

中華民國第 55 屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組 物理科

佳作

040102

船過水「留」痕—船尾波的成因探討

學校名稱：國立臺南第一高級中學

作者： 高二 劉友安 高二 梁家綸	指導老師： 汪登隴
-------------------------	--------------

關鍵詞：船尾波、干涉、包絡線

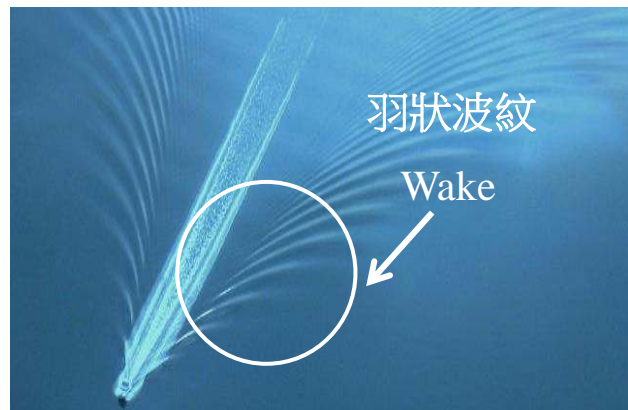
摘要

船舶行經海面、運動選手游過泳池時，總會在移動中散發出幾道狀似翼形的波動。

這種波在學術上被稱為「開爾文船波(Kelvin Wake)」，英文上可簡稱為 wake。對於 wake 至今已有不少相關研究成果，但是就我們所查詢到的資料中很少有文獻是針對尺度較小的船尾波做探討的。於是我們自製簡易器材模擬低尺度下環境(低船速、低水位、觀察範圍小)的物體在水面移動產生 wake 的型態，再使用相機拍攝後以 Tracker、GeoGebra 程式測量速度及分析波紋細節，並以 GeoGebra 將理論的結果圖形化，和實驗照片進行比較。我們發現低尺度下的 wake 和 Kelvin 的大尺度模型有所不同，因此我們將 Kelvin 模型修正後提出新的「波峰直線 Kelvin 理論」來解釋 wake 在低尺度下的型態，並由修正的過程中來探尋 wake 的波動來源。

壹、研究動機

有天我們到訪台南龍山社區參與水產養殖生態導覽時，漁船隨著波浪載浮載沉，待速度越發提升時，船底也激起了陣陣波動，倚著船舷觀望，我們看見了從船舷到船尾竟產生了連續的 V 字形波紋，而作者發現這種波經過凌亂的水面後又將留下一條條的羽狀波紋，它那



• 圖 1 船尾波示意圖

有趣的波形，深深吸引了我們的目光，而我們更好奇「它為什麼會是這種形狀？」「是什麼樣的過程與來源去產生它的？」於是便興起了決心研究 wake 的想法。

查詢資料後，我們發現從 1887 年開爾文(William Thomson, 1st Baron Kelvin, 1824~1907)提出固定相位法(The method of stationary phase)來描述 wake 的系統至今已有相當多的研究，然而卻很少文獻探討在低尺度下(低船速、低水位、觀測範圍小)wake 的理論模型，為了研究低尺度下 wake 的成因以及和大尺度模型的差異，我們開始著手自製實驗器材，經由簡單的實驗搭配理論圖形進行分析。

貳、研究目的

- 一、 探討 wake 的基本函數圖形。
- 二、 探討 wake 的基本產生條件。
- 三、 探討低尺度下波形與船速、水深、吃水深、尺寸、形狀的函數關係。
- 四、 找尋在低尺度下 Kelvin 理論的修正模型。
- 五、 推論 wake 的產生原因。

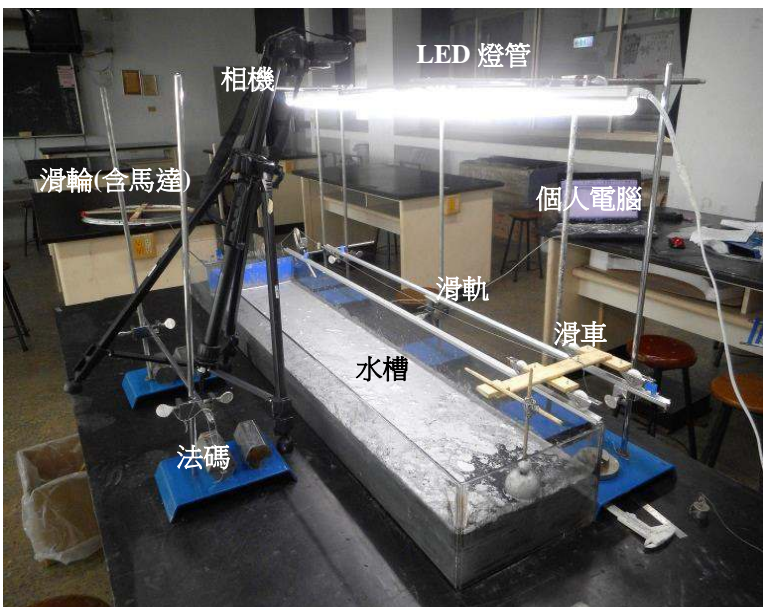
參、研究設備及器材

一、 研究設備及器材

- (一) 水波槽(長：150.5cm、寬：26cm、高：15.5cm)
- (二) 鋁粉一罐
- (三) 保麗龍球(直徑：5.5cm、4.8cm、2.8cm、2cm)
- (四) 鋁製拉門滑軌*2(120cm)、塑膠拉門滑輪*4(直徑 3cm)
- (五) 木板、竹筷數條
- (七) 棉線一捆
- (八) 水平儀
- (九) 德源科技 SM-S4306R360 度機器人舵機定速防水馬達
- (十) Arduino-Uno 電路板*1
- (十一) 自製大型滑輪(直徑：60cm)
- (十二) CanonG15 相機*1、角架*1
- (十三) 鹵素燈*1、白熾燈泡*1、T5LED 日光燈管*1
- (十四) 大支架*1、鐵架*6、鐵桿*4、S 夾*8、砝碼*7(1kg*6、250g*1)
- (十五) 個人電腦(包含以下軟體)
- (十六) GeoGebra 圖形分析軟體
- (十七) Tracker 動態影像分析軟體
- (十八) PhotoImpact12 影像製作軟體
- (十九) IDE 馬達驅動程式

二、實驗器材

- (一) 將鋁粉溶液倒入水槽中上升至指定深度，模擬船隻航行的水域。起初我們是使用墨汁溶液進行觀測，雖然能有效減少純水透光後底面倒影造成的干擾，但波紋仍不甚清楚，於是我們改以稀鋁粉溶液取代墨水，既能有效地大幅增加表面光線的反射率而不影響其實驗性質(有關不影響數據之證明可參見 p.#)，因此才採用此溶液。
- (二) 將 T5LED 日光燈管以鐵架、橫桿、S 夾固定於水波槽上方進行照明。
- (三) 將數位相機裝設於腳架上後，讓腳架微向前傾使攝影機的鏡頭面與地面平行，腳架後方則以鐵桿連接鐵架固定，並在兩旁鐵架上各放上 3kg 砝碼增加重量以防傾倒。
- (四) 將鋁條裁為兩條長 1.2 米的滑車軌道，其中一條以黏膠固定於水槽上，另一條裝置於鐵架上並以 S 夾調整至與另一條等高且等距並保持平行(圖 3)。
- (五) 以塑膠輪搭配木板製成滑車在軌道上滑行，車上木板水平延伸至水槽上方再黏合竹筷串接至水面，將保麗龍球套至竹筷上讓滑車與球體能以相同速度運動(圖 4)。
- (七) 將大型滑輪與定速馬達以強力膠及木板固定住，再水平固定於實驗桌上，將棉線線頭綁在大型滑輪上後環繞數圈(圖 5)。
- (八) 將棉線繞出大型滑輪後繞過兩個小型滑輪，以保持綿線連結滑車時能水平於地面。
- (九) 利用電腦設定速度驅動馬達運轉，帶動滑車前進，進而拖曳球體在水上航行，並在運轉期間拍攝影片後傳至電腦做數據分析。



• 圖 2 整體器材照



• 圖 3 鋁製滑軌



• 圖 4 自製滑車



• 圖 5 自製滑輪

肆、研究過程及方法

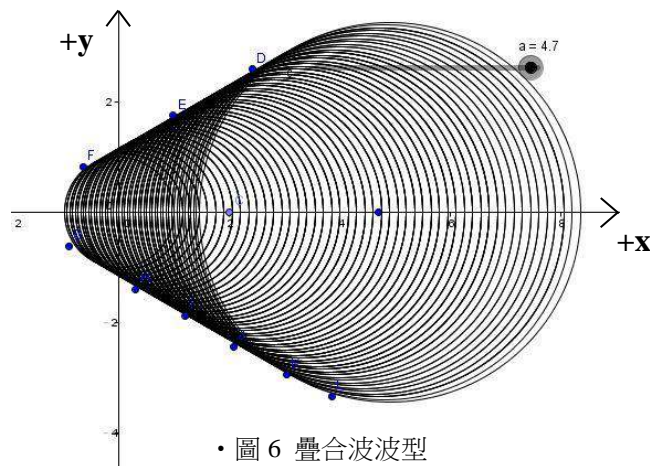
一、理論假設

(一) 波速理論

1. 在水波傳遞中，根據其水深 h 及波長 λ 之間的關係不同，其水分子做週期運動的軌跡也不同，而有不同的波速公式。若 h 與 λ 之關係為 $h > \frac{\lambda}{2}$ 時，則適用深水波公式 $v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$ 。
若 h 與 λ 之關係為 $h < \frac{\lambda}{2}$ 時，則適用淺水波公式 $v = \sqrt{gh}$ 。
2. 而在後續的實驗，我們又利用 Tracker 程式來追蹤球附近的波紋移動軌跡，與另行在水面拍擊產生波紋的結果，來求得其大概波速範圍，發現大約落在 10cm/s 至 20cm/s 左右，此時水深約 6cm，很顯然若使用淺水波波速公式 $\sqrt{gh} = V$ ，其理論波速為側得波速之 3 到 5 倍，明顯不合，因此我們判定應使用深水波公式較為符合實際結果。
由此，再利用公式 $v = f\lambda$ (其中 f 為船或水流本身振動頻率)，可以得到

$$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} = \frac{g}{2\pi f}$$

(二) 簡易 Wake 波形函數假設



1. 由於 wake 是由連續的波動干涉後產生的，因此我們假設在 xy 平面上有一個半徑為 r 的圓以等速 v' 在 $-x$ 的正方向上做直線運動，並持續震動向外發出速度為 v 的圓形波，此時取某個運動瞬間為時間原點($t = 0$)，則時刻為 t 之波前($t \leq 0$)可在 xy 平面上被表達如下式

$$(x + v't)^2 + y^2 = (-vt + r)^2 \dots (1)$$

由圖 6 我們猜測，當球移動一段距離後產生的疊合波紋為包絡線，為求得此包絡線，現

在我們將(1)式等號兩方對t取偏微分，再令 $\frac{\partial y}{\partial t}$ 為零，亦即在x為常數的情況下，對所有 $t \geq 0$ 時的y取極大值，此時可得

$$t = \frac{-v'x - vr}{-v^2 + v'^2} \dots (2)$$

其中 x 的定義域需令 $t \leq 0$ ，又 $t = 0$ 時

$$x_0 = -\frac{v}{v'}r$$

此時，若 $v \leq v'$ ，則 $x \leq x_0$ 。反之，則 $x > x_0$ 。

再將(2)帶回(1)，則

$$\frac{v^2}{v^2 - v'^2} \left(x - \frac{v'}{v}r\right)^2 + y^2 = 0$$

若 $v > v'$ 則無解(無疊合波產生)，若 $v < v'$ 則有線性之波紋存在，其方程式為

$$\pm \sqrt{\frac{v^2}{v'^2 - v^2}}x \pm r \sqrt{\frac{v'^2}{v'^2 - v^2}} = y \dots (3)$$

