中華民國第55屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

第一名
最佳團隊合作獎

040402

層出不窮的彩蛋有「心」「跡」
—圓內接與外切多邊形及其遮延圖形性質探討

學校名稱：臺北市立麗山高級中學

作者：	指導老師：
高二 張霈萱	林永發
高二 林侑萱	
高二 游雅涵	

關鍵詞：射影幾何、極點極線、圓錐曲線

得獎感言

沸騰的熱血已經蓄勢待發，只等七月炙熱的陽光點燃，我們便可燃燒自己的熱情。站在自己的海報前，我們都很緊張、也很興奮，這些日子的努力，一次又一次的重複修改著報告，就是為了今天這一刻，這是展現我們成果的機會。

在評審進場前，我們三個都閉上了雙眼，細數準備過程的種種，想起了那段每天熬夜的日子。每天放學，總是隨便吃點東西，就開始埋頭研究。滿桌的文獻、滿是幾何圖案以及數學式子的黑板，是我們奮鬥的痕跡。每次走出學校時，抬頭只見天空黑得深邃，在泛黃的路燈光暈下，我們拖著三條長長的影子回家。到了家中，打開課本，還是得要面對隔天的小考以及在一張張考卷背後所代表龐大的升學壓力。還好，臉書訊息的通知聲總是會在最需要的時候響起，我們三個總是輪流用訊息給彼此加油打氣，讓彼此知道，不論有多累、有多辛苦，我們都有彼此的陪伴。

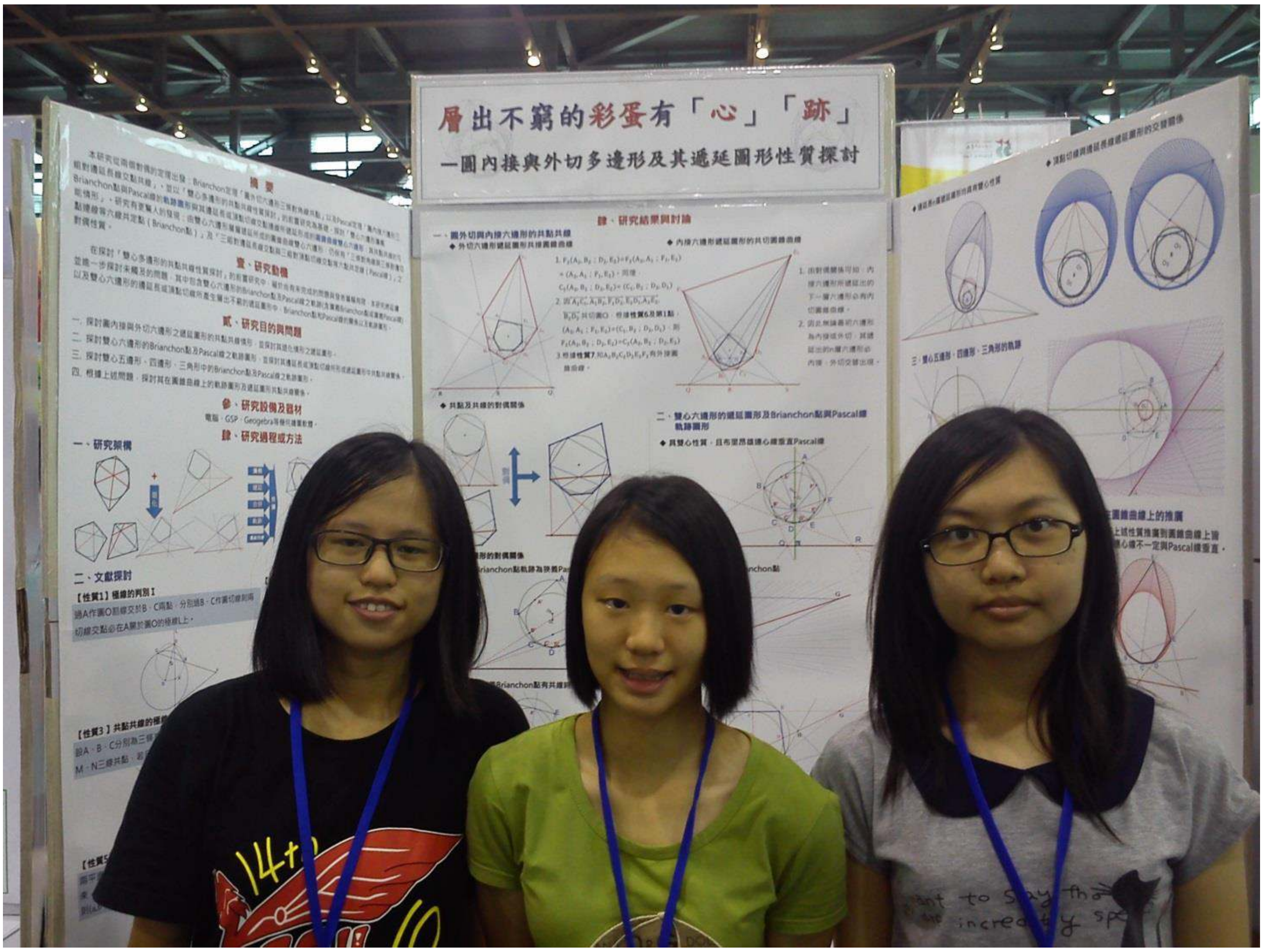
當我們再次張開雙眼，我們必須共同面對的是教授們犀利的提問。深呼吸了一口氣，抬起頭，三條堅定的眼神交會，這是我們的默契，也是我們給彼此服下的一劑定心丸。最後，我們貌似從容的回答了教授的問題，但當教授一走，我們三個攤開濕潤的掌心，相視一笑。

最令我們意外的是頒獎典禮上，當主持人透過麥克風把我們的作品編號宣布出來時，那一刻，誰都意想不到。我們故作鎮定地奔向舞台領獎，可是下了台給就沒有這麼冷靜了，我們像孩子般地跳上跳下，難掩雀躍之情。過去的苦澀成就了今日的甘甜，心中滿滿的感激，感謝所有人給的支持與鼓勵。

經過這些比賽後，也許有些人會因此走上科學研究之路，也許不會，但我們都在過程中培養了敏銳觀察事物的能力，也引發了我們對自然萬物的好奇，像個小孩一樣，對所有事物都想要一探究竟。現今多數都市孩童沉溺於電子產品而失去了對萬物的好奇心，我認為這是相當可惜的，但我們相信，科展可以讓他們像我們一樣，從過程中感受到科學的奧妙，進而引發他們的好奇心，追求大自然和宇宙中的真理。

最後，我們想要告訴即將踏上科學研究道路的學弟妹們，重要的是科學研究的精神，是對萬物追根究柢的好奇，萬一科展比賽失利，也不必太氣餒，更不要因此停下研究的腳步，很多重要的科學研究成果，都是在不被看好的情形下完成的，所以即使一時失敗，也希望你們能夠堅持自己的理想，繼續走下去。當然，研究的路是辛苦的，尤其是當你們必須在龐大

課業壓力下，持續做研究。每個科展的參賽者，都面臨著無數次課業與研究間的掙扎，但只有堅持到底的人，才有機會成功。



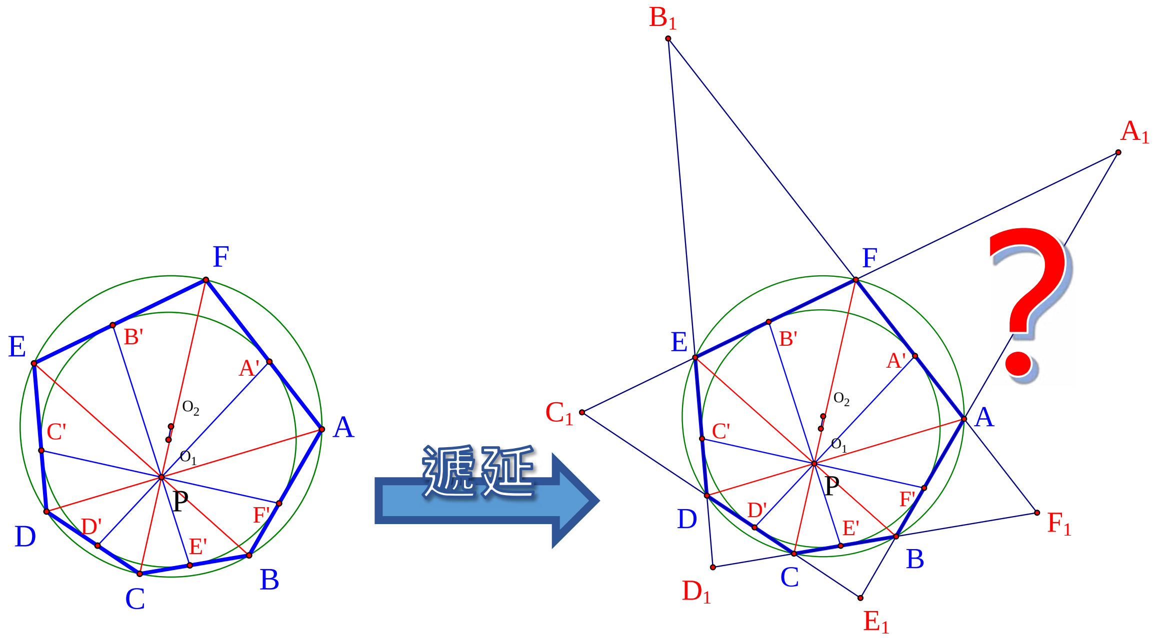
三位參賽者與海報的合影

摘要

本研究從兩個對偶的定理出發：Brianchon 定理「圓外切六邊形三條對角線共點」以及 Pascal 定理「圓內接六邊形三組對邊延長線交點共線」，以「雙心六邊形共點共線性質探討」的前置研究為基礎，探討「雙心六邊形廣義 Brianchon 點與 Pascal 線的軌跡圖形與其邊延長或頂點切線交點連線所遞延形成的**圓錐曲線雙心六邊形**，其共點共線的可能情形」。研究有更驚人的發現，當雙心六邊形層層遞延所形成的**圓錐曲線雙心六邊形**，仍保有「三條對角線與三條對邊切點連線等六線共定點（Brianchon 點）」及「三組對邊延長線交點與三組對頂點切線交點等六點共定線（Pascal 線）」之對偶性質。

壹、研究動機

在探討「雙心多邊形的共點共線性質」的前置研究中，礙於尚有未完成的問題與發表篇幅有限，本研究將延續並進一步探討未觸及的問題，其中包含雙心六邊形的 Brianchon 點及 Pascal 線之軌跡(含廣義 Brianchon 點或廣義 Pascal 線)，以及雙心六邊形的邊延長或頂點切線所產生層出不窮的遞延圖形中，Brianchon 點和 Pascal 線的關係以及軌跡圖形。



貳、研究目的及研究問題

一、 探討圓內接與外切多邊形之遞延圖形的共點共線情形；並探討其五邊形、四邊形和三角形等退化情形之遞延圖形。

二、 探討雙心六邊形的 Brianchon 點及 Pascal 線之軌跡圖形；並探討其邊延長或頂點切線遞延圖形中共點共線的關係。

三、 探討雙心五邊形、四邊形、三角形的 Brianchon 點及 Pascal 線之軌跡圖形。

四、 根據上述問題，探討其在圓錐曲線上的軌跡圖形及遞延圖形共點共線關係。

參、研究設備及器材

本研究主要利用 GSP 與 Geogebra 等電腦動態幾何軟體進行研究問題的幾何實驗，透過實驗觀察、猜測與驗證，然後提出研究結果並加以證明。

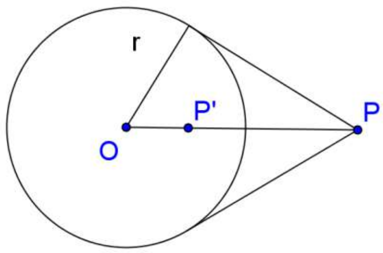
肆、研究過程或方法

一、文獻探討

本研究範圍涉及圓內接、圓外切多邊形共點共線問題，將引用有關反演、極點極線等相關性質來探討共點共線問題，如下：

（一）反演變換（參見文獻[5]）

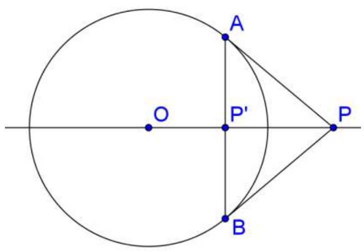
如圖 1-1，在平面上給定一圓，圓心為 O，半徑為 r，對平面上任一異於 O 的點 P，將其變換為$\overrightarrow{OP}$上的一點 P'，使得 $\overline{OP}\times\overline{OP'}=r^2$，則稱「 P'為 P **關於圓 O 的反演點**。」



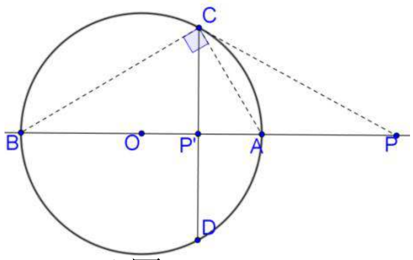
▲圖 1-1

【性質 1-1】點關於圓的反演點作法

若 P 在圓外，過 P 作圓 O 切線切圓 O 於 A，過 A 作$\overleftrightarrow{AB}\perp\overline{OP}$分別交圓 O 於 B，交$\overline{OP}$於 P'，則 P'即為 P 關於圓 O 反演點。（如圖 1-2）



▲圖 1-2



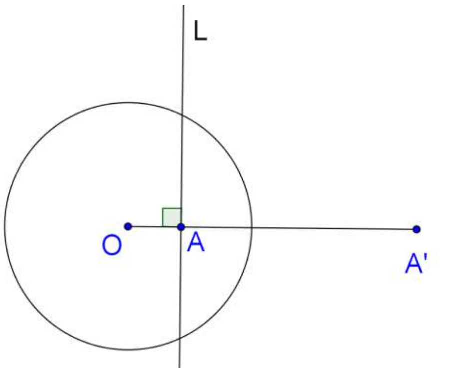
▲圖 1-3

【性質 1-2】反演與調和點列

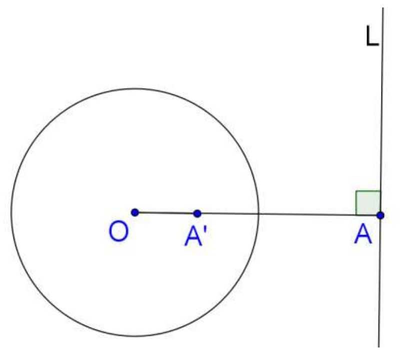
P′為 P 關於圓 O 的反演點，作 $\overleftrightarrow{PP'}$ 交圓 O 於 A、B 兩點，則 P、P'；A、B 為調和點列，即 $\overline{PA}:\overline{AP'}=\overline{PB}:\overline{BP'}$。（如左頁的圖 1-3）

