方向是此皇后所能管轄的範圍。

如上圖所示，假設左上方正三角形的一邊有 a 個圈；右上方正三角形的一邊有 b 個圈；正下方正三角形的一邊有 c 個圈

例如：上圖為一邊有 6 個圈的正三角形棋盤，當皇后在(4,4,5)時，a 為 2、b 為 3、c 為 3

假設 m 為一邊的圓圈數，考慮C_1排可得 a+b+c-2=m

假設 n 為 1 個皇后所管轄的圓圈總數，可得(a+b-1)+(a+c-1)+(b+c-1)-2=n

⇒2(a+b+c)-4=2m…(1)

2(a+b+c)-5= n…(2)

⇒由(1)(2)可得 n=2m-1

故將皇后擺置任一個圓圈上，其管轄圓圈數恆相等(等於 2 倍邊上圓圈數－1)

例如：一邊有 7 個圈的正三角形棋盤，每一個位置的皇后皆能管轄到 2×7－1=13 個圓圈。

二、任兩個皇后至少共同管轄 4 個圓圈，最多共同管轄 6 個圓圈。

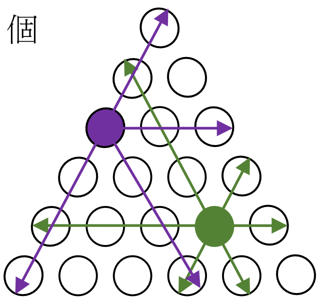
【共同管轄】

一圓圈之 x,y,z 座標中有一座標與兩皇后相同時稱共同管轄

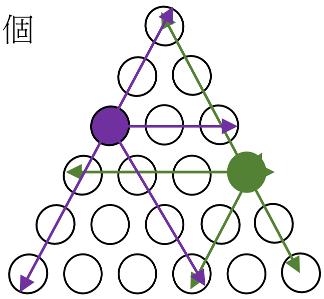
例:令兩皇后為(x_1, y_1, z_1) (x_2, y_2, z_2)，若 x=x_1 ，y=y_2，則(x, y, z)為共同管轄之圓圈

討論兩不同皇后座標與共同管轄數的關係。結果發現兩個皇后共同管轄的圓圈數為 4 個、5 個或 6 個。

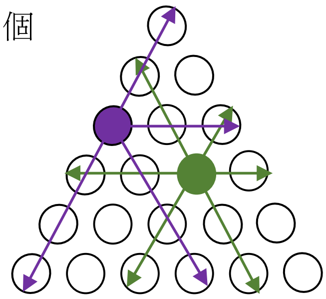
例: 4 個



5 個



6 個



【證明】

(一)最多共同管轄 6 個圓圈

兩皇后為(x_1, y_1, z_1) (x_2, y_2, z_2)

最多共同管轄$C_2^3 \times 2 = 6$ 個

當 x=x_1 ，y=y_2且$x_1 + y_2 > n + 1$時成立

例: n=5 時，令兩皇后在$(1,5,5)$和$(4,3,4)$，若依此法則可選出$(1,3,7)$ $(4,5,2)$

其中因 1+3< $5 + 1(n + 1)$所以不存在此點，而 4+5> $5 + 1(n + 1)$所以此點為共同管轄之圓圈

(二)至少共同管轄 4 個圓圈

$x_1 + y_2 < n + 1$時不符合

∵最多共同管轄 6 個圓圈

【證明】不可能刪掉 3 個共同管轄的圓圈

令兩皇后為(x_1, y_1, z_1) (x_2, y_2, z_2)

①$x_1 + z_2$不合

$y_1 + x_2$不合

$z_1 + y_2$不合

$\Rightarrow$

$x_1 + z_2 < n + 1$

$y_1 + x_2 < n + 1$

$z_1 + y_2 < n + 1$

$\Rightarrow$

$x_1 + z_2 + y_1 + x_2 + z_1 + y_2 < 3n + 3 \neq 4n + 2$

$$\begin{array}{c} ②x_1+y_2\text{不合} \\ y_1+x_2\text{不合} \\ x_1+x_2\text{不合} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} x_1+y_2<n+1 \\ y_1+x_2<n+1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} x_1+y_2+\ y_1+x_2<\ 2\mathrm{n}+2 \\ x_1+y_2+\ y_1+x_2=4\mathrm{n}+2-\ z_1-\ z_2 \\ 4\mathrm{n}+2-\ z_1-\ z_2<\ 2\mathrm{n}+2 \\ z_1+\ z_2>2n\text{不合} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} ③x_1+y_2\text{不合} \\ y_1+y_2\text{不合} \\ z_1+z_2\text{不合} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} x_1+y_2<n+1 \\ y_1+y_2<n+1 \\ z_1+z_2<n+1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} x_1+y_2+\ y_1+y_2+\ z_1+z_2=\ 2y_2+z_2+2\mathrm{n}+1 \\ x_1+y_2+\ y_1+y_2+\ z_1+z_2<3n+3 \\ 2y_2+z_2<n+2 \\ y_2+z_2>n+1 \\ y_2<1\text{不合} \end{array}$$

由①②③可知不可能刪掉 3 個共同管轄的圓圈，所以最多可刪掉 2 個，即共同管轄 4 個圓圈。且已畫出 4 個共同管轄的情形，因此不須再證明。

三、一邊有 n 個圓圈的正三角形棋盤最多可放置幾個皇后？

(座標法)解出 x+y+z=2n+1,0<x,y,z<n 時，所能留下的最多組數

為了思考這個問題，我們將所有圓圈座標列出，如下:$(1,n,n)(2,n-1,n)(2,n,n-1)$，$(3,n-2,n)(3,n-1,n-1)(3,n,n-2)$， ... $(n,1,n)(n,2,n-1)(n,3,n-2)$ ... $(n,n,1)$ 。

欲從中挑選出最多個皇后，我們選擇從一邊圓圈數較少的棋盤開始思考，發現似乎 mod3 相同的邊數，結果類似。

【說明】

為使所選的皇后數最多，我們找出一種選擇的方式:選一個起始點，將其中一座標加減二，其餘兩座標皆減加一，產生第二個點，其餘點以此類推(三座標皆需小於 n)。

依以上規則，假設起始點座標為(x,y,z)，在不失一般性的假設下，令下一個點的座標為(x+2,y-1,z-1)，以此類推第 k 點的座標為(x+2(k-1),y-(k-1),z-(k-1))，直到$\mathrm{x}+2(\mathrm{k}-1)=\mathrm{n}\vee(\mathrm{n}-1)$，就不可以再向下選取。以圖形來看，會發現這些點將連成一直排。再以 x 座標來看，若起始點的 x 座標為奇數，則其直排的 x 座標皆為奇數。表示可再選取一直排，使其 x 座標皆為偶數，反之亦然。此時即有兩直排，又兩直排上的皇后互不管轄。再令第一直排的座標為

(x_1, y_1, z_1)，第二直排的座標為(x_2, y_2, z_2)，$\{y_1\} \cap \{y_2\} = \emptyset \wedge \{z_1\} \cap \{z_2\} = \emptyset$。因此最簡潔的方法即將 y,z 座標互換，即$\{y_1\} \subseteq \{z_2\} \wedge \{y_2\} \supseteq \{z_1\}$。這些點數的個數為$\mathrm{n} - \mathrm{x}$與$2|b - c|$中值較小的，因此當此兩數接近相等時個數會有最大值。