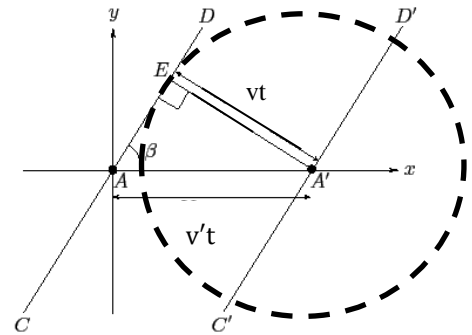
此即我們欲求之包絡線。

2. 另一種方法也可以來證明這個數學結果，如

圖 7，A點為現在的波源位置，A'點為t時刻前的波源位置，可發現，對於波速為v的波而言，若存在 β 令下式成立

$$\frac{v}{v'} = \sin\beta \dots (4)$$

則可令一過A點的直線與CD，而和+x軸的逆時針方向夾角為 β ，可發現對任意 t 時刻前所發出的圓形波前而言，此時必恰交一點 E 於 CD，而對該波速的波而言，通過 A 點的直線唯有 CD 及其對 y 軸的對稱上頭存在任何一個時刻 t 前的波前，因此可推論它們為當下最清楚可見的疊合波。由(4)式可導出 CD 的斜率，即 $\tan\beta$ 的值，我們發現它們就是(3)式的斜率。我們可由此處對於某一波速為 v 的波，歸納(3)式代表的是包絡線帶有邊



• 圖 7

界的概念，也同時是所有時刻存在的波前，其各點疊加連成的直線，我們之後將稱作「包絡疊合直線」。

而我們可再發現當A往+x 軸方向平移任意值時，皆具有斜率 $\tan\beta$ 且過其點的線會包含波源在該點出現時間前所有時間的波前。但此疊合線並不處於邊界，故稱作「內部疊合線」

(二) 開爾文(Kelvin)的固定相位法(The method of stationary phase)模型：

開爾文(William Thomson, 1st Baron Kelvin, 1824~1907)

曾提出了固定相位法(The method of stationary phase)模型來解釋大尺度的 wake 理論，以下將簡稱為 Kelvin 理論。內容概述如下，首先他先立了一個相當重要的假設：

「Wake 是由波速範圍無限的波來疊合形成的」，並討論

一個點波源在水中移動的情形，如果存在一條曲線 $y(x)$

它上頭每一點，都是來自某時刻前的波源所發出的兩個波速極端鄰近的波，所疊合而形成符合內部疊合線的交點，化成數學表述，將具有下列三個性質：

$$x = v't - vt \sin\beta \quad \text{性質 A}$$

$$y = vt \cos\beta \quad \text{性質 B}$$

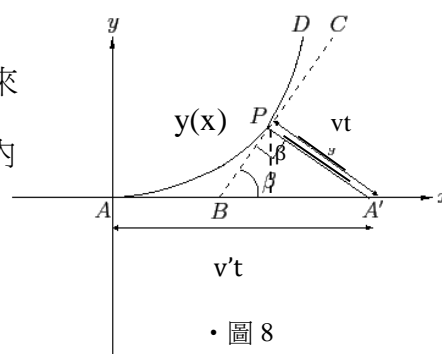
$$\frac{dy}{dx} = \tan\beta \quad \text{性質 C}$$

其中性質 A 和性質 B 共同表示線上各點皆為來自同一時刻前波源的波前，性質 C 則表示線上各點為內部疊合線交點。

這裡還注意到一點，真正顯著的波前要比較的主因是振幅，而描述最大振幅傳播速度的正是群速度 v_g ，而深水波公式描述的則是相速度，且具有以下公式(特別注意到(4)式的 v 是相速度 v_p ，因為我們稱的疊合指的是同相位相長干涉，所以要以相速度的相位考慮是否疊合)

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\partial(g/v_p)}{\partial(g/v_p^2)} = \frac{1}{2} v_p = \frac{1}{2} v' \sin\beta$$

上式中 ω 為角頻率， k 為角波數，將 v_g 帶入性質一二並取代 v ，之後再帶入性質三會得到下列等式，來求 $t(\beta)$



$$\frac{dy}{dx} = \tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\partial y/\partial\beta}{\partial x/\partial\beta} = \frac{\left(\frac{\sin\beta \cos\beta}{2}\right) \frac{dt}{dx} + \frac{\cos^2\beta - \sin^2\beta}{2} t}{\left(1 - \frac{\sin^2\beta}{2}\right) \frac{dt}{dx} - t \sin\beta \cos\beta}$$

上式化簡後，可以得到下式

$$\frac{dt}{d\beta} = \frac{t}{\tan\beta} = \frac{t}{\sin\beta} \frac{d(\sin\beta)}{d\beta}$$

可得解為

$$\frac{t}{\sin\beta} = \text{const} \equiv T$$

再帶回性質一、二後可以得到 x,y 參數式如下

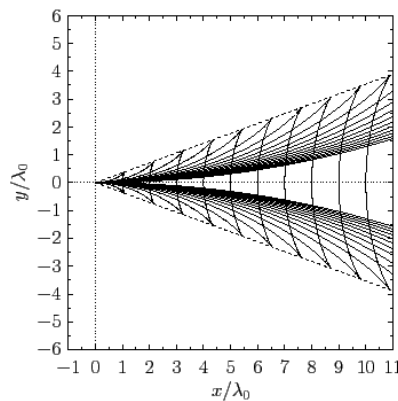
$$(x, y) = (v'T \sin\beta (1 - 0.5\sin^2\beta), 0.5 v'T \sin^2\beta \cos\beta)$$

而由 $\sin\beta = 1$ 的波前位置恰好在 $(\frac{v'T}{2}, 0)$ 而波長的行進速度又正好是相速度 v' ，因此假設此時波前位置處於相位順序第 m 個波峰處，則有以下式子成立