（二）極線與極點（參見文獻[3]）

如圖 1-4，若 A' 為 A 關於圓 O 的反演點，過 A 作垂直 $\overleftrightarrow{AA'}$ 的直線 L，則稱「**直線 L 為 A' 關於圓 O 的極線；A' 為此直線 L 的極點。**」



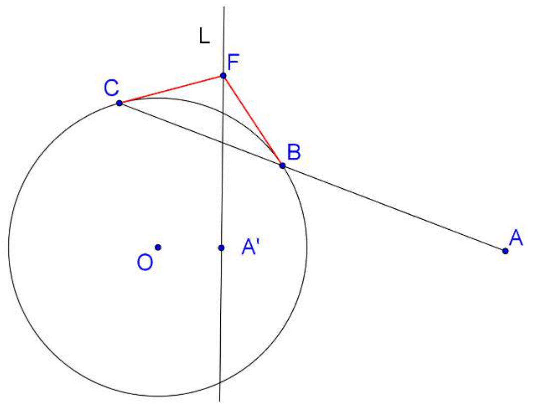
▲圖 1-4(a)



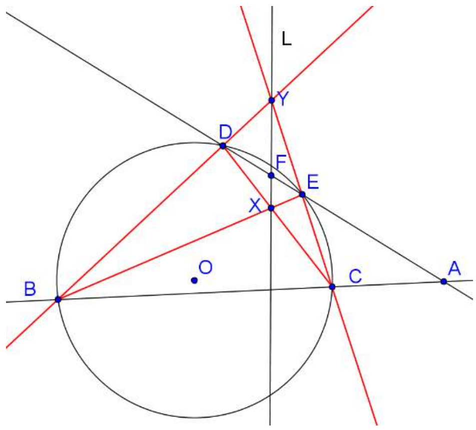
▲圖 1-4(b)

【性質 2-1】極線的判別 I

L 為 A 關於圓 O 的極線，過 A 作圓 O 割線交於 B、C 兩點，分別過 B、C 作圓 O 切線，則兩切線交點 F 必在極線 L 上。（如圖 1-5）



▲圖 1-5



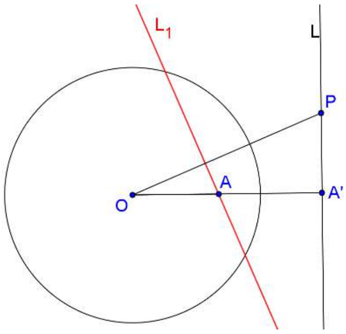
▲圖 1-6

【性質 2-2】極線的判別 II

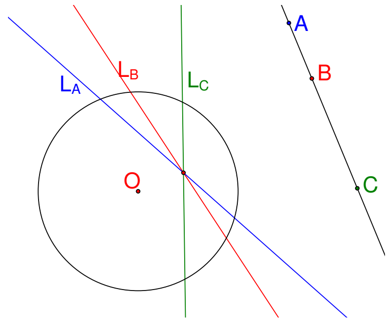
L 為 A 點關於圓 O 的極線，過 A 作圓 O 的兩條割線，分別交圓 O 於 B、C 及 D、E，則 $\overleftrightarrow{BD}$、$\overleftrightarrow{CE}$的交點 Y，及$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CD}$的交點 X 必在極線 L 上。（如圖 1-6）

【性質 2-3】極點極線的對偶關係

L 為 A 關於圓 O 的極線，則 L 上任意點 P 關於圓 O 的極線L_1必會通過 A 點，反之亦然。（如圖 1-7）



▲圖 1-7



▲圖 1-8

【性質 2-4】共點共線的極線判別法

平面上有一圓 O 及 A、B、C 三點，L_A、L_B、L_C分別為 A、B、C 關於圓 O 的極線，若 A、B、C 三點共線，則L_A、L_B、L_C三線共點，反之亦然。（如圖 1-8）

上述有關極點極線及調和點列性質，推廣到圓錐曲線上皆成立。

（三）交比（參見文獻[5]）

接下來我們的研究也探討六邊形是否外切或內接於一個圓錐曲線，我們引用射影幾何中的交比性質，試圖做簡潔有力的證明。

1. 有向線段比

若 A、B、C 為平面上的三個共線點，定義其有向線段比為$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$，若$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{CB}$同向，則 $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}=\frac{AC}{CB}$；反之，若$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{CB}$反向，則$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}=-\frac{AC}{CB}$。

2. 四共線點的交比

若 A、B、C、D 為平面上的四個共線點，

定義其交比為(ABCD)或(A，B；C，D)=$(\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}/\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}})$

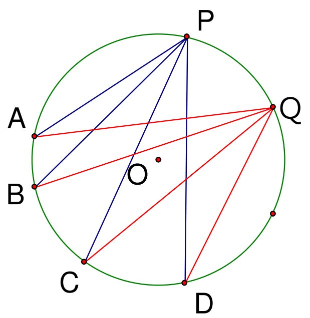
3.　四共點線的交比

平面中有兩相交直線 a、b，定義其交角(a，b)為由直線 a 轉向直線 b 的角度，即 (a，b)為有向角。若 a、b、c、d 為平面上的四條共點的線束，

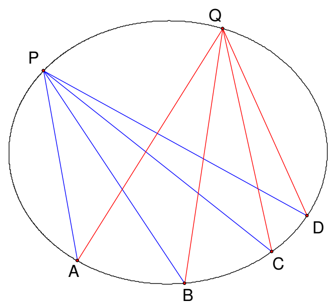
則定義其交比(a，b；c，d) $=\left(\frac{\sin(a，c)}{\sin(c，b)}\Big/\frac{\sin(a，d)}{\sin(d，b)}\right)$。

4.　四共圓點的交比

若 A、B、C、D 四點共圓，P、Q 為圓上異於 A、B、C、D 的點，則 P(A，B；C，D)=Q(A，B；C，D)。推廣到圓錐曲線上亦成立。（如圖 1-9）



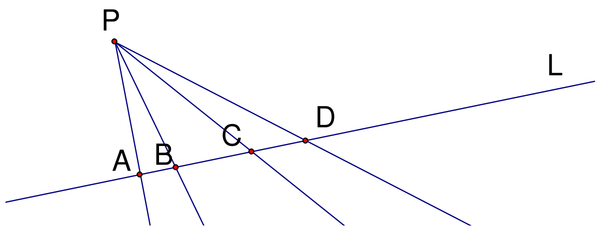
▲圖 1-9(a)



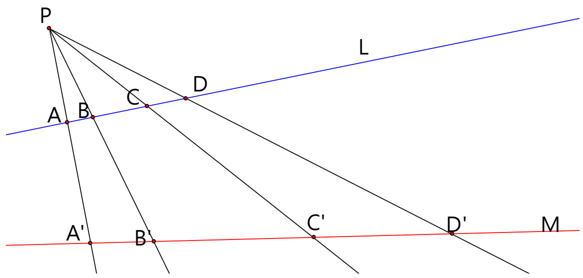
▲圖 1-9(b)

【性質 3-1】線交比與點交比的轉換

若 A、B、C、D 四點共直線 L，P 為線外一點，則(A，B；C，D)＝P(A，B；C，D)。（如圖 1-10）



▲圖 1-10



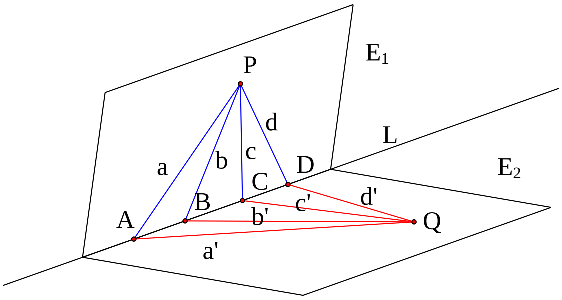
▲圖 1-11

【性質 3-2】經過射影變換後點交比不變

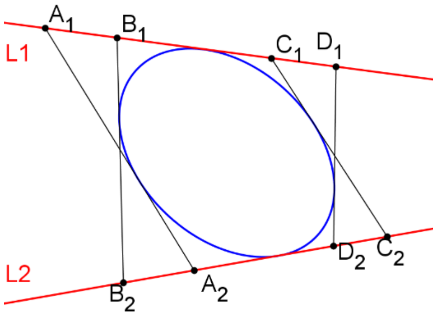
一直線 L 上有四點 A、B、C、D，過直線 L 外的一點 P，$\overleftrightarrow{PA}$、$\overleftrightarrow{PB}$、$\overleftrightarrow{PC}$、$\overleftrightarrow{PD}$交另一直線 M 於A′、B′、C′、D′，則(A，B；C，D)=(A′，B′；C′，D′)。（如圖 1-11）

【性質 3-3】經過射影變換後線交比不變

空間中有兩平面E_1、E_2，交於直線 L。平面E_1上有一點 P，以及皆通過 P 點的四條線束 a、b、c、d，並交 L 於 A、B、C、D，經射影變換後，會得到新的四條線束a'、b'、c'、d'並共交於點 Q，則(a，b；c，d)=(a'，b'；c'，d')。（如圖 1-12）



▲圖 1-12



▲圖 1-13

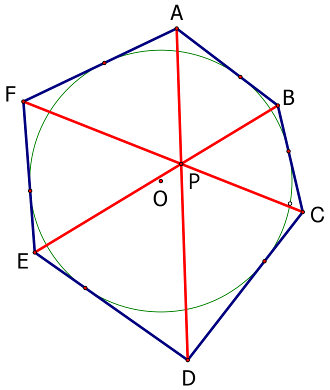
【性質 3-4】內切圓錐的交比判別法

設$A_1B_1C_1D_1$與$A_2B_2C_2D_2$分別為直線L_1及L_2上的四點，若$\overleftrightarrow{A_1A_2}$、$\overleftrightarrow{B_1B_2}$、$\overleftrightarrow{C_1C_2}$、$\overleftrightarrow{D_1D_2}$、$L_1$、$L_2$六線共切於圓錐曲線，則($A_1$，$B_1$；$C_1$，$D_1$)=($A_2$，$B_2$；$C_2$，$D_2$)，反之亦然。（如圖 1-13）

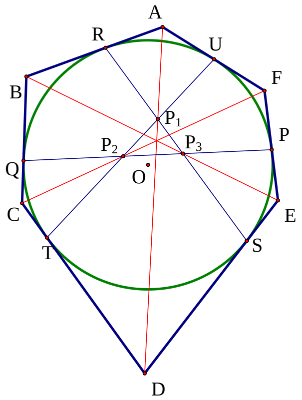
（四）Brianchon 定理和 Pascal 定理

【Brianchon 定理】圓外切六邊形的三條對角線共交點

設 ABCDEF 為圓 O 之圓外切六邊形，則三條對角線$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CF}$共交於一點 P，此點稱之為 Brianchon 點。(如圖 1-14)



▲圖 1-14



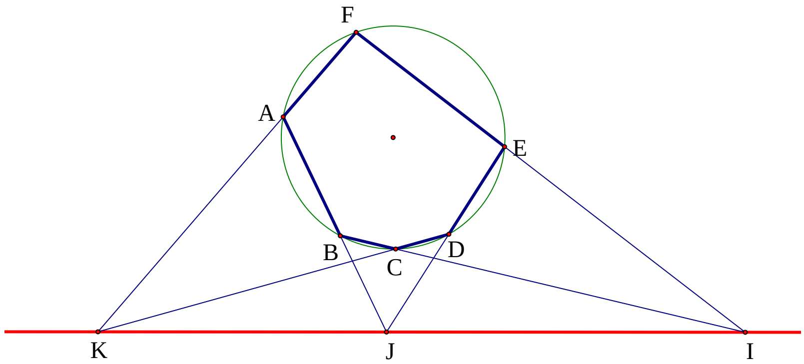
▲圖 1-15

【圓外切六邊形的其他共點關係】

設 ABCDEF 為圓外切六邊形，R、T、S、U 分別為$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{CD}$、$\overleftrightarrow{DE}$、$\overleftrightarrow{FA}$上的切點，則$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{RS}$、$\overleftrightarrow{UT}$交於一點P_1，此點稱之為廣義 Brianchon 點。（如圖 1-15）

【Pascal 神秘六邊形定理】圓內接六邊形的三組對邊延長線交點共線

設 ABCDEF 為內接於圓 O 的六邊形，其三組對邊延長線$\overleftrightarrow{AB}$和$\overleftrightarrow{DE}$、$\overleftrightarrow{BC}$和$\overleftrightarrow{EF}$、$\overleftrightarrow{CD}$和$\overleftrightarrow{FA}$分別交於 J、I、K，則 J、I、K 三點共線，此線稱之為 Pascal 線。（如圖 1-16）



▲圖 1-16

（五）Brianchon 定理及 Pascal 定理在圓錐曲線上的推廣

Brianchon 定理與 Pascal 定理互相對偶。若透過射影變換，則可以進一步推廣到所有非退化的圓錐曲線上。同時知道 Brianchon 定理及 Pascal 定理之逆定理也成立。因此我們可得到下面結論：