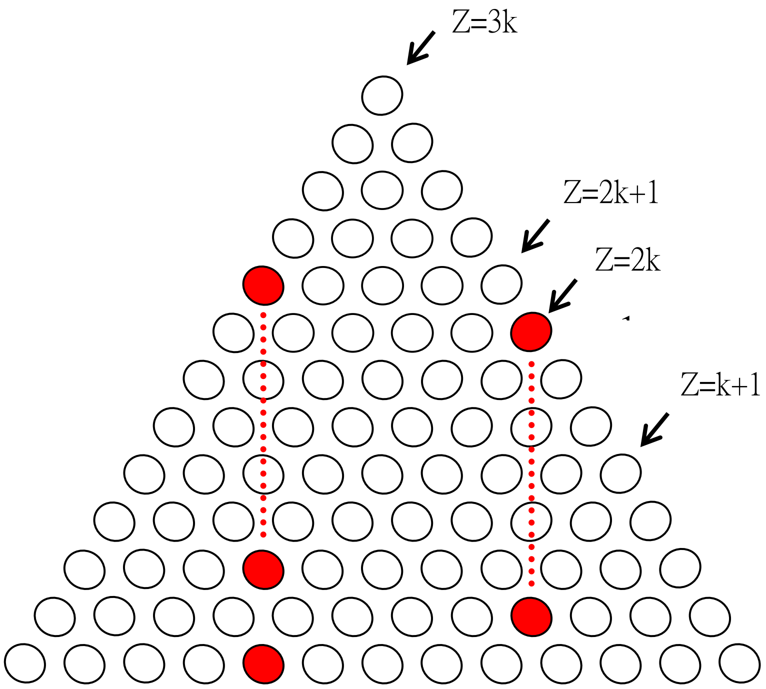
(一)一邊有(3k＋1)個圓圈的正三角形棋盤，k 為 0 或正整數。

依以上規則我們選出如下皇后:

$$(k+1,2k+1,3k+1)(k+3,2k,3k)(k+5,2k-1,3k-1)\ldots(3k+1,k+1,2k+\ 1)$$

$$(k+2,3k+1,2k)(k+4,3k,2k-1)(k+6,3k-1,2k-2)\ldots(3k,2k+2,k+1)$$

如圖:



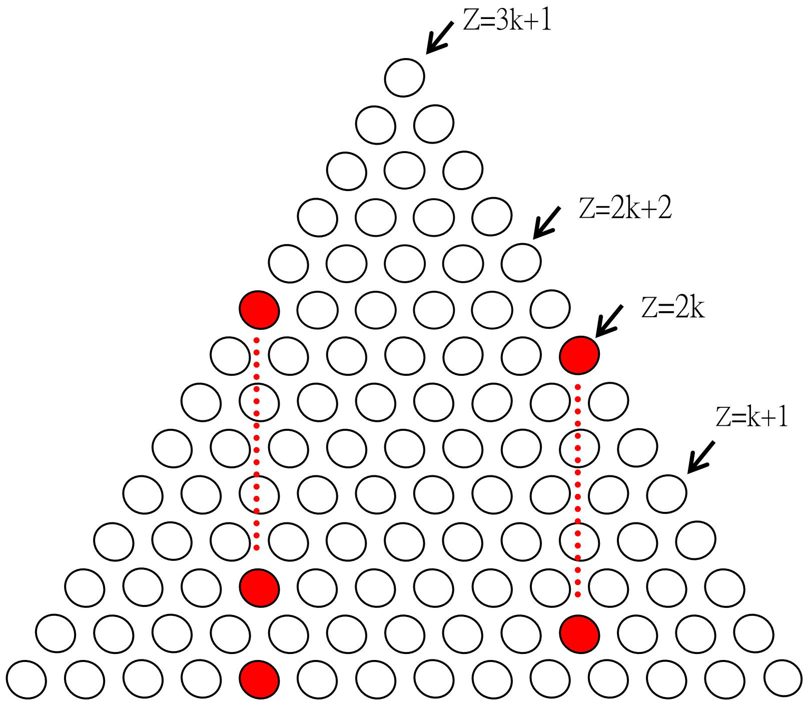
(二)一邊有(3k＋2)個圓圈的正三角形棋盤，k 為 0 或正整數。

同 3k+1 的規則，我們選出如下皇后:

$$(k+2,2k+1,3k+2)(k+4,2k,3k+1)(k+6,2k-1,3k)\ldots(3k+2,k+1,2k+\ 2)$$

$$(k+3,3k+2,2k)(k+5,3k+1,2k-1)(k+7,3k,2k-2)\ldots(3k+1,2k+3,k+\ 1)$$

如圖：



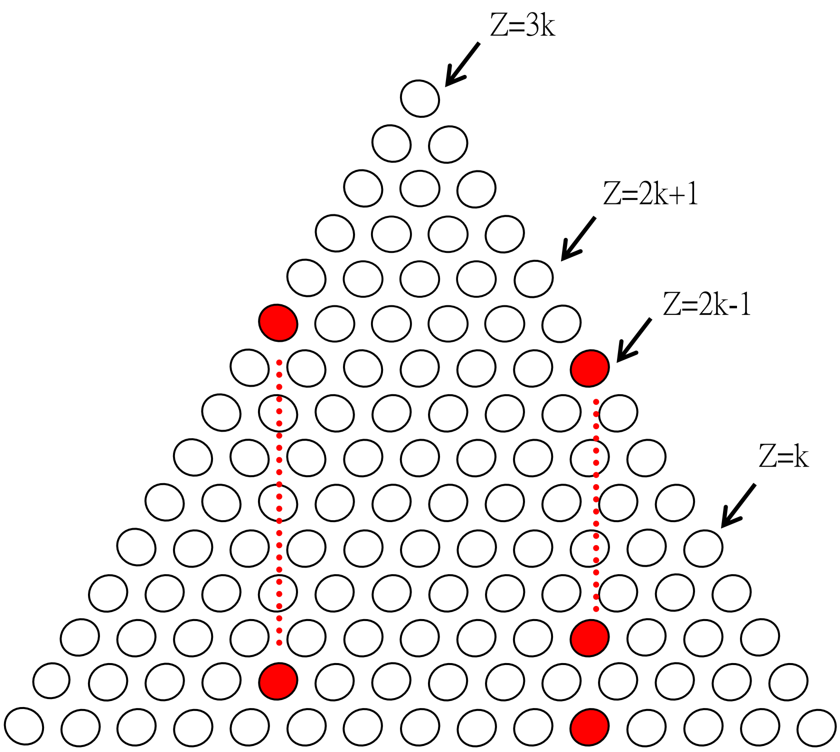
(三)一邊有 3k 個圓圈的正三角形棋盤，k 為正整數。

同 3k+1 的規則，我們選出如下皇后:

$(k+2,3k,2k-1)(k+4,3k-1,2k-2)(k+6,3k-2,2k-3)\ldots(3k,2k+1,k)$

$(k+1,2k,3k)(k+3,2k-1,3k-1)(k+5,2k-2,3k+1)\ldots(3k-1,k+1,2k+1)$

如圖:



【註】用以上方法選擇的皇后可確定最多皇后數，但最多皇后數不只有此種排法

(討論法)

證明當 n＝3k+1 時，最多可放置(2k+1)個皇后；當 n＝3k+2 時，最多可放置(2k+1)個皇后；當 n＝3k+3 時，最多可放置(2k+2)個皇后，k＝0，1，2，3，…

　　如下所示，第二排列出的皇后數為(一)的結果，我們的想法：從 n＝2 明顯成立出發，藉此證明 n＝3 與 n＝4 成立，再用 n＝4 來證明 n＝5 成立。接著以相同的模式，用 n＝5 來證明 n＝6 與 n＝7 成立，再用 n＝7 來證明 n＝8 成立。以此類推…，透過數學歸納法確認所欲證明的目標皆成立，對於所有 n 為正整數值。

皇后數	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…	3(k-1)+1	3(k-1)+2	3(k-1)+3	3k+1	3k+2	3k+3
		1	1	2	3	3	4	5	5	6	…	2k-1	2k-1	2k	2k+1	~~2k+1~~	~~2k+2~~