$$\frac{v'T}{2} = m\lambda = m \frac{2\pi v'^2}{g}$$

把 $m=0.1.2\cdots$ 都帶入會得到以下圖形，其中 $X_0 = \frac{4\pi v'^2}{g}$

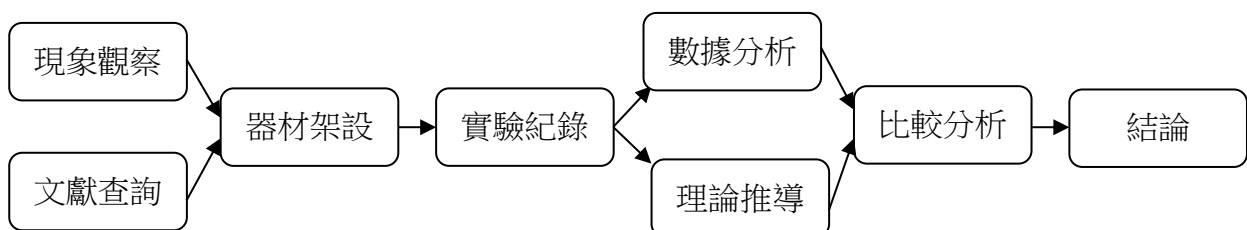
圖 9 就是 Kelvin 用來解釋大尺度 wake 的圖形。



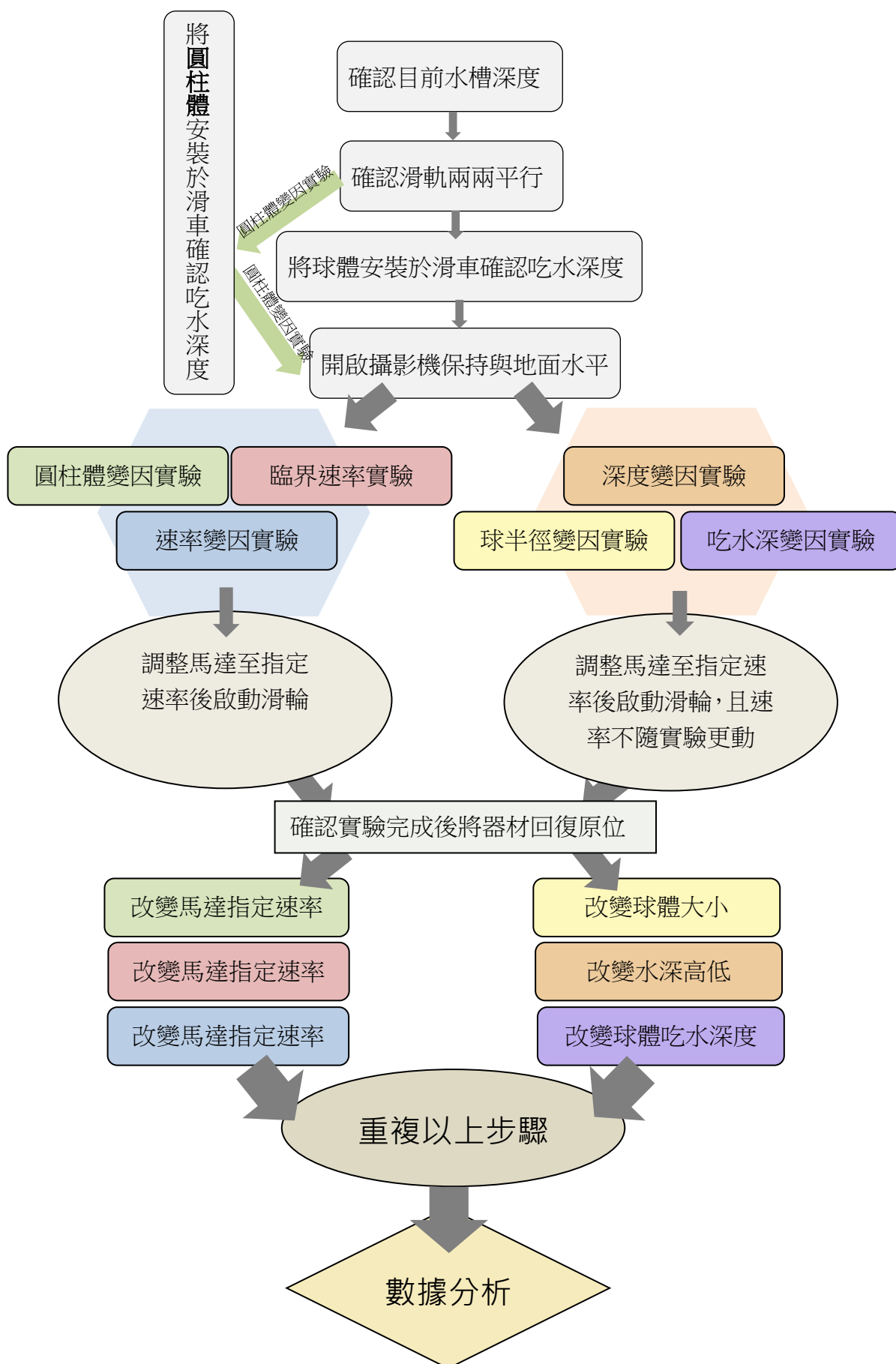
• 圖 9 Kelvin Wake 示意圖

二、實驗方法

(一) 研究過程



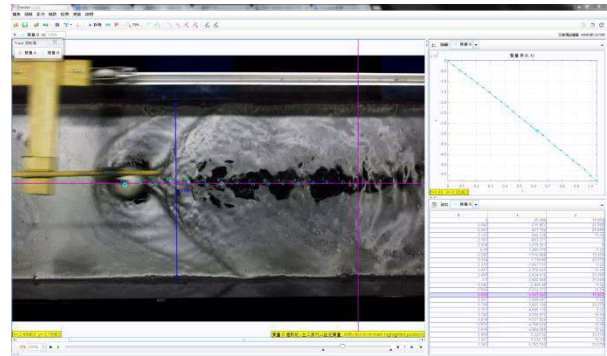
(二) 實驗方法



(三) 分析方法

1. Tracker 軟體

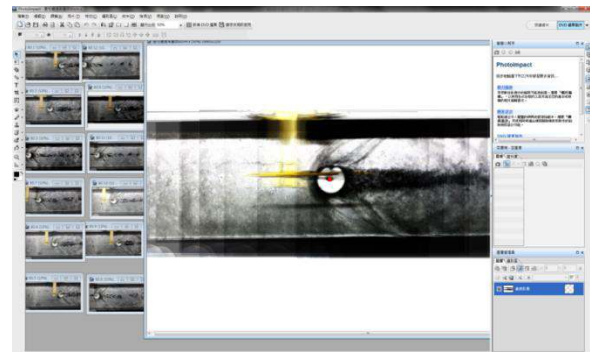
我們利用了 Tracker 軟體載入實驗影片，截取每幀最低單位時間解析度的相片來記錄每個時刻欲分析點的位置向量，再透過回歸直線方法求得其精確速度。



• 圖 10 Tracker 軟體操作圖

2. Photo Impact 軟體

為了實驗的嚴謹性與正確性，單一筆數據我們會拍攝多部影片來進行截圖分析，將拍攝完成之實驗影片截圖後，我們會先利用原拍攝影片曝光值不同的特性，將多種圖片以類似

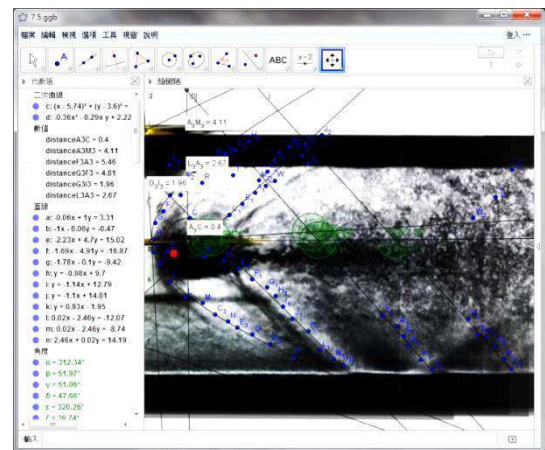


• 圖 11 Photo Impact 軟體操作圖

HDR(高動態範圍成像，High Dynamic Range Imaging)的方式進行疊圖，可以避免因曝光過高或過低造成影像模糊的情形，最後再提高對比與打上後製強光增強線條，增加分析的精準度以及便利性。

3. GeoGebra 軟體

利用 GeoGebra 軟體描繪出圖形上的點與線來進行函數分析，除合成後的 HDR 相片外，我們還會參考使用原圖的分析結果，再將結果比較後取出最適當的圖形。



• 圖 12 GeoGebra 軟體操作圖

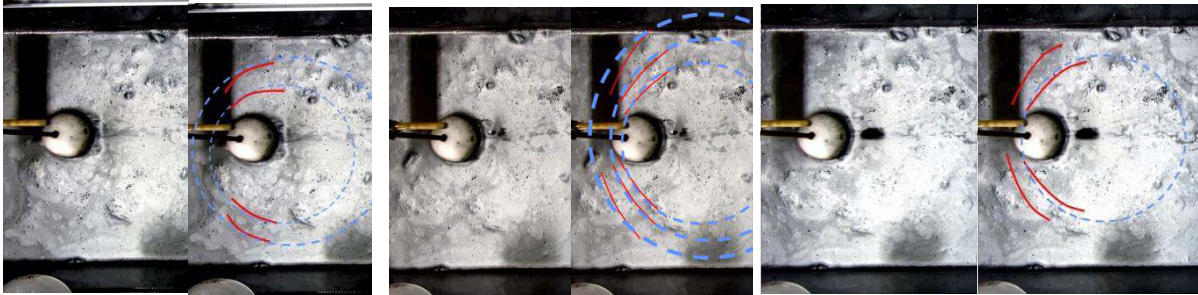
4. 有效位數

實驗時由於測量使用之捲尺及鐵尺最低刻度為 0.1cm，且測量值皆在 1m 以內，且在測量上估計位都趨近於零，故數據皆取最低有效位數三位，另外的影片之時間解析度 0.01 有效位數亦為三位。

伍、研究結果

一、實驗一：wake 臨界條件實驗

根據理論推導，產生 wake 之條件為 $v' > v$ ，其中 v 為波速， v' 為物體移動速度，因此一旦有 wake 產生時必會使物體的移動距離超越波的行經距離，而產生物體超越波紋的情形，如圖 13 波源尚存在圓形波紋範圍內，圖 14 波源已超越圓形波紋範圍。



• 圖 13 速率 15.8cm/s 波紋圖

• 圖 14 速率 16.6cm/s 波紋圖

• 圖 15 速率 17.8cm/s 波紋圖

※因未形成 wake 的影像疊圖後會因 wake 線條未成形而產生過多圓形波雜訊，故在此不將使用類 HDR 模式分析

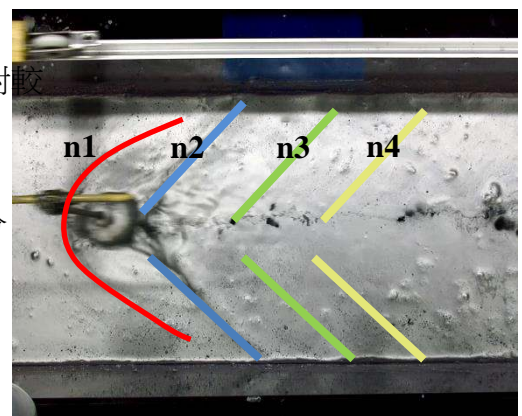
我們先將各實驗影片截圖再後以增強對比方式來觀察 wake 的產生與否，並將測量之速率對照後取出臨界速度。

由此可以看出本實驗 wake 產生的車速條件落在 15.8 與 16.6cm/s 之間，取其算術平均值後，可得在約 16.2cm/s 以上的球速能產生穩定的 wake。而根據理論假設，本實驗波速也應為 16.2cm/s。

球速(cm/s)	Wake 產生情形
13.0	無
14.4	無
15.8	無
16.6	有
17.8	有
18.3	有
19.6	有

二、實驗二：速率變因實驗

如圖 16，實驗時正常且穩定的 wake 總共會有 4 對明顯的線段，由左而右我們分別命名為 n1、n2、n3 以及 n4，其中 n1 為雙曲線，而我們將分成三段討論，分別為「n1」、「n2」及「n3+n4」。



• 圖 16 wake 實驗分類圖

球速 (cm/s)	球心與貫軸 中心距離 a(cm)	半貫軸 長度 P(cm)	半共軛軸 長度 Q(cm)	P/Q 漸進線 斜率絕對值	P/R (P/球半徑)	Q/R (R/球半徑)
65.3	61.8	58	16.7	3.5	25.8	24.2
56	50.9	47.3	15.7	3	21.2	19.7
51.9	32.1	27.6	10.5	2.6	13.4	11.5
40.9	19	16.1	6.58	2.44	6.68	2.74
35.9	12.9	10.5	5.63	1.86	4.36	2.34
30	9.75	7.32	5.37	1.36	3.1	2.27
26.6	9.1	6	5.3	1.1	3.8	2.5
25.9	8.24	5.69	5.17	1.1	2.37	2.15

球速	斜率	
65.3	n2	0.54
56.0	n2	0.67
51.9	n2	0.76
40.9	n2	1.09
35.9	n2	0.88
30.0	n2	0.68
26.6	n2	0.95
25.9	n2	1.42

球速	斜率	y 軸對球 心截距	
65.3	n3	0.96	18.1
	n4	1.02	27.1
56.0	n3	1.07	15.7
	n4	1.07	22.3
51.9	n3	1.15	16.3
	n4	1.03	20.2
40.9	n3	0.75	4.9
	n4	0.68	8.6
35.9	n3	0.92	6.4
	n4	0.89	10.4
30.0	n3	0.96	5.0
	n4	0.86	8.1
26.6	n3	0.75	4.8
	n4	0.93	15.7
25.9	n3	1.02	5.8
	n4	1.00	10.6