1. 若六邊形內接於一個圓錐曲線，則此六邊形的三組對邊延長線交點共線。

2. 若六邊形的三組對邊延長線交點共線，則此六邊形必內接於一圓錐曲線。

3. 若六邊形外切於一個圓錐曲線，則此六邊形的三條對角線共點。

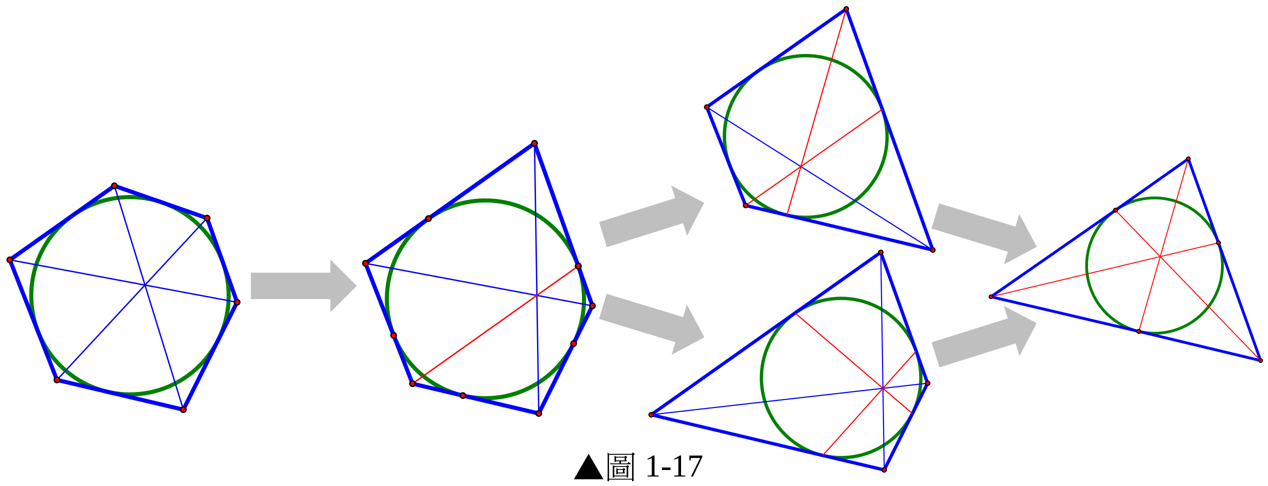
4. 若六邊形的三條對角線共點，則此六邊形必外切於一個圓錐曲線。

二、前置研究

（一）Brianchon 定理及 Pascal 定理的退化情形

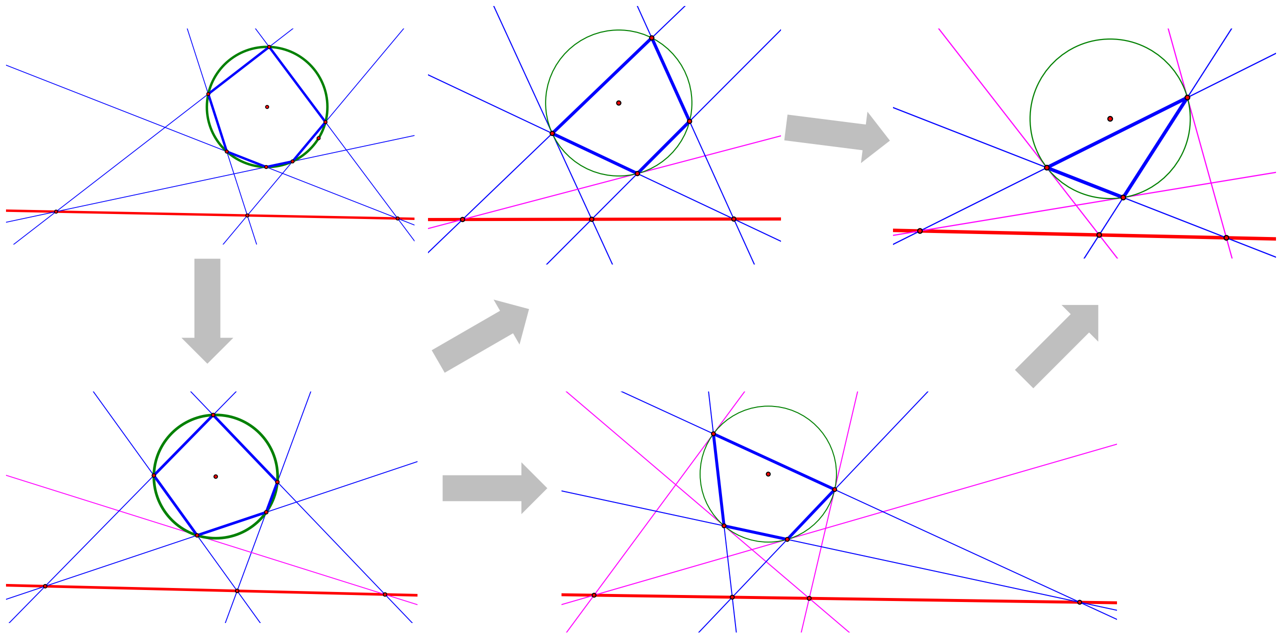
在動態環境下，倘若將圓外切六邊形的一個邊縮為 0，使兩個相鄰邊重合，則此頂點會變為切點，此時原本的圓外切六邊形退化成圓外切五邊形；同理，拉動圓內接六邊形一個頂點，使其與相鄰的一個頂點重合，則邊的延長線會變為過頂點切線，此時原本的圓內接六邊形退化成圓內接五邊形。然後再仿照前述方法，利用極線性質便可證得六邊形退化成五邊形、四邊形、三角形後，仍具有共點或共線之性質。

■ **Brianchon 定理的退化情形**



▲圖 1-17

■ **Pascal 定理的退化情形**



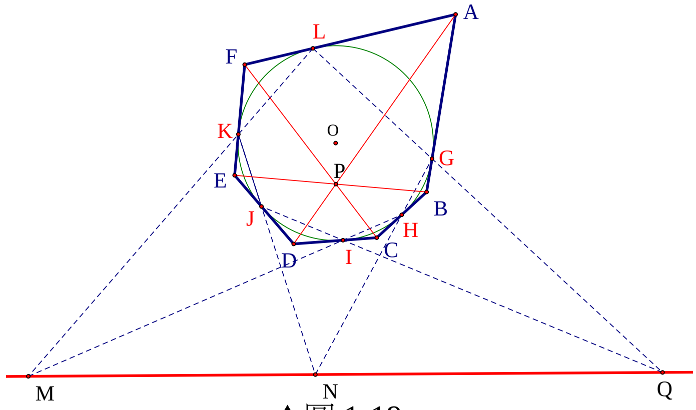
▲圖 1-18

（二）利用 Pascal 定理證明 Brianchon 定理

【證明】（參考右頁圖 1-19）

1° 作$\overleftrightarrow{GH}$、$\overleftrightarrow{JK}$交於 N，由＜性質 2-1＞可知$\overleftrightarrow{BE}$為 N 關於圓 O 的極線，同理作$\overleftrightarrow{HI}$、$\overleftrightarrow{KL}$交於 M，$\overleftrightarrow{JI}$、$\overleftrightarrow{LG}$交於 Q，則 M、Q 關於圓 O 的極線分別為$\overleftrightarrow{CF}$、$\overleftrightarrow{AD}$。

2° 由 Pascal 定理知 N、M、Q 三點共線，又由＜性質 2-4＞知 Q、N、M 三點共線，所以三線$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CF}$共點於 P。■



▲圖 1-19

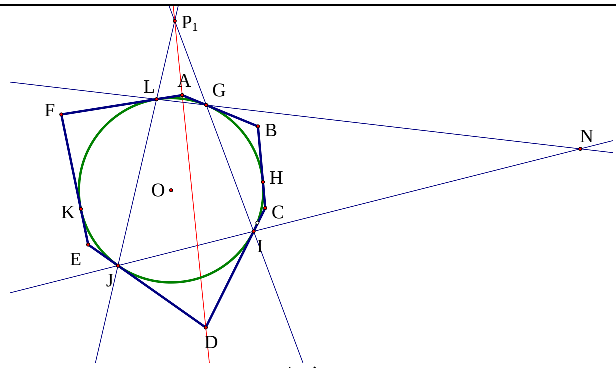
伍、　研究結果與討論

一、　圓內接與外切多邊形之遞延圖形的共點共線情形

根據 Brianchon 定理，圓外切六邊形三條對角線所共交的點，稱為「Brianchon 點」；透過不同條件組合所得到的三線共點，則稱之為「廣義 Brianchon 點」。有以下的發現：

【定理 1-1】圓外切六邊形之廣義 Brianchon 點

設 ABCDEF 為圓 O 的外切六邊形，G、H、I、J、K、L 分別為 $\overleftrightarrow{AB}$ 、 $\overleftrightarrow{BC}$ 、 $\overleftrightarrow{CD}$ 、 $\overleftrightarrow{DE}$ 、 $\overleftrightarrow{EF}$ 、 $\overleftrightarrow{FA}$ 上的切點。則 $\overleftrightarrow{LJ}$、$\overleftrightarrow{GI}$、$\overleftrightarrow{AD}$ 三線共交於 P_1。(如圖 2-1)



▲圖 2-1

【證明】

1° 作 $\overleftrightarrow{GL}$、$\overleftrightarrow{JI}$ 交於 N，由<性質 2-1>可知 $\overleftrightarrow{AD}$ 為 N 關於圓 O 的極線。

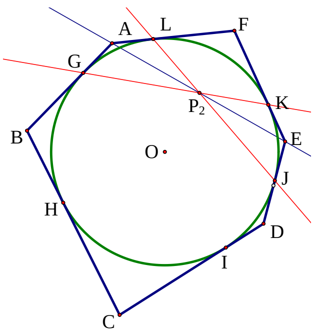
2° 由<性質 2-2>知 $\overleftrightarrow{GI}$、$\overleftrightarrow{LJ}$ 的交點 P_1 在 N 關於圓 O 的極線上，即在 $\overleftrightarrow{AD}$ 上，所以 $\overleftrightarrow{GI}$、$\overleftrightarrow{LJ}$、$\overleftrightarrow{AD}$ 三線共點於 P_1。同理，($\overleftrightarrow{GK}$、$\overleftrightarrow{HJ}$、$\overleftrightarrow{BE}$)、($\overleftrightarrow{HL}$、$\overleftrightarrow{IK}$、$\overleftrightarrow{CF}$) 也分別三線共點。■

繼續嘗試不同的連線組合，發現了另外兩種共點情形：

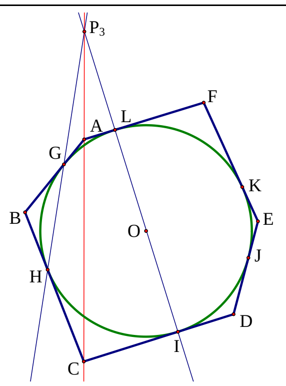
【定理 1-2】圓外切六邊形之廣義 Brianchon 點

（1） $\overleftrightarrow{AE}$、$\overleftrightarrow{GK}$、$\overleftrightarrow{JL}$三線共交於 P_3。同理，（$\overleftrightarrow{DF}$、$\overleftrightarrow{LJ}$、$\overleftrightarrow{IK}$）、（$\overleftrightarrow{CE}$、$\overleftrightarrow{IK}$、$\overleftrightarrow{HJ}$）、（$\overleftrightarrow{BD}$、$\overleftrightarrow{JH}$、$\overleftrightarrow{GI}$）、（$\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{GI}$、$\overleftrightarrow{HL}$）、（$\overleftrightarrow{BF}$、$\overleftrightarrow{LH}$、$\overleftrightarrow{GK}$）亦分別三線共點。（如圖 2-2(a)）

（2） $\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{GH}$、$\overleftrightarrow{LI}$三線共交於 P_3。同理，（$\overleftrightarrow{BF}$、$\overleftrightarrow{HK}$、$\overleftrightarrow{GL}$）、（$\overleftrightarrow{CE}$、$\overleftrightarrow{IJ}$、$\overleftrightarrow{HK}$）、（$\overleftrightarrow{AE}$、$\overleftrightarrow{GJ}$、$\overleftrightarrow{LK}$）、（$\overleftrightarrow{BD}$、$\overleftrightarrow{HI}$、$\overleftrightarrow{GJ}$）、（$\overleftrightarrow{DF}$、$\overleftrightarrow{KJ}$、$\overleftrightarrow{IL}$）亦分別三線共點。（如圖 2-2(b)）



▲圖 2-2(a)



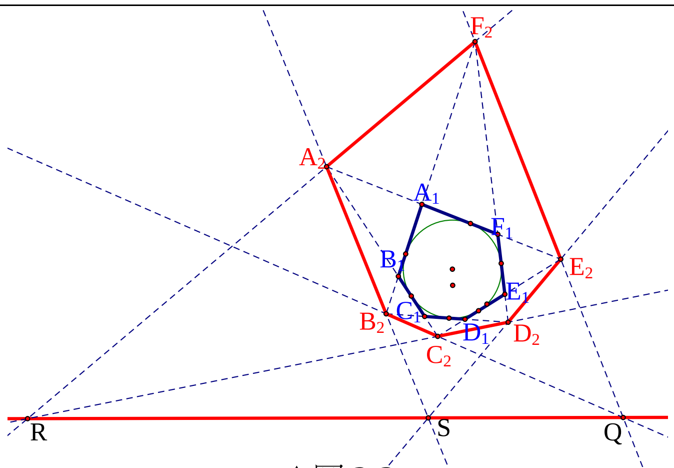
▲圖 2-2(b)

上面兩個共點性質的證明，皆可仿照**【定理 1-1】**的證明方法，故不再贅述。

接下來，我們大膽地將圓外切六邊形的各邊延長線取交點連線形成一個新的六邊形，我們將它稱為「邊延長遞延圖形」，可得到驚人的結果，如下：

【定理 1-3】圓外切六邊形的邊延長遞延圖形

設$A_1B_1C_1D_1E_1F_1$為圓 O 的外切六邊形，若將各邊延長取交點連線形成一個六邊形$A_2B_2C_2D_2E_2F_2$，則六邊形$A_2B_2C_2D_2E_2F_2$必內接於一個圓錐曲線，故存在一條 Pascal 線。（如圖 2-3）



▲圖 2-3

【證明】

1° 根據＜性質 3-1>、＜性質 3-2＞，

$F_2\left(A_2，B_2；D_2，E_2\right)=F_2\left(A_2，A_1；F_1，E_2\right)=\left(A_2，A_1；F_1，E_2\right)$