→座標法與討論法得到相同結果

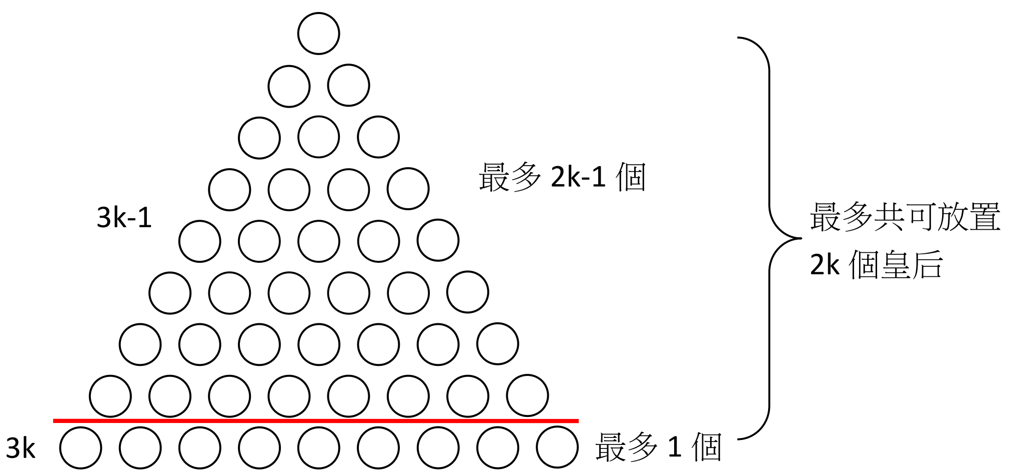
【證明】

(一)、n＝1 與 2 時明顯最多可放置 1 個皇后，故 n＝1 與 n＝2 時成立。

(二)、

1.假設 n＝3k-1 時，最多可放置（2k-1）個皇后

則當 n＝3k 時

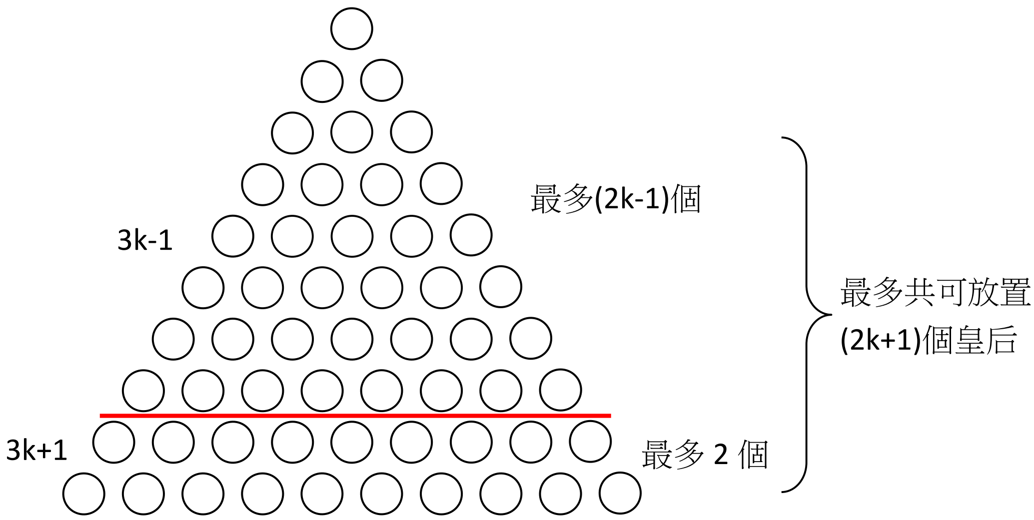


又由(一)的 3 知：n＝3k 可放置 2k 個皇后

故 n＝3k 時最多可放置 2k 個皇后

2. 假設 n＝3k-1 時，最多可放置（2k-1）個皇后

則當 n＝3k+1 時

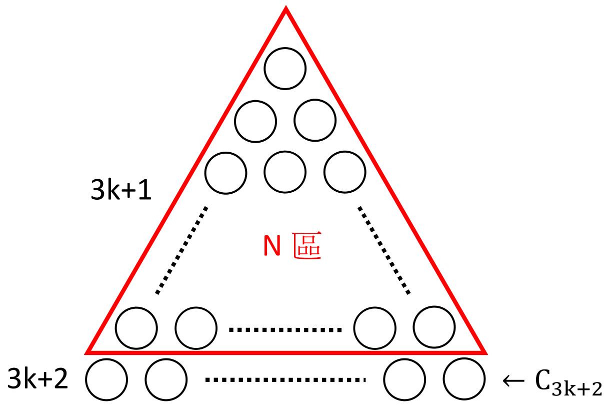


又由(一)的 1 知：n＝3k+1 時可放置(2k+1)個皇后

故 n＝3k+1 時最多可放置(2k+1)個皇后

3.假設 n＝3k+1 時，最多可放置（2k+1）個皇后

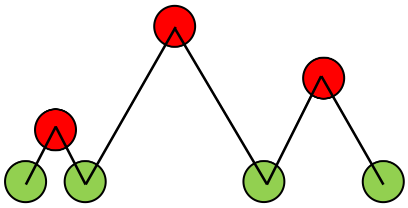
則當 n＝3k+2 時



考慮 N 區中的(2k+1)個皇后至少可管轄C_{3k+2}排幾個圓圈？

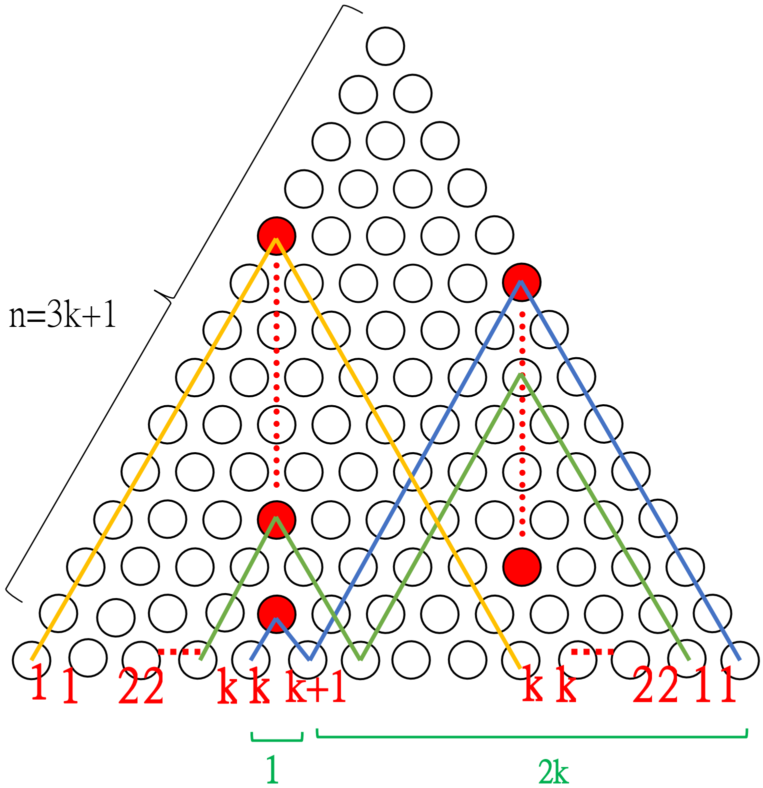
因探討**至少**管轄的圓圈數，故在 N 區中的皇后共同管轄C_{3k+2}排的圓圈越多越好，

也就是類似下列的圖形的組數越少越好。



(紅圈表 N 區中的皇后，綠圈表C_{3k+2}排的圓圈，類似這樣的圖形定為 1 組)

(2k+1)個皇后可分成(k+1)組。如下圖所示，綠色線那組的總間距為 1＋2k（1 與 2k 分別表示兩個皇后管轄C_{3k+2}排圓圈時所形成之間距），其餘以此類推。



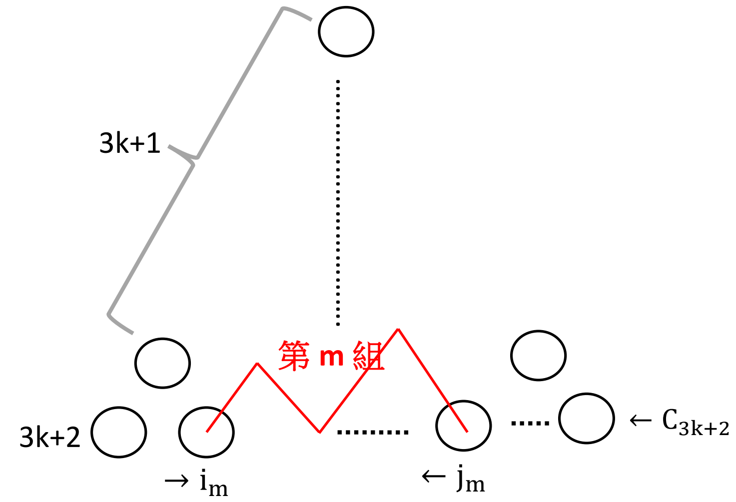
$$\left.\begin{array}{l} 1+2k \\ 3+(2k-2) \\ 5+(2k-4) \\ \quad\vdots \\ (2k-1)+2 \\ 2k+1 \end{array}\right\}(k+1)\text{組}$$

設i_m表示C_{3k+2}排由左向右數第i_m個圈，j_m表示C_{3k+2}排由右向左數第j_m個圈，m 表示第 m 組

故第 m 組於C_{3k+2}排所形成的總間格數為

$3k+2-(i_m+j_m)+2-1$

$=3k+3-(i_m+j_m)$



考慮(2k+1)個皇后是否可分成 k 組？

$\square + \cdots + \square = 3k+3-(i_1+j_1)$

$\square + \cdots + \square = 3k+3-(i_2+j_2)$

.