※ 實驗時背景值：
水深 5.1cm
球直徑 4.8cm
吃水深 2.4cm

三、實驗三：深度變因實驗

※ 實驗時背景值：球直徑 4.8cm、吃水深 2.4cm、球速 50.59cm/s

水深(cm)	球心與貫軸 中心距離 a(cm)	半貫軸 長度 P(cm)	半共軛軸 長度 Q(cm)	P/Q 漸進線 斜率絕對值	斜率 截距		
					n2	n3	n4
3.80	33.31	30.26	11.47	2.64	n2	0.85	≈ 0
					n3	1.17	10.65
					n4	1.29	19.79
5.40	32.45	29.13	11.02	2.64	n2	0.98	≈ 0
					n3	1.08	14.67
					n4	1.08	23.40
7.50	32.76	28.86	11.76	2.45	n2	0.82	≈ 0
					n3	1.16	16.02
					n4	1.12	24.66
10.00	31.38	27.23	10.62	2.57	n2	0.90	≈ 0
					n3	0.96	12.28
					n4	1.00	22.80

四、實驗四：吃水深度變因實驗

(一) 吃水深度變因實驗一：吃水深度 ≥ 球半徑(2.4cm)

水面所截面半徑 (cm)	球心與貫軸 中心距離 a(cm)	半貫軸 長度 P(cm)	半共軛軸 長度 Q(cm)	Q/P 漸進 線 斜率絕對 值	兩直線夾角		
					n2	n3	n4
1.59	9.95	8.61	4.24	0.492	n2	40.4	0.849
					n3	44.7	0.989
					n4	44.7	0.989
2.08	11.8	10.2	5.26	0.517	n2	40.6	0.856
					n3	44.6	0.986
					n4	45.0	0.997
2.33	10.1	8.64	4.03	0.467	n2	38.3	0.787
					n3	41.5	0.883
					n4	50.6	1.22
2.40	10.1	8.88	4.78	0.539	n2	45.1	1.00
					n3	48.1	1.11
					n4	52.7	1.31

※ 實驗時背景值：球直徑 4.8cm、水深 8.2cm、球速 31.9cm/s

(二) 吃水深度變因實驗二：吃水深度 \leq 球半徑(2.4cm)

特別注意到，我們這裡都替球心與貫軸中心距離 a 、半貫軸長 P 、半共軛軸長 Q 除上一個水面所截面半徑 r' ，我們發現這四筆數據得到的量值是接近的。

水面所截面 半徑 r' (cm)	球心與 貫軸 中心距 離除以 半徑 a/r'	半貫軸 長度除 以半徑 P/r'	半共軛 軸 長度除 以半徑 Q/r'	Q/P 漸 進線 斜率絕 對值	兩直線夾角		$\tan \frac{\theta}{2}$
					之一半 $\frac{\theta}{2}$ (度)		
2.40	11.4	10.1	3.68	2.76	n2	38.5	0.796
					n3	44.8	0.993
					n4	43.7	0.955
2.39	11.0	9.62	4.19	2.30	n2	39.6	0.827
					n3	43.2	0.938
					n4	47.8	1.10
2.18	11.3	9.92	4.05	2.45	n2	40.7	0.859
					n3	41.7	0.890
					n4	53.0	1.33
1.88	11.5	9.55	4.42	2.16	n2	39.8	0.831
					n3	37.6	0.769
					n4	57.3	1.56

※ 實驗時背景值：球直徑 4.8cm、水深 8.2cm、球速 44.1m/s

六、實驗五：球直徑變因實驗

※實驗時背景值：水深 8.2cm、球速 31.9cm/s、吃水深皆球的半徑長

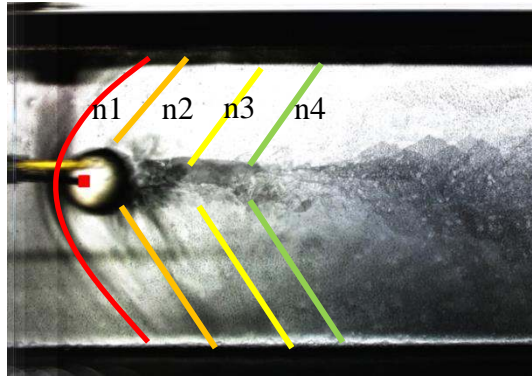
球直徑 (cm)	球心與 貫軸 中心距 離 a(cm)	半貫 軸 長度 P(cm)	半共軛軸 長度 Q(cm)	Q/P 漸進線 斜率絕對值	兩直線夾角		
					之一半 $\frac{\theta}{2}$ (度)	$\tan \frac{\theta}{2}$	
2.00	4.20	3.68	1.85	0.503	n2	41.7	0.890
					n3	43.6	0.990
					n4	44.7	0.950
2.80	6.24	5.40	2.83	0.524	n2	45.5	1.02
					n3	44.2	0.971
					n4	41.5	0.884
4.80	9.73	8.25	4.04	0.489	n2	35.3	0.707
					n3	37.3	0.761
					n4	37.4	0.764
5.50	11.1	9.19	4.48	0.487	n2	36.6	0.741
					n3	37.9	0.777
					n4	37.9	0.777

七、實驗六：等截面圓柱實驗

※實驗時背景值：水深 5.1cm、球直徑 5.5cm、吃水深 2.75cm

水深 (cm)	球心與 貫軸 中心距 離除以 半徑 a/r'	半貫軸 長度除以 半徑 P/r'	半共 軛軸 長度 除以 半徑 Q/r'	P/Q 漸進線 斜率絕對值	斜率	截距	
49.2	14.3	12.4	11.2	2.58	n2	0.98	≈ 0
					n3	0.95	8.18
					n4	0.93	15.53
64.0	23.9	20.7	19.6	3.52	n2	0.77	≈ 0
					n3	0.80	8.53
					n4	0.75	16.29
56.7	20.2	17.4	16.1	3.06	n2	0.89	≈ 0
					n3	1.04	11.53
					n4	1.00	22.94
28.2	5.3	4.6	3.5	1.59	n2	1.38	≈ 0
					n3	1.45	1.65
					n4	1.49	5.88

陸、討論



• 圖 17 n1~n4 參考圖

一、討論一：使用鋁粉的影響性評估

我們使用了鋁粉，此時卻又多產生了一個問題，究竟鋁粉會不會影響實驗結果呢？於是我們用同樣的背景值，在墨水中及鋪上薄薄一層鋁粉的水中，做了兩次實驗，並加以比較後可發現幾乎是毫無影響。

※實驗背景值：球速 51.9cm/s、球直徑 4.8cm/s，球吃水深 2.4cm/s、水深 5.1cm

	a/r	p	q	p/q	n2 斜率	n3 斜率	n3 截距	n4 斜率	n4 截距
鋁粉	13.4	11.5	4.36	2.64	0.88	1.15	16.3	1.03	20.2
墨水	13.1	11.1	4.72	2.35	0.91	1.19	14.5	1.09	19.6

二、討論二：Wake 臨界條件、球速變因

(一) 對於 n3,n4：擴充的 Kelvin 模型

1. Kelvin 理論未考慮之因素：

在前面我們提到(參見 p.6 p.7)，Kelvin 提出了型態相當符合大尺度下 wake 的理論，但我們發現他導出的圖形卻和我們的實驗結果不太吻合，歷經多次思考與嘗試，我們發現在我們的小尺度實驗，他的理論少考慮了以下四點：

第一點：「Kelvin 假設 wake 是由一群波速範圍無限的波來形成的。」但我們發現，實際上這在物體移動速度為高速的情況下才會成立。因高移動速度時，波速低於臨界波速的波產生的波段佔整體 wake 的比例極小，而產生漸近趨近忽略掉臨界波速的效果。因此我們將在我們的理論中，重新納入波速下界進行討論。事實上，後面的實驗也可發現這點在低速區，波速下界具有不可忽略的作用。另外一提，wake 也很可能具有波速上界，關於波速上界，我們的實驗未能掌握到絕對的證據，但我們會在展望的理論

部分加以推論，但在本討論中暫視不存在。

第二點：「Kelvin 假設波源是一個點。」然而在低觀測尺度下，其實物體大小產生的效應會變得不可忽略。

第三點：「Kelvin 只有考慮波包中心處於疊合狀態時的位置，也就是只考慮波以群速度前進的圖形。」然而在未前進到波包中心產生疊合的區域，只要部分波峰能到達，在低觀測尺度下，其實並沒有那麼不容易看見，也應該納入考量。

第四點：「Kelvin 只有考慮相鄰兩波速產生的波相長干涉產生的波紋。」實際上在低觀測尺度下，單一波速的波的波峰，其強度雖然會低於 Kelvin 在大觀測尺度下所考慮的範圍，但是在低觀測尺度下卻是不容忽略的。

2. Kelvin 理論加入第二點修正：

若先考慮第二點，對於一個半徑為 r 的圓形波源，我們只需把性質 A、B 改成 A'、B' 並帶入性質 C，

$$\begin{aligned} x &= v't - (vt + r) \sin\beta && \text{性質 A'} \\ y &= (vt + r) \cos\beta && \text{性質 B'} \\ \frac{dy}{dx} &= \tan\beta && \text{性質 C} \end{aligned}$$

我們會得到下述等式

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\left(\frac{\sin\beta \cos\beta}{2}\right) \frac{dt}{dx} + \frac{\cos^2\beta - \sin^2\beta}{2} t - r \sin\beta}{\left(1 - \frac{\sin^2\beta}{2}\right) \frac{dt}{dx} - t \sin\beta \cos\beta - r \cos\beta}$$

接下來發現和 r 相關的項會被消掉，於是我們可以得到相同的

$$t(\beta) = T \sin\beta$$

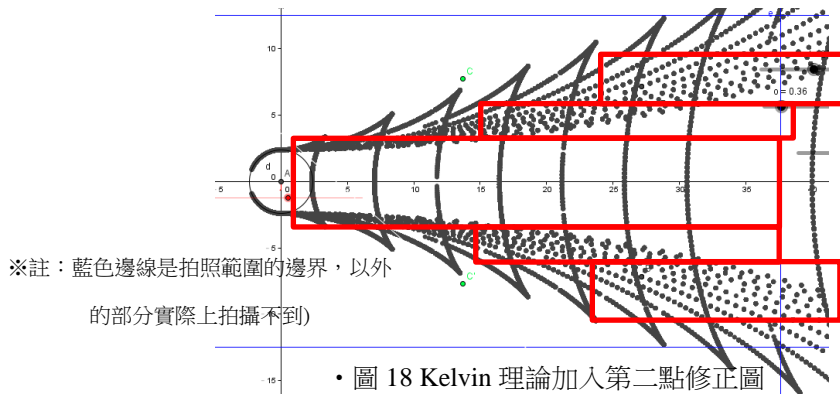
再帶回性質 A'、B' 得到參數式

$$(x, y) = (v'T \sin\beta (1 - 0.5 \sin^2\beta) - r \sin\beta, 0.5v'T \sin^2\beta \cos\beta + r \cos\beta)$$