2° 同理，$C_2(A_2，B_2；D_2，E_2)=C_2(C_1，B_2；D_2，D_1)=(C_1，B_2；D_2，D_1)$

3° 因為$\overleftrightarrow{A_2C_1}$、$\overleftrightarrow{A_1B_2}$、$\overleftrightarrow{F_1D_2}$、$\overleftrightarrow{E_2D_1}$為圓 O 切線，故根據＜性質 3-4＞，

$\left(A_2，A_1；F_1，E_2\right)=\left(C_1，B_2；D_2，D_1\right)$

4° 由以上得$F_2(A_2，B_2；D_2，E_2)=C_2(A_2，B_2；D_2，E_2)$，再由文獻探討中的

＜四共圓點交比性質＞（詳見 P.5），知A_2、B_2、C_2、D_2、E_2、F_2六點共圓錐曲線。

5° 因為六邊形$A_2B_2C_2D_2E_2F_2$內接於一個圓錐曲線，故根據 Pascal 定理，其三組對邊延長線交點必共交一線，即 Pascal 線。■

在上述中的圓外切六邊形及其遞延圖形，嘗試不同的條件組合仍會有三線共點之情形。

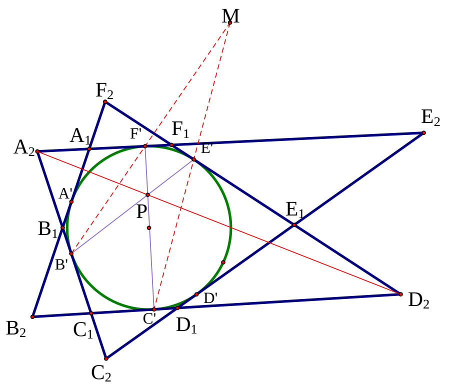
【定理 1-4】圓外切六邊形邊延長遞延圖形的廣義 Brianchon 點

圓外切六邊形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 各邊與圓分別切於 A'、B'、C'、D'、E'、F'，各邊延長線相交交點依序為 A_2、B_2、C_2、D_2、E_2、F_2，則$\overleftrightarrow{C'F'}$、$\overleftrightarrow{B'E'}$、$\overleftrightarrow{A_2D_2}$三線共交於 P。（如圖 2-4）

【證明】

1° 作$\overleftrightarrow{B'F'}$、$\overleftrightarrow{C'E'}$交於 M。由＜性質 2-1＞知$\overleftrightarrow{A_2D_2}$為 M 關於圓 O 的極線。

2° 由＜性質 2-2＞得$\overleftrightarrow{B'F'}$、$\overleftrightarrow{C'E'}$的交點 P 在 M 關於圓 O 的極線上，即$\overleftrightarrow{C'F'}$、$\overleftrightarrow{B'E'}$、$\overleftrightarrow{A_2D_2}$三線共點於 P。■



▲圖 2-4

同理，$(\overleftrightarrow{A'D'}$、$\overleftrightarrow{C'F'}$、$\overleftrightarrow{B_2E_2})$，$(\overleftrightarrow{B'E'}$、$\overleftrightarrow{A'D'}$、$\overleftrightarrow{C_2F_2})$亦分別三線共點。

與 Brianchon 定理對偶的 Pascal 定理：圓內接六邊形的三組對邊延長線交點會共線，此線即為 Pascal 線。同樣的，是否也存在著其它廣義 Pascal 線呢？

【定理 1-5】圓內接六邊形的廣義 Pascal 線

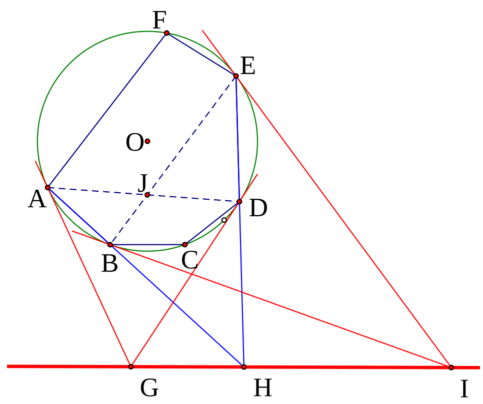
圓內接六邊形 ABCDEF，分別過 A、D 作切線交於 G，過 B、E 作切線交於 I，$\overleftrightarrow{AB}$ 與 $\overleftrightarrow{DE}$ 交於 H，則 G、I、H 三點共線。同理，另有兩組亦會形成廣義 Pascal 線。（如圖 2-5）

【證明】

1° 由＜性質 2-1＞知 $\overleftrightarrow{AD}$ 為 G 關於圓 O 的極線，同理，$\overleftrightarrow{BE}$ 為 I 關於圓 O 的極線。

2° 令 $\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$ 交於 J，由＜性質 2-2＞知 J 亦在 H 關於圓 O 的極線上，故 G、H、I 各自關於圓 O 的極線共點 J。

3° 由＜性質 2-4＞知，G、H、I 三點共線。■

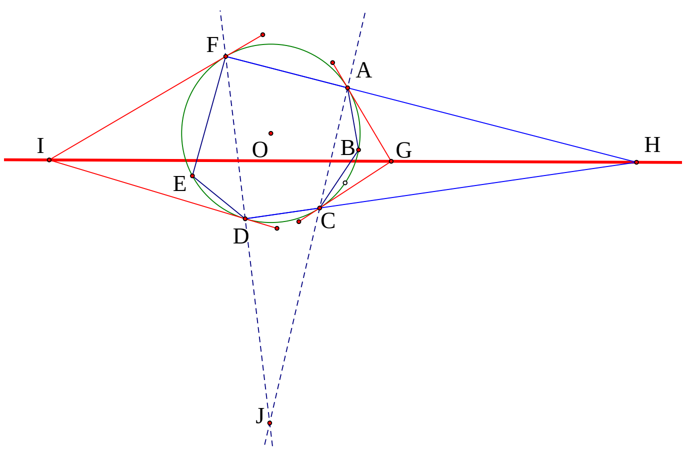


▲圖 2-5

如同圓外切六邊形的情形，我們繼續嘗試不同的連線組合，發現了下列共線情形：

【定理 1-6】圓內接六邊形的廣義 Pascal 線

分別過 A、C 作切線交於 G，過 F、D 作切線交於 I，$\overleftrightarrow{AF}$ 與 $\overleftrightarrow{CD}$ 交於 H，則 G、I、H 三點共線。同理，另有兩組也會形成廣義 Pascal 線。（如圖 2-6）



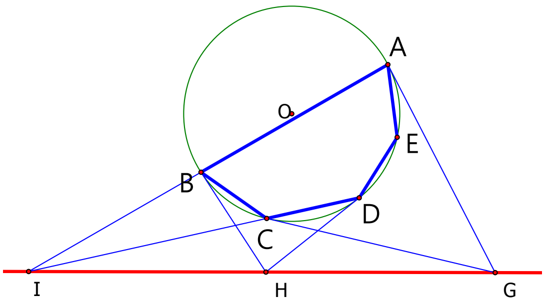
▲圖 2-6

若運用退化手法，可得到下列圓內接五邊形或四邊形的共線性質，如下：

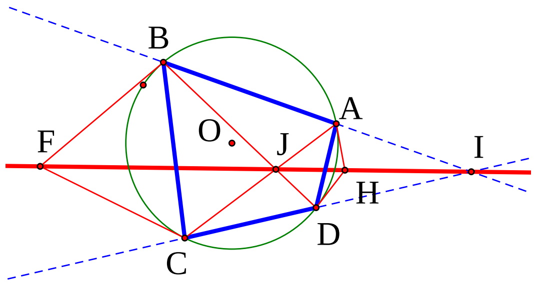
【定理 1-7】圓內接五邊形、四邊形的廣義 Pascal 線

（1）設 ABCDE 內接於圓 O，分別過 A 與 C 作切線交於 G，過 B 與 D 作切線交於 H，$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{CD}$交於 I，則 G、H、I 三點共線。同理，另有四組共線情形。（如圖 2-7）

（2） 設 ABCD 為圓 O 的內接四邊形，分別過 A、B、C、D 作圓 O 切線，分別交於 E、F、G、H，$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{CD}$交於 I 點，$\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{BD}$交於 J 點，則 F、H、I、J 四點共廣義 Pascal 線，同理，K、G、J、E 共線，四點共線。（如圖 2-8）



▲圖 2-7



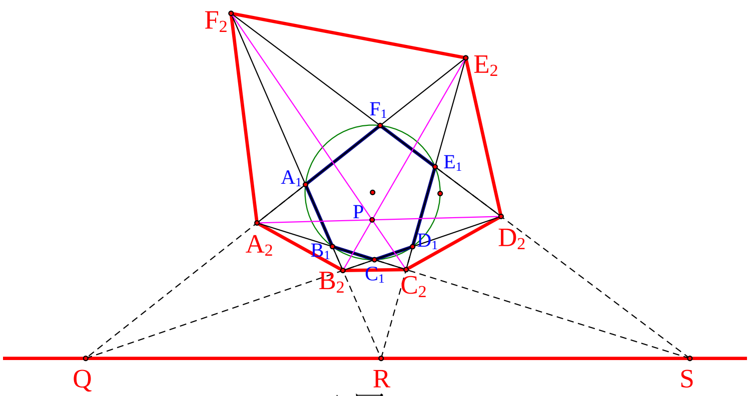
▲圖 2-8

上述之共點共線情形，可仿照**【定理 1-5】**證出，故不再贅述。

將圓內接六邊形仿照圓外切六邊形的邊延長遞延圖形證明方式（詳見**【定理 1-2】**），由對偶關係即可得到以下性質：

【定理 1-8】圓內接六邊形的邊延長遞延圖形

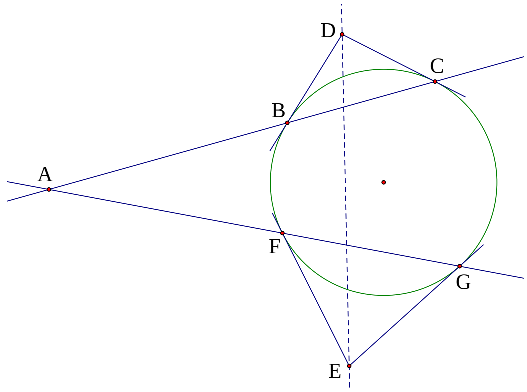
設$A_1B_1C_1D_1E_1F_1$為圓 O 的內接六邊形，若將各邊延長取交點連線形成六邊形$A_2B_2C_2D_2E_2F_2$，則六邊形$A_2B_2C_2D_2E_2F_2$外切於一個圓錐曲線，故存在一 Brianchon 點。（如圖 2-9）



▲圖 2-9

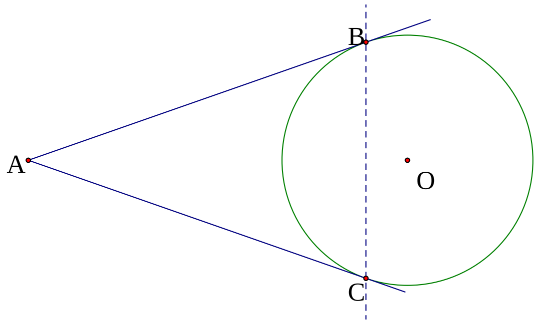
接著，我們希望透過極點極線的性質，來解釋共點及共線的對偶關係：

如圖 2-10(a)，由＜性質 2-1＞知道 D 點一定在 A 關於圓 O 的極線上。若將$\overleftrightarrow{BC}$視為圓內接多邊形的邊延長線，當 A 點發生共線關係時，則$\overleftrightarrow{DE}$一定涉及另一共點關係。此時 D、E 可視為圓外切多邊形的頂點。



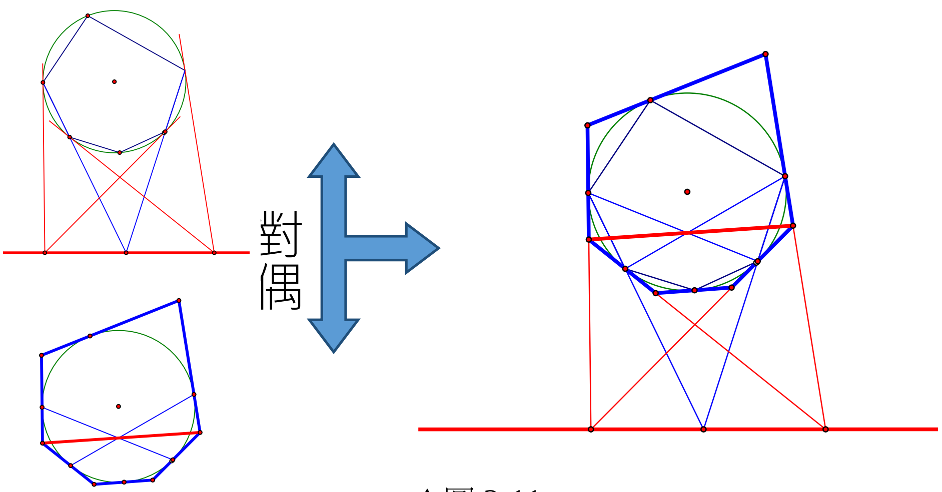
▲ 圖 2-

同樣的，圖 2-10(b)中的$\overleftrightarrow{BC}$為 A 關於圓 O 的極線，若將$\overleftrightarrow{BC}$視為圓外切多邊形的切點連線，當$\overleftrightarrow{BC}$發生共點關係時，則 A 點也會涉及另一共線關係，此時 A 點可視為圓內接多邊形頂點的切線交點。



▲ 圖 2-

以下面的圓內接和圓外切六邊形為例，即可依上述方式互相導出，我們稱這樣的廣義 **Brianchon 點與廣義 Pascal 線互相對偶**，或**對應的廣義 Brianchon 點**（**廣義 Pascal 線**）。