.

.

.

$\square + \cdots + \square = 3k+3-(i_k+j_k)$

+

可填 1~3k+1

最少$\frac{(1+2k+1)(2k+1)}{2}$

$=(2k+1)(k+1)$

最多

$k(3k+3)-(i_1+i_2+\sim+i_k)-(j_1+j_2+\sim+j_k)$

$=k(3k+3)-\frac{(1+k)k}{2}\times 2$

$=k(3k+3)-k(1+k)$

$=k(2k+2)$

$=2k(k+1)$

∵(2k+1)(k+1)＞2k(k+1)

∴k 組不可能

因此(2k+1)個皇后最少可分成(k+1)組

設M_t為第 t 組的皇后總數

M_1 M_2 .... M_{k+1}

(2k+1)個皇后至少管轄C_{3k+2}排的圓圈數為：

$(M_1+1)+(M_2+1)+ \cdots\cdots +(M_{k+1}+1)$

$=(M_1+M_2+\cdots\cdots+M_{k+1})+(k+1)\times1$

=2k+1(皇后總數)+(k+1)× 1

=3k+2 個

∴C_{3k+2}排全被管轄完，無法放置 1 個皇后

故 n＝3k+2 時，最多可放置的皇后數依舊為（2k+1）個

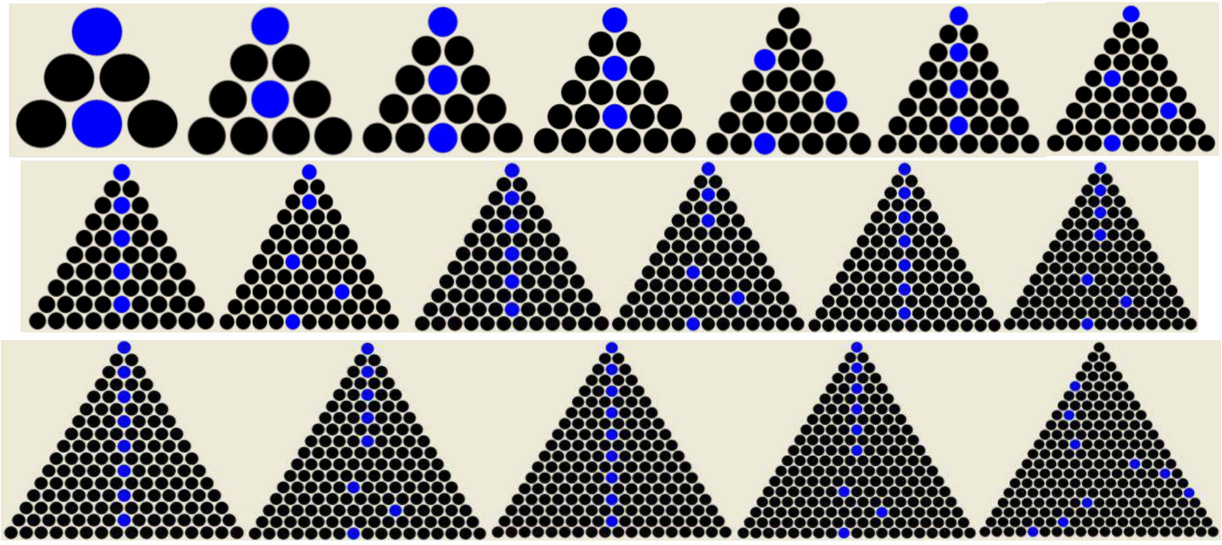
由 1、2 依數學歸納法，得到所有 n 值的最大皇后數

四、一邊有 n 個圓圈的正三角形棋盤最少放置幾個皇后可全部管轄？

在最少的皇后數部分，即使透過程式也只能做出部分結果，由 n＝1~20 的結果發現最少皇后數有可能是有規律的(在皇后數為 3 的次方時，會有連續三個 n 為相同皇后數，其餘皆為連續兩個相同)，如**下表**所示。我們先以討論法證出部分結果，證明過程詳見**附錄一**，未來希望能回歸座標法，即解出 **$x+y+z=2n+1,0<x,y,z<n$ 時，所需留下的最少組數**。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	1	1	2	2	**3**	**3**	**3**	4	4	5
n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a	5	6	6	7	7	8	8	**9**	**9**	**9**

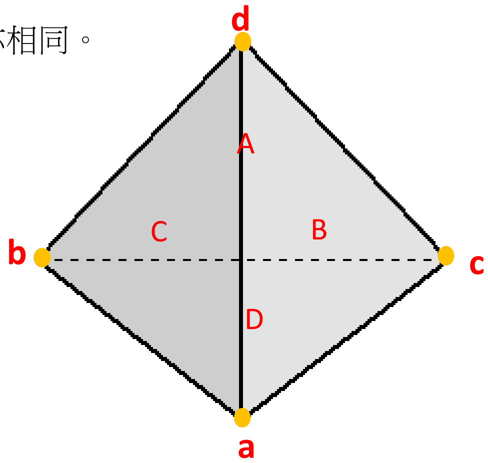
以下為部分最少皇后數的圖形:

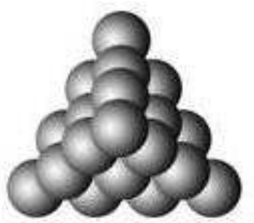


五、正四面體上的最多能放置幾個皇后?

平面座標上的最多皇后數解決，於是我們將棋盤再改為正四面體(如**右下圖**所示)，欲討論在此三角垛棋盤上最多能擺放幾個皇后。

為了思考此問題我們一樣先將立體棋盤座標化，先定義四個面為 A,B,C,D(如**左下圖**所示)，以 A 面方向為例:A 面底面為 A=4，向 a 點方向移動一面，則 A 減 1，由此規則定義出 A 座標。B,C,D 座標亦相同。



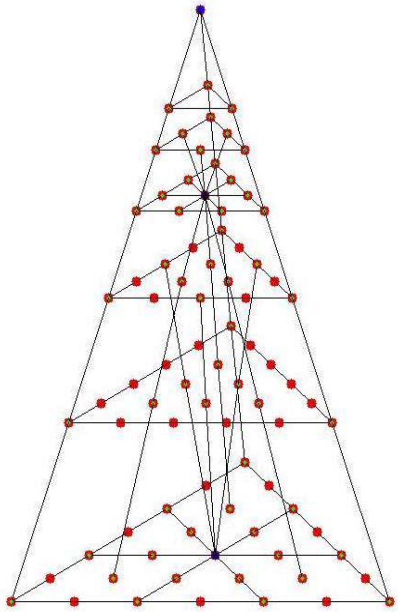


又因為每個方向皆由正四面體四個面中其中兩個面所夾出來的，所以正四面體中每個圓圈皆能管轄六個方向，定義其為$(x,y,z,\alpha,\beta,\gamma)$，其中$x$為 A、B 的交線，$y$為 A、C 的交線，$z$為 A、D 的交線，$\alpha$為 B、C 的交線，$\beta$為 B、D 的交線，$\gamma$為 C、D 的交線。因此，定義$x$=A+B，$y$=A+C，以此類推。

於是我們得到類似平面座標的式子: $x+y+z+\alpha+\beta+\gamma=$

$9\mathbf{n}+3,\ \mathbf{n}+1<\ x,y,z,\alpha,\beta,\gamma<2\mathbf{n}+1$，求所能留下的最多組數，

即可得最大皇后數



n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	1	1	2	4	7	11	16	21	27	34
n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a	41	49	58	67	77	88	100	112	125	139

【說明】以最下層開始往上，在不互相管轄的情況下選取。可知下層的點會在除當平面外，給個平面管轄到三個點，呈倒正三角形，且此正三角形的邊長隨著層數而增加。在選取的過程中，以選取邊上的點為前提(管轄較少的點而有較多的選擇)。