此時考慮 $\sin\beta = 1$ 時 $(x, y) = (T \sin\beta / 2 - r, 0)$ ，一樣是由 $v = v'$ 的波前所產生，由於看見的波應同為波峰而使得(對於此波，圓形波源的發波點應在 $(-r, 0)$)

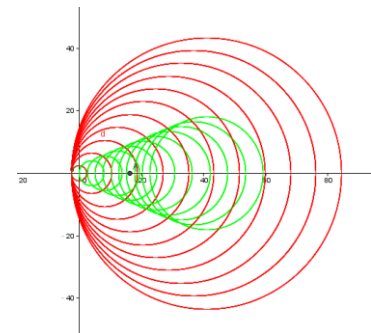
$$\frac{v'T \sin\beta}{2} = m \frac{2\pi v'^2}{g} \quad (5)$$

而得到以下圖形(圖 18)。



3. Kelvin 理論加入第一點修正

然而實際觀測後我們會發現到，圖中圈選的部分是沒有出現的，若只考慮波源大小的因素，尚無法解釋這個現象的成因，因此我們再考慮第一點，假設波速範圍存在著下界。我們直接考慮波疊合產生的波前包絡線，也就是如同前面理論推導所表述的下式

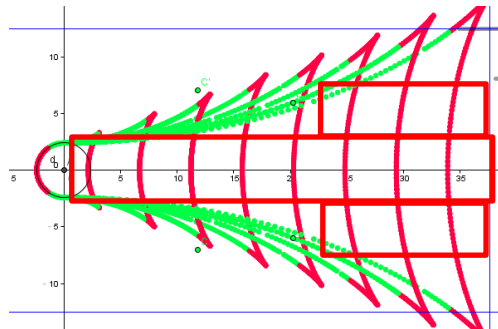


$$\pm \sqrt{\frac{v^2}{v'^2 - v^2}} x \pm r \sqrt{\frac{v'^2}{v'^2 - v^2}} = y \dots (3)$$

其中式子存在一個有解的討論範圍(也就是實際可看見疊合波的範圍)， $v \leq v'$ ，我們發現對於由 $v = v'$ 到 $v =$ 波速下界之間連續變化的 v ，可得到在圖 19 的紅色與綠色邊界之間存在著續的包絡疊合線，我們謂之斜坡帶，其中綠色邊界為 $v =$ 波速下界產生的包絡線，紅色邊界為 $v = v'$ 產生的包絡線。

對應到真實圖形上，我們可以發現而其實圖中綠色標界部分就是們的 n_1 。從數據上來看，我們可在下一小節中印證波速下界接近 15.75cm/s，然而我們也能由(3)式的結果推論若要產生包絡線的最低速度必須令物體移動速度大於波速下界，也就是說波速下界和速度邊界必須是相同量值，而速度邊界做出的結果恰好是 15.75cm/s。而這一說法還可由接近速度邊界時測得波長帶入深水波公式，得出的波速確認它的確具有波速含意。

闡述了 n_1 本身就是這個考量的最佳證據之後，我們再把上下界作為 $\sin\beta$ 取值的上下界，而得到以下圖形(圖 20)。



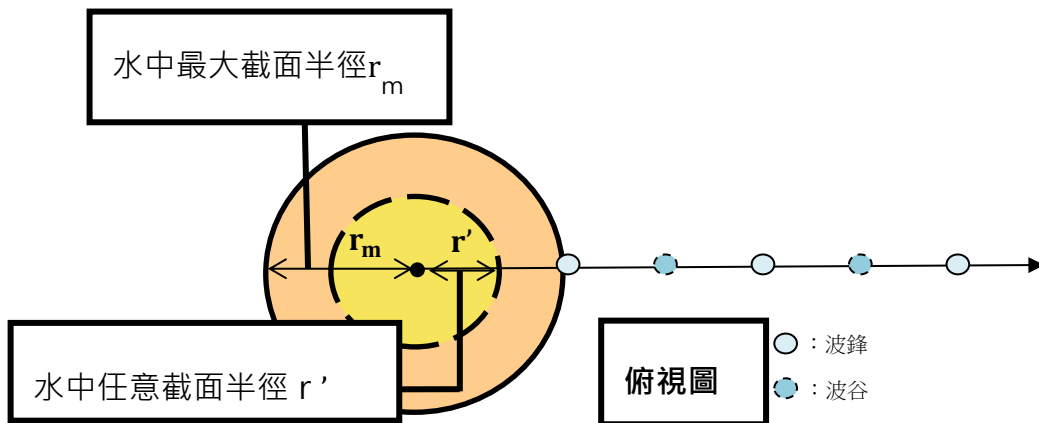
• 圖 20 Kelvin 理論加入第一點修正圖

其中綠色部分是波速小於波速下界的波產生的，因此實際上只有圖中的紅色部分看得到。圖中紅框部分稱作船舷波，由於船後方會有擾動的水流與渦街，並不容易觀察，因而不在此我們的討論範圍內。

4. Kelvin 理論加入第四點修正：

我們發現理論上 n_3 及 n_4 的範圍皆落在攝影範圍內且長度未延伸到拍攝邊緣(即水槽壁緣)，而實際上 n_3, n_4 都有觸碰到拍攝邊緣，因此圖中 n_3, n_4 紅色部分的延伸的長度太短，於是我們要再多考慮第四點，也就是考慮單一波速的波峰疊合，而且該波峰位於波前包絡線上，我們會發現如果引用以下這個有趣假設，將出現完整的「波峰疊合直線」。

我們假設 wake 的波動來源來自，物體在水中移動時，被水流由四面八方拍擊，在物體「內部」產生的振動，再傳入水中，形成波動。我們認為不同波速的水波是由物體內部水下不同層截面分別產生的，如下圖(圖 21)所表示：



• 圖 21 不同截面波動來源示意圖

而對於一個球體，我們可以取其任意截面中的半徑 r' 來表示其截面的位置，而我們又由吃水深變因實驗結論得知(請參照 p.26)，唯有將吃水深降至半徑以下才會產生相對巨幅的影響實驗結果，可參考圖 27，在此我們取的是球體水下最大截面，令其半徑為 r_m 。

另外一點由於我們此時討論各層的差異，我們發現要令導出的理論符合實驗結果各層

之間還要一個相位差，令

$$\text{相位差(對 } r = 0 \text{ 點而言)} = j\lambda \frac{r'}{r}$$

$$\text{相位差(對 } r = 0 \text{ 點而言)} = j\lambda \frac{r'}{r}$$

j 是和物體材質相關的係數，在我們實驗中，歷經嘗試後得到 $j=0.23$ 。

對於某個 r' 值而言，取自發出波後第 m 個 ($m>0$) 波峰，令其波峰處 x 方向座標為 x ，則有下式 ($m+j$) 的原因是因為要令 $r = r'$ 時 $vt = m\lambda$ ，即以 $r = r'$ 為波峰， $r = 0$ 處應在距波谷 $j\lambda$ 處

$$(m + j)\lambda = j\lambda \frac{r'}{r} + vt$$

$$t = \frac{v'x - vr'}{v^2 - v'^2}$$

將上兩式解聯立可得 $r'(x)$ 再帶入原直線疊合波方程式 (只取其中一條線作代表)

$$\sqrt{\frac{v^2}{v'^2 - v^2}}x - r' \sqrt{\frac{v'^2}{v'^2 - v^2}} = y \text{ (取正斜率即 } y \text{ 為負值的部分)}$$

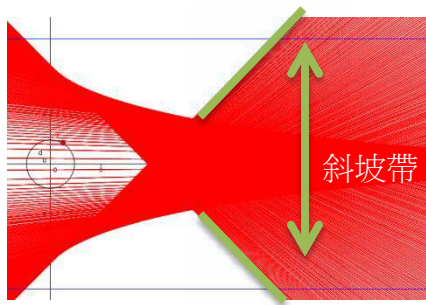
可消去 r 得到 x 與 y 的新直線方程式 (具有截矩和斜率正負號相反之特質)

$$\left(\sqrt{\frac{v^2}{v'^2 - v^2}} - \frac{\sqrt{\frac{v'^2}{v'^2 - v^2}}}{\left(\frac{v}{v'} + \frac{v'^2 - v^2}{v'v}\right) j \frac{\lambda}{r}} \right) x - \frac{(m + j)\lambda \sqrt{\frac{v'^2}{v'^2 - v^2}}}{\left(j \frac{\lambda}{r} + \frac{v^2}{v'^2 - v^2}\right)} = y \dots (6)$$

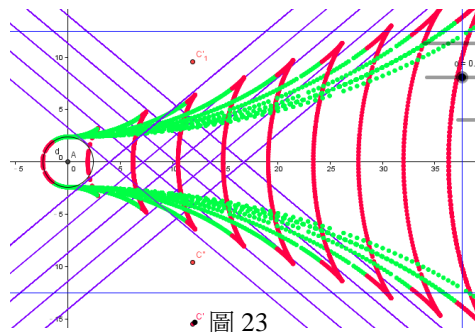
其中 n_3 對應到 $m=1$ ， n_4 對應到 $m=2$ (在速度極低時，可能對到 $m=2$ 及 $m=4$ ，只要能在欲延伸 Kelvin 的 wake 附近並不限 $m=1,2$ 只是大致如此，因此我們稱**第一次兩線疊合為 A1**，**第二次為 A2**，**以此類推**) 以此類推，且對 y 方向做線對稱另一條線也應是相同形式，僅把上式 y 改成 $-y$ ，我們可以發現對不同的 v 或 r' 而言，有不同的疊合直線，我們可以發現，對同一個 m 而言，這 v 或 r' 的變化可形成一個連續的斜坡帶，如圖 22，而其邊界 (紅色線部分) 正好是 v =速度下界時的數值，我們稱此條直線為「波峰直線」。