▲圖 2-11

綜合上述，我們可得到下列結論：

【定理 1-9】共點與共線的對偶關係

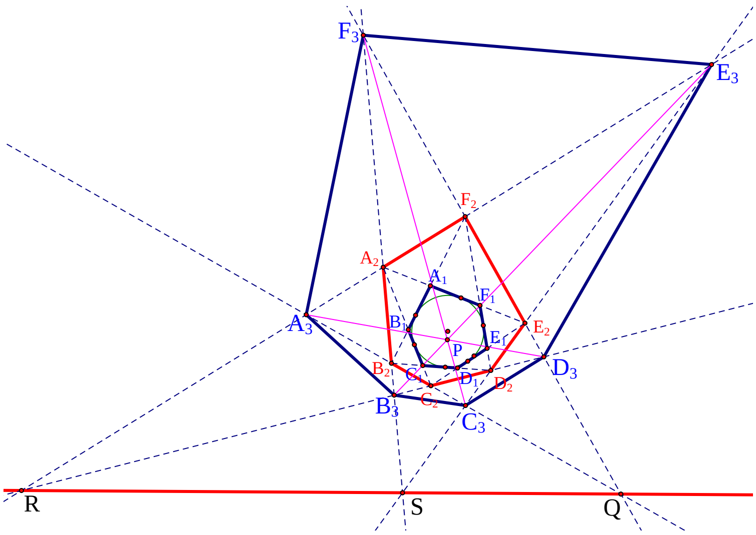
當圓外切多邊形有共點關係時，則與之對應的圓內接多邊形必有共線關係。反之亦然。

若圓內接（或圓外切）六邊形$A_1B_1C_1D_1E_1F_1$為第一層六邊形；作邊延長遞延圖形可得第二層六邊形$A_2B_2C_2D_2E_2F_2$，依此類推可得第三層$A_3B_3C_3D_3E_3F_3$，……第 n 層六邊形$A_nB_nC_nD_nE_nF_n$。

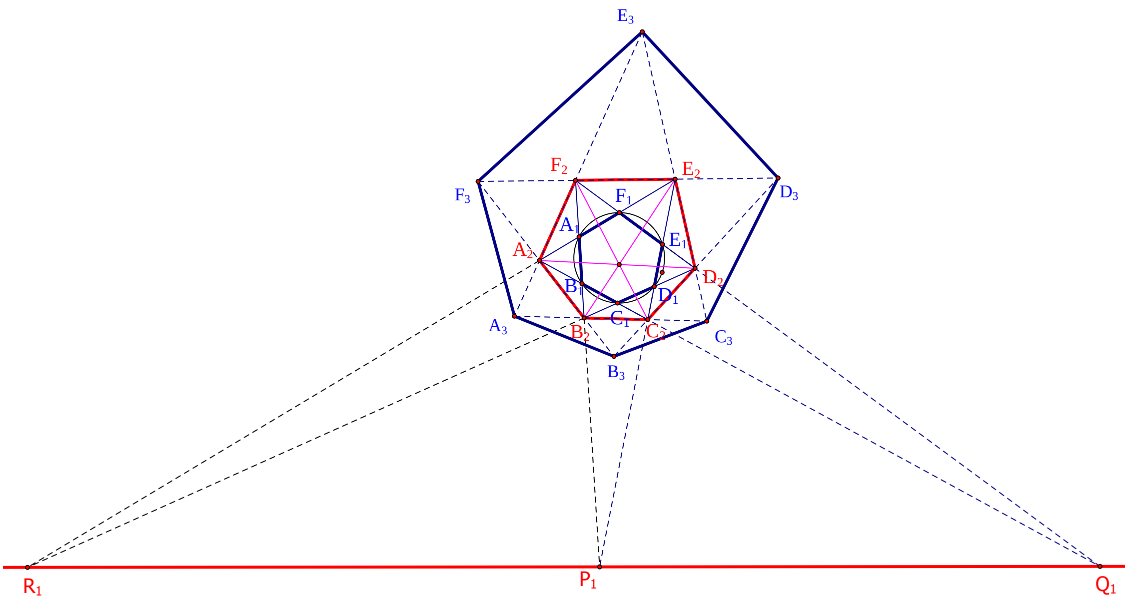
根據**【定理 1-8】**和**【定理 1-9】**以及 Brianchon 定理及 Pascal 定理之逆定理在圓錐曲線上的推廣，可得到下面結論：

【定理 1-10】圓上六邊形 n 層遞延圖形的共點共線對偶關係

當第 n 層六邊形內接（或外切）於一個圓錐曲線，則第 n+1 層必外切（或內接）於另一個圓錐曲線。即各自存在 Brianchon 點和 Pascal 線（不一定同一點、同一線）。（如圖 2-12）



▲ 圖 2-



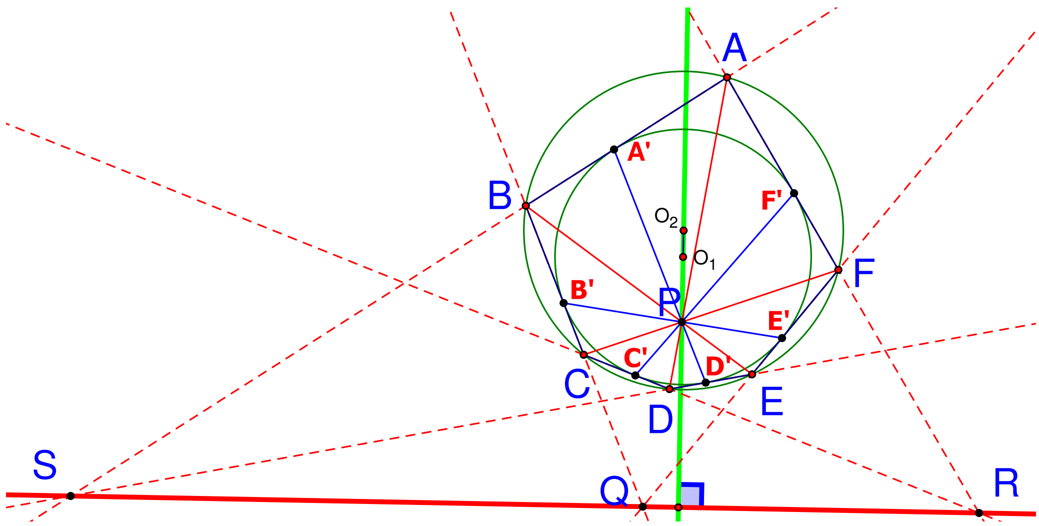
▲ 圖 2-

二、 雙心六邊形的 Brianchon 點、Pascal 線之軌跡與遞延圖形

前述的圓外切（或圓內接）六邊形的 Brianchon 點（或 Pascal 線）均會隨著六邊形變動而改變位置；若將兩者合併成一個同時外切於圓與內接於圓的六邊形，即雙心六邊形，其情形會如何呢？又如果固定兩個圓，並保持外切於圓與內接於圓的性質時，而轉動六邊形，Brianchon 點與 Pascal 線的軌跡是否也具有對偶特性呢？

【定理 2-1】雙心六邊形的 Brianchon 點及 Pascal 線軌跡為定點、定線

雙心六邊形 ABCDEF 外切於圓O_1、內接於圓O_2，切點分別為A'、B'、C'、D'、E'、F'，則其 Brianchon 點（即圖中 P 點）與O_1、O_2三點共線，且此線與 Pascal 線垂直。而轉動 ABCDEF 時，Brianchon 點及 Pascal 線皆固定不動。（如圖 2-13）



▲圖 2-13

【證明】

1° 由＜性質 2-1＞，可知$\overleftrightarrow{A'D'}$、$\overleftrightarrow{B'E'}$、$\overleftrightarrow{C'F'}$分別為 S、Q、R 關於圓$O_1$的極線，故$\overleftrightarrow{A'D'}$、$\overleftrightarrow{B'E'}$、$\overleftrightarrow{C'F'}$必共於 P 點，且 Pascal 線關於圓$O_1$的極點為 P 點。

2° 由＜性質 2-2＞知道，S、Q、R 關於圓O_2的極線皆通過 Brianchon 點 P，故 Pascal 線關於圓O_2的極點亦為 P 點。則$\overleftrightarrow{O_1P}$、$\overleftrightarrow{O_2P}$皆垂直 Pascal 線，所以 P、$O_1$、$O_2$三點共線。

3° 由上述可知，Brianchon 點、Pascal 線同時對於圓O_1、圓O_2皆為極點極線關係，故知 Brianchon 點為圓O_1和圓O_2的 Limiting Point（極限點）。Limiting Point 是固定的，所以當 ABCD 轉動時，其 Brianchon 點為固定不動的點，Pascal 線為固定不動的線。■

上面 P 點與O_1、O_2所共的線，我們稱之為「**布里昂雄連心線**」。

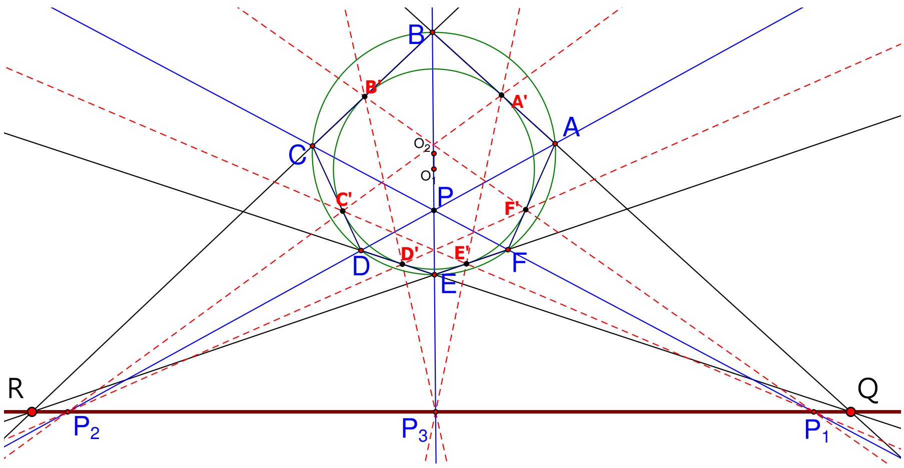
同時我們也觀察到正六邊形的特例情形：

已知$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CF}$分別為 S、Q、R 的極線。當兩圓為同心圓時（O_1、O_2重合），$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CF}$三線的交點（即 P 點）位於兩圓圓心上，由＜性質 2-4＞可知，S、Q、R 必共線，但此時六邊形的三組對邊分別平行，理應不存在交點 S、Q、R，然而在射影幾何中，將平行線視為交於無限遠點，即此時的 S、Q、R 在無線遠處，而仍存在共一條 Pascal 線。

在我們的研究中也發現廣義 Brianchon 點與 Pascal 線或廣義 Pascal 線與 Brianchon 點之間存在對偶關係，以下面**【定理 2-2】**和**【定理 2-3】**為例說明：

【定理 2-2】雙心六邊形的廣義 Brianchon 點軌跡為 Pascal 線

雙心六邊形 ABCDEF 外切於圓O_1、內接於圓O_2，切點分別為A'、B'、C'、D'、E'、F'，則$\overleftrightarrow{CF}$、$\overleftrightarrow{C'E'}$、$\overleftrightarrow{B'F'}$共交於一個廣義 Brianchon 點$P_1$，其軌跡成一直線，且此直線與 Pascal 線重合。（如圖 2-14）



▲圖 2-14

【證明】

1° 由＜性質 2-2＞得到P_1點關於圓O_1的極線必通過$\overleftrightarrow{B'E'}$、$\overleftrightarrow{C'F'}$的交點，同理$P_2$關於圓$O_1$的極線必分別通過$\overleftrightarrow{A'D'}$、$\overleftrightarrow{C'F'}$之交點，$P_3$關於圓$O_1$的極線分別通過$\overleftrightarrow{A'D'}$、$\overleftrightarrow{B'E'}$之交點。

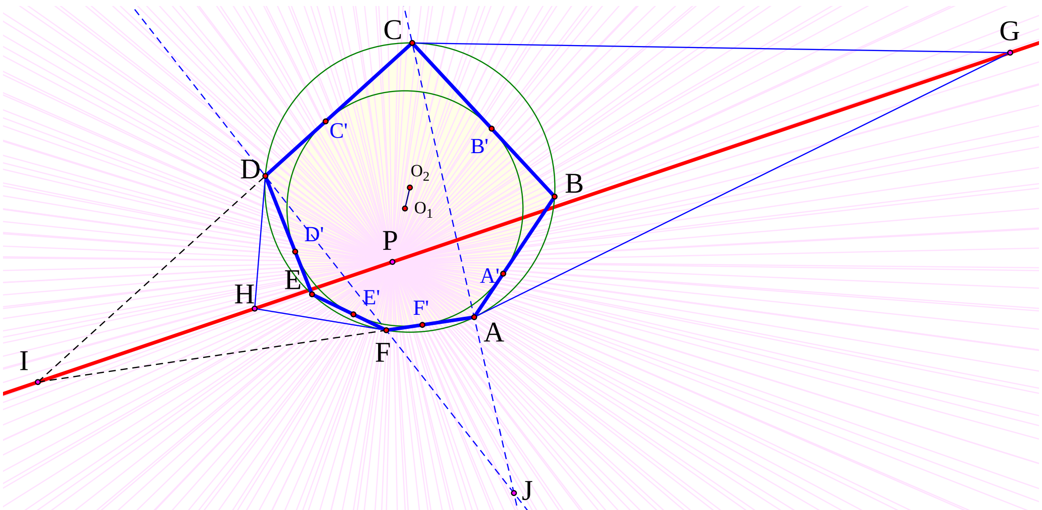
2° 由＜定理 2-1＞可知$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CF}$、$\overleftrightarrow{A'D'}$、$\overleftrightarrow{B'E'}$、$\overleftrightarrow{C'F'}$六線共點於 P。由上述，可知$P_1$、$P_2$、$P_3$分別關於圓$O_1$的極線皆交於一點 P，則依據＜性質 2-4＞可得，P_1、P_2、P_3三點共線。

3° 作$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{DE}$交於 Q 點，作$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{EF}$交於 R 點，根據＜定理 2-1＞可知$\overleftrightarrow{QR}$即為 Pascal 線，且 R 點關於圓O_1的極線為$\overleftrightarrow{B'E'}$、Q 點關於圓$O_1$的極線為$\overleftrightarrow{A'D'}$。

4° 因為 P 為 Pascal 線關於圓O_1的極點，又為$\overleftrightarrow{A'D'}$、$\overleftrightarrow{B'E'}$之交點，故得到Q、R、$P_1$、$P_2$、$P_3$五點共線。又 Q、R 在 Pascal 線上，所以P_1、P_2、P_3皆在 Pascal 線上。■