伍、研究結果

一、不管在任何位置，皇后管轄的圓圈數恆等於其正三角形棋盤之邊上圓圈數的 2 倍減 1。

例：一邊有 8 個圈的正三角形棋盤，一個皇后所管轄的圓圈數皆為 15 個。

二、不管在任何位置，圓圈的 x，y，z 座標和皆等於其正三角形棋盤之邊上圓圈數的 2 倍加 1。

例：一邊有 8 個圈的正三角形棋盤，圓圈的 x，y，z 座標和皆為 17 個。

三、兩個皇后至少共同管轄 4 個圓圈，最多共同管轄 6 個圓圈。

四、一邊有 n 個圈的正三角形棋盤，

(1)當 n＝3k+1 時，最多可放置(2k+1)個皇后，k＝0，1，2，3，……

(2)當 n＝3k+2 時，最多可放置(2k+1)個皇后，k＝0，1，2，3，……

(3)當 n＝3k+3 時，最多可放置(2k+2)個皇后，k＝0，1，2，3，……

例如：一邊有 25 個圈的正三角形棋盤，最多可放置 17 個皇后。

一邊有 48 個圈的正三角形棋盤，最多可放置 32 個皇后。

五、利用座標法與討論法證明結果相同

六、一邊有 n 個圈的正三角形棋盤，最少皇后數 a:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	1	1	2	2	3	3	3	4	4	5
n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a	5	6	6	7	7	8	8	9	9	9

七、一邊有 n 個圈的正四面體棋盤，最多皇后數 a:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	1	1	2	4	7	11	16	21	27	34
n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a	41	49	58	67	77	88	100	112	125	139

陸、討論

一、在討論最少皇后數時，需考慮是否可使所有圓圈被管轄，所以討論過程應比最多皇后數複雜。

二、我們的討論著重於皇后的個數，因此相同個數雖有不同排法，但我們不與考慮。

柒、結論

一、解出皇后數後，我們發現此結果可套用到生活中以下應用:

(1)國防兵力部署

(2)警衛人力分配

(3)消防設施建置

(4)雲端醫療應用

(5)遊戲程式設計

二、未來發展

(一)將棋盤改成正多邊形。

(二)將棋盤改為非正多邊形，如：長方形、直角三角形、……。

(三)將棋盤改為正四面體以外的立體圖形，如：正方體，皇后可管轄到十二個方向。

(四)仿照八皇后問題，固定皇后數，研究在不同棋盤上有幾種不同解法

捌、參考資料

一、維基百科 八皇后問題

http://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E5%85%AB%E7%9A%87%E5%90%8E%E9%97%AE%E9%A2%98

二、作者:李威締 賴冠錡

嘉義市第52屆中小學科展：當皇后遇見小三-正三角形棋盤上皇后互不侵犯問題

三、作者:王建詒 呂季桓

臺灣二O O八年國際科學展覽會：跛腳皇后

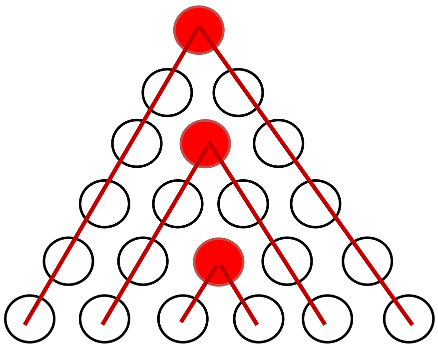
附錄一

在探討至少需要幾個皇后才可管轄所有圓圈的過程時，我們發現了如一、二所述的結果，因此一邊有 3 個圓圈~7 個圓圈的最少皇后數便能快速地透過算術推理而得到結果，例如：

(一) 一邊有 6 個圈的正三角形棋盤至少需要 3 個皇后才可管轄到所有圓圈

【證明】

1. 3 個皇后能管轄到所有圓圈



2. 證明 2 個皇后無法管轄到一邊有 6 個圈的正三角形棋盤的所有圓圈。

由一與二所述的結果：不管在任何位置，皇后管轄的圓圈數恆等於其正三角形棋盤之邊上圓圈數的 2 倍減 1。兩個皇后至少共同管轄 4 個圓圈。

故 2 個皇后最多可管轄的總圓圈數$=2\times(2\times6-1)-4=2\times11-4=18$(個)

又棋盤總圓圈數$=(1+6)\times6\times\frac{1}{2}=21$

$\because\ 18<21$

$\therefore$ 2 個皇后無法管轄到一邊有 6 個圈的正三角形棋盤的所有圓圈

因此，由 1、2 可得一邊有 6 個圓圈的正三角形棋盤至少需要 3 個皇后才可管轄到所有圓圈。

但藉由一、二之結論的算術方法無法求出一邊有 8 個圈以上的棋盤的最少皇后數，所以我們改用以三個方向（↘、↙、⟵）的考慮、由外而內的一整排來作邏輯上的推理，得到了一些成果，如下所示：

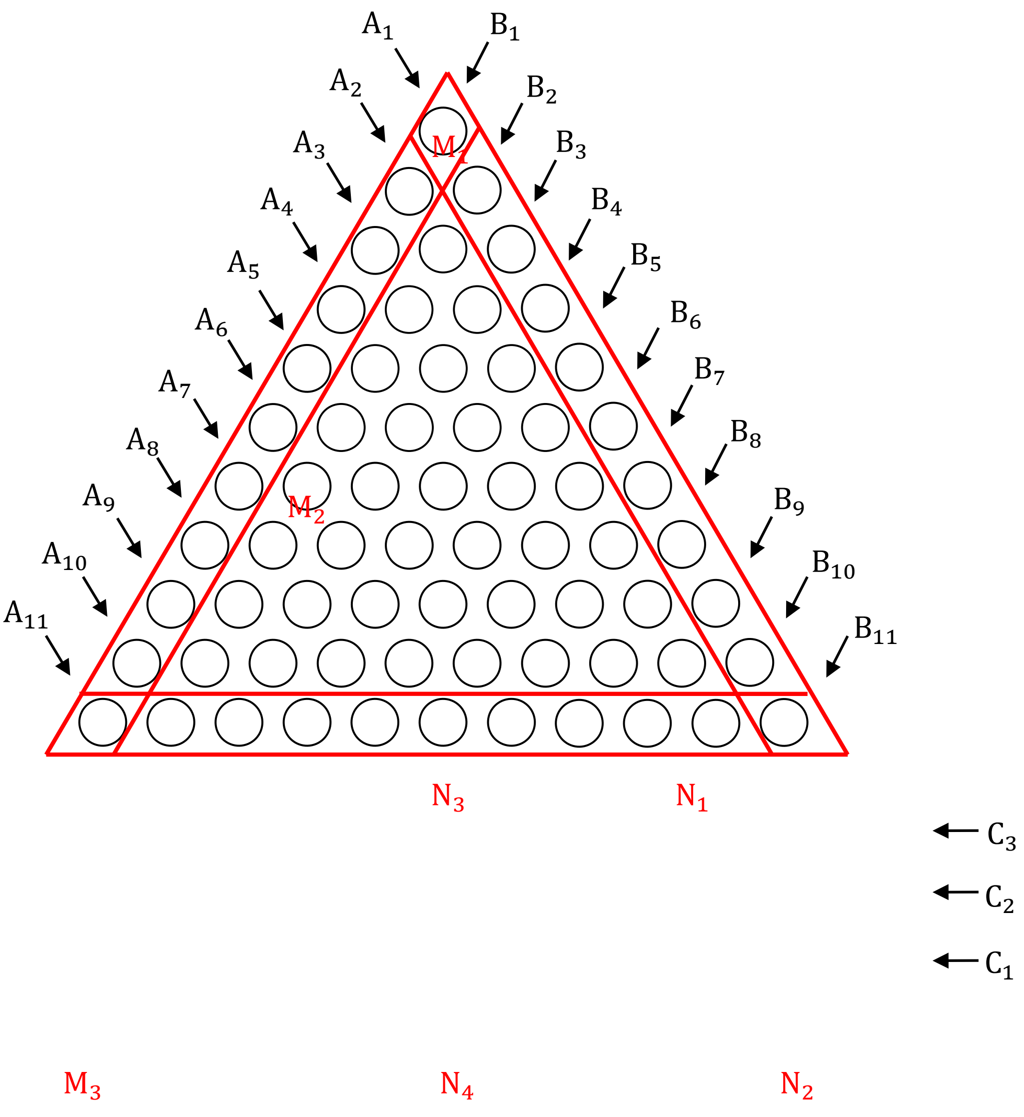
(二)、一邊有 11 個圈的正三角形棋盤至少需要 5 個皇后才可管轄到所有圓圈。