此時，我們會發現 n_3, n_4 位置的波峰直線，恰好會和加入物體大小修正的 Kelvin 的模型圖

形以發現如圖 23。



• 圖 22



• 圖 23

圖中紫線，為波峰直線延伸出的直線。

我們再與實驗數據(理論值我們取波峰直線與 Kelvin 的疊合，也就是截距和斜率都取兩者之算術平均值，由於兩者相當接近，用這個方法應該多能表現出前者延伸後者後的中線位置)互相對照，如下二表：

		y 軸和圓心 截距	Kelvin	波峰直線	理論平均	誤差絕對 值
65.3	n3	18.1	19.38	17.1	18.2	0.005
	n4	27.1	不存在	24.7	24.7	0.088
56.0	n3	15.7	16.18	15.5	15.9	0.008
	n4	22.3	23.38	22.5	22.9	0.027
51.9	n3	16.3	12.78	14.7	13.7	0.159
	n4	20.2	22.31	21.3	21.8	0.078
40.9	n3	4.9	3.31	6.5	4.9	0.002
	n4	8.6	7.74	11.8	9.8	0.131
35.9	n3	6.4	6.33	5.6	5.9	0.067
	n4	10.4	9.73	10.1	9.9	0.046
30.0	n3	5.0	5.25	4.3	4.8	0.044
	n4	8.1	7.16	7.8	7.5	0.075
26.6	n3	4.8	4.29	3.5	3.9	0.192
	n4	15.7	17.15	12.0	14.6	0.076
25.9	n3	5.8	6.31	6.0	6.1	0.068
	n4	10.6	10.34	11.3	10.8	0.027
					平均誤差	0.068367

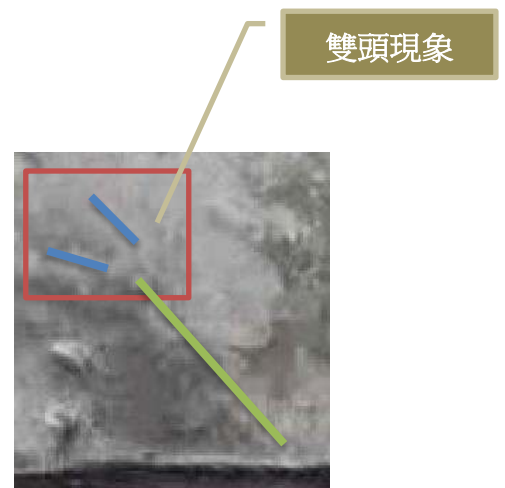
		斜率	Kelvin	波峰直線	理論平均	誤差絕對值
65.3	n3	0.96	1.2	0.95	1.08	0.125
	n4	1.02	不存在	0.95	0.95	0.071
56.0	n3	1.07	1.01	1	1.01	0.056
	n4	1.07	0.99	1	0.99	0.070
51.9	n3	1.15	1.21	1.02	1.12	0.033
	n4	1.03	1.04	1.02	1.03	0.006
40.9	n3	0.75	0.91	1.04	0.98	0.308
	n4	0.68	0.80	1.04	0.92	0.365
35.9	n3	0.92	0.88	1.02	0.95	0.030
	n4	0.89	0.81	1.02	0.92	0.029
30.0	n3	0.96	1.03	0.94	0.99	0.023
	n4	0.86	0.90	0.94	0.92	0.068
26.6	n3	0.75	0.86	0.86	0.86	0.144
	n4	0.93	1.05	0.86	0.95	0.023
25.9	n3	1.02	0.86	0.84	0.85	0.169
	n4	1.00	0.83	0.84	0.83	0.166
					平均誤差	0.105

另外我們注意到在這個實驗中我們觀測到的 n3、n4，都是對應到 A2、A3 居多(除 26.6cm/s 的數據比較接近 A1、A2)

其實這一點還可由實際圖形略現端倪，如圖 24，

這非常有可能由兩者疊合的部分缺陷所產生，偶爾可見，遇到這種狀況，我們不論未完全疊合的部分或圖中綠色直線疊合較完全部分都加以做點求 n3 或 n4 的回歸直線，因為在回歸過程中已作了接近理論終將 Kelvin wake 及波峰直線取平均的作用。

而以上這低尺度下的修正理論，我們稱它作「波峰直線 Kelvin 理論」。



• 圖 24 雙頭現象示意圖

(二) n_2 的理論：

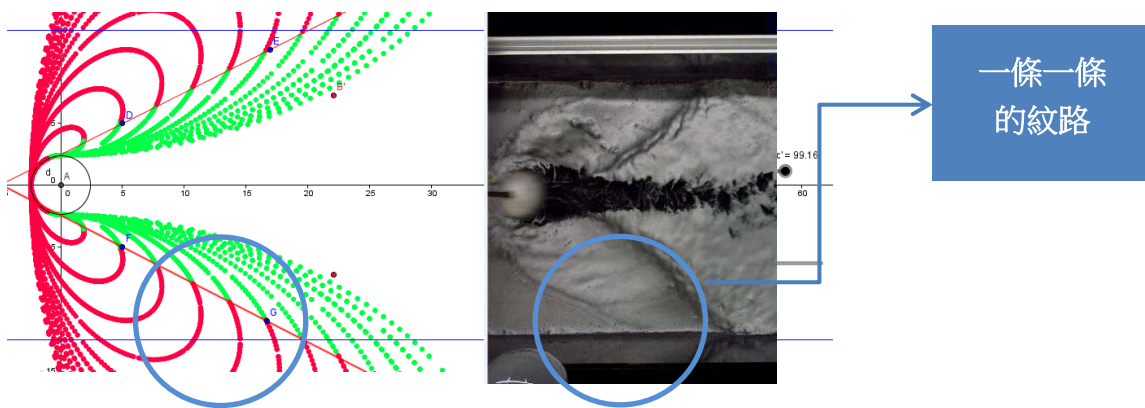
續 n_3 、 n_4 的理論，我們發現 n_2 並無法用上述理論解釋，我們再考慮第三點，也就是加上相速度產生的圖形，其參數式如下

$$(x, y) = (v'T \sin\beta (1 - \sin^2\beta) - r\sin\beta, v' T \sin^2\beta \cos\beta + r\cos\beta)$$

由於上述參數式少了 0.5，也就是可推論(5)式改為如下

$$v'T \sin\beta = m \frac{2\pi v'^2}{g}$$

可作圖如下，我們認為 n_2 是由相速度產生的連續波帶，我們稱之相速度斜坡帶的邊界，而這邊界是由波速下界所產生，如圖 25，紅色部分是波速大於波速下界所產生的，綠色則反之。



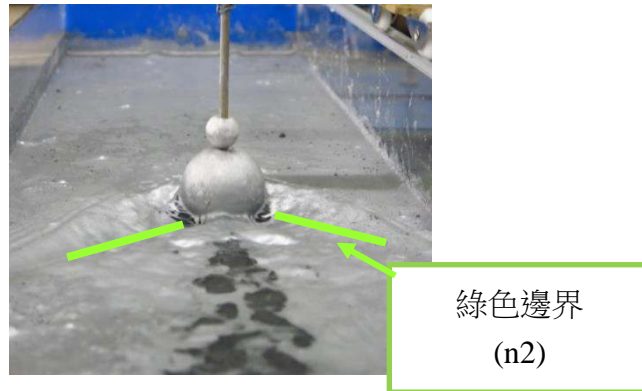
• 圖 25 n_2 理論與實際對照圖

可和實際圖形比較

會發現圖中綠色與紅色部分的邊界，我們把它與 n_2 對照，做成下表：

n_2	斜率	理論值	誤差
65.3	0.7	0.223	0.674
56.0	1.0	0.330	0.653
51.9	1.1	0.335	0.696
40.9	0.5	0.500	0.072
35.9	0.7	0.500	0.250
30.0	0.8	0.668	0.120
26.6	0.8	0.808	0.022
25.9	0.8	0.821	0.016
後五個速度的平均誤差			0.0962

會發現在低速區相當接近，然而在高速區卻有不可避免的誤差，這點我們未完全找到理由，實際上可透由設定波速上界來解釋在高速區的偏差(詳見展望理論)，但就低速區而言，我們能肯定說 n_2 是相速度斜坡帶的邊界，這點亦可由側視圖觀察而得



• 圖 26 n_2 實際觀測圖

(三) 對於 n_1 :

我們由上上節可知， n_1 理應是斜坡帶的包絡直線邊界，然而實際上我們測得的 n_1 卻接近雙曲線，關於原因，我們逐步由實驗結果推導如下：

1. 找 n_1 的經驗式：

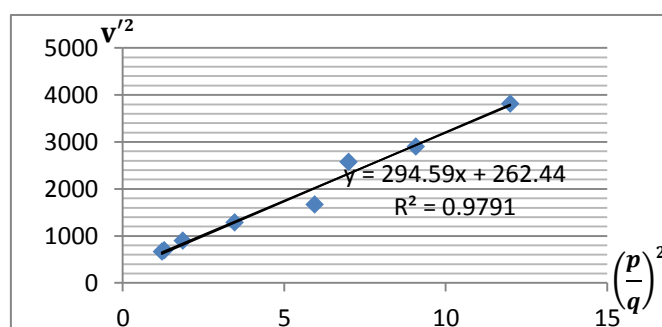
我們假設直線的疊合波 n_1 的 q/p (漸進線斜率)和由理論假設中式(3)得到的斜率相等，而由上上小節，可得知這條線是斜坡帶的邊界，而應取「 v =波速下界 16.2」，則

$$\frac{q}{p} = \sqrt{\frac{v^2}{v'^2 - v^2}}$$

其中 v 為波速， v' 為球，由此可以得到

$$v^2 \left(\frac{p}{q}\right)^2 + v^2 = v'^2 \dots (7)$$

而實驗得到兩者的分布圖如下，設定截距為 v^2

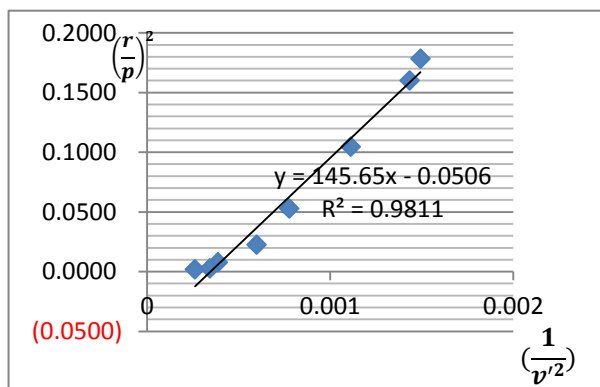


其回歸線是將原回歸線函數之截距，調整為實驗一測得 v^2 後的函數，其中 v 波速下界為 16.2cm/s，再由此函數導回 y 值後開根號，得到的 $v=17.16\text{cm/s}$ ，若 v 為速度下界將和速度邊界測得的下界相當接近。