【定理 2-3】雙心六邊形的廣義 Pascal 線軌跡為 Brianchon 點

雙心六邊形 ABCDEF 外切於圓O_1、內接於圓O_2。過 A、C 做切線交於 G，過 D、F 做切線交於 H，延長$\overline{AF}$、$\overline{CD}$交於 I，則 G、H、I 三點共線，即為廣義 Pascal 線。當轉動 ABCDEF 時，此廣義 Pascal 線也跟著轉動，其軌跡恆過一定點 P，此點為 Brianchon 點。（如圖 2-15）

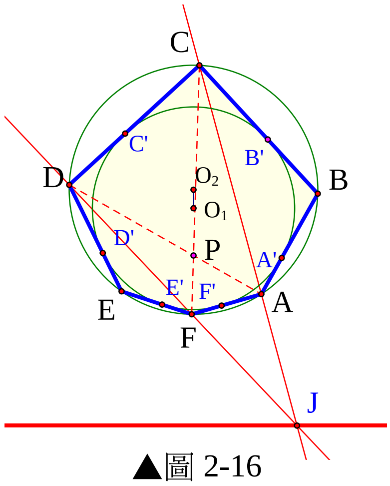


▲圖 2-15

欲證明前述命題，需先證明下面這個引理：

【引理】

雙心六邊形 ABCDEF 外切於圓O_1、內接於圓O_2。則$\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{DF}$的交點 J 在 Pascal 線上，同理，($\overleftrightarrow{CE}$、$\overleftrightarrow{BE}$)、($\overleftrightarrow{BD}$、$\overleftrightarrow{AE}$)的交點亦皆在 Pascal 線上。（如圖 2-16）



▲圖 2-16

由＜性質 2-2＞知 J 關於圓O_2的極線必過 P 點，即 Brianchon 點。再由＜性質 2-4＞知 J 必在 Brianchon 點關於O_2的極線上，即在 Pascal 線上。■

接著回頭證明原本的**【定理 2-3】**：

1° 由＜定理 1-6＞知 G、H、I 三點共線。

2° 由＜性質 2-1＞知$\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{DF}$分別為 G、H 關於圓 O_2 的極線。又由＜性質 2-2＞知，I 關於圓 O_2 的極線通過$\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{DF}$的交點，令此交點為 J，由＜引理＞知 J 在 Pascal 線上。

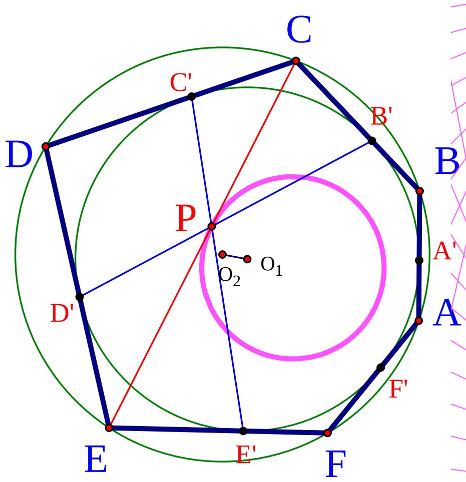
3° 由＜性質 2-3＞知 J 的極線必過 Pascal 線的極點，即 G、H、I 三點共線且通過 Brianchon 點，因為 Brianchon 點為定點，故轉動六邊形 ABCDEF 時，此廣義 Pascal 線的軌跡恆過一定點 P。■

我們嘗試留下雙心六邊形其它廣義 Brianchon 點、廣義 Pascal 線的軌跡，當轉動六邊形時，可得到其軌跡亦具有對偶性質。列舉如下：

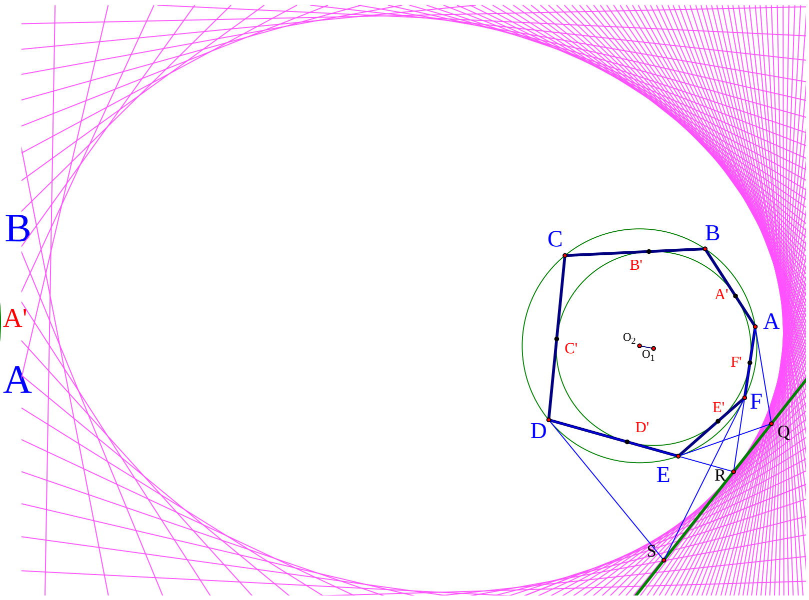
雙心六邊形 ABCDEF 外切於圓O_1、內接於圓O_2，切點為A'、B'、C'、D'、E'、F'，則：

(1) $\overleftrightarrow{CE}$、$\overleftrightarrow{C'E'}$、$\overleftrightarrow{B'D'}$三線共點於 P，此點的軌跡為一圓錐曲線。（如圖 2-17(a)）

(2) 過 D、F 作切線交於 S，過 A、E 作切線交於 Q，延長$\overline{AF}$、$\overline{DE}$交於 R，則 Q、R、S 三點共線，即廣義的 Pascal 線，此線的軌跡包絡出一圓錐曲線。（如圖 2-17(b)）



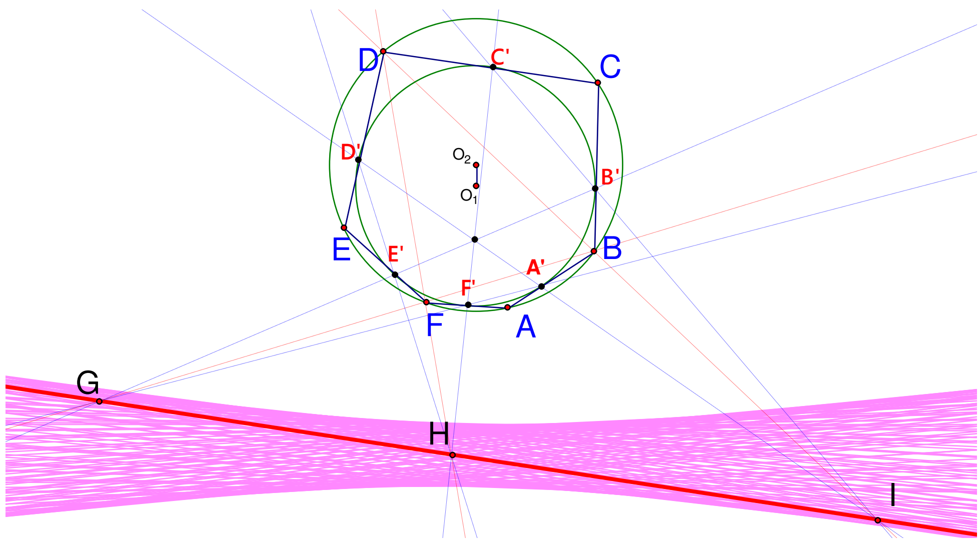
▲ 圖 2-



▲ 圖 2-

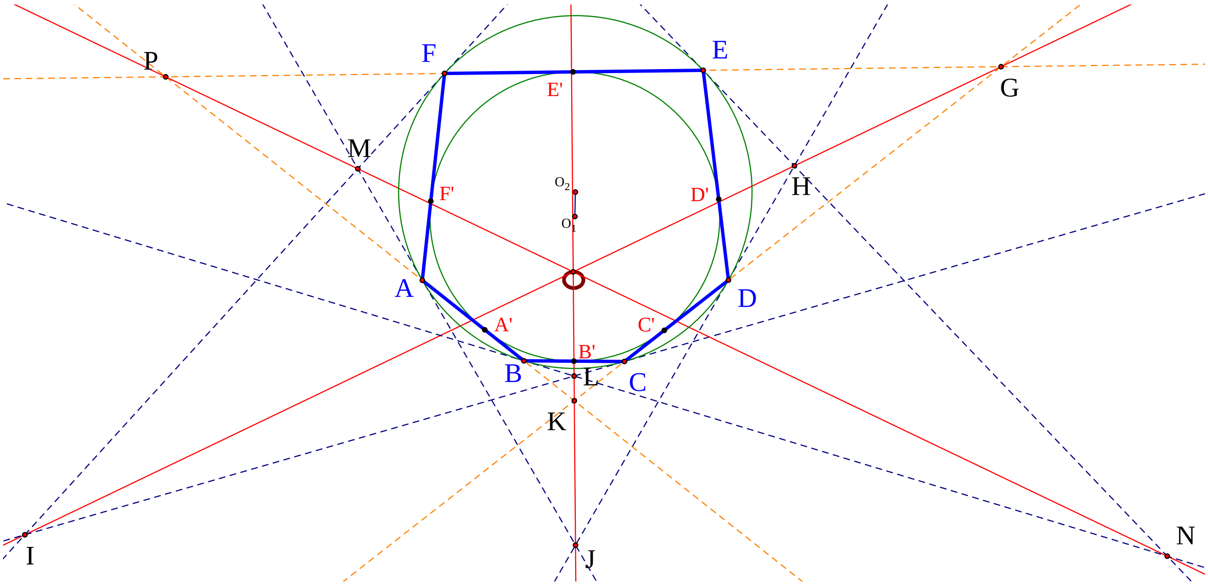
(3) （$\overleftrightarrow{B'E'}$、$\overleftrightarrow{BF}$、$\overleftrightarrow{A'F'}$）、($\overleftrightarrow{D'E'}$、$\overleftrightarrow{DF}$、$\overleftrightarrow{C'F'}$)、（$\overleftrightarrow{D'A'}$、$\overleftrightarrow{DB}$、$\overleftrightarrow{C'B'}$）分別三線共點交於 G、H、I。且 G、H、I 三點共線，也是廣義 Pascal 線。其軌跡包絡出一圓錐曲線。

（如圖 2-18(a)）



▲ 圖 2-

(4) $\overleftrightarrow{EF}$、$\overleftrightarrow{CD}$交於 G，過 D、E 作切線交於 H，過 C、F 作切線交於 I，則 G、H、I 三點共線，也是廣義 Pascal 線。同理，(J、K、L）和（M、N、Q）分別共線，且三條廣義 Pascal 線共交於一點 P，此點的軌跡為一圓錐曲線（圖 2-18(b)中間的紅色小橢圓）。



▲圖 2-18(b)

綜合上述，我們觀察到下列結果：

【定理 2-4】廣義 Brianchon 點與廣義 Pascal 線的對偶關係

(1) 當廣義 Brianchon 點在圓內時，則與之對應的廣義 Pascal 線與圓外離，若廣義 Brianchon 點在圓外，則與之對應的廣義 Pascal 線與圓相割於兩點。

(2) 當廣義 Brianchon 點有共線情形時，則與之對應的廣義 Pascal 線也會有共點的情形。

(3) 當一組廣義 Brianchon 點軌跡為 Pascal 線時，則與之對應的廣義 Pascal 線動出的軌跡恆通過 Brianchon 點，反之亦然。

(4) 當廣義 Brianchon 點軌跡為非退化圓錐曲線時，廣義 Pascal 線的軌跡亦為非退化圓錐曲線，反之亦然。

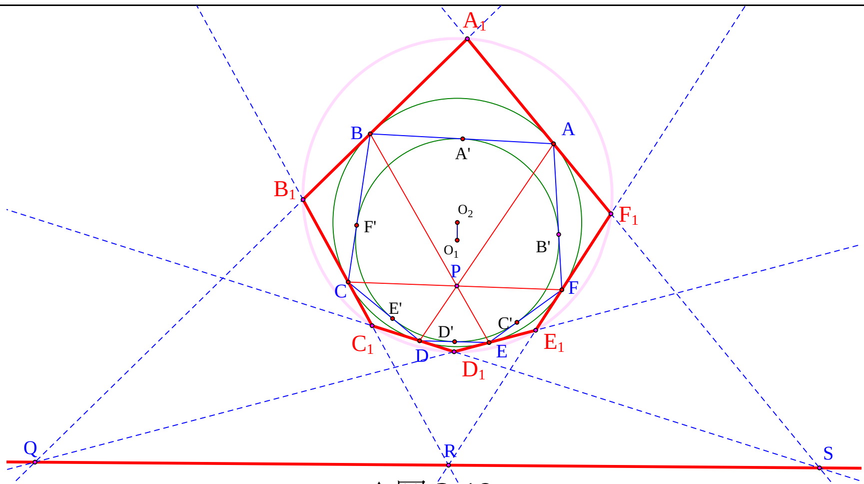
接下來，我們大膽的作雙心六邊形各頂點的切線，取交點連線形成一個新的六邊形，稱之為「**頂點切線遞延圖形**」，當轉動六邊形時，會得到以下結果：

【定理 2-5】頂點切線遞延圖形內接於一個固定的圓錐曲線

雙心六邊形 ABCDEF 外切於圓O_1、內接於圓O_2。分別過頂點 A、B、C、D、E、F 作圓O_2切線，取交點連線形成一個新六邊形$A_1B_1C_1D_1E_1F_1$，則：

（1）六邊形$A_1B_1C_1D_1E_1F_1$頂點的軌跡皆落在同一個圓錐曲線上。換句話說，遞延圖形六邊形$A_1B_1C_1D_1E_1F_1$，內接於一個圓錐曲線。（如圖 2-19）

（2）依次不斷遞延，可得第 n 層頂點切線遞延圖形$A_nB_nC_nD_nE_nF_n$，則所有遞延圖形之 Brianchon 點、Pascal 線皆與原始六邊形的相同。