【證明】

我們先說明 5 個皇后可以管轄到所有圓圈以及提出 5 個皇后的位置圖，接著再證明 4 個皇后無法管轄到所有圓圈，以這兩個部分來證明一邊有 11 個圈的正三角形棋盤至少需要 5 個皇后才可管轄到所有圓圈。

(Ⅰ) 5 個皇后能管轄到所有圓圈。

令A_i、B_j、C_k分別表示↖↘方向、↙↗方向、↔方向之一整排的圓圈，$i=1,2,\cdots,11$；$j=1,2,\cdots,11$；$k=1,2,3$。



1、考慮↘方向

A_1~A_{11}任選 5 排

⟹B_1剩 6 個圓圈未管轄

若↙方向未選 B_1，則只剩⟵方向可考慮而 5 個皇后最多管轄 5 排，而 B_1剩下 6 個圓圈

故 B_1必有皇后。

2、若 A_1無皇后，則 M 區($M_1+M_2+M_3$)的 1 個皇后與 N 區($N_1+N_2+N_3+N_4$)的 4 個皇后最多可管轄$\mathbf{N_{A_1}}$排(表 N 區中 A_1排)$1+4\times2=9$ 個圓圈，但$\mathbf{N_{A_1}}$排有 10 個圓圈。

故 A_1必有皇后

3、若 C_1無皇后

	M_1	M_2	N_1	N_3	最多可管轄 N_4的圓圈數
皇后數	1	0	0	4	→$4\times2=8$
	0	1	1	3	→$2+3\times2=8$

故 5 個皇后最多管轄 N_4中 8 個圓圈，但 N_4有 9 個圓圈，

故 C_1必有皇后

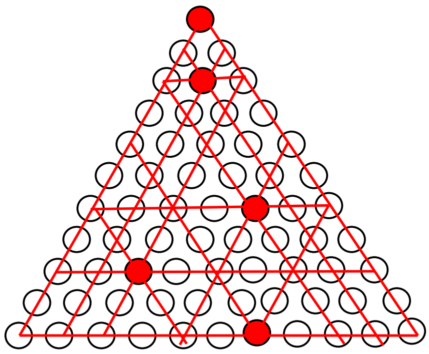
4、 A_1、B_1、C_1皆須有皇后，接著依 M_1、M_2、N_1三區的皇后數作分類討論：

(1)

	M_1	M_2	M_3	N_1	N_2	N_3	N_4	合計
皇后數	1	0	0	0	0	3	1	
若 A_2無皇后，最多可管轄到 A_2的圓圈數	0					6	1	→7
若 B_2無皇后，最多可管轄到 B_2的圓圈數	0					6	1	→7

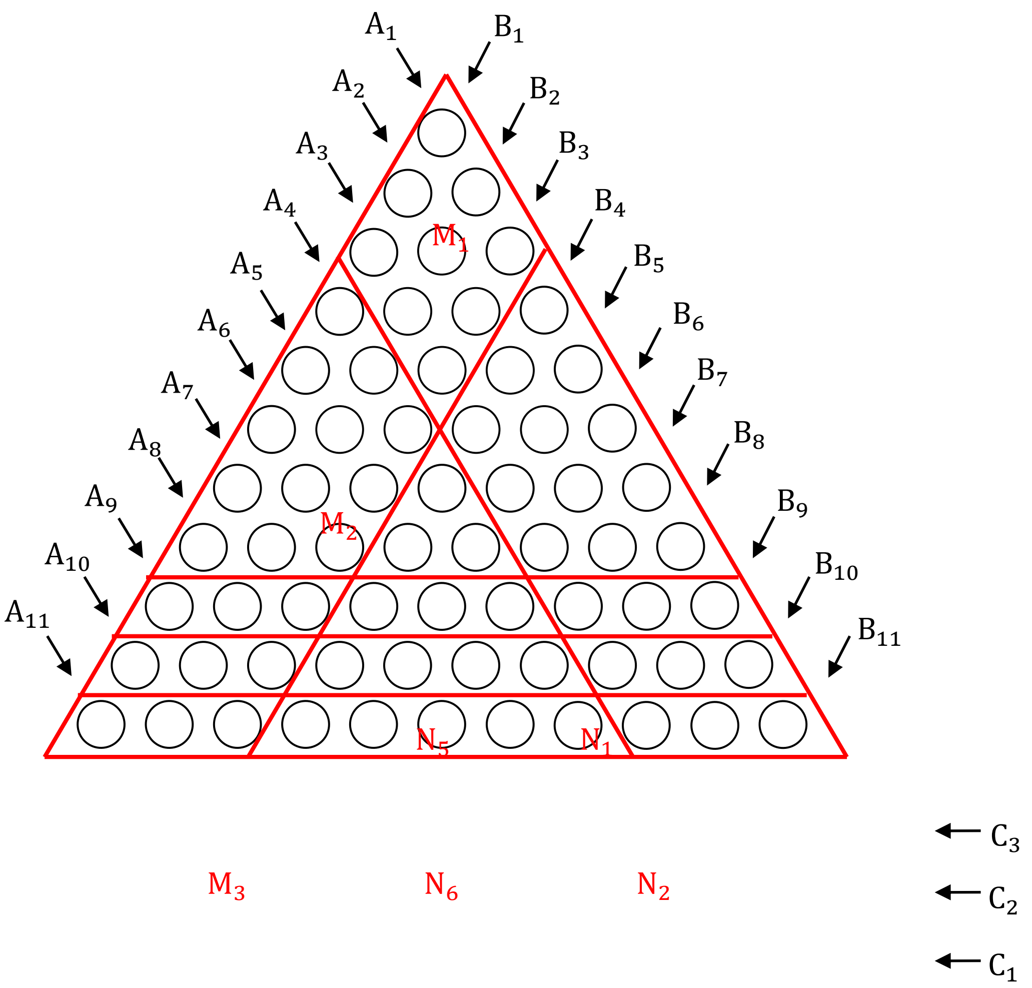
故 N_3中的 A_2、B_2皆須有皇后去管轄，否則 5 個皇后最多只可管轄 7 個圓圈

①若$a_{3,2}$有皇后，則A_3、B_3亦必有皇后，否則無法管轄完N_3區中A_3與B_3兩排的所　　有圓圈。嘗試後發現 5 個皇后可管轄所有圓圈，皇后位置圖如下所示：



因為已發現 5 個皇后可管轄所有圓圈，故不再探討其他情況是否 5 個皇后可管轄到所有圓圈。

（II）證明 4 個皇后無法管轄到一邊有 11 個圈的正三角形棋盤的所有圓圈。



M_4 N_7 N_3

M_5 N_8 N_4

1、若 B_1、B_2、B_3 無皇后

考慮↘方向

⇒A_1~A_{11} 任選 4 排

⇒B_1 剩 7 個圓圈待管轄，而 4 個皇后↔方向最多可管轄 4 個圓圈

B_2 至少剩 6 個圓圈待管轄，而 4 個皇后↔方向最多可管轄 4 個圓圈

B_3 至少剩 5 個圓圈待管轄，而 4 個皇后↔方向最多可管轄 4 個圓圈

⇒故 B_1、B_2、B_3 必有皇后

2、若 A_1 無皇后，M 區($=M_1+M_2+M_3+M_4+M_5$)的 3 個皇后與 N 區($=N_1+N_2+N_3+N_4+N_5+N_6+N_7+N_8$)的 1 個皇后最多可管轄 $\mathbf{N}_{\mathbf{A}_1}$ 排(表 N 區中 A_1 排)$3+1\times2=5$ 個圓圈,但 $\mathbf{N}_{\mathbf{A}_1}$ 排中有 8 個圓圈

⇒故 A_1 必有皇后

同理 A_2、A_3 亦必有皇后

3、若 C_1 無皇后

	M_1	$M_2+M_3+M_4$	$N_1+N_2+N_3$	$N_5+N_6+N_7$	最多可管轄到 N_8 中的圓圈數
皇后數	3	0	0	1	⇒2
	2	1	1	0	⇒2