我們還發現，根據其表，此雙曲線的 r/p 和球速 v' 具有以下性質

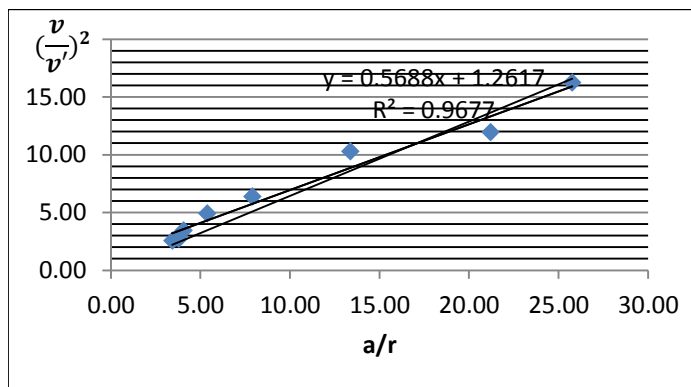
$$\left(\frac{r}{p}\right)^2 = \frac{s}{v'^2} - b \dots \dots (8)$$

其中 r 為圓球半徑， p 為半貫軸長， b 、 s 為一常數且 s 為其斜率，其中 $b=-0.0506$ 而其斜率開根號之值 $\sqrt{s} = 12.06\text{cm/s}$ ，與實驗一得到之 $v = 16.2\text{cm/s}$ 相當接近。這 \sqrt{s} 相當有可能就是波速下界。



我們更由數據發現，貫軸中心與球心距離 a 和球半徑 r 的比值為

$$\frac{a}{r} \approx 0.5 \left(\frac{v'}{v}\right)^2 \dots (9) \text{ (且 } v = 16.2)$$



最後由式(7)、(8)，我們可以得到

$$\left(\frac{q}{r}\right)^2 = \frac{v'^2}{v'^2 - v^2} \left(\frac{v^2}{v^2 - bv'^2}\right)$$

將上式代入式(8)後，與式(9)合併，可以得出疊合波 n1 的雙曲線和速度下界相關的經驗函數式

$$1 = \frac{\left(x - 0.5\left(\frac{v'}{v}\right)^2\right)^2}{\left(\frac{v'^2}{v^2 - bv'^2}\right)r^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{v^2}{v'^2 - v^2}\left(\frac{v'^2}{v^2 - bv'^2}\right)r^2\right)} \dots (10)$$

由(10)式可以看出當 $v' \geq v$ 疊合波段才會出現的特質。

2.找 n1 的成因：有了 n1 的經驗式，卻難以只由此看出 n1 的成因，且經驗式還有一定的誤差，我們後來發現由實驗值就能驗證我們的成因假設：

我們由「**疊合直線加上前端被改成半徑為間距半徑的圓形**」這個假設來探討雙曲線的成因，如下：

我們發現在包絡線前端球有個由波源傳出的圓形波帶，是由於 $x > x_0$ 而未能有波疊合出直線包絡線的區段由於康達效應引來的水流而產生，而我們認為這圓形波帶由於是波源發出的，因此將以(a-p)即雙曲線頂點和圓心的間距為半徑，我們發現若把該區段和直線包絡線區段連在一起，似乎能形成一條半貫軸長 p，半共軛軸 q 的近似雙曲線。

於是，首先我們認為該條雙曲線 q/p 應該要等於包絡直線正斜率，即

$$\left(\frac{q}{p}\right)^2 = \frac{v^2}{v'^2 - v^2}$$

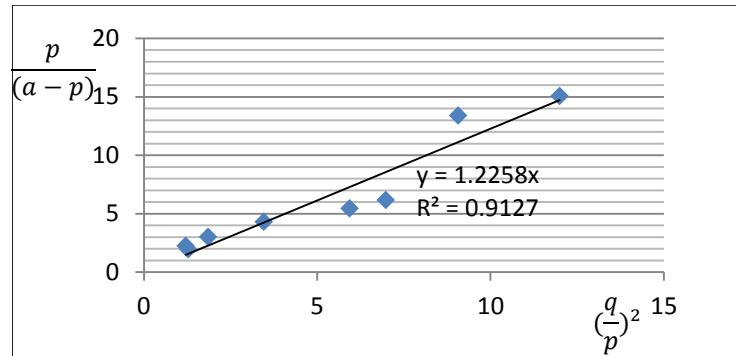
上式在上節中已有實驗驗證，另外該條雙曲線 y(x)在(x,y)=(-p,0)處的曲率半徑設為 r_i ，而

$$\frac{1}{r_i} = \left| \frac{\ddot{y}}{(1 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}} \right|$$

帶入 y(x)並代入(x,y)=(-p,0)， r_i 帶入 a-p 則

$$\frac{p}{(a-p)} = \left(\frac{q}{p}\right)^2$$

實驗（二）數據對照如下



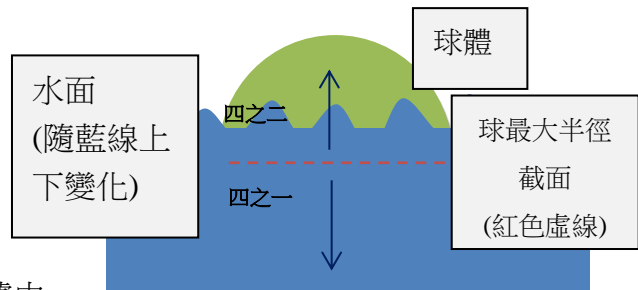
斜率相當接近理論預測的 1。因此 n_1 實際上並不是雙曲線，而是由直線前端被半徑為 r 的圓形連在一起的近似結果，而由我們實驗測得的雙曲線參數能展現這個特質。

三、 討論三：深度變因

由實驗結果我們可以得知，深度對整體的並無影響，可能是因為高度的改變程度並未使適用的深水波速公式而有所改變造成。

四、 討論四：吃水深度變因

由實驗四之一的數據，我們可以發現水面切齊半徑上方時，對各項數據的變化並不顯著；而由實驗四之二，水面切齊半徑下方時，我們可以發現四筆數據中，



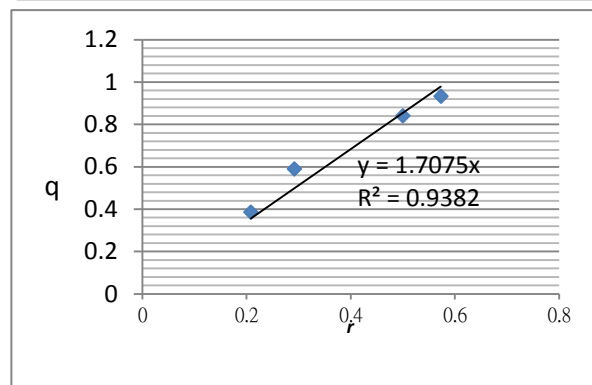
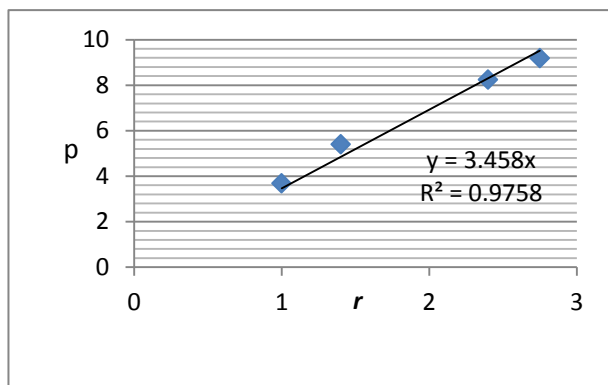
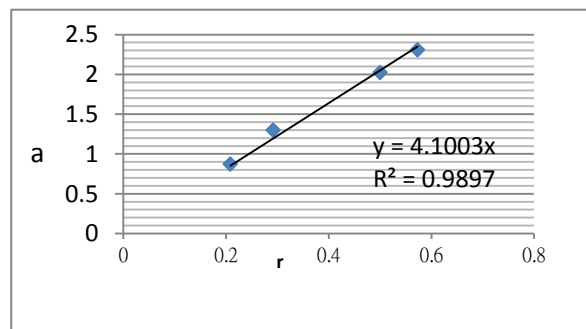
• 圖 27 吃水深變因示意圖

a/r' 、 p/r' 、 q/r' 皆是接近的，我們將發現這一個結果和討論五是相同的，也就是縮減最大水中截面半徑的效果在 n_1 的影響上，是和縮減球半徑的效果是一致的。歸結所有結果，我們認為球的最大半徑截面在這共八個實驗才是決定散發出之 n_1 波紋形態的最大原因，而由討論二可知因為它才是真正連續波帶的邊界。並且由四之一 $n_2.n_3.n_4$ 斜率變化不如四之二明顯可知，決定期的主要截面似乎也是水中最大截面。

五、 討論五：球直徑變因

由這四筆資料可以發現相當切合討論二之雙曲線實驗式，而且充分表達該系統的幾何結構具有等比例縮放的特色。

- (一) p/q 平均值為 0.500，理論值為 0.535
- (二) a/r 理論值：4.24，實驗值：4.10(右上)
- (三) p/r 理論值：3.36，實驗值：3.46(左下)
- (四) q/r 理論值：1.80，實驗值：1.70 (右下)



六、討論六：圓柱體變因

n1 部分可參照下表是把速率變因實驗，n1 部份把 a,p,q 改成 a/r，p/r 及 q/r 的結果，稍加將此表與實驗二其餘和實驗六的圖表，可發現就這部分而言，表中的數值幾乎沒有改變，也就是說討論一對 n1 的討論，無論是否等截面都依然適用，因為最大截面並不因此事實而有改變，所以此事實不影響和最大截面相關的 n1。n2 的部分也差異較小，然而由於速度多屬高速區，理論誤差較大，可參見展望理論，加入速度上界後的討論。