▲圖 2-19

【證明】

（1）

1° 作$\overleftrightarrow{A_1B_1}$、$\overleftrightarrow{D_1E_1}$交於 Q，$\overleftrightarrow{B_1C_1}$、$\overleftrightarrow{E_1F_1}$交於 R，$\overleftrightarrow{C_1D_1}$、$\overleftrightarrow{F_1A_1}$交於 S。由＜性質 2-1＞可知 Q 的極線為$\overleftrightarrow{BE}$，同理，R、S 的極線為$\overleftrightarrow{CF}$、$\overleftrightarrow{AD}$。

2° 因為 ABCDEF 外切於圓O_1，所以由 Brianchon 定理知道$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CF}$三線共點於 P。由＜性質 2-4＞知道 Q、R、S 三點共線。由 Pascal 逆定理知，六邊形$A_1B_1C_1D_1E_1F_1$必內接於一個圓錐曲線。

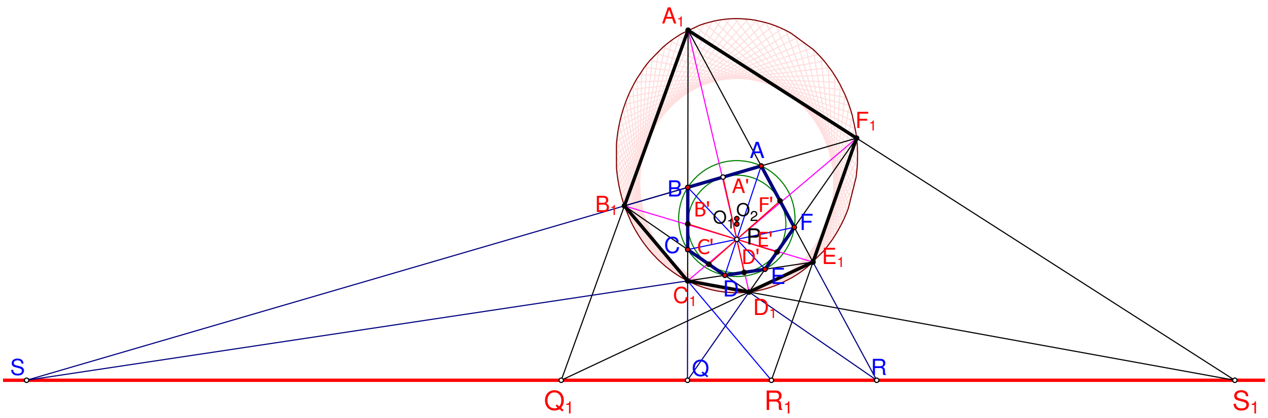
（2）因為$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CF}$三線共點於 P，而知兩個六邊形的 Brianchon 點重合，進而得出 Pascal 線亦重合。由於頂點遞延後的六邊形，依舊同時具有外切於一個圓錐曲線及內接於另一個圓錐曲線，故知不斷遞延後，前述性質不變。■

上述，雙心六邊形的頂點切線遞延圖形仍同時外切於圓錐曲線及內接於圓錐曲線，我們將此性質簡稱為「**雙心性質**」，此六邊形稱為「**圓錐曲線雙心六邊形**」。

但由於六邊形只有在雙心時三條對邊切點連線才會共點，所以六邊形的頂點切線遞延只有在雙心情形下才會發生。否則，若只有一個圓的時候，因為三條對邊切點連線不共點，使得頂點切線遞延出的六邊形不會共圓錐，無法再造出後續具有雙心的遞延圖形。

【定理 2-6】雙心六邊形之邊延長所有的遞延圖形仍保持雙心性質

雙心六邊形 ABCDEF 外切於圓O_1、內接於圓O_2。作各邊延長線取交點連線形成新六邊形$A_1B_1C_1D_1E_1F_1$，則$A_1B_1C_1D_1E_1F_1$六個頂點的軌跡皆為同一條圓錐曲線，而其六個邊的軌跡為一圓錐曲線之包絡線。換句話說，$A_1B_1C_1D_1E_1F_1$會外切於一個圓錐曲線，並內接於另一個圓錐曲線，且各層的 Brianchon 點和 Pascal 線皆與原雙心六邊形 ABCDEF 的重合。（如圖 2-20）



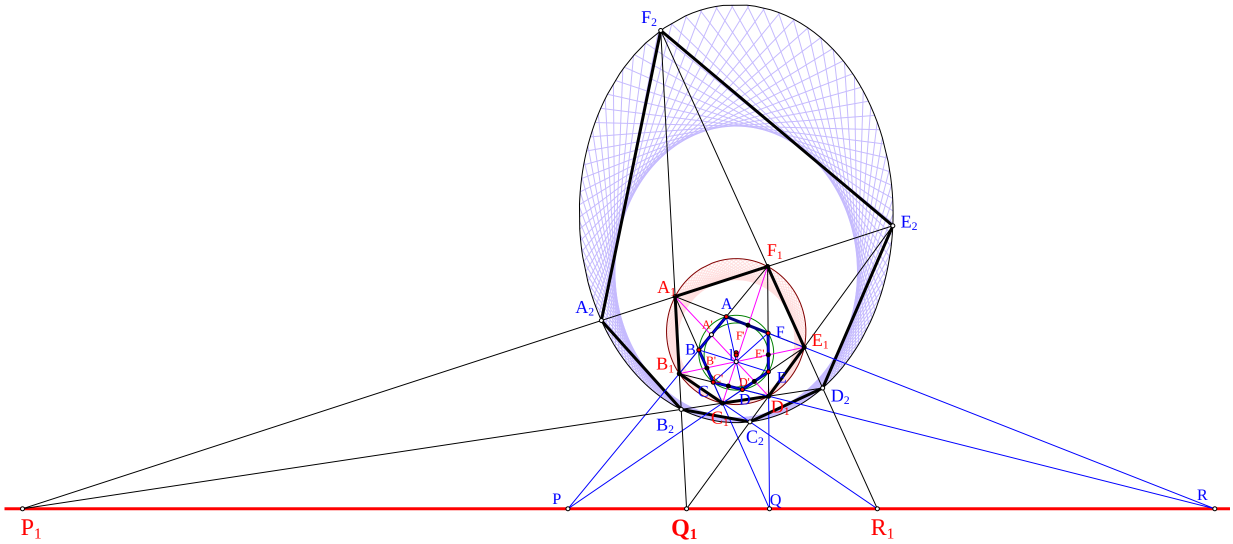
▲圖 2-20

【證明】

1° 根據＜定理 1-10＞圓外切六邊形的第一層邊延長遞延圖形內接於一個圓錐曲線，而圓內接六邊形的第一層邊延長遞延圖形外切於一個圓錐曲線。故雙心六邊形的邊延長遞延圖形必同時外切於一個圓錐曲線及內接於另一個圓錐曲線，也就是此邊延長遞延圖形為圓錐曲線雙心六邊形。

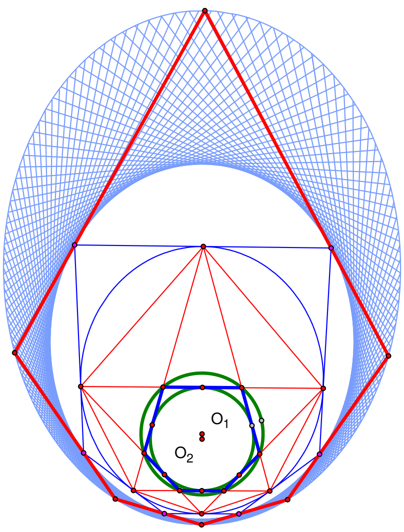
2° 由＜定理 1-3＞及＜定理 2-1＞得到$\overleftrightarrow{A'D'}$、$\overleftrightarrow{B'E'}$、$\overleftrightarrow{C'F'}$、$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CF}$、$\overleftrightarrow{A_1D_1}$、$\overleftrightarrow{B_1E_1}$、$\overleftrightarrow{C_1F_1}$ 九線共點 P，即兩個六邊形的 Brianchon 點重合。又因為雙心六邊形的 Brianchon 點與 Pascal 線關於兩圓錐曲線皆為極點極線的關係，所以$A_1B_1C_1D_1E_1F_1$與 ABCDEF 兩者的 Pascal 線亦重合。■

注意到由於邊延長遞延後的六邊形，依舊同時具有外切於一個圓錐曲線及內接於另一個圓錐曲線（即保有雙心性質），且極點與極線性質在圓錐曲線上依舊適用，故可知不斷遞延後，其雙心性質亦不改變。如圖 2-21 所示：

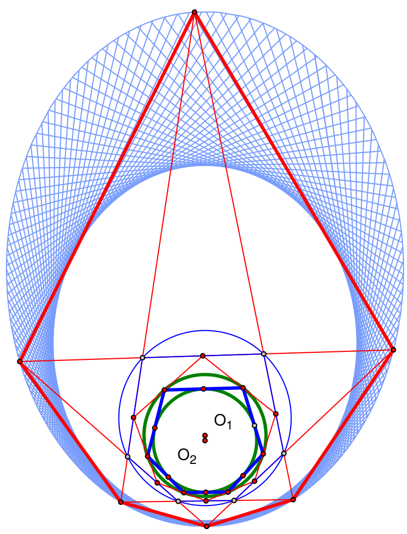


▲圖 2-21

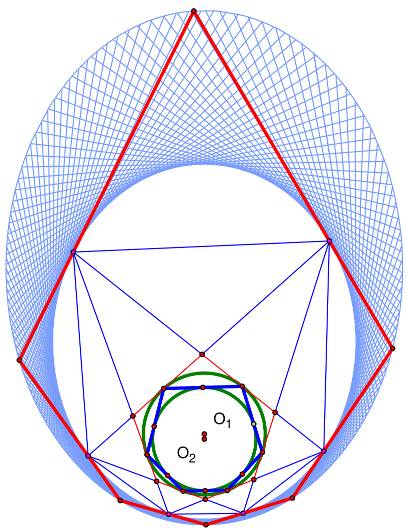
而我們若將邊延長遞延及頂點切線遞延放在一起討論，可得下列發現：**若對雙心六邊形做若干次遞延，其中邊延長遞延共有 m 次，頂點切線遞延共有 n 次，無論遞延方式的次序為何，其所得的最後一層六邊形均相同**。以圖 2-22 為例共做了 3 次遞延，其中邊延長遞延共有 1 次，頂點切線遞延共有 2 次，無論次序為何，所得最後一層六邊形均相同。



▲ 圖 2-22(a)
邊+頂+頂



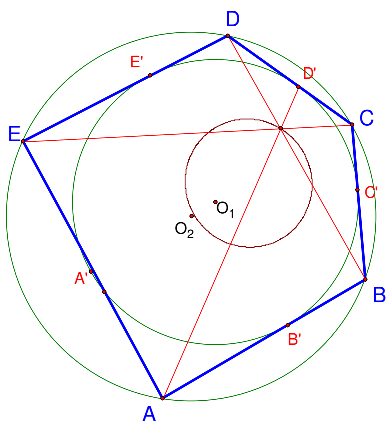
▲ 圖 2-22(b)
頂+頂+邊

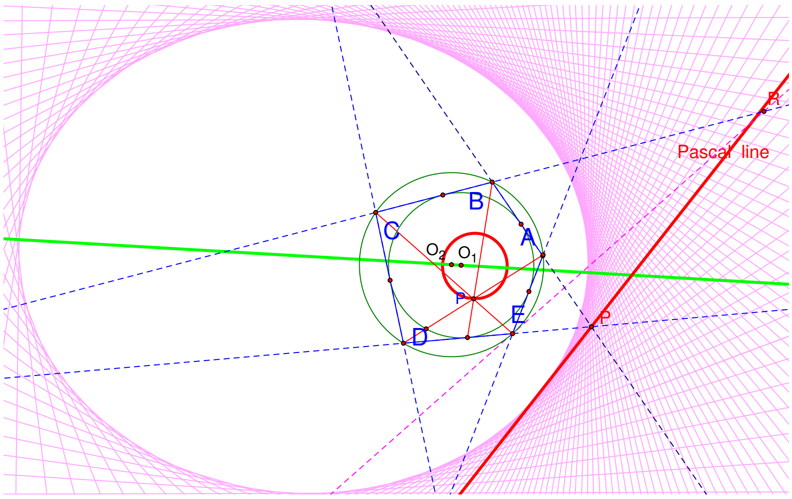


▲ 圖 2-22(c)
頂+邊+頂

三、雙心五邊形、四邊形、三角形的 Brianchon 點、Pascal 線軌跡

對雙心五邊形的 Brianchon 點及 Pascal 線的軌跡圖形結果如下：
當轉動 ABCDE 時，其 Brianchon 點的軌跡為一個圓錐曲線，Pascal 線形成一個圓錐曲線之包絡線，並非像雙心六邊形有定點、定線之特性。(如圖 2-23）



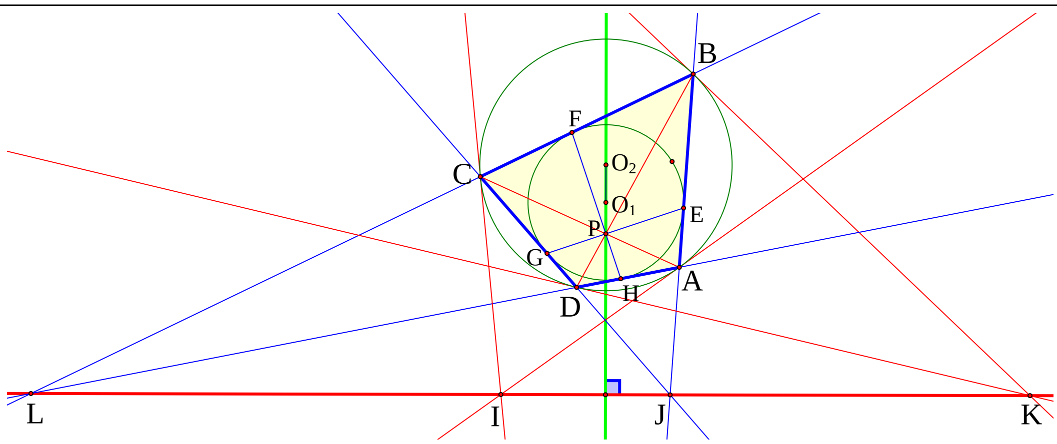


▲圖 2-23(a) ▲ 圖 2-

在曹亮吉教授所寫的「幾何探究[4]」這本書中有提及一個他非常得意的發現：曹亮吉定理「雙心四邊形的對角線交點與兩圓圓心共線」。而四邊形的對角線交點即我們這裡的 Brianchon 點，所以我們亦針對雙上述曹亮吉定理作探討，而有下面的發現：