4 個皇后最多可管轄 N_8 中 2 個圓圈⇒故 C_1 必有皇后

同理 C_2、C_3 亦必有皇后

4、A_1、A_2、A_3、B_1、B_2、B_3、C_1、C_2、C_3 皆須有皇后，接下來以 M_1、M_2、N_1 三區的皇后數作分類討論：

	M_1	M_2	N_1
(1)	3	0	0
(2)	2	1	1
(3)	2	1	0
(4)	2	0	0
(5)	1	2	1
(6)	1	2	0
(7)	1	1	1
(8)	1	1	0
(9)	1	0	0
(10)	0	3	1
(11)	0	3	0
(12)	0	2	2
(13)	0	2	1
(14)	0	2	0
(15)	0	1	1
(16)	0	1	0
(17)	0	0	0

則

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	N_7	N_8	

(1)	3	0				0					1	1	1	至少需 6 個皇后(不合)
(2)	2	1				1					1	1	1	至少需 7 個皇后(不合)
(3)	2	1				0	1					1	1	至少需 6 個皇后(不合)
(4)	2	0	1			0		1					1	至少需 5 個皇后(不合)
(5)	1	2				1	1					1	1	至少需 7 個皇后(不合)
(6)	1	2				0	1	1					1	至少需 6 個皇后(不合)
(7)	1	1	1			1		1					1	至少需 6 個皇后(不合)
(8)	1	1	1			0		1	1					至少需 5 個皇后(不合)
(9)	1	0				0								($M_3+M_4+M_5$)區需 2 個皇后，($N_2+N_3+N_4$)區需 2 個，共需 4 個皇后。但這兩區最多可有 3 個皇后，故不合。
(10)	0	3				1	1	1					1	至少需 7 個皇后(不合)
(11)	0	3				0	1	1	1					至少需 6 個皇后(不合)
(12)	0	2	1			2		1					1	至少需 7 個皇后(不合)
(13)	0	2	1			1		1	1					至少需 6 個皇后(不合)
(14)	0	2				0								($M_3+M_4+M_5$)區需 1 個皇后，($N_2+N_3+N_4$)區需 3 個，共需 4 個皇后。但這兩區最多可有 3 個皇后，故不合。
(15)	0	1				1								($M_3+M_4+M_5$)區需 2 個皇后，($N_2+N_3+N_4$)區需 2 個，共需 4 個皇后。但這兩區最多可有 3 個皇

														后，故不合。
(16)	0	1				0								(M_3＋M_4＋M_5)區需 2 個皇后，(N_2＋N_3＋N_4)區需 3 個，共需 5 個皇后。但這兩區最多可有 3 個皇后，故不合。
(17)	0	0				0								(M_3＋M_4＋M_5)區需 3 個皇后，(N_2＋N_3＋N_4)區需 3 個，共需 6 個皇后。但這兩區最多可有 3 個皇后，故不合。

因此 4 個皇后無法使得 A_1、A_2、A_3、B_1、B_2、B_3、C_1、C_2、C_3 皆有皇后

故 4 個皇后無法管轄到一邊有 11 個圈的正三角形棋盤的所有圓圈。

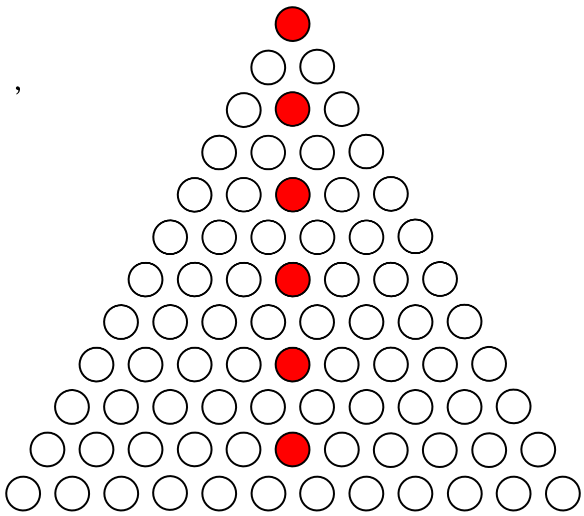
由(I)、(II)可得一邊有 11 個圈的正三角形棋盤至少需要 5 個皇后才可管轄到所有圓圈

(三)一邊有 12 個圈的正三角形棋盤至少需要 6 個皇后才可管轄到所有圓圈。

【證明】

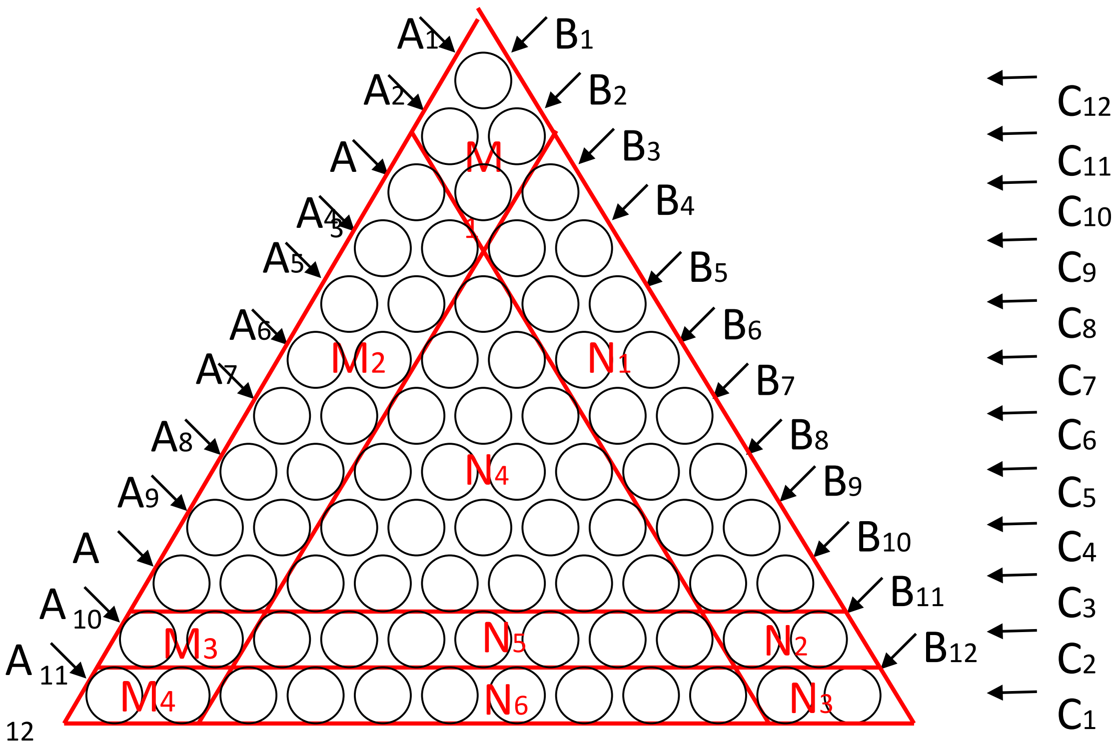
（I）6 個皇后可管轄到所有圓圈，

皇后位置如右圖所示：



（Ⅱ）證明 5 個皇后無法管轄到所有圓圈。

令A_i、B_j、C_k分別表示 ⤡方向、⤢方向、↔方向之一整排的圓圈，
$i=1,2,\cdots,12$；$j=1,2,\cdots,12$；$k=1,2,\cdots,12$



1、考慮↘方向

A_1~A_{12}任選 5 排⇒B_1剩 7 個圈未管轄

B_2至少剩 6 個圈未管轄

若↙方向未選 B_1、B_2，則只剩←方向可考慮，5 個皇后最多管轄 5 排而 B_1、B_2分別剩 7 個圈以及至少 6 個圈，故 B_1、B_2必有皇后。

2、若 A_1無皇后,則 M 區(=$M_1+M_2+M_3+M_4$)的 2 個皇后與 N 區(=$N_1+N_2+N_3+N_4+N_5+N_6$)的 3 個皇后最多可管轄$\mathbf{N}_{\mathbf{A_1}}$排(表 N 區中 A_1排) 2+3×2=8 個圈,但$\mathbf{N}_{\mathbf{A_1}}$排有 10 個圈，故 A_1必有皇后，同理 A_2亦必有皇后。

3、

(1) 若 C_1無皇后

	M_1	M_2+M_3	N_1+N_2	N_4+N_5	最多可管轄 N_6的圓圈數
皇	2	0	0	3	→3×2=6
后	1	1	1	2	→1+1+2×2=6
數	0	2	2	1	→2+2+1×2=6