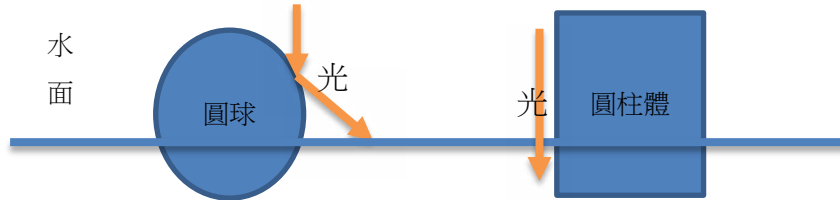
球速 (cm/s)	球心與貫軸 中心距離除以 半徑 a/r'	半貫軸 長度除以半 徑 P/r'	半共軛軸 長度除以半 徑 Q/r'	P/Q 漸進線 斜率絕對值	P/R (P/球半徑)	Q/R (R/球半徑)
65.3	25.75	58.0	16.7	3.5	25.8	24.2
56	21.21	47.3	15.7	3.0	21.2	19.7
51.9	13.38	27.6	10.5	2.6	13.4	11.5
26.6	3.79	6.00	5.30	1.1	3.80	2.50

另外 n3,n4 的數據，和理論值對照的結果發現於圓柱體是 A1、A2 為 n3.n4，而非如圓球是 A2、A3 為 n3.n4(如下表)，這代表可能是以圓球做實驗時，A1 消失導致原本是 n4.n5 的 A2.A3 變成 n3.n4，然而我們其實認為這一點和攝影角度相關，之所以圓球 A1 看不清楚是因為我們使用的是自動曝光，球體表面易產生散射光打到鄰近水面，導致相機把鄰近水面的曝光調低，而看不清楚處於較鄰近水面的 A1。圓柱體則沒有這個問題，因而

A1 得以見得(如圖 28)。

波	斜率	Kelvin	波峰直線	理論平均	誤差絕對值
65.3	n3	8.18	不存在	10.35	0.266
	n4	15.53	16.84	17.8	0.147
56.0	n3	8.53	8.5	9.32	0.045
	n4	16.29	15.26	15.5	0.055
51.9	n3	11.53	9.68	8.76	0.200
	n4	22.94	23.81	23.0	0.020
26.6	n3	1.65	1.57	3.57	0.560
	n4	5.88	5.2	6.5	0.007
				平均誤差	0.163

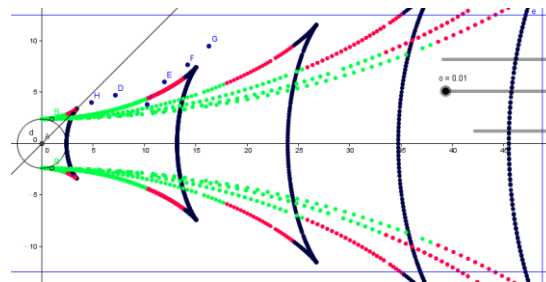
波	斜率	Kelvin	波峰直線	理論平均	誤差絕對值
65.3	n3	0.946	不存在	1.07	0.131
	n4	0.929	1.04	1.07	0.136
56.0	n3	0.804	0.91	1.12	0.265
	n4	0.745	0.79	1.12	0.279
51.9	n3	1.04	1.09	1.14	0.070
	n4	1	1.11	1.14	0.124
26.6	n3	1.45	0.67	0.90	0.458
	n4	1.49	0.82	0.90	0.424
				平均誤差	0.236



• 圖 28 A1 消失原因示意圖

柒、結論展望與應用

一、理論展望：波速上界理論

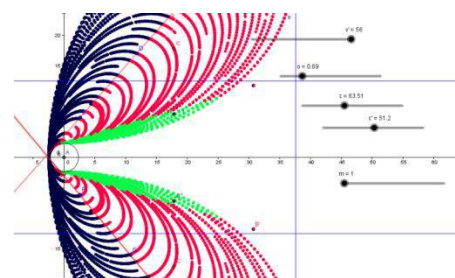


• 圖 29 波速上界理論圖

上圖的綠色部分是低於波速下界時產生的圖形，灰色部分是高於波速上界產生的圖形。如果存在著波速上界，也就是說除了綠色部分不可見外，黑色部分也會變得不可見，根據我們的理論將可令船舷波的未出現變為更加合理，理論上也將出現一個波型臨界速度，低於該速度完整的船舷波才會出現，我們還可給出紅色部分範圍，即下式

$$\frac{v_{\text{下界}}}{v'} \leq \sin\beta \leq \frac{v_{\text{上界}}}{v'}$$

可發現隨物體移動速度上升 Kelvin wake 會慢慢消失，最後只剩波峰直線可看，也就是將造成 n3、n4 圖形較不清楚。



• 圖 30 n2 波速上界理論圖

另外，我們在本文有提出有關於高速區不符合 n2 的相速度理論的問題，其實可用速度上界加以解釋，波速上界會形成額外的斜坡帶邊界(圖 30 的灰、色部分交界)，其由於其邊界比高速區波速下界造成的邊界(紅、綠色部分邊界)還要靠近斜坡帶的頂端(可參考圖 26)，高度差較大因而較為清楚。

(綠色部分是低於波速下界時產生的圖形，
灰色部分是高於波速上界產生的圖形)
右方是數據對照的結果。(假設速度上界=42cm/s)

	斜率	理論值	誤差
65.3	0.68	0.823	0.205
56.0	0.95	1.140	0.198
51.9	1.08	1.353	0.253

三、結論

(一) 實驗時觀察到四條主要而清楚的 wake，n1.n2.n3.n4。理論上，一個圓形物體在水中移動，與其相對運動的水流會受擾動而沿圓周的離心方向產生圓形波，而我們以 Kelvin 假設這波動包含不同波速的波，而以點波源導出的大尺度模型為基礎，加入了小尺度額外需要考量的的大小、波速下界、單波速疊合波峰而導出修正的解釋，而能定量上找到能契合我們 n3.n4 的結果。其為下二式的疊合，稱為波峰直線 Kelvin 理論。

$$\left(\sqrt{\frac{v^2}{v'^2 - v^2}} - \frac{\sqrt{\frac{v'^2}{v'^2 - v^2}}}{\left(\frac{v}{v'} + \frac{v'^2 - v^2}{v'v} j \frac{\lambda}{r}\right)} \right) x - \frac{(m+j)\lambda \sqrt{\frac{v'^2}{v'^2 - v^2}}}{\left(j \frac{\lambda}{r} + \frac{v^2}{v'^2 - v^2}\right)} = y$$

$$(x, y) = (v'T \sin\beta (1 - 0.5\sin^2\beta) - r\sin\beta, 0.5v' T \sin^2\beta \cos\beta + r\cos\beta)$$

$$\left[\frac{v'T\sin\beta}{2} = m' \frac{2\pi v'^2}{g} \right]$$

v為速度下界，j為參數，v'物體移動速度，m、m'為大於零的正整數，其取值要另 8.9 兩式跑出圖形位置相近。取值令其產生第一次疊合生成之疊合波稱為 A1，第二次稱 A2……若以圓球做實驗 A1 不會出現，圓柱體則反之，圓球中看不見的原因是因為圓球表面反射影響周圍曝光。

(二) n2 來自考慮了以相速度移動的波形產生的效應，而為其波形所生成斜坡帶的邊界。

(三) n1 來自波源的形狀導致水流方向改變，前端改為圓形，而變化為雙曲線，可由 n1 頂端曲率半徑為球半徑，漸進線斜率為包絡直線斜率證實。。另外，實驗還歸納出，波源大小(球直徑長段)改變也伴隨 wake 圖形固定比例放大。

(四) 水槽深度在我們的實驗中可知低尺度內對 wake 的形成影響不大，可能是因為高度的改變並不改變波速公式造成。

(五) 波源沉在水中的最大截面引起之震動才是決定散發出之波紋形態的主要因素。

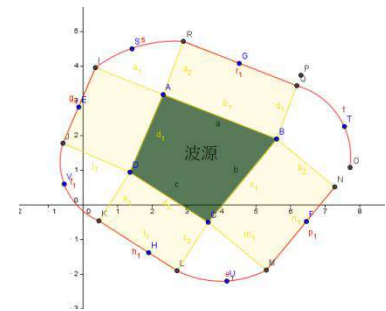
四、應用

(一) 透由我們低尺度下較簡單的模型與實驗結果，我們能對小型物體(如遙控船、魚)等產生的波紋，加以預測，未來希望能加速涉及此類低尺度波紋對其實驗環境的影響的評估。

(二) 由實驗發現低速度下很容易發生線性的馬赫波被曲線化的現象，而難以取其斜率來間接測量波速或移動物的速度。我們發現並證實此時把曲線做近似雙曲線，再得到其漸進線的斜率便能相當精準作為馬赫波斜率而得到我們所需偵測的速度。

(三) 續(二)，我們可望能提供一個工具，作為一個偵測程式的基礎，讓我們只要針對雷達偵測不到的相對微型戰機偵測周圍明顯的聲音(波紋)分布，便能用該程式逆推戰機的速度與形狀。這程式也是我們正在尋求專長人才合作努力的目標。

(四) 不同形狀的波源，對於一個多邊形的物件而言，對一某一波速的波而言，其打出的波將形如圖 31，我們可發現對於一個簡單的多邊形而言，其將有很大一部份波前的部分來自圓形波，這這部分所佔的比例將隨距離而逐漸擴大(因為直線波前的部分周長是固定的，總周長卻隨距離上升)，這意味



• 圖 31 多邊形移動物波前

著我們使用圓形物體作為移動物的雛型是具有代表性的，未來我們將擴展我們原有的理論試圖導引到針對不同形狀移動物更具一般性的理論。

捌、參考資料

一、 Linear Wakes. 2015.3

<http://martian-labs.com/martiantoolz/htmldocs/algorithm/Wakes/wakes.html>

二、 Wake Wikipedia. 2015.3 <http://en.wikipedia.org/wiki/Wake>

三、 Water waves Wikipedia. 2015.3

http://en.wikipedia.org/wiki/Dispersion_%28water_waves%29

四、 Wave Wake Predictor. 2015.3

<https://www.amc.edu.au/maritime-engineering/wave-wake-predictor>

五、 Ship Wakes 2015.5 <http://farside.ph.utexas.edu/teaching/336L/Fluidhtml/node126.html>

六、 摘要圖片來源：Australian Maritime College. 2015.3. <https://www.amc.edu.au/>

【評語】 040102

作品題材為近年來科展作品中較新穎的題材，作者針對船尾波做探討，利用自製簡易器材模擬低尺度下環境(低船速、低水位、觀察範圍小)的物體在水面移動產生 wake 的型態，不論在量測數據與資料呈現方面皆相當完備，充分展現科展的精神，惟作品中假設低尺度環境，但所使用波源尺度與模擬水槽間的關係及波速選擇深水區公式論述似乎略缺說服力。若在作品中加入等加速度運動所形成的 wave 型態，將會使本作品完備性更強。