【定理 3-1】雙心四邊形的 Brianchon 點及 Pascal 線之軌跡

雙心四邊形 ABCD 外切於圓O_1、內接於圓O_2，切點分別為 E、F、G、H，則其 Brianchon 點（即圖中 P 點）與O_1、O_2三點共線，此線與 Pascal 線垂直。且轉動 ABCDEF 時，Brianchon 點及 Pascal 線皆固定不動。（如圖 2-24）



▲圖 2-24

【證明】

1° 由<性質 2-1>，可知$\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{BD}$分別為 I、K 關於圓O_2的極線，故 Pascal 線對於圓O_2的極點為 Brianchon 點。

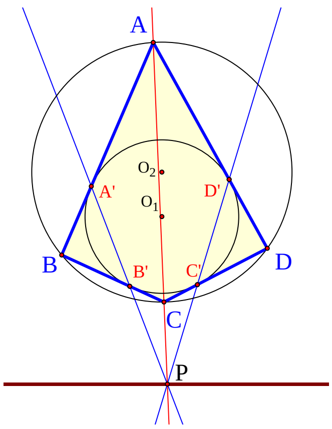
2° 再由<性質 2-2>知道，$\overleftrightarrow{FH}$、$\overleftrightarrow{GE}$分別為 L、J 關於圓O_1的極線，故 Pascal 線對於圓O_1的極點亦為 Brianchon 點。則$\overleftrightarrow{O_1P}$、$\overleftrightarrow{O_2P}$皆垂直 Pascal 線，所以 P、$O_1$、$O_2$三點共線。

3° 由上述可知，Brianchon 點、Pascal 線對於圓O_1、圓O_2皆為極點極線關係，故知 Brianchon 點為圓O_1和圓O_2的 Limiting Point（極限點）。Limiting Point 是固定的，所以轉動 ABCD 時，其 Brianchon 點為固定不動的點，Pascal 線為固定不動的線。■

事實上，這個結果與【定理 2-1】相對應：雙心六邊形與雙心四邊形，兩者的所有的對角線以及對邊切點連線皆共交在 Brianchon 點上，且 Brianchon 點與兩圓心共線，而布里昂雄連心線又與 Pascal 線垂直。那雙心四邊形與雙心六邊形是否有其他共同特性呢？

【定理 3-2】雙心四邊形的廣義 Brianchon 點的軌跡

雙心四邊形 ABCD 外切於圓O_1、內接於圓O_2，切點分別為A'、B'、C'、D'，則$\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{A'B'}$、$\overleftrightarrow{C'D'}$交於一廣義 Brianchon 點 P，其軌跡為 Pascal 線。（如圖 2-25）



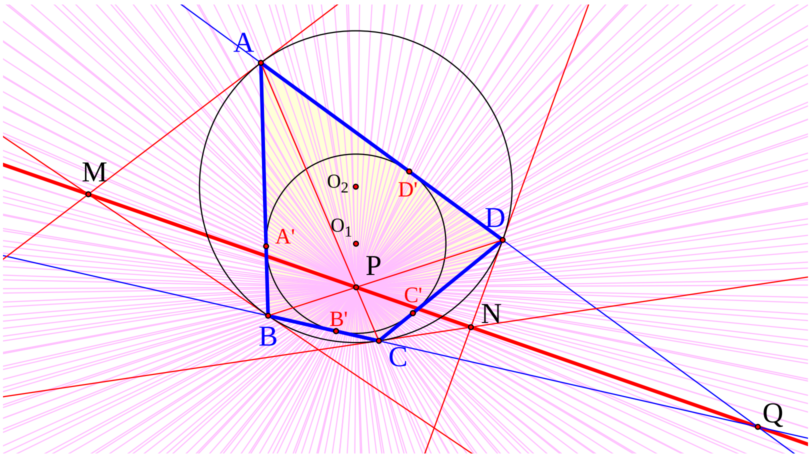
▲圖 2-25

【證明】

由＜性質 2-1＞知 P 關於圓O_1的極線為$\overleftrightarrow{BD}$。已知$\overleftrightarrow{BD}$必通過 ABCD 的 Brianchon 點，由＜性質 2-3＞可知，Brianchon 點的極線（即 Pascal 線）必通過 P 點，故 P 點在 Pascal 線上，而雙心四邊形的 Pascal 線為定線，故 P 點軌跡為一條 Pascal 線。■

【定理 3-3】雙心四邊形的廣義 Pascal 線之軌跡

雙心四邊形 ABCD 外切於圓O_1、內接於圓O_2，過 A、B 作切線交於 M，過 C、D 作切線交於 N，$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{AD}$交於 Q，則 M、N、Q 三點共線，即為廣義 Pascal 線，其軌跡恆過一定點 P，此點為 Brianchon 點。（如圖 2-26）



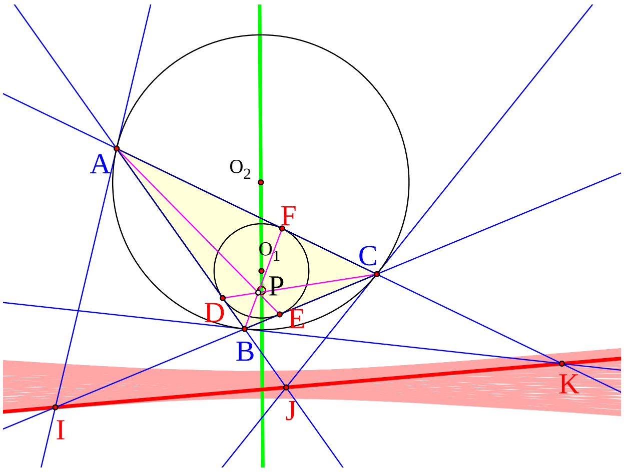
▲圖 2-26

【證明】

由＜定理 3-2＞知道此廣義 Pascal 線必通過此雙心四邊形的 Brianchon 點 P，而雙心四邊形的 Brianchon 點為定點，故此廣義 Pascal 線恆過此定點。■

最後，對於雙心三角形 Brianchon 點及 Pascal 線的軌跡，當我們轉動此三角形則會發現其軌跡圖形與雙心五邊形有類似結果：

1. 雙心三角形的 Brianchon 點的軌跡構成一個圓錐曲線。
2. 雙心三角形的 Pascal 線的軌跡包絡出一個圓錐曲線。（如下頁圖 2-27）

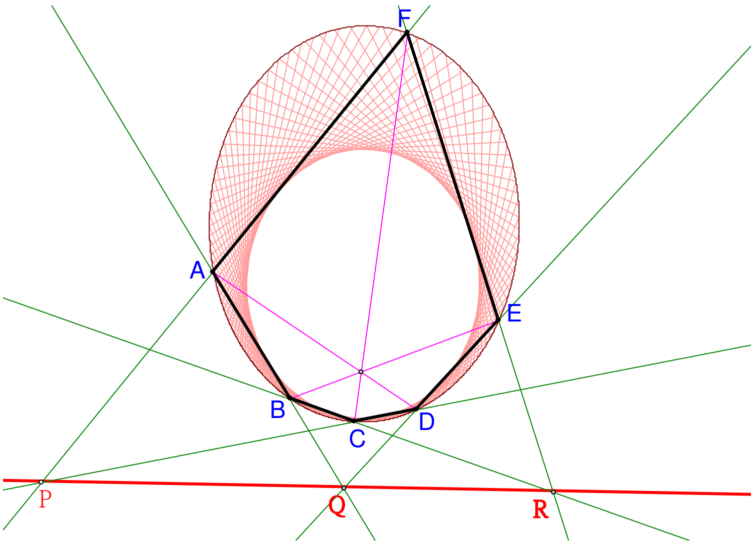


▲圖 2-27

由前面的這些結果，可以發現雙心四邊形的性質與雙心六邊形十分接近。而雙心五邊形與三角形性質相似。

四、圓錐曲線上的軌跡及其遞延圖形

雙心六邊形的 Brianchon 點、Pascal 線分別為定點、定線；而其遞延圖形及廣義 Brianchon 點及廣義 Pascal 線的軌跡性質對圓均成立。若透過射影變換的方法，可進一步將前面結果推廣到所有非退化的圓錐曲線上，得知仍存在有 Brianchon 點為定點與 Pascal 線為定線，而廣義 Brianchon 點、廣義 Pascal 線軌跡仍為圓錐曲線。（如圖 2-28）



▲圖 2-28

陸、結論

正如研究主題名稱「層出不窮的彩蛋有心跡」，我們探討了「有心」的六邊形之遞延圖形，以及其廣義 Brianchon 點、Pascal 線的軌跡。驚奇的發現：「**雙心六邊形層出不窮的遞延圖形構造出有如彩蛋般的圖形，且每層均保有雙心性質，每一層的三條對角線均共交同一點，三組對邊延長線均共交同一線。轉動六邊形也不會改變兩者的位置。**」並以射影變換的想法，將雙心六邊形推廣到非退化的**圓錐曲線雙心六邊形**。茲將結論說明如下：

一、 圓上多邊形的共點共線情形：

(一)改變 Brianchon 定理與 Pascal 定理的條件，可得到許多**廣義 Brianchon 點與廣義 Pascal 線**；其退化的圓外切或內接的五邊形、四邊形或三角形也有同樣的發現。

(二)作圓外切六邊形的邊延長遞延圖形，得到的新六邊形內接於一個圓錐曲線；圓內接六邊形以同樣方法所遞延出的新六邊形，則外切於一個圓錐曲線。因此，無論外切或內接六邊形，其邊延長層層遞延，所得六邊形必一層內接、一層外切於一個圓錐曲線，交替出現。推廣至圓錐曲線一樣成立。

二、同時外切與內接於兩個定圓的雙心六邊形，其特殊的共點與共線的性質如下：

(一)**雙心六邊形的三條對角線與三條對邊切點連線等六線共定點（Brianchon 點），其三組對邊延長線交點，與三組對頂點的切線交點等六點共定線（Pascal 線）。**

1. 當轉動此六邊形時，其 Brianchon 點仍為同一點，Pascal 線仍為同一線，與雙心六邊形中的六邊形位置無關。
2. 當兩圓為同心圓時，Brianchon 點位於兩圓圓心上，而 Pascal 線則在無限遠處。

(二)**廣義 Brianchon 點與對應的廣義 Pascal 線具有對偶關係。**

1. 當廣義的 Brianchon 點在圓內時，則與之對應的廣義 Pascal 線與圓外離；當廣義 Brianchon 點在圓外，則與之對應的廣義 Pascal 線與圓相割於兩點。
2. 當一組廣義 Brianchon 點的軌跡為 Pascal 線時，則與之對應的廣義 Pascal 線的軌跡恆通過 Brianchon 點，反之亦然。
3. 當若干廣義 Brianchon 點有共線情形時，則與之對應的廣義 Pascal 線也會有共點情形，反之亦然。

三、 **雙心六邊形的遞延圖形的性質：**

(一)不論透過邊延長遞延或頂點切線所形成的 n 層遞延圖形，其**每一層六邊形**的六個頂點的軌跡皆落在同一個圓錐曲線上（即**內接於圓錐曲線**），而六個邊的軌跡包絡出另一個圓錐曲線（即**外切於圓錐曲線**），其**三條對角線均會共交於原始六邊形的 Brianchon 點，其三組對邊延長線交點也均會共於原始六邊形的 Pascal 線。**

(二)若對雙心六邊形做若干次遞延，其中邊延長遞延共有 m 次，頂點切線遞延共有 n 次，無論遞延方式的次序為何，其所得的最後一層六邊形均相同。

四、 **同時外切與內接於兩定圓的雙心五邊形、四邊形、三角形，有下列共點共線情形：**

(一)雙心四邊形與雙心六邊形有相同結果：Brianchon 點為定點，Pascal 線為定線。

(二)雙心五邊形和三角形有相同結果：Brianchon 點並非定點，但其軌跡圖形為圓錐曲線，而 Pascal 線也不是定線，其軌跡圖形包絡出一個圓錐曲線。且兩圓心連線皆通過此二個圓錐曲線的中心點。

五、 **透過射影變換，可將上述雙心六邊形共點共線的結果推廣到非退化的圓錐曲線上，也會有 Brianchon 點與 Pascal 線軌跡的相關發現，惟布里昂雄連心線不一定與 Pascal 線互相垂直。**

Brianchon 定理及 Pascal 定理是射影幾何學中的兩大定理，射影幾何與物體受光線照射投影的現象有關。本研究從兩大定理出發，發現多線共點以及多交點共線的現象，將有助於未來在物理光學上應用、舞台燈光特殊效果設計，以及在投影藝術創作上的發想。

柒、參考資料及其他

1. 黃家禮（1997）。幾何明珠。台北市：九章出版社。
2. 許志農。高中數學第四冊第四章。99 課綱。新北市：龍騰文化。
3. 曹亮吉（2000）。幾何探究。台南市：南一書局。
4. H.S.M. 考克瑟特，S.L. 格雷策。幾何學的新探索。新竹市：凡異出版社。
5. C.Stanley Ogilvy (1969). Excursions in Geometry. Dover Publications, Inc., New York.

【評語】040402

本作品研究圓內接六邊形與圓外切六邊形的 Pascal 線與廣義 Brianchon 定理的各種性質，同時探討遞延圓外切或內接於一圓錐曲線對於雙心六邊形的層層遞延圖形進而得到一系列豐富的結果。

作品中利用射影幾何相關數學工具，技巧成熟且得到許多有趣的內容，像定理 1-10、2-1、2-5、2-6 等。文中所獲得的研究成果若能與已知的相關發表成果做一比較將使本作品更完備。

在未來進一步的研究工作，若能利用圖形的幾何對稱性質，如引入複數平面的相關數學工具等，將有助於此問題的深入研究。

從與射影幾何相關的 Brianchon 及 Pascal 定理出發探討圓內接與外切多邊形及其遞延圖形是一種新的有趣觀察。

對雙星六邊形的觀察與性質是一新的探討。