5 個皇后最多消去 N_6中 6 個圈，但 N_6有 8 個圈，故 C_1必有皇后。

(2) 若 C_2無皇后

	M_1	M_2	M_4	N_1	N_3	N_4	N_6	最多可管轄 N_5的圓圈數
皇	2	0	0	0	0	2	1	→2×2+1×2=6
后	1	1	0	1	0	1	1	→1+1+2+2=6
數	1	1	0	0	1	2	0	→1+2×2=5
	1	0	1	1	0	2	0	→1+2×2=5
	0	2	0	2	0	0	1	→2+2+2=6

	0	2	0	1	1	1	0	→2+1+2=5

5 個皇后最多只能管轄 N_5 中 6 個圈，但 N_5 有 7 個圈，故 C_2 必有皇后。

4、A_1、A_2、B_1、B_2、C_1、C_2 皆須有皇后，接著以 M_1、M_2、N_1 三個區域的圓圈數來做分類討論，可能成立的情形如下表所示：

	M_1	M_2	N_1
(1)	2	0	0
(2)	1	1	1
(3)	1	1	0
(4)	1	0	0
(5)	0	2	1
(6)	0	2	0
(7)	0	1	1

令 $a_{i,j}$ 為第 i 列(由上往下數)第 j 個(由左往右數)圓圈

(1)若 A_3、A_4、B_3、B_4 無皇后

	M_1	N_4	N_5	N_6	
皇后數	2	1	1	1	
最多可管轄到 N_4 中 A_3 排的圓圈數	0	2	1	1	→4
最多可管轄到 N_4 中 A_4 排的圓圈數	0	2	1	1	→4
最多可管轄到 N_4 中 B_3 排的圓圈數	0	2	1	1	→4
最多可管轄到 N_4 中 B_4 排的圓圈數	0	2	1	1	→4

5 個皇后最多只能管轄 4 個圈，故 A_3、A_4、B_3、B_4 皆須有皇后去管轄，則 N_4 中的皇后必在 $a_{5,3}$、$a_{6,3}$、$a_{6,4}$、$a_{7,4}$ 四個位置之一，N_5 與 N_6 的兩個皇后位置便確定(譬如:若 N_4 的皇后在 $a_{6,3}$,則 N_5、N_6 的兩個皇后在 A_3、B_4)，結果 $a_{9,5}$、$a_{10,5}$、$a_{10,6}$ 無法被管轄到。

(2)若 A_3、B_3 無皇后

	M_1	M_2	M_3	M_4	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	
皇后數	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	
最多可管轄到 N_4 中 A_3 排的圓圈數	0	1			2				1	1	→5
最多可管轄到 N_4 中 B_3 排的圓圈數	0	2			1				1	1	→5

故 A_3、B_3 必須要有皇后去管轄，則 M_2、N_1、N_5、N_6 中的 4 個皇后有 2 個在 A_3、B_3，剩下兩個皇后最多可管轄 N_4 的 A_4 排、B_4 排 3 個圓圈，故 A_4、B_4 亦需有皇后，結果 $a_{9,5}$、$a_{10,5}$、$a_{10,6}$ 無法被管轄到。

(3)若 A_3、A_4、B_3、C_3 無皇后

	M_1	M_2	M_3	M_4	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	
皇后數	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	
最多可管轄到 N_4 中 A_3 排的圓圈數	0	1				0		2		1	→4
最多可管轄到 N_4 中 A_4 排的圓圈數	0	1				0		2		1	→4
最多可管轄到 N_4 中 B_3 排的圓圈數	0	2				0		2		1	→5
最多可管轄到 N_4 中 C_3 排的圓圈數	0	1				0		2		2	→5

故 A_3、A_4、B_3、C_3 必須要有皇后去管轄

⟹N_4 中的皇后在 $a_{5,3}$、$a_{6,3}$、$a_{10,3}$、$a_{10,7}$、$a_{10,8}$ 五個位置之一，另兩個在 M_2、N_6 的皇后位置便確定，但結果皆無法管轄到 $a_{8,4}$、$a_{9,4}$、$a_{9,5}$。

(4)若 A_3、A_4、B_3、B_4 無皇后

	M_1	M_2	M_3	M_4	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	
皇后數	1	0	1	0	0	0	1	2	0	0	
最多可管轄到 N_4 中 A_3 排的圓圈數	0		0				0	4			→4
最多可管轄到 N_4 中 A_4 排的圓圈數	0		0				0	4			→4
最多可管轄到 N_4 中 B_3 排的圓圈數	0		0				0	4			→4
最多可管轄到 N_4 中 B_4 排的圓圈數	0		0				0	4			→4

5 個皇后最多只能消去 4 個圈，故 A_3、A_4、B_3、B_4 必須要有皇后去管轄，N_4 中的個皇后分別在 $a_{5,3}$ 和 $a_{7,4}$，結果 $a_{9,5}$、$a_{10,5}$、$a_{10,6}$ 無法被管轄到。

(5)若 A_3、C_3 無皇后

	M_1	M_2	M_3	M_4	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	
皇后數	0	2	0	0	1	1	0	0	0	1	
最多可管轄到 N_4 中 A_3 排的圓圈數		2			2	0				1	→5
最多可管轄到 N_4 中 C_3 排的圓圈數		2			1	0				2	→5

5 個皇后最多只能管轄 5 個圈，而 N_4 中 A_3 排、C_3 排各有 6 個圈，故 A_3、C_3 皆須要有皇后去管轄，則 M_2 與 N_6 中的 3 個皇后其中一個在 A_3

⇒若 A_4 無皇后，考慮 N_4 中的 A_4，最多能被管轄到 1+1+2=4 個圈，故 A_4 必有皇后。

因此 M_2、N_1、N_6 中的 3 個皇后分別在 A_3、A_4、C_3 其中之一，結果剩下的 1 個皇后無法將 $a_{7,3}$、$a_{8,3}$、$a_{8,4}$、$a_{9,3}$、$a_{9,4}$、$a_{9,5}$ 全管轄完。

(6)若 A_3、A_4、C_3、C_4 無皇后

	M_1	M_2	M_3	M_4	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	
皇后數	0	2	0	0	0	1	1	1	0	0	
最多可管轄到 N_4 中 A_3 排的圓圈數		2				0	0	2			→4
最多可管轄到 N_4 中 A_4 排的圓圈數		2				0	0	2			→4
最多可管轄到 N_4 中 C_3 排的圓圈數		2				0	0	2			→4
最多可管轄到 N_4 中 C_4 排的圓圈數		2				0	0	2			→4

故 A_3、A_4、C_3、C_4 必須要有皇后去管轄

⇒N_4 中的皇后在 $a_{9,6}$、$a_{9,7}$、$a_{10,7}$、$a_{10,8}$ 這四個位置之一，M_2 的兩個皇后的位置便確定，結果 $a_{7,3}$、$a_{8,3}$、$a_{8,4}$ 無法被管轄到

(7)若 A_3、B_3、C_3、C_4 無皇后

	M_1	M_2	M_3	M_4	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	

皇后數	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	
最多可管轄到 N_4 中 A_3 排的圓圈數		1	0		2		0	2			→5
最多可管轄到 N_4 中 B_3 排的圓圈數		2	0		1		0	2			→5
最多可管轄到 N_4 中 C_3 排的圓圈數		1	0		1		0	2			→4
最多可管轄到 N_4 中 C_4 排的圓圈數		1	0		1		0	2			→4

故 A_3、B_3、C_3、C_4 必須要有皇后去管轄

⇒N_4 中的皇后在 $a_{5,3}$、$a_{9,3}$、$a_{10,3}$、$a_{9,7}$、$a_{10,8}$ 這五個位置之一，則 M_2 與 N_1 的兩個皇后位置便確定，但結果 $a_{7,4}$、$a_{8,4}$、$a_{8,5}$ 無法被管轄到

故由 1、2、3、4 可知 5 個皇后無法管轄到一邊有 12 個圓圈的正三角形棋盤的所有圓圈

因此，由(I)、(II)可知一邊有 12 個圈的正三角形棋盤至少需要 6 個皇后才可管到所有圓圈

【評語】040404

如何在西洋棋盤中擺入最多個不互相攻擊的皇后是個古典的問題，目前已找到很多組不同的解。本作品是引申上述的研究，探討在正三角形棋盤及正四面體棋盤如何擺入最多的皇后；整體而言，研究具有創意，也能具體找到如何擺放的策略及證明最多所能擺放的皇后數，成果不錯。如果能在這種棋盤上探討最少皇后數以控制整個棋盤的全部位置就更理